บทคัดย่อ

การสร้างกราฟและกราฟทิศทางที่สอดคล้องกับสมบัติที่กำหนด

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ เรากล่าวว่ากราฟ G มีสมบัติ P(m, n, k) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ สับเซต A และ B ที่เป็นเซตต่างสมาชิกกันของจุดของ G โดยที่ $|A| = m$ และ $|B| = n$ จะมีอีกอย่างน้อย k จุด ซึ่งแต่ละจุดต่างประชิดกับจุดทุกจุดใน A แต่ไม่ประชิดกับจุดใด ๆ ใน B เลย ยิ่งไปกว่านั้น เรากล่าวว่ากราฟ G มีสมบัติ n-existentially closed หรือกล่าวว่าเป็นกราฟ n-e.c. ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ สับเซต A และ B ของจุดของ G ซึ่ง $A \cap B = \varnothing$ และ $|A \cup B| = n$ จะมีจุด $u \notin A \cup B$ ซึ่งประชิดกับจุดทุกจุดใน A แต่ไม่ประชิดกับจุดใด ๆ ใน B เลย เป็นที่ทราบกันดีว่ากราฟส่วนใหญ่มีสมบัติ P(m, n, k) และ n-e.c. แต่อย่างไรก็ตามปัญหาการสร้างกราฟที่มีสมบัติ P(m, n, k) และ n-e.c. เป็นปัญหาที่ค่อนข้างยาก ในงานวิจัยนี้เราจะแสดงว่านัยทั่วไปของกราฟพาเลย์ที่สร้างโดยการใช้ส่วนตกค้างกำลังสูงกว่าบนสนามจำกัด ที่มีจำนวนจุดมากพอมีสมบัติ P(m, n, k) และ n-e.c.

ทฤษฎีบทที่คล้ายกันสำหรับนัยทั่วไปของกราฟทิศทางพาเลย์ก็ได้รับการนำเสนอ กล่าวคือกราฟทิศทาง D มีสมบัติ n-e.c. ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ สับเซต A และ B ของจุดของ D ซึ่ง $A \cap B = \varnothing$ และ $|A \cup B| = n$ จะมีจุด $u \notin A \cup B$ ซึ่งครอบครองจุดทุกจุดใน A และถูกครอบครองด้วยจุดทุกจุดใน B ในงานวิจัยนี้เราจะแสดงว่านัยทั่วไปของกราฟทิศทางพาเลย์ที่สร้างโดยการใช้ส่วนตกค้างกำลังสูงกว่าบนสนามจำกัด ที่มีจำนวนจุดมากพอมีสมบัติ n-e.c.

Keywords: adjacency property, *n*-e.e. property, Paley graph, Paley digraph

2000 Mathematics Subject Classification: 05C75; 05C20

Abstract

On constructing graphs and digraphs with prescribed properties

Let m and n be non-negative integers and k a positive integer. A graph G is said to have property $P(m, n, k)$ if for any disjoint subsets A and B of vertices of G with $|A| = m$ and $|B| = n$ there exist at least k other vertices, each of which is adjacent to every vertex of A but not adjacent to any vertex of B. Furthermore, a graph G is called *n-existentially closed* or n-e.c. if for any two subsets A and B of vertices of G with $A \cap B = \varnothing$ and $|A \cup B| = n$, there is a vertex $u \notin A \cup B$ that is adjacent to every vertex of A but not adjacent to any vertex of B. It is well-known that almost all graphs satisfy the $P(m, n, k)$ property and the n-e.c. property. However, the problem of constructing graphs with the $P(m, n, k)$ property and the n-e.c. property seems difficult. In this report, we show that all sufficiently large generalized Paley graphs defined by using higher order residues on finite fields satisfy the $P(m, n, k)$ property and the n-e.c. property.

Similar results for generalized Paley digraphs are also obtained. More specifically, a digraph D is *n-e.c.* if for any two subsets A and B of vertices of D with $A \cap B = \varnothing$ and $|A \cup B| = n$, there is a vertex $u \notin A \cup B$ such that u dominates every vertex of A and dominated by every vertex of B. In this report, we show that the all sufficiently large generalized Paley digraphs defined by using higher order residues on finite fields are n-e.c.

Keywords: adjacency property, n-e.e. property, Paley graph, Paley digraph

2000 Mathematics Subject Classification: 05C75; 05C20