บทคัดย่อ

โครงการนี้ได้ศึกษาการประยุกต์การวิเคราะห์เชิงกลุ่มกับสมการนาเวียร์-สโตกส์ ซึ่งมีบทบาทหลักในการวิจัยในสาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ฟิสิกส์ และ วิศวกรรมศาสตร์

ปัญหาแรกที่ได้ศึกษาในโครงการนี้ คือความมีอยู่ของผลเฉลยที่เป็นประเภทวอร์เทกซ์พิเศษของสมการนาเวียร์-สโตกส์และสมการพลศาสตร์ก๊าซหนืด ซึ่ง L.V. Ovsyannikov ได้เสนอผลเฉลยประเภทนี้ สำหรับพลศาสตร์ก๊าซและของเหลวหนืด ขอให้สังเกตว่า ผลเฉลยนี้ยืนยงเป็นบางส่วนโดยเทียบกับกลุ่มการหมุน O(3) การวิเคราะห์ที่กระทำไปได้พิสูจน์ว่าผลเฉลยยืนยงบางส่วนสำหรับสมการทั้งสองประเภท (สมการนาเวียร์-สโตกส์และสมการพลศาสตร์ก๊าซหนืดสมบูรณ์) เป็นผลเฉลยที่มีความสมมาตรเชิงทรงกลม ซึ่งต่างกับพลศาสตร์ของก๊าซไร้ความหนืดและของเหลวอุดมคติ การจำแนกเชิงกลุ่มของสมการพลศาสตร์ก๊าซหนืดสมบูรณ์ ซึ่งมีความสมมาตรเชิงทรงกลมได้กระทำเสร็จสิ้นแล้ว เพื่อที่จะอำนวยให้การพิจารณาผลเฉลยยืนยงเป็นบางส่วนที่เกี่ยวข้องกับกลุ่มการหมุน O(3) ได้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

การวิจัยอีกส่วนหนึ่งนั้น เกี่ยวข้องกับผลเฉลยยืนยงหมู่ที่เฉเพาะทาง ซึ่งได้มีฐานของพีชคณิตย่อยสี่มิติหนึ่ง คือ H4 ซึ่งมีตัวก่อกำเนิดดังต่อไปนี้

$$X_1 = \phi_1\partial_x + \phi_1'\partial_u - x\phi_1''\partial_p, \quad X_2 = \phi_2\partial_x + \phi_2'\partial_u - x\phi_2''\partial_p,$$

$$Y_1 = \psi_1\partial_y + \psi_1'\partial_v - y\psi_1''\partial_p, \quad Y_2 = \psi_2\partial_y + \psi_2'\partial_v - y\psi_2''\partial_p.$$

โครงการได้ศึกษากรณีที่สมการ Monge-Ampere นั้น ไฮเพอร์โบลิก คือ

$$Lf_x + k + l \geq 0$$

ซึ่งได้แสดงว่า ผลเฉลยหมู่นี้ เป็นกรณีเฉเพาะของผลเฉลยที่มีรูปแบบความเร็วเป็นเชิงเส้นโดยเทียบกับตัวแปรปริภูมิหนึ่งหรือสองตัวแปร

คำหลัก : ผลเฉลยยืนยงและยืนยงบางส่วน การจำแนกเชิงกลุ่ม การแบ่งชั้นเชิงกลุ่ม สมการนาเวียร์-สโตกส์ และสมการก๊าซหนืด

Abstract

The project is devoted to the study two applications of group analysis to the Navier-Stokes equations. The Navier-Stokes equations play a central role in much of the research within applied mathematics, physics and engineering.

The first problem that we study in the project is the existence of solutions of special vortex type for the Navier-Stokes equations and viscous gas dynamics equations. This type of solutions for the inviscid gas and fluid dynamics equations was introduced by L.V.Ovsiannikov [36]. Note that this solution is partially invariant with respect to group of rotations $O(3)$. The analysis that has been done proves that the partially invariant solutions of the studied class for the both types of equations (the Navier-Stokes equations and the full viscous gas dynamics equations), in contrast to inviscid gas and ideal fluid dynamics equations, are spherically symmetric solutions. For the completeness of consideration of partially invariant solutions that are connected with the group of rotations $O(3)$ the group classification of the full viscous gas dynamics equations with spherical symmetry has been done.

Another part of the research is devoted to a particular class of partially invariant solutions of the Navier–Stokes equations. This class of solutions is constructed on the base of the four-dimensional subalgebra H^4 with the generators

$$X_1 = \phi_1\partial_x + \phi_1'\partial_u - x\phi_1''\partial_p, \quad X_2 = \phi_2\partial_x + \phi_2'\partial_u - x\phi_2''\partial_p,$$

$$Y_1 = \psi_1\partial_y + \psi_1'\partial_v - y\psi_1''\partial_p, \quad Y_2 = \psi_2\partial_y + \psi_2'\partial_v - y\psi_2''\partial_p.$$

We systematically investigate the case, where the Monge-Ampere equation is hyperbolic ($Lf_z + k + l \geq 0$). It is shown that this class of solutions is a particular case of the solutions with linear profile of velocity with respect to one or two space variables.

Key words: Invariant and partially invariant solutions, group classification, group stratification, Navier-Stokes and viscous gas equations.