กราฟและกราฟทิศทางที่สอดคล้องกับคุณสมบัติที่กำหนด

บทคัดย่อ

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ เรากล่าวว่ากราฟ G มีคุณสมบัติ P(m,n,k) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ เซต A และ B ที่เป็นเซตต่างสมาชิกกันของจุดของ G โดยที่ | A | = m และ | B | = n จะมีอีกอย่างน้อย k จุด ซึ่งแต่ละจุดต่างประชิดกับจุดทุกจุดใน A แต่ไม่ประชิดกับจุดใด ๆ ใน B เลย สำหรับกรณี m, n ? 2 ปัญหาการสร้างกลุ่มของกราฟที่มีคุณสมบัติ P (m,n,k) เป็นปัญหาที่ค่อนข้างยาก นับจนถึงปัจจุบัน กลุ่มของกราฟที่มีคุณสมบัติดังกล่าวที่เรารู้จักมีเพียงกลุ่มเดียวคือ กลุ่มของกราฟพาเลย์ Gq ซึ่งนิยามดังนี้ ให้ q เป็นจำนวนเฉพาะกำลังซึ่ง q ? 1 (mod 4) จุดของกราฟ Gq คือสมาชิกของสนามจำกัด Fq จุด a และ b ใด ๆ ประชิดกันก็ต่อเมื่อ ผลต่างของ a และ b เป็นส่วนตกค้างกำลังสอง โดยการใช้ส่วนตกค้างกำลังสูงกว่า เราสามารถสร้างกลุ่มของกราฟกลุ่มใหม่ ซึ่งจะเรียกว่า การวางนัยทั่วไปของกราฟพาเลย์ ในงานวิจัยครั้งนี้เราแสดงว่าสำหรับทุก ๆ จำนวนเต็ม m, n และ k กราฟที่สร้างโดยการใช้ส่วนตกค้างกำลังสามและกำลังสี่ ที่มีจำนวนจุดมากพอ มีคุณสมบัติ P(m,n,k)

กราฟทิศทาง D มีคุณสมบัติ Q(n,k) ก็ต่อเมื่อ สำหรับเซต A ใด ๆ ของจุดของ D ที่มีจำนวน n จุด จะมีอีกอย่างน้อย k จุด ซึ่งแต่ละจุดต่างครอบครองจุดทุกจุดใน A สำหรับ q ? 5(mod 8) ที่เป็นจำนวนเฉพาะกำลังจะนิยามกราฟทิศทางพาเลย์กำลังสี่ D ดังนี้จุดของกราฟทิศทาง Dคือสมาชิกของสนามจำกัด Fq จุด u ครอบครองจุด v ก็ต่อเมื่อ ผลต่างของ u และ v เป็นส่วนตกค้างกำลังสี่ ในรายงานฉบับนี้เราแสดงว่าสำหรับ q ที่ใหญ่มากพอ D มีคุณสมบัติ Q(n,k)

คำหลัก : Paley graph , adjacency property , tournament , Paley digraph

On Graphs and Diadraphs with Prescribed Properties.

Abstract

Let m and n be non–negative integers and k a positive integer. A graph G is said to have property P(m,n,k) if for any m + n distinct vertices of G there are at least k other vertices, each of which is adjacent to the first m vertices but not adjacent to any of the latter n vertices. We know that almost all graphs have property P(m,n,k). However, for the case m, n ? 2, almost no graphs have been constructed, with the only known examples being Paley graphs which defined as follows. For q ? 1(mod 4) a prime power, the Paley graph Gq of order q is the graph whose vertices are elements of the finite field Fq; two vertices a and b are adjacent if and only if their difference is a quadratic residue. By using higher order residues on finite fields we can generate other classes of graphs which we refer to as generalized Paley graphs. For any m, n and k, we show that all sufficiently large (order) graphs obtained by taking cubic and quadruple residues satisfy property P(m,n,k).A digraph D is said to has property Q(n,k) if for every subset of n vertices of D is dominated by at least k other vertices. Let q ? 5(mod 8) be a prime power. Define a quadruple Paley digraph D as follows. The vertices of D are the elements of the finite field Fq. Vertex u joins to vertex v by an arc if and only if u – v = x4 for some x ? Fq. In this report, we show for sufficiently large q, D has property Q(n,k).

Keywords : Paley graph , adjacency property , tournament , Paley digraph