

รายงานการวิจัยเรื่อง

Clone ทางเดียวชนิดกึ่งกำเนิดแบบจำกัด

รองศาสตราจารย์ ดร. จวีวรรณ รัตนประเสริฐ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยศิลปากร นครปฐม

รายงานการวิจัยเรื่อง

Clone ทางเดียวชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด

วันที่.....	24 ก.ย. 2546
เลขทะเบียน.....	00279
เลขเรียกหนังสือ.....	BR6 41
	0004

รองศาสตราจารย์ ดร. นวรัตน์ รัตนประเสริฐ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

สำนักงานมหาวิทยาลัยศิลปากรจวนครปฐม

ชั้น 14 อาคาร เกส เน็ก ทาวเวอร์
เลขที่ 979/17-21 ถนนพหลโยธิน แขวงสามเสนใน

เขตปทุมธานี กรุงเทพมหานคร 10400

โทรศัพท์ 298-0455 โทรสาร 298-0476

Home page : <http://www.art.or.th>

E-mail : art-info@art.or.th



กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ Prof. Dr. Brian A. Davey และ Prof. Dr. Klaus Deneke เป็นอย่างสูง ที่ได้กรุณาให้ข้อเสนอแนะและความคิดเห็นที่เป็นประโยชน์ต่อโครงการวิจัยนี้

โครงการวิจัยนี้สำเร็จลงได้เป็นอย่างดี ด้วยทุนอุดหนุนการวิจัยจากสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย ภายใต้ทุนองค์ความรู้ใหม่ (15 พฤศจิกายน 2540 - 15 พฤศจิกายน 2543)

บทคัดย่อ

ชื่อโครงการวิจัย

Clones ทางเคียวนิคก่อกำเนิดแบบจำกัด

ผู้วิจัย

รองศาสตราจารย์ ดร. ฌวีวรรณ รัตนประเสริฐ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร นครปฐม

E-mail address : kanate@ratcha.edu.th

แหล่งทุนอุดหนุน

สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

ระยะเวลา

15 พฤศจิกายน 2540 - 15 พฤศจิกายน 2543

คำหลัก

clone, finitely generated, compatible order

Rosenberg จำแนกความสัมพันธ์ซึ่งกำหนด clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มบนแต่ละเซตจำกัดออกเป็น 6 พวก และแม้ว่าแต่ละ clone บนเซตจำกัดจะเป็น subclone ของ clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มเหล่านั้นอย่างน้อย clone หนึ่ง แต่โดยทั่วไปการจะบอกว่าเป็น clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของพวกใดไม่ใช่เรื่องง่าย จึงเป็นคำถามสำหรับนักวิจัยทางทฤษฎี clone ที่จะศึกษาหาพวกของ clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มสำหรับเซตจำกัดที่มีลักษณะเฉพาะพวกใดพวกหนึ่ง

ผลงานของ Baker และ Pixley ทำให้เราทราบว่าถ้า clone มี near unanimity function (nuf.) เป็นสมาชิกแล้ว clone จะเป็นชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด ได้มีผู้ศึกษาและพยายามหา clone ของเซตอันดับไม่มีขอบเขตซึ่งเป็นชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด แต่มีเพียง Demetrovics และ Ronyai ที่บอกได้ว่า clone ของ fence และ crown เป็นชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด โดยแสดงเซตก่อกำเนิดของ clone พร้อมทั้งพิสูจน์ว่า clone ของ fence มี nuf. เป็นสมาชิก แต่สมาชิกใน clone ของ crown ไม่มีฟังก์ชันใดเป็น nuf.

Birkhoff ถามหาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอบนแลตทิซ เพื่อให้ทุกแลตทิซที่มี identical graph กันเป็นแลตทิซดอกแบบกัน มีผลการศึกษามากมายที่ตอบคำถามนี้สำหรับคู่ของแลตทิซแบบต่าง ๆ รวมถึงคู่ของแลตทิซที่มี identical graph ด้วย

ในงานวิจัยนี้เราจำแนกพวกของ clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มทั้งหมดที่มี clone ของเซตอันดับไม่มีขอบเขตเป็น subclone ผลของการศึกษาทำให้เราสามารถนิยามความสัมพันธ์ทั้งหมดสำหรับทุก α -arity ที่เป็นไปได้ซึ่งกำหนด clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มที่จะมี clone ของ crown เป็น subclone ส่วน fence เป็นเซตอันดับไม่มีขอบเขตชนิดไม่ขาดตอน และมี identical graph กับ chain นอกจากนี้อันดับของ fence ก็เป็น compatible order ของ chain โดยเฉพาะอย่างยิ่ง nuf. ใน clone ของ chain (ซึ่งเป็น clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม) เป็น nuf. ใน clone ของ fence เราจึงศึกษาคุณสมบัติของ compatible order ของแลตทิซในกรณีทั่วไป ในงานวิจัยนี้เราให้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับอันดับที่จะเป็น compatible order ของแลตทิซ รวมทั้งแสดงว่า nuf. ใน clone ของแลตทิซ เป็น nuf. ใน clone ของ compatible order ของแลตทิซ และสุดท้ายเรายกลักษณะของ compatible order ของแลตทิซ ด้วย subgraphs ชนิดเฉพาะของแลตทิซ ซึ่งทำให้ผลการศึกษาในกรณีคู่ของแลตทิซ หรือคู่ของแลตทิซเป็นกรณีเฉพาะของผลการวิจัยนี้

ABSTRACT

Research Title	Finitely Generated Monotone Clones
Researcher	Associate Professor Dr. Chawewan Ratanaprasert Department of Mathematics, Faculty of Sciences, Silpakorn University, Nakhon Pathom E-mail address : kanate@ratcha.edu.th
Research Grants	The Thailand Research Fund
Period	November 15, 1997 - November 15, 2000
Key Words	clone, finitely generated, compatible order

Rosenberg has classified all maximal clones on a finite set in terms of six classes of finitary relations. It is known that every proper subclone is contained in a maximal one; but it is in general not easy to decide which maximal clones contains a given proper subclone. The question arises among those interested in the area is finding classes of relations whose clones contain a special subclone on a finite set.

Some results published by Baker and Pixley implies that a clone containing a near unanimity function (nuf.) is finitely generated. There are attempts of finding which monotone clones are finitely generated. Only Demotrovičs and Ronyai showed a finite generating set of the monotone clones of fences and crowns and they proved that clones of all fences contain a nuf. while the case of crowns is particularly interesting because they admit no nuf.

Birkhoff proposed the question of finding necessary and sufficient conditions on a lattice, in order that every lattice whose unoriented graph is isomorphic to the graph of the lattice be lattices isomorphic. Many results from the literatures answered the question for types of pairs of lattices and pairs of semilattices whose graphs are identical.

In this project, we classify classes of relations of Rosenberg's six classes whose clones contain the monotone clone of a finite unbounded ordered set. This enables us define all relations of all possible arities whose clones contain the monotone clone of a crown. And for fences, we consider that they are connected unbounded ordered sets whose graphs are isomorphic to graphs of chains; besides, their orders are compatible with chains and the monotone clone of a fence contains nuf. of the corresponding chain. We study some properties of compatible orders of lattices. In the project, we give necessary and sufficient conditions for an order to be compatible with a lattice; and then we describe all compatible orders of a lattice in term of special subgraphs of the lattice. It turns out that the results for pairs of lattices or semilattices become a special cases of ours.

สารบัญ

	หน้า
1. บทนำ	1
2. On Monotone Clones of Connected Ordered Sets	6
3. All Maximal Clones containing a Crown	8
4. Compatible Orders of a lattice	10
หนังสืออ้างอิง	11
Outputs	13
การประยุกต์ใช้ผลงานวิจัย	14
ภาคผนวก	16

1. บทนำ

ให้ A เป็นเซตและ n เป็นจำนวนเต็มบวก สัญลักษณ์ A^n เราหมายถึงผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times A \times \dots \times A$ ทั้งหมด n ครั้ง การดำเนินการ(operation) n ตำแหน่งบน A คือฟังก์ชันจาก A^n ไปยัง A นั่นคือ

f เป็นการดำเนินการ n ตำแหน่งบน A ก็ต่อเมื่อ $f : A^n \rightarrow A$

ตัวอย่างเช่นการฉาย(projection) e_i บน A คือฟังก์ชันจาก A^n ไปยัง A ซึ่งกำหนดสำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \dots, n$ และแต่ละสมาชิก $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A^n$ โดย $e_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i$

ถ้า n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก g เป็นการดำเนินการ n ตำแหน่งและ $f_1, f_2, \dots, f_k$ เป็นการดำเนินการ k ตำแหน่งบนเซต A แล้ว *superpositions* ของ g และ $f_1, f_2, \dots, f_k$ คือ $g(f_1, f_2, \dots, f_k)$ ซึ่งกำหนดค่าสำหรับแต่ละสมาชิก $(x_1, \dots, x_k) \in A^k$ โดย

$$g(f_1, f_2, \dots, f_k)(x_1, \dots, x_n) = g(f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_k(x_1, \dots, x_k))$$

สังเกตว่าถ้า f และ g ต่างเป็นฟังก์ชัน 1 ตำแหน่งจาก A ไปยัง A แล้ว *superposition* ของ f และ g ก็คือฟังก์ชันผลประกอบ(composition) $f \circ g$ ที่คุ้นเคยกันนั่นเอง

สำหรับจำนวนเต็มบวก k แต่ละสับเซตของ A^k เป็นความสัมพันธ์ k ตำแหน่งบน A ดังนั้นเราอาจพิจารณาการดำเนินการ n ตำแหน่งบน A เป็นความสัมพันธ์ $n+1$ ตำแหน่งในรูป

$$\{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \mid x_1, \dots, x_n \in A\}$$

ถ้า f เป็นการดำเนินการ n ตำแหน่งบน A และ $r \subseteq A^k$ เป็นความสัมพันธ์ k ตำแหน่งบน A เราจะกล่าวว่า f *ยีนยง* (preserve) r ถ้า $(x_{11}, \dots, x_{1k}) \in r, \dots, (x_{n1}, \dots, x_{nk}) \in r$ แล้ว $(f(x_{11}, \dots, x_{n1}), \dots, f(x_{1k}, \dots, x_{nk})) \in r$ สำหรับทุก ๆ $x_j \in A$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq k$

ถ้า A เป็นเซตและ $\leq$ เป็นความสัมพันธ์ 2 ตำแหน่งซึ่งเรียกว่า *ความสัมพันธ์ทวินาม* (binary relation) บน A เราจะเรียก $\leq$ ว่า *อันดับ* (order) บน A ถ้า $\leq$ เป็นความสัมพันธ์สะท้อน (reflexive) ปฏิสมมาตร(anti-symmetric) และถ่ายทอด(transitive)

ถ้า $\leq$ เป็นอันดับบนเซต A เราจะเรียกโครงสร้าง $P = \langle A; \leq \rangle$ ว่า *เซตอันดับ* (ordered set) เรียกสมาชิก u ในเซตอันดับ P ว่า *ขอบเขตบนน้อยสุด* (หรือ *ขอบเขตล่างมากที่สุด*) ของสับเซต S ของ P ถ้า $x \leq u$ (หรือ $u \leq x$) สำหรับทุกสมาชิก x ใน S และถ้า v เป็นสมาชิกของ S ที่มีคุณสมบัติดังกล่าวแล้ว $u \leq v$ (หรือ $v \leq u$) ถ้าเซตของทุกคู่สมาชิกของ P มีทั้งขอบเขตบนน้อยสุดและขอบเขตล่างมากที่สุด เราจะเรียก P ว่า *แลตทิซ* (lattice) แต่ถ้าทุกสับเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง S ของแลตทิซ P มีขอบเขตบนน้อยสุดและขอบเขตล่างที่สุดใน P เราจะเรียกแลตทิซ P นั้นว่า *แลตทิซแบบบริบูรณ์* (complete lattice)

เราเรียกสมาชิก u ในแลตทิซ P ซึ่งไม่ใช่สมาชิกมากที่สุดของ P ว่า *สมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม* (maximal element) ถ้า x เป็นสมาชิกของ P ซึ่ง $u \leq x$ แล้ว $u = x$

สำหรับเซตจำกัด A ที่ไม่ใช่เซตว่างและจำนวนเต็มบวก n เราให้ $O_n(A)$ แทนเซตของการดำเนินการ n ตำแหน่งทั้งหมดบนเซต A และ $O(A) = \bigcup_{n \geq 0} O_n(A)$ แทนเซตของการดำเนินการทั้งหมดบน A เราเรียกสับเซต C ของ $O(A)$ ซึ่งรวมการฉายทั้งหมดและมีคุณสมบัติปิดภายใต้ (arbitrary) superpositions ของการดำเนินการว่า Clone ของ A และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\text{Clo}(A)$ เซตของ Clone ทั้งหมดบน A เป็นแลตทิซแบบบริวอร์ที่มีสมาชิกตัวมากที่สุดคือ $O(A)$ และสมาชิกตัวน้อยที่สุดคือเซตของการฉายทั้งหมดบน A

สำหรับแต่ละความสัมพันธ์ r บน A เซต $\text{Clo}(r) = \{f \in O(A) \mid f \text{ ขึ้นขง } r\}$ เป็น Clone ซึ่งเราเรียกว่า Clone ขึ้นขงความสัมพันธ์ r บนเซต A และถ้า r คืออันดับ $\leq$ บน P เราเรียก $\text{Clo}(\leq)$ ว่า Clone ทางเดียว (Monotone Clone) ของ P

ถ้า $H \subseteq O(A)$ เราเรียก Clone ที่เล็กสุด $[H]$ ซึ่งมี H เป็นสับเซตว่า Clone ก่อกำเนิดโดย H และถ้า H เป็นเซตจำกัดแล้ว $[H]$ จะเป็น Clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด (finitely generated)

นักวิจัยทาง Clone Theory ได้ใช้ความพยายามมากมายที่จะหา Clone ทั้งหมดบนแต่ละเซตจำกัด (ผู้สนใจหาอ่านเพิ่มเติมได้จากหนังสืออ้างอิง) แต่ Clone ทั้งหมดบนเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก 2 ตัวหรือที่เรียกว่า Boolean Clone ก็ยังหาได้ยากยิ่ง นอกจากนี้ยังมีความพยายามจำแนกลักษณะของความสัมพันธ์ r ที่จะทำให้ได้ Clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด

เมื่อหา Clone ทั้งหมดบนแต่ละเซตจำกัดที่มีขนาดมากกว่า 2 ยังไม่ได้ นักวิจัยจึงพยายามหา Clones เล็กสุดเฉพาะกลุ่มและ Clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม ทั้งหมดในแลตทิซของ Clone ทั้งหมดบนแต่ละเซตจำกัด A

I. Rosenberg [16] ได้จำแนก Clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม ในแลตทิซของ clones ทั้งหมดของแต่ละเซตจำกัดไว้ 6 พวกตามชนิดของความสัมพันธ์ที่ก่อให้เกิด Clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มนั้น ๆ โดยให้ชื่อแต่ละพวกตามชนิดของความสัมพันธ์ที่ก่อให้เกิด Clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มนั้น ๆ ดังนี้

1. ความสัมพันธ์การเป็นอันดับที่มีขอบเขต (Bounded Orders) $p \subseteq A \times A$

ความสัมพันธ์พวกนี้ได้แก่ความสัมพันธ์ทวินามที่เป็นสะท้อน ถ้าขทอดและปฏิสมมาตรที่มี $0, 1 \in A$ โดยที่ $(0, x) \in p$ และ $(x, 1) \in p$ สำหรับทุกสมาชิก $x \in A$

2. ความสัมพันธ์สมมูลที่ไม่ใช่เอกลักษณ์และไม่ใช่เอกภพ (Non-trivial Equivalence Relations) $p \subseteq A \times A$

ความสัมพันธ์พวกนี้ได้แก่ความสัมพันธ์ทวินามที่เป็นความสัมพันธ์สะท้อน ถ้าขทอดและสมมาตร (symmetric) [กล่าวคือสำหรับทุกคู่สมาชิก x และ y ใน A ถ้า $(x, y) \in p$ แล้ว $(y, x) \in p$] ซึ่งไม่ใช่ความสัมพันธ์เอกลักษณ์ $\{(a, a) \mid a \in A\}$ และไม่ใช่ความสัมพันธ์เอกภพ $A \times A$

3. วิธีเรียงสับเปลี่ยนเฉพาะ (Prime Permutations) $p \subseteq A \times A$

ความสัมพันธ์ทวินามพวกนี้อยู่ในรูป $\rho = \{(a, \alpha(a)) \mid a \in A\}$ เมื่อ α เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยน (permutations) บน A โดยที่ทุก cycles ของ α มีความยาวเป็นจำนวนเฉพาะ (prime number) p เท่ากัน

4. ความสัมพันธ์สัมพรรคเฉพาะ (Prime Affine Relations) $\rho \subseteq A^4$

เราเรียกความสัมพันธ์ 4 ตำแหน่ง $\rho \subseteq A^4$ ว่าความสัมพันธ์สัมพรรค (Affine Relation) ถ้าเราสามารถนิยามการดำเนินการทวิภาค $+$ บน A ที่ทำให้ $(A; +)$ เป็นกลุ่มสลับที่ (abelian group) และ $(a, b, c, d) \in \rho$ ก็ต่อเมื่อ $a + b = c + d$ และเราเรียกความสัมพันธ์สัมพรรค $\rho \subseteq A^4$ ว่าความสัมพันธ์สัมพรรคเฉพาะ ถ้า $(A; +)$ เป็นกลุ่มจำกัดที่มีอันดับเขียนได้ในรูป p^s เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะและ s เป็นจำนวนเต็มบวก

5. ความสัมพันธ์กลาง (Central Relations) $\rho \subseteq A^k$ ($k \geq 1$)

ความสัมพันธ์ k ตำแหน่ง $\rho \subseteq A^k$ ($k \geq 1$) เป็น *totally reflexive* ถ้า $\{(a_1, \dots, a_k) \mid \text{มี } i \neq j \text{ และ } a_i = a_j\} \subseteq \rho$ และเป็น *totally symmetric* ถ้าสำหรับทุกวิธีเรียงสับเปลี่ยน α บนเซต $\{1, \dots, k\}$ ทำให้ $(a_1, \dots, a_k) \in \rho$ ก็ต่อเมื่อ $(a_{\alpha(1)}, a_{\alpha(2)}, \dots, a_{\alpha(k)}) \in \rho$ เราเรียกสมาชิก $a \in A$ ว่า ศูนย์กลาง (center) ของ ρ ถ้า $(a, a_2, \dots, a_k) \in \rho$ สำหรับทุกสมาชิก $a_2, \dots, a_k \in A$

ρ เป็นความสัมพันธ์กลาง ถ้า ρ เป็น *totally reflexive* และ *totally symmetric* โดยที่เซตของสมาชิกศูนย์กลางของ ρ ต้องไม่เป็นเซตว่างและไม่ใช่ A

6. ความสัมพันธ์ก่อกำเนิดปรกติ (Regularly Generated Relations)

สำหรับแต่ละ $3 \leq k \leq |A|$ เราเรียกเซต $T = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\}$ ($m \geq 1$) ของความสัมพันธ์สมมูลบน A ว่า *k-regular* ถ้าแต่ละ θ_i ($1 \leq i \leq m$) กำหนดเซตสมมูล k เซต และ $\bigcap_{i=1}^m \varepsilon_i$ ไม่เป็นเซตว่างสำหรับทุกๆ เซตสมมูล ε_i ของ θ_i

ความสัมพันธ์ k ตำแหน่ง $\rho = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_i \in A \text{ ทุก } i = 1, \dots, k\}$ เป็น *k-regularly generated* โดย T ถ้าแต่ละ $1 \leq i \leq m$ จะมีสมาชิก $a_1, \dots, a_k$ อย่างน้อย 2 ตัวซึ่งมีความสัมพันธ์ θ_i

ถ้า ρ เป็นความสัมพันธ์ *k-regularly generated* เมื่อ $k = |A|$ เราจะเรียก $\text{Clo}(\rho)$ ว่า *Shupecki Clone* (ตามชื่อของนักคณิตศาสตร์ที่ศึกษา clone กลุ่มนี้)

ถ้า ρ เป็นความสัมพันธ์บนเซตจำกัด A แล้ว $\text{Clo}(\rho)$ เป็น Clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มบน A ก็ต่อเมื่อ $\text{Clo}(\rho)$ เป็นสับเซตของ $O(A)$ โดยที่ ρ เป็นความสัมพันธ์ทวิภาคใดพวกหนึ่ง จาก 6 พวกดังกล่าว

ทฤษฎีบทต่อไปนีเราสามารถหาอ่านพิสูจน์ได้ใน [20]

Theorem [20] : Let p be a k -regularly generated relation associated with $\theta_1, \dots, \theta_m$ ($m \geq 1$) over a finite set A . Then $\text{Clo}(p)$ is the set of all operations $F \in O(A)$ which satisfy (if F is n -ary) for each $1 \leq i \leq m$ either :

- (i) the range of F intersects fewer than k θ_i -classes; or
- (ii) there exists $u \leq n$ and $v \leq m$ and a function $f_i : A/\theta_v \rightarrow A/\theta_i$ so that $F(\bar{x})/\theta_i = f_i(x_u/\theta_v)$ for all $\bar{x} \in A^n$.

D. Lau [13] ได้พิสูจน์ว่า Clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มทั้ง 6 พวกดังกล่าวเป็นชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัดเกือบทั้งหมด ยกเว้นเฉพาะ Clones ขึ้นของอันดับมีขอบเขตบางกลุ่มเท่านั้น

แม้ว่าเราจะทราบ Clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มในแลตทิซของ clones ทั้งหมดของแต่ละเซตจำกัด A แล้ว และทราบว่าแต่ละ proper subclone ของ $O(A)$ จะต้องเป็น subclone ของ Clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม พวกใดพวกหนึ่งใน 6 พวกดังกล่าว แต่โดยทั่วไปการจะบอกว่าแต่ละ clone เป็น subclone ของ Clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของพวกใดไม่ใช่เรื่องง่าย นักวิจัยในทาง Clone Theory สนใจศึกษาปัญหาต่อไปนี้

1. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ r บนเซต A เราต้องการจำแนกพวกของ Clone ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มบน A ทั้งหมดที่จะมี $\text{Clo}(r)$ เป็น subclone
2. เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ r บนเซต A เราต้องการทราบว่า $\text{Clo}(r)$ เป็นชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัดหรือไม่ และถ้าเป็น จะหาเซตก่อกำเนิดของ $\text{Clo}(r)$ ได้หรือไม่

ถ้า A เป็นเซตและ $n \geq 3$ เราเรียกฟังก์ชัน $m : P^n \rightarrow P$ ว่า *near unanimity function (n.u.f)* ถ้าแต่ละ x, y ใน A เราได้ว่า $y = m(x, y, \dots, y) = m(y, x, y, \dots, y) = \dots = m(y, \dots, y, x)$ และเราจะกล่าวว่า $\text{Clo}(\leq)$ ยอมรับ (admit) n.u.f. ถ้ามีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $m : P^n \rightarrow P$ เป็น n.u.f. และ $m \in \text{Clo}(\leq)$

K. Baker และ A. Pixley ได้พิสูจน์ไว้ใน [1] ว่า clones ของเซตจำกัดซึ่งยอมรับ n.u.f. จะเป็น clones ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด ดังนั้น n.u.f. จึงมีบทบาทสำคัญในการตอบปัญหาข้อที่สองซึ่งกล่าวไว้ข้างต้น

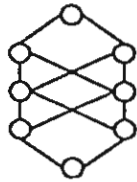
นักวิจัยในทาง Clone Theory สังเกตว่าอันดับของแลตทิซจำกัด เป็นอันดับมีขอบเขต เพราะฉะนั้น Clone ของแลตทิซจำกัดจึงเป็น Clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มในพวกที่ 1 ของความสัมพันธ์ 6 พวกที่ Rosenberg จำแนกไว้ นอกจากนี้เราสังเกตว่า Clone ของแลตทิซยอมรับ 3-n.u.f. ซึ่งเรียกว่า *majority operation* ที่กำหนดสำหรับทุก ๆ สมาชิก x, y, z ของแลตทิซโดย

$$m(x, y, z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \wedge (y \vee z) \text{ หรือ } m(x, y, z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$$

โดยที่ $\wedge$ และ $\vee$ เป็นการดำเนินการทวินาม ซึ่งนิยามตามลำดับ ดังนี้

$$\wedge(x, y) = x \wedge y = \text{ขอบเขตบนตัวน้อยสุดของ } \{x, y\}$$

และ $\vee(x, y) = x \vee y = \text{ขอบเขตล่างตัวมากสุดของ } \{x, y\}$



R_8

รูป 1

นักวิจัยจึงสนใจเซตอันดับมีขอบเขตที่มีลักษณะใกล้เคียงกับแลตทิซ และพิจารณาว่า Clones ของเซตอันดับมีขอบเขตเหล่านี้จะสอดคล้องกับปัญหาข้อที่สองหรือไม่ แต่เป็นที่น่าเสียดายว่า G.Tardos [19] ได้แสดงตัวอย่างเซตอันดับมีขอบเขต R_8 ที่มีจำนวนสมาชิก 8 ตัวและมีลักษณะใกล้เคียงกับแลตทิซ ดังรูป 1 แต่ $\text{Clo}(\leq)$ ของ R_8 ไม่เป็นชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด ซึ่งไปกว่านั้น Tardos ยังพิสูจน์ว่า $\text{Clo}(\leq)$ ของ R_8 ไม่ยอมรับทุก n.u.f.

R. Quackenbush, I. Rival และ I. Rosenberg ได้ตั้ง conjecture ไว้ว่า

“เซตอันดับมีขอบเขต $\langle P ; \leq \rangle$ ยอมรับ n.u.f. สำหรับ $n \geq 3$ ก็ต่อเมื่อ $\text{Clo}(\leq)$ เป็นชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด ”

นักวิจัยจึงสนใจที่จะขยายปัญหาเพื่อพิจารณากรณีของเซตอันดับ $P = \langle A ; \leq \rangle$ ซึ่ง A เป็นเซตจำกัด แต่ $\leq$ ไม่มีขอบเขตด้วย

เรากล่าวว่าเซตอันดับ $P = \langle A ; \leq \rangle$ ไม่ขาดตอน (connected) ถ้ามีสับเซตจำกัด $\{p_1, \dots, p_m\}$ ของ A ที่ซึ่ง $p_i \leq p_{i+1} \geq p_{i+2}$ หรือ $p_i \geq p_{i+1} \leq p_{i+2}$ สำหรับ $1 \leq i \leq m-2$ และถ้าไม่มีการเปรียบเทียบอื่นๆ อีกบนสับเซต $\{p_1, \dots, p_m\}$ เราจะเรียกสับเซตนี้ว่า fence เราเรียกเซตที่เป็นอันดับ $C_m = \langle \{c_1, \dots, c_{2m}\}; \leq \rangle$ เมื่อ $m \geq 2$ ว่า m-crown ถ้า $c_1 < c_2 > c_3 < c_4 > \dots > c_{2m} > c_1$ และไม่มีการเปรียบเทียบอื่นๆ อีกใน C_m

crowns และ fences มีบทบาทสำคัญในการศึกษาเรื่องทฤษฎีของเซตอันดับแบบจำกัด โดยเฉพาะ crowns มีบทบาทสำคัญในเรื่องการสมมาตร ส่วน fences มีบทบาทเกี่ยวกับเรื่องการไม่ขาดตอน J. Demetrovics และ L. Ronyai ได้แสดงไว้ใน [6] ว่า clones ของ crowns และ fences เป็นชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด ซึ่งก่อกำเนิดโดยเซตของการดำเนินการ 1 ตำแหน่ง (unary operations) และการดำเนินการ 2 ตำแหน่ง (binary operations) ทั้งหมด โดยที่ fences ยอมรับ m.f. แต่ crowns ไม่ยอมรับทุก n.u.f.

B.A. Davey, J. B. Nation, R.N. McKenzie และ P .P. Palfry [5] ได้ศึกษาคุณสมบัติของ *Braids* ซึ่งเป็นพวกของเซตอันดับที่เป็นภาคย่อยของ *crowns* และได้ตอบปัญหาข้อที่หนึ่งสำหรับ *Braids* ด้วยการพิสูจน์ว่า clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ *Braids* มีชื่อว่า *Slupecki Clones*

L. Zadori [21] ได้นำวิธีการ *nonextendible colored poset* และ *zigzags* สร้างเกณฑ์สำหรับพิจารณาเซตอันดับแบบจำกัดไม่มีขอบเขตว่ายอมรับ *n.u.f.* หรือไม่

เนื่องจากยังไม่มีผู้ตอบได้ว่า clones ของเซตอันดับไม่มีขอบเขตจะเป็น *subclones* ของ clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มที่ขึ้นของความสัมพันธ์ทวิภาคใดบ้างใน 6 พวก โครงการวิจัยนี้จึงศึกษาเพื่อพิสูจน์ว่า clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มซึ่งประกอบด้วย clones ของเซตอันดับไม่มีขอบเขตและไม่ขาดตอนทั้งหลายจะเป็นพวกขึ้นของความสัมพันธ์กลางหรือความสัมพันธ์ก่อกำเนิดปรกติเท่านั้น ผู้วิจัยแสดงการวิจัยนี้ไว้ในหัวข้อ 2 และในหัวข้อดังกล่าวผู้วิจัยยังได้ศึกษาคุณสมบัติของ *order varieties* ของเซตอันดับไม่มีขอบเขตที่มี clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มเป็นพวกเดียวกัน ในหัวข้อ 3 ผู้วิจัยแสดงตัวอย่างกลุ่มของเซตอันดับกลุ่มหนึ่ง(นั่นคือ *crowns*) ที่มี clones เป็น *subclone* ของ clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มซึ่งขึ้นของทั้งความสัมพันธ์กลางและความสัมพันธ์ก่อกำเนิดปรกติ โดยได้แสดงการนิยามความสัมพันธ์กลางและความสัมพันธ์ก่อกำเนิดปรกติสำหรับแต่ละ *arity* ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ในหัวข้อ 4 ผู้วิจัยจำแนกกลุ่มของเซตอันดับไม่มีขอบเขตที่ยอมรับ *majority operations* ของแลตทิซ ซึ่งจะเรียกว่า *compatible orders* ของแลตทิซ ด้วยวิธีทางพีชคณิตและโคชกราฟ ซึ่งทำให้เราได้กลุ่มของเซตอันดับที่มี *Monotone Clone* เป็นชนิดก่อกำเนิดปรกติ และเป็น *subclone* ของ clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม ซึ่งขึ้นของเฉพาะความสัมพันธ์กลางเท่านั้น

2. On Monotone Clones of Connected Ordered Sets

ในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยสนใจปัญหาของการจำแนกพวกของความสัมพันธ์ทั้งหมด ที่จะให้ *Clone* ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มบน A ซึ่งมี $\text{Clo}(r)$ เป็น *subclone* เมื่อกำหนดความสัมพันธ์ r ซึ่งคืออันดับ $\leq$ ไม่มีขอบเขตบนเซต A มาให้

ในการศึกษา clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มทั้ง 6 พวก เราพบว่าความสัมพันธ์ในพวกที่ 1 ถึงพวกที่ 4 เป็นความสัมพันธ์ที่มีการนิยามไม่ยุ่งยากและมี *arity* เพียง 2 หรือ 4 เท่านั้น แต่ความสัมพันธ์พวกที่ 5 เป็นความสัมพันธ์ที่มี *arity* เป็น k โดยที่ $3 \leq k \leq |A|$ และความสัมพันธ์พวกที่ 6 ถูกนิยามในรูปที่ค่อนข้างเป็นเชิงสังขรณ์และมี *arity* ได้สำหรับทุก k ซึ่ง $k < |A|$ จึงยากต่อการคาดคะเนว่าควรเป็นความสัมพันธ์ที่มี *arity* เป็นใด ใน [22] ผู้วิจัยได้ศึกษา *Monotone clones* ของ *Strings* $P = \langle A ; \leq \rangle$ ซึ่งผู้วิจัยนิยามให้เป็นภาคย่อยของ *fence* และสร้างความสัมพันธ์กลาง ρ พวกที่ 6 ที่มี *arity* 2 โดยที่ $\text{Clo}(\leq) \subseteq \text{Clo}(\rho)$ และแสดงว่า *String* ยอมรับ *majority operations*

ของแลตทิซหนึ่ง ผู้วิจัยจึงมาวิเคราะห์ต่อไปได้ว่า Monotone clones ของ Strings ไม่เป็น subclone ของ clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม พวกอื่นใดอีก ผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานและในที่สุดก็พิสูจน์ได้ว่า

“ถ้า Monotone clones โดยยอมรับ n.u.f. แล้ว Monotone clones นั้นจะเป็น subclone ของ clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม ที่ขึ้นขงเฉพาะความสัมพันธ์กลางเท่านั้น”

ผู้วิจัยจึงสรุป เป็นทฤษฎีบท ต่อไปนี้

Theorem 1 : Let P be an unbounded connected ordered set and $\text{Clo}(\leq)$ contains an unanimity function. Then $\text{Clo}(\leq)$ is contained in only a maximal clone preserving a central relation.

Corollary 1 : If $\text{Clo}(\leq)$ is Slupecki, then $\text{Clo}(\leq)$ contains no n -ary unanimity functions for all n .

แต่ปรากฏดังใน [5] ว่า Monotone clones ของ Braids ซึ่งเป็นภาคย่อยของ Clones เป็น subclone ของ Slupecki Clone และผู้วิจัยได้สังเกตเพิ่มเติม ณ จุดนี้ว่า Braids ก็คือหรือ Monotone clones ของเซตอันดับใน Theorem 1 ก็ตาม ต่างเป็นเซตอันดับไม่มีขอบเขตชนิดไม่ขาดตอน ผู้วิจัยจึงพิจารณา Monotone clones ของเซตอันดับไม่มีขอบเขตชนิดขาดตอนบ้าง ปรากฏว่าเราสามารถสร้างความสัมพันธ์สมมูลที่ไม่ใช่เอกลักษณ์และไม่ใช่เอกภพ θ ที่ซึ่ง $\text{Clo}(\leq) \subseteq \text{Clo}(\theta)$ โดยการนิยาม $\theta \subseteq A^2$ ดังนี้

$$(x, y) \in \theta \iff x \text{ and } y \text{ are in the same component}$$

ทำให้เราได้ผลสรุปต่อไปนี้

Proposition 1 : If P is a disconnected ordered set which is not an anti-chain, then there is a non-trivial equivalence relation θ such that $\text{Clo}(\leq) \subseteq \text{Clo}(\theta)$.

ขอให้สังเกตว่าถ้า P คือ anti-chain แล้วความสัมพันธ์สมมูล θ ที่นิยามดังข้างต้นจะเป็นเอกลักษณ์ ซึ่งไปกว่านั้น $\text{Clo}(\leq)$ จะเป็น $O(A)$ จึงไม่เป็น subclone ของ clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มใด ๆ

นอกจากนี้ Clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มที่ประกอบด้วย Monotone clones ของเซตที่เป็นอันดับไม่มีขอบเขตและไม่ขาดตอน P จะเป็นพวกขึ้นขงความสัมพันธ์กลาง หรือพวกขึ้นขงความสัมพันธ์ก่อนนิคปรกติที่อาจไม่ใช่ Slupecki Clone ในที่สุดผู้วิจัยก็สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทต่อไปนี้

Theorem 2 : Let P be an unbounded connected ordered set. Then $\text{Clo}(\leq)$ is a subclone of a maximal clone preserving either a central relation or a k -regularly generation relation.

ผลงานเหล่านี้ส่วนหนึ่งได้ถูกนำเสนอในการประชุม “7th National Conferences on Algebras” ณ Beijing Normal University กรุงปักกิ่ง ประเทศสาธารณรัฐประชาชนจีน ระหว่าง 9 - 14 ตุลาคม 2542 ในหัวข้อ “Maximal Clones of Ordered Sets” และในการประชุมทางวิชาการ “International Workshop and Conference on General Algebra and Discrete Mathematics” ระหว่าง 19 - 22 ตุลาคม 2542 ณ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย กรุงเทพฯ

เมื่อเราทราบ Classes ทั้งหมดของความสัมพันธ์ที่ให้ Maximal clone ซึ่งประกอบด้วย Monotone clones ของเซตอันดับไม่มีขอบเขตและไม่ขาดตอน ผู้วิจัยจึงต้องการว่าคุณสมบัติเหล่านี้เป็นข้อกำหนด กลุ่มของ Ordered Sets ซึ่งอาจศึกษาในเชิงของ Order Variety ได้หรือไม่ ผู้วิจัยพิสูจน์ผลเหล่านี้ ร่วมกับผลที่กล่าวไว้ในช่วงแรกเขียนเป็นบทความทางวิชาการในชื่อ “On Monotone Clones of Connected Ordered Sets” ซึ่งได้รับการตอบรับและลงตีพิมพ์แล้วในวารสาร Algebra and Discrete Mathematics ของประเทศสาธารณรัฐเยอรมนี และได้แนบสำเนา manuscript ของบทความไว้ในภาคผนวก (ก)

3. All Maximal Clones containing a Crown

ในแนวทางการศึกษาเพื่อพิสูจน์ผลลัพธ์ดังกล่าวในหัวข้อ 2 ผู้วิจัยสนใจว่าจะมีเซตอันดับที่มี monotone clone เป็นสับเซตของ Clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มซึ่งขึ้นขงทั้งความสัมพันธ์กลางและความสัมพันธ์ก่อกำเนิดแบบปรกติ หรือไม่ และพบว่า crowns เป็นกลุ่มตัวอย่างกลุ่มหนึ่งดังกล่าว นอกจากนี้ crowns ก็เป็นกลุ่มของเซตอันดับที่น่าสนใจศึกษา เพราะ crowns เป็นเซตอันดับที่มีความสมมาตร และมีความสำคัญในการศึกษาเรื่องทฤษฎีของเซตอันดับ นอกจากนี้ crowns ยังเป็นกลุ่มย่อยของ Braids ซึ่งอาจทำให้เราได้แนวทางการศึกษา clones ของ Braids ต่อไป ผู้วิจัยได้ทำการศึกษหา arities ทั้งหมดของความสัมพันธ์ที่จะให้ clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มที่มี Monotone clones ของ crowns เป็น subclone ทั้งพวกความสัมพันธ์กลางและพวกความสัมพันธ์ก่อกำเนิดปรกติ รวมทั้งวิเคราะห์การสร้าง clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มเหล่านั้นด้วย

ทฤษฎีบทที่สำคัญที่ได้จากการศึกษาดังกล่าว พอจะสรุปเป็นสังเขปดังต่อไปนี้

Lemma 1 : If C contains a minimal (or maximal) element of a crown C_n , then C contains all the minimal (or maximal) elements of C_n .

Lemma 2 : If $k \neq n$, then $C = \emptyset$ or $R = P^k$.

Theorem 3 : Let p be an n -ary relation defined on a crown C_n with $n \geq 2$ by

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in p \iff \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \neq U$$

or
$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in p \iff \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \neq D$$

Then, p is the only central relation admitting $\text{Clo}(C_n)$.

Lemma 3 : Let p be a k -regularly generated on P with $k \geq 3$. If $3 \leq k \leq n$, then p does not admit $\text{Clo}(C_n)$.

Corollary 2 : There is no $(n+2)$ -regularly generated on P with $n \geq 3$ which admits $\text{Clo}(C_n)$.

Lemma 4 : Let p be a k -regularly generated on P with $k \geq 3$. If $n+3 \leq k < 2n$, then p does not admit $\text{Clo}(C_n)$.

Theorem 4 : Let C_n be an n -crown.

(i) If $n \geq 2$, then $\text{Clo}(C_n)$ is Slupecki, or

(ii) If $n \geq 3$, there is an $(n+1)$ -regularly generated relation on P which admit $\text{Clo}(C_n)$, or

(iii) If n is even, there is an $(n+2)$ -regularly generated relation on P which admit $\text{Clo}(C_n)$.

ผู้วิจัยได้รวบรวมผลงานเหล่านี้เขียนเป็นบทความทางวิชาการในชื่อ “All Maximal Clones containing a Crown” และส่งไปเพื่อตีพิมพ์ในวารสารวิชาการชื่อ “Southeast Asian Bulletin of Mathematics” และได้แนบสำเนาของบทความไว้ในภาคผนวก (ข)

4. Compatible Orders of a lattice

ในหัวข้อนี้ผู้วิจัยศึกษาคุณสมบัติทางพีชคณิตของ compatible orders ของ lattices ซึ่งปรากฏว่า monotone clones ของเซตอันดับทวิชั้นยอมรับ majority operations ของ lattices ที่กำหนด compatible orders นั้น ๆ ซึ่งแสดงว่า monotone clone ซึ่งขึ้นของ compatible orders ของ lattices จะเป็น finitely generated monotone clones และเป็น subclone ของ clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มที่ขึ้นของเฉพาะความสัมพันธ์กลางเท่านั้น นอกจากนี้ผู้วิจัยยังศึกษาพบว่า compatible ordered sets ยังเป็นกลุ่มของเซตอันดับที่มีคุณลักษณะทางกราฟใกล้เคียงกับของ lattices จึงได้จำแนกเซตอันดับที่เป็น compatible orders ของ lattices ทั้งหมด โดยใช้คุณสมบัติทางพีชคณิต และโดยวิธีการจากการศึกษาผู้วิจัยได้ผลงาน ที่สามารถนำมาเขียนบทความทางวิชาการได้ 2 บทความ

บทความแรกชื่อ “All Ordered Sets having Amenable Lattice Order” ในบทความนี้ผู้วิจัยให้เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอสำหรับ orders ที่จะเป็น compatible orders ของ lattice ที่กำหนด บทความนี้ได้ส่งเพื่อตีพิมพ์ในวารสารทางวิชาการชื่อ “East-West Journal of Mathematics” และได้แนบสำเนาของบทความไว้ในภาคผนวก (ค)

บทความที่สองชื่อ “Graph Isomorphism of Ordered Sets” ในบทความนี้ผู้วิจัยแสดงว่า compatible orders ของ lattice จะมี identical graph กับ graph ของ lattice นั้น และให้เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอสำหรับ orders ที่จะมี identical graph กับ graph ของ lattice นอกจากนี้ยังปรากฏผลว่า orders เหล่านั้นก็คือ compatible orders ของ lattice ถ้า graph isomorphism ขึ้นของ subgraph ลักษณะเฉพาะที่เรียกว่า cell สำเนาของบทความที่สอง หาค่าได้ในภาคผนวก (ค)

ผลเหล่านี้นอกจากจะตอบคำถามที่เราสนใจเกี่ยวกับ monotone clones ที่เป็นชนิดกึ่งกำเนิดแบบจำกัด ตามหัวข้อของโครงการวิจัยแล้ว ยังเป็นการตอบคำถามกรณีทั่วไป ซึ่ง Birkhoff [2] ตั้งคำถามไว้ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1967 เกี่ยวกับการมี identical graph ในกลุ่มของ lattice และทำให้ผลใน [9], [10], [11] และ [12] เป็นกรณีเฉพาะของบทความทั้งสองนี้ด้วย

หนังสืออ้างอิง

1. K. A. Baker and A. F. Pixley, (1975), *Polynomial interpolation and the Chinese Remainder Theorem for Algebraic Systems*, Math. Z. 14(165-174).
2. G. Birkhoff, (1967), *Lattice Theory*, 3rd Ed., Amer. Soc. , Providence.
3. G. Czedli, A. P. Huhn and L. Szabo , (1980), *On compatible ordering of lattices*, Contributions to lattice theory Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 33, North-Holland, Amsterdam-New York, (87-99).
4. B.A. Davey, R. W. Quackenbush, and D. Schweigert, (1990), *Monotone Clones and the Varieties They Determine*, Order 7(145 – 167)
5. B.A. Davey, J. B. Nation, R.N. McKenzie and P.P. Palfry, (1994), *Braids and their Monotone Clones*, Algebra Universalis 32(153-176).
6. J. Demetrovics and L. Ronyai, (1989), *Algebraic Properties of Crowns and Fences*, Order 6, (91-99).
7. D. Duffus and I. Rival, (1981), *A Structure Theory of Ordered Sets*, Discrete Mathematics 35(53-118).
8. D. J. Hansen, (1973), *Compatible partial orderings in Boolean algebras*, Comment. Math. Univ. Carolinae 14(231-239).
9. J. Jakubik, (1985), *Graph isomorphisms of semimodular lattices*, Math. Slovaca 35(229-232).
10. J. Jakubik, (1985), *On isomorphisms of graphs of lattices*, Czech. Math. J. 35(188-200).
11. M. Kolibiar, (1983), *Compatible orderings in semilattices*, Contributions to general algebra 2 (Klagenfurt, 1982), Holder-Pichler-Tempsky, Vienna (215-220).
12. M. Kolibiar, (1982), *Semilattices with isomorphic graphs*, in Universal Algebra (Esztergom, 1977), Coll. Math. Soc. J. Bolyai, 29, North-Holland, Amsterdam, (473-481).
13. D. Lau, (1978), *Bestimmung der Ordnung Maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik*, Z. Math. Logik u. Grundlagen d. Math. 24(79-96).
14. C. Ratanaprasert (1995), *Compatible Orders of Semilattices*, Tatra Mountains Math. Publ. 5(177-187).

15. C. Ratanaprasert and B. A. Davey (1987), *Semimodular Lattices with Isomorphic graphs*, Order 4, by D. Reidel Publishing Company (1-13).
16. I.G. Rosenberg, (1990), *Uder die funktionale Vollständigkeit in dem mehrwertigen Logiken Struktur der Funktionen von mehreren Veränderlichen auf endlichen Mengen Rozprawy Breve Cs. Akademie Ved., Ser. Math. Nat. Sci.* 80(3-93).
- 17 I.G. Rosenberg and D. Schweigert (1984), *Compatible orderings and tolerances of lattices*, Orders :description and roles (L' Arbresle, 1982), North-Holland Math. Stud. 99, North-Holland, Amsterdam-New York, (119-150).
18. A. Szendrei,(1986), *Clones in Universal Algebra*, Les Presses de l' Universite de Montreal.
19. G. Tardos, (1986), *A Maximal Clone of Monotone Operations which is not Finitely Generated*, Order 3(211-218).
20. R. N. McKenzie, G. F. McNulty and W.F. Taylor, (1987), *Algebras, Lattices, Varieties*, Vol. 2, manuscript.
21. L. Zadori, (1994), *Series Parallel Posets with Nonfinitely Generated Clones*, Order 10,(305-316).
22. จวีวรรณ รัตนประเสริฐ, (2540), *รายงานการวิจัยเรื่อง Clones ทางเคี้ยวของ Strings*, สถาบันวิจัยและพัฒนา มหาวิทยาลัยศิลปากร

Outputs :

จากผลงานวิจัยเรื่อง Clone ทางเทคนิคก่อกำเนิดแบบจำกัด ที่ได้ศึกษามา ผู้วิจัยสามารถนำมาเขียนบทความทางวิชาการเพื่อส่งตีพิมพ์ในวารสารทางวิชาการได้ 4 บทความดังนี้

1. C. Ratanaprasert , *On Monotone Clones of Connected Ordered Sets*, General Algebra and Discrete Mathematics, 59th Arbeitstagung allgemeine Algebra, Potsdam, February 2000. (in press)
2. C. Ratanaprasert , *All Maximal Clones containing a Crown*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics (Submitted).
3. C. Ratanaprasert , *All Ordered Sets having Amenable Lattice Order*, East-West Journal of Mathematics (Submitted).
4. C. Ratanaprasert , *Graph Isomorphism of Ordered Sets*, manuscripts.

ซึ่งจำนวนบทความข้างต้นได้บรรลุเป้าหมายที่วางไว้ว่า ผลงานวิจัย ดังกล่าว สามารถเขียนเรียบเรียงเป็นบทความทางวิชาการได้อย่างน้อย 2 บทความ

การประยุกต์ใช้ผลงานวิจัย (โปรแกรม ผู้ใช้ / หน่วยงาน, ช่วงเวลา, สถานที่ ที่นำผลงานไปใช้)

1. การนำไปใช้ประโยชน์

☐ เจริญพาณิชย์

- มีการนำไปผลิต/ขาย/ก่อให้เกิดรายได้ โดยโครงการ

.....

- มีการนำไปประยุกต์ใช้โดย ภาครัฐกิจ/บุคคลทั่วไป

.....

☐ เจริญนโยบาย

- มีการกำหนดนโยบายอิงงานวิจัย

.....

- เกิดมาตรการใหม่

.....

☒ เจริญสาธารณะ

- มีเครือข่ายความร่วมมือเกิดขึ้น/เชื่อมโยงทางวิชาการกับนักวิชาการอื่น ๆ

ทั้งในประเทศและต่างประเทศ

ผู้วิจัยจะเริ่มโครงการวิจัยใหม่ในปี พ. ศ. 2544 โดยใช้ชื่อโครงการวิจัยว่า “Monotone Clone and Identities” ซึ่งเป็นโครงการที่ใช้ผลงานและสานต่อโครงการ FGMC โดยจะทำงานร่วมกับกลุ่มทำงานวิจัยของ Prof. Dr. Klaus Denecke จากประเทศสาธารณรัฐเยอรมัน

- สร้างกระแสความสนใจในวงกว้าง

คณาจารย์ของมหาวิทยาลัยหอการค้าไทย ภายใต้นำของอาจารย์ ดร. นิตติยา ประภาพรณ์ มีความประสงค์จะเข้าร่วมในโครงการวิจัยเรื่อง “Monotone Clone and Identities” โดยเชิญผู้วิจัยบรรยายผลงานของโครงการวิจัย FGMC ระหว่างเดือนพฤศจิกายน 2543 ถึงเดือนมกราคม 2544 ณ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

☑ เจริญวิชาการ

- การพัฒนาการเรียนการสอน

ผู้วิจัยได้นำผลงานวิจัยบางส่วนเป็นหัวข้อสัมมนา และปัญหาข้างเคียง เป็นหัวข้อวิทยานิพนธ์ของนักศึกษาปริญญาโท ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ระหว่างปี 2542 - 2544

- สร้างนักวิจัยใหม่

นางสาวอวภาส ฉันทศาสตร์รัศมี นักศึกษาปริญญาโทคณิตศาสตร์ ของ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร จะไปเสนอผลงานวิจัยเรื่อง “Some Modular Lattices of Subgroups” ซึ่งเป็นผลงานบางส่วนของวิทยานิพนธ์ที่ทำภายใต้การดูแลของผู้วิจัย ในการประชุมเรื่อง “The Galois Connection” ซึ่งจัดขึ้น ณ กรุง Berlin ประเทศสาธารณรัฐเยอรมัน ในเดือนมีนาคม 2544 และหลังจากนั้น จะอยู่ศึกษาอบรม กับ Prof. Dr. Klaus Denecke เพื่อกลับมาทำงานเป็นนักวิจัยใน โครงการ “Monotone Clone and Identities” และเป็นอาจารย์ ณ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

ภาคผนวก (ก)

On Monotone Clones of Connected Ordered Sets*

C. Ratanaprasert

May 9, 2000

Abstract

I.G. Rosenberg has classified all maximal clones over a finite set A by finding six classes of relations such that maximal clones are just the clones of operations on A preserving one of these relations. We study some properties of the clone of all operations preserving a partial order on a finite set P ; called the monotone clone on P . If P is unbounded and connected, we prove that the monotone clone on P is not a subclone of a maximal clone preserving the relations of Class(1) to Class(4) of Rosenberg's six classes; and that the monotone clone on P is a subclone of a maximal clone preserving the relations only from Class(6) if P has either the greatest element or the least element. We also show that those monotone clones which are contained in maximal clones corresponding to Class(5) or Class(6) of relations are closed under a finite product.

1 Introduction

Let $O(A)$ denote the set of all finitary nonnullary operations on a set A . A subset C of $O(A)$ is called a *clone* if C contains all projection maps and is closed under arbitrary superposition; that is, if $f_1, f_2, \dots, f_n$ are k -ary maps in C and g is an n -ary map in C for some positive integers k and n , then $g(f_1, f_2, \dots, f_n) \in C$. The set of all clones over A is an ordered set with respect to inclusion; in fact, it is a complete lattice with the dual atoms being the maximal clones.

*Research supported by the Thailand Research Fund. The author wishes to thank Prof. Dr. K. Denecke and Prof. Dr. B.A. Davey for many useful suggestions.

It is known that every proper subclone is contained in a maximal one. I.G. Rosenberg[10] has classified all maximal clones by finding six classes of relations such that maximal clones are just the clones of operations preserving a relation from one of these classes. We now give Rosenberg's six classes of relations on a finite set A .

Class(1): The class of all bounded orders. These are reflexive, transitive and anti-symmetric binary relations $\rho \subseteq A \times A$ with $(0, x) \in \rho$ and $(x, 1) \in \rho$ for all $x \in A$ and for some $0, 1 \in A$.

Class(2): The class of all prime permutations. These are binary relations $\rho = \{(a, \alpha(a)) | a \in A\} \subseteq A \times A$ where α is a permutation on A all of whose cycles have the same prime length.

Class(3): The class of all prime affine relations. A 4-ary relation $\rho \subseteq A^4$ is affine if we can define an abelian group operation, $+$, on A so that $(a, b, c, d) \in \rho$ if and only if $a + b = c + d$. An affine relation ρ is prime if $\langle A; + \rangle$ is an abelian group of prime power order. This class is empty unless $|A|$ is a prime power.

Class(4): The class of all non-trivial equivalence relations. These are reflexive, symmetric and transitive binary relations $\rho \subseteq A \times A$ which are not the diagonal relation $\omega = \{(a, a) | a \in A\}$ nor the universal relation $A \times A$.

Class(5): The class of all relations which are k -regularly generated for some $3 \leq k \leq |A|$. For $3 \leq k \leq |A|$, a set $T = \{\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_m\} (m \geq 1)$ of equivalence relations on A is k -regular if each Θ_i , $(1 \leq i \leq m)$ has exactly k equivalence classes and the intersection $\bigcap_{i=1}^m \epsilon_i$ of arbitrary equivalence classes ϵ_i of Θ_i is nonempty.

A k -ary relation $\rho = \{(a_1, \dots, a_k) | a_i \in A \text{ for all } i = 1, \dots, k\}$ is k -regularly generated by T if for each $1 \leq i \leq m$, at least two of the elements $a_1, \dots, a_k$ are equivalent modulo Θ_i .

Class(6): The class of all central relations. A k -ary relation $\rho \subseteq A^k$ ($k \geq 1$) is *totally reflexive* if $\{(a_1, \dots, a_k) | a_i = a_j \text{ for some } i \neq j\} \subseteq \rho$; and is *totally symmetric* if for any permutation α on $\{1, \dots, k\}$ we have $(a_1, \dots, a_k) \in \rho$ if and only if $(a_{\alpha(1)}, a_{\alpha(2)}, \dots, a_{\alpha(k)}) \in \rho$. The *center* of ρ is the set of all $a \in A$ such that $(a, a_2, \dots, a_k) \in \rho$ for all $a_2, \dots, a_k \in A$. We say that ρ is *central* if it is totally reflexive, totally symmetric, and has a center which is a non-empty, proper subset of A . Note that these conditions imply that $k < |A|$.

Let ρ be a relation on a finite set A . Then the subset of all operations from $O(A)$ preserving ρ forms a subclone of $O(A)$. We denote a clone of operations

preserving a relation ρ on a finite set A by $\text{Pol}(\rho)$; so maximal clones are just the clones $\text{Pol}(\rho)$ of operations preserving a relation ρ of one of the six types.

The following theorem can be found in [14].

1.1 Theorem [14] *Let ρ be a k -ary relation from $\text{Class}(5)$ associated with $\theta_1, \dots, \theta_m (m \geq 1)$ over a finite set A . Then $\text{Pol}(\rho)$ is the set of all operations $F \in O(A)$ which satisfy (if F is n -ary) for each $1 \leq i \leq m$ either:*

- (i) *the range of F intersects fewer than k θ_i -classes; or*
- (ii) *there exist $u \leq n$ and $v \leq m$ and a function $f_i : A/\theta_v \rightarrow A/\theta_i$ so that $F(\bar{x})/\theta_i = f_i(x_u/\theta_v)$ for all $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in A^n$.*

We note that for $k = |A|$, the condition (ii) of Theorem 1.1 implies that F is essentially unary (defined below). So, all operations in $\text{Pol}(\rho)$ where ρ is $|A|$ -regularly generated are either non-surjective or essentially unary; and we call $\text{Pol}(\rho)$, Slupecki clone.

Let $P = \langle P; \leq \rangle$ be an ordered set. For a positive integer n , a map $f : P^n \rightarrow P$, is called an *order-preserving map* or *monotone* if $x_i \leq y_i$ in P for $1 \leq i \leq n$ implies $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \dots, y_n)$; f is called *essentially unary* if there exists $1 \leq i \leq n$ and a map $\sigma : P \rightarrow P$ such that $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sigma(x_i)$ for all $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P^n$; f is called a *near unanimity function* if for all $x, y \in P$, $f(x, x, \dots, x, y) = f(x, \dots, y, \dots, x) = \dots = f(y, \dots, x, x) = x$.

The clone $\text{Pol}(\leq)$ on P is the set of all finitary order-preserving maps with respect to $\leq$; and we call $\text{Pol}(\leq)$ the *monotone clone* of P .

Eventhough it is known that there are only finitely many maximal clones on a finite set P , it is in general not easy to decide which maximal clones on P contain the monotone clone of $P = \langle P; \leq \rangle$. In [3], they studied a class of ordered sets known as braids, which is a natural extension of the class of crowns and they also showed that the monotone clones of most braids are contained in Slupecki clones.

A clone C is finitely generated if C is the smallest clone containing some finite subset H of C . It was shown in [8] that almost all maximal clones, except for some of those preserving relations in $\text{Class}(1)$, are finitely generated. There are attempts to determine all finite bounded ordered sets $P = \langle P; \leq \rangle$ such that $\text{Pol}(\leq)$ is finitely generated.

A result of Baker and Pixley [1] implies that a clone containing a near unanimity function is finitely generated.

For the case of finite unbounded ordered set, one can ask the question when does it have an order-preserving near unanimity function?. In [7], they gave a finite generating set of the monotone clones of fences and crowns and they also proved that the clones of all fences contain a near unanimity function while the case of crowns is particularly interesting because they admit no order-preserving near unanimity function.

2 Classes of maximal clones containing monotone clones

Let $\mathbf{P} = \langle P; \leq \rangle$ be a finite ordered set. If $\leq$ is bounded, then it is well known that $Pol(\leq)$ is maximal. In this section, we are concerned with the case when $\leq$ is unbounded. We first prove that the monotone clone of an unbounded connected ordered set is a proper subclone of a maximal clone containing all operations preserving a relation ρ of Class(5) or Class(6); and we will call $Pol(\rho)$ a k -regularly generated maximal clone or a central maximal clone; respectively.

For $a \in P$, we define $\downarrow a = \{x \in P \mid x \leq a\}$ and $\uparrow a = \{x \in P \mid a \leq x\}$. If $c \leq d$, it is obvious that functions $g_1 : P \rightarrow P$ and $g_2 : P \rightarrow P$ defined respectively by

$$g_1(x) = \begin{cases} c, & \text{if } x \in \downarrow a; \\ d, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

or

$$g_2(x) = \begin{cases} d, & \text{if } x \in \uparrow a; \\ c, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

are order-preserving maps.

2.1 Theorem *Let $\mathbf{P} := \langle P; \leq \rangle$ be a finite ordered set. Then, either*

- (i) $Pol(\leq) = O(A)$; or (ii) $Pol(\leq)$ is a bounded maximal clone; or*
- (iii) $Pol(\leq)$ is not a subclone of a maximal clone of operations preserving a relation on P of one of Class(1) to Class(3).*

Proof: If $\mathbf{P}$ is an antichain then clearly $Pol(\leq) = O(P)$. If $\mathbf{P}$ is a bounded ordered set then $\leq$ belongs to Class(1) of Rosenberg's six classes of relations.

So, we may assume that $\leq$ is unbounded and is not an antichain and $|P| = n \geq 3$. We will show that if ρ is a relation on P of Class(1) to Class(3) of Rosenberg's six classes of relations, we can define an order-preserving map g which does not preserve ρ .

Class(1) : Let $\leq^*$ be a bounded order defined on P with 0 and 1 being the smallest and the largest element, respectively in P with respect to $\leq^*$; that is, $0 \leq^* x$ and $x \leq^* 1$ for all $x \in P$. If there exists an element $a \in P$, $a \neq 0$ which is comparable to 0 with respect to $\leq$ (or there is an element $a \in P$, $a \neq 1$ which is comparable to 1 with respect to $\leq$), without restriction of generality we may assume that $0 \leq a$ and a can be chosen to be maximal.

If a is not the greatest element with respect to $\leq$, then there is an element $c \in P$ such that a and c are not comparable. If $a \geq 1$ we define $g : P \rightarrow P$ by

$$g(x) = \begin{cases} a, & x \in \uparrow c; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and if a and 1 are not comparable we define $g : P \rightarrow P$ by

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \downarrow 1; \\ a, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In the first case we have $1 \notin \uparrow c$ ($1 \in \uparrow c$ implies $c \leq 1 \leq a$, a contradiction.); hence, $g(1) = 0 <^* a = g(c)$. For the latter case we have $a \notin \downarrow 1$; hence $g(1) = 0 <^* a = g(a)$. In either cases g does not preserve $\leq^*$.

If a is the greatest element with respect to $\leq$, then there are elements $b, c \in P$ such that $b \leq 0$ and b is not comparable with c . If $a = 1$ we define $g : P \rightarrow P$ by

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \downarrow c; \\ 1, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and if $a \neq 1$ we define $g : P \rightarrow P$ by

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \downarrow 1; \\ a, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Hence, we have either $g(c) = 0 <^* 1 = g(0)$ ($0 \in \downarrow c$ implies $b \leq 0 \leq c$, a contradiction) or $g(1) = 0 <^* a = g(a)$. In either cases, g does not preserve $\leq^*$.

If 0 and 1 are not comparable to all $x \in P$ and since P is not an antichain, there are comparable elements c and d in P and we may assume that $c \leq d$. If $c \leq^* d$ we define $g : P \rightarrow P$ by

$$g(x) = \begin{cases} d, & x = 0; \\ c, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and if $c \not\leq^* d$ we define $g : P \rightarrow P$ by

$$g(x) = \begin{cases} c, & x = 0; \\ d, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In either cases, we have $g(0) \not\leq^* g(1)$; hence, g does not preserve $\leq^*$.

Class(2) : Let α be a permutation defined on P such that every cycle of α has prime length p and let $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ be a cycle of α . Let ρ be the graph of α . If there is an a_k in the cycle $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ such that a_k and $\alpha(a_k)$ are comparable, we define $g : P \rightarrow P$ for the case $c, d \in \{a_k, \alpha(a_k)\}$ with $c \leq d$ by

$$g(x) = \begin{cases} c, & x \in \downarrow d; \\ d, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Therefore, we have $(a_k, \alpha(a_k)) \in \{(c, d), (d, c)\}$ and $(g(a_k), g(\alpha(a_k))) = (c, c) \notin \rho$ which implies that g does not preserve ρ .

If a_j and $\alpha(a_j)$ are not comparable for all a_j in the cycle $(a_1, a_2, \dots, a_p)$, there are comparable elements c and d in P such that $(c, d) \notin \rho$ and we may assume that $c \leq d$. Let a_k be an element in the cycle $(a_1, a_2, \dots, a_p)$. We define $g : P \rightarrow P$ by

$$g(x) = \begin{cases} c, & x \in \downarrow a_k; \\ d, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Now, we have $(a_k, \alpha(a_k)) \in \rho$; but $(g(a_k), g(\alpha(a_k))) = (c, d) \notin \rho$.

Class(3) : If n is not a prime power, then we cannot define an operation $+$ on P such that $\langle P; + \rangle$ is an abelian p -group; hence, we cannot construct a prime affine relation ρ on P so that $Pol(\rho)$ contains $Pol(\leq)$.

We consider the case $n = p^r$ for some prime number p and positive integer r . Let $\rho \subseteq P^4$ be a prime affine relation with respect to the elementary p -group $\langle P; +, -, 0 \rangle$. If there is an element $b \in P - \{0\}$ which is comparable to 0, we may assume that $b \leq 0$ and b is minimal. We define $g : P \rightarrow P$ by

$$g(x) = \begin{cases} b, & x = b \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

If $-b \neq b$ (that is the case $p \neq 2$; or the case $p = 2, r > 1$ and $b + b \neq 0$) we have $(b, -b, 0, 0) \in \rho$ since $b + (-b) = 0 = 0 + 0$; but $(g(b), g(-b), g(0), g(0)) = (b, 0, 0, 0) \notin \rho$ since $b + 0 = b \neq 0 = 0 + 0$.

If $-b = b$ (the case $n = 2^r$ for some $r \geq 2$), then $b + b = 0$. Since $n \geq 3$, we have $n \geq 4$; hence, there is an element $c \in P - \{0, b\}$ such that $c \neq b + c$ and $b + c \notin \{0, b\}$. Now, clearly, $(b, c, b + c, 0) \in \rho$; but again, $(g(b), g(c), g(b + c), g(0)) = (b, 0, 0, 0) \notin \rho$.

If 0 is not comparable to all $b \in P$, $b \neq 0$ we will have elements $c \neq d$ in P such that $c \leq d$. Since $c + d = d + d$ implies $c = d$, we have $(c, d, d, d) \notin \rho$. Now, we define $g : P \rightarrow P$ by

$$g(x) = \begin{cases} c, & x = c; \\ d, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Again, $-c \neq c$ implies that $(c, -c, 0, 0) \in \rho$ but $(g(c), g(-c), g(0), g(0)) = (c, d, d, d) \notin \rho$. If $-c = c$, we will have elements b and $c + b$ which does not belong to the set $\{0, c\}$. Now, we have $(c, b, c + b, 0) \in \rho$ but $(g(c), g(b), g(c + b), g(0)) = (c, d, d, d) \notin \rho$. $\square$

It was proved in [2] that if $\mathbf{P}$ is disconnected, then the nontrivial equivalence relation θ whose blocks are connected components of $\mathbf{P}$ will give a maximal clone $\text{Pol}(\theta)$ containing the monotone clone of $\mathbf{P}$; and if $\mathbf{P}$ is connected then there is no nontrivial equivalence relation θ on P such that $\text{Pol}(\leq)$ is a subclone of $\text{Pol}(\theta)$.

If ρ is a k -ary relation of class(6) and $\text{Pol}(\rho)$ contains the monotone clone of an unbounded ordered set $\mathbf{P}$, then $k \neq 1$ since $\rho \subseteq P$ implies that there are $c \in P$ with $c \notin \rho$ and a unary constant map $\underline{c}$ which does not preserves ρ ; hence, ρ is of arities $2 \leq k < |P|$. We have the following corollary.

2.2 Corollary *If $\mathbf{P} := \langle P; \leq \rangle$ is a finite connected unbounded ordered set, then $\text{Pol}(\leq)$ is a subclone of a central maximal clone generated by a relation of arity greater than 1 or of a k -regularly generated maximal clone.*

2.3 Theorem *Let $\mathbf{P} = \langle P; \leq \rangle$ be an unbounded connected ordered set. If $\text{Pol}(\leq)$ is contained in a k -regularly generated maximal clone for some $3 \leq k \leq |P|$ then $\text{Pol}(\leq)$ contains no near unanimity functions.*

Proof: Let ρ be a k -regularly generated relation on P with $3 \leq k \leq |P|$ and let $\theta_1, \dots, \theta_m (m \geq 1)$ be equivalence relations associated with ρ . Then for $1 \leq i \leq m$, each θ_i has exactly k equivalence classes; so for each $1 \leq i \leq m$, there are $a \neq b$ in P such that $(a, b) \notin \theta_i$. Suppose that $\text{Pol}(\rho)$ contains an n -ary near unanimity function $\mu : P^n \rightarrow P$. Since μ is onto, for each $1 \leq i \leq m$ there exist $1 \leq u \leq n$ and $1 \leq v \leq m$ and a function $f_i : P/\theta_v \rightarrow P/\theta_i$ such that $\mu(x_1, \dots, x_n)/\theta_i = f_i(x_u/\theta_v)$ for all $(x_1, \dots, x_n) \in P^n$. Then, we have $(a, \dots, a) \in P^n$ and $(b, \dots, a, \dots, b) \in P^n$ (n -tuple contain all b except for the u^{th} - component); but $f_i(a/\theta_v) = \mu(a, \dots, a)/\theta_i = a/\theta_i \neq b/\theta_i = \mu(b, \dots, a, \dots, b)/\theta_i = f_i(b/\theta_v)$ which contradicts to f_i being a function. $\square$

2.4 Theorem *Let P be an unbounded ordered set containing the largest element 1 (dually, the least element 0). Then the monotone clone of P is a subclone of a central maximal clone; but, it is not a subclone of any k -regularly generated maximal clone.*

Proof: Let 1 denote the largest element of P and suppose that the monotone clone of P is a subclone of $\text{Pol}(\rho)$ where ρ is a k -regularly generated relation on P for some $3 \leq k \leq |P|$ associated with $\theta_1, \dots, \theta_m (m \geq 1)$. It is obvious that the binary operation defined by $xy = y$ if $x, y \in P - \{1\}$ and $xy = 1$ otherwise, is an onto order-preserving operation. By Theorem 1.1, for each $1 \leq i \leq m$, there are $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq m$ and a function $f_i : P/\theta_v \rightarrow P/\theta_i$ such that $xy/\theta_i = f_i(x_u/\theta_v)$ for all $(x, y) \in P^2$. Now, $1a = 1 = a1$ and $aa = a$ for all $a \in P$ imply that each f_i cannot be a function which is a contradiction. Hence, the binary operation does not belong to $\text{Pol}(\rho)$. By Corollary 2.2, we get the desired conclusion. Moreover, one can easily show that the binary relation

$$\rho = \{(x, y) \subseteq P \times P \mid x \leq u \geq y \text{ and } x \geq v \leq y \text{ for some } u, v \in P\}$$

is a central relation on P with 1 belonging to the center; and since P is unbounded, the center is proper. Clearly, $\text{Pol}(\rho)$ contains the monotone clone of P . $\square$

A fence is an example to show that the converse of Theorem 2.4 is not true because a fence contains no largest element and no least element; but it was shown in [7] that a fence admits a ternary near unanimity order preserving operation. Let denote an antichain of order n by n and for ordered sets P and Q , as linear sum $P + Q$ we denote the ordered set whose order is defined by

$$x \leq y \leftrightarrow (x \leq y \text{ in } P) \text{ or } (x \leq y \text{ in } Q) \text{ or } (x \in P \text{ and } y \in Q).$$

By Theorem 2.4 and [12], the monotone clones of the linear sums $1 + 2 + 2$ and $2 + 2 + 1$ are examples of subclones of central maximal clones which are not finitely generated.