

Project Code: BRG/18/2543

Project Title: Higher-dimensional Soliton Dynamics

Investigator: Michael A. Allen, Physics Department, Mahidol University

Co-investigator: Sarun Phibanchon, Burapha University

e-mail address: frmaa@mahidol.ac.th

Project Period: 2000–2002

Abstract:

Higher-dimensional solitons are nonlinear waves localized in either 2 or 3 dimensions. This study examined the existence, formation, and interaction of higher-dimensional solitons in a number of systems applying to plasma physics. We mostly looked at modified Zakharov-Kuznetsov (ZK) equations which model weakly nonlinear ion-acoustic waves in strong magnetic fields, and in particular those modelling systems with non-isothermal electrons. We demonstrated that, as in the isothermal case, systems with non-isothermal electrons exhibit higher-dimensional soliton solutions with high symmetry and these evolve from perturbed plane (1-d) solitons. We also looked at modified Kadomtsev-Petviashvili (KP) equations. We showed that these have a similar behaviour to the original KP equations, with the modified version with positive dispersion also possessing lump solitons which form after perturbing a plane soliton. This demonstrated that the existence of lump solitons is not a consequence of integrability, a property the KP equations possess but the modified forms do not.

A number of the equations we examined have two nonlinear terms. We discovered new families of algebraic solitons to these in one, two, and three dimensions. In one dimension these appear to collide elastically with ordinary solitons but the collisions are inelastic in the higher-dimensional cases with the algebraic solitons decaying to ordinary ones. Higher-dimensional solitons can be formed as a result of instabilities of plane solitons. We developed techniques to obtain approximate analytical expressions for the growth rate of such instabilities when there are two nonlinear terms. As part of this, we also stumbled across a technique for performing certain types of improper integrals involving hyperbolic functions.

In addition to the interactions of algebraic solitons, we also studied the collisions of spherical solitons with each other and collisions of cylindrical solitons with plane solitons. Collisions between spherical solitons are inelastic. In the case of off-axis collisions, the energy loss was found to show little dependence on the distance between trajectories if the distance was small enough for identity exchange of the solitons to take place. Properties of the emerging solitons were accounted for by using conservation laws. Collisions of cylindrical solitons with plane solitons always resulted in the destruction of the plane soliton. For large amplitude plane solitons, additional cylindrical solitons are formed as a result of the collision.

Keywords: soliton, stability, nonlinear, Zakharov-Kuznetsov equation, non-isothermal electrons

รหัสโครงการ: BRG/18/2543

ชื่อโครงการ: โซลิตอนในมิติสูง

ชื่อนักวิจัย: ไมเคิล อลัน ภาควิชาฟิสิกส์ ม.มหิดล

ชื่อรองนักวิจัย: ศรัณย์ ภิบาลชนม์ ม.บูรพา

e-mail address: frmaa@mahidol.ac.th

ระยะเวลาโครงการ: ๒๕๔๓-๒๕๔๕

บทคัดย่อ:

โซลิตอนในมิติสูงคือคลื่นไม่เชิงเส้นที่ดำรงอยู่ใน สอง และ สาม มิติ ในการศึกษานี้ได้ค้นหาการดำรงอยู่ รูปแบบ และการมีปฏิสัมพันธ์ของโซลิตอนในมิติสูงในระบบต่างๆที่ประยุกต์กับพลาสมาฟิสิกส์ โดยเราพิจารณาสมการแบบปรับปรุงของซาคคารอฟ-คุชเน็ตซอฟเป็นส่วนใหญ่ซึ่งเป็นสมการที่บรรยายคลื่นไอออนแบบไม่เชิงเส้นอย่างอ่อนในสนามแม่เหล็กความเข้มสูง เราได้ทำการสาธิตว่าระบบที่มีอิเล็กตรอนอุณหภูมิต่างกันจะให้ผลเฉลยที่เป็นโซลิตอนในมิติสูงและมีความเป็นสมมาตรสูงเช่นกันโดยจะเกิดขึ้นเหมือนกันกับระบบที่มีอิเล็กตรอนมีอุณหภูมิใกล้เคียงกัน ผลดังกล่าวเกิดจากการวิวัฒนาการของระนาบโซลิตอน (หนึ่งมิติ) ที่ถูกรบกวน นอกจากนี้เรายังได้ศึกษาสมการคาโดมัทเซฟ-เพิทเวียร์ชวิลแบบปรับปรุง ซึ่งก็แสดงพฤติกรรมแบบเดียวกับสมการแบบดั้งเดิม นอกจากนี้ สมการคาโดมัทเซฟ-เพิทเวียร์ชวิลแบบปรับปรุงชนิดที่มีการกระจายเชิงบวกจะให้ผลลัพธ์โซลิตอนหลังจากโซลิตอนแบบระนาบถูกรบกวน ผลที่แสดงนี้แสดงว่าการดำรงอยู่ของลัมพ์โซลิตอนไม่ใช่สิ่งที่เกิดกับระบบที่ผลเฉลยได้เหมือนกับสมการแบบดั้งเดิม เพราะสมการแบบปรับปรุงนี้ไม่สามารถหาผลเฉลยได้

เราได้ศึกษาสมการที่ประกอบด้วยความไม่เชิงเส้นสองเทอม และได้ค้นพบโซลิตอนเชิงพีชคณิต ซึ่งมีอยู่ใน หนึ่งสอง และ สามมิติ สำหรับหนึ่งมิติเมื่อชนกันจะเป็นแบบยืดหยุ่นกับโซลิตอนทั่วไป แต่การชนกันจะเป็นแบบไม่ยืดหยุ่นในกรณีของโซลิตอนที่อยู่ในมิติที่สูงกว่าหนึ่ง โดยโซลิตอนเชิงพีชคณิตจะสลายตัวกลับไปเป็นโซลิตอนแบบดั้งเดิม โซลิตอนในมิติสูงสามารถเกิดขึ้นจากผลของความไม่เสถียรของระนาบโซลิตอน เรายังได้พัฒนาการประมาณของอัตราการโตเชิงวิเคราะห์ของความไม่เสถียรในกรณีสมการที่มีเทอมไม่เชิงเส้นสองเทอม ผลเหตุการณ์ดังกล่าวทำให้เราค้นการหาค่าตอบของปริพันธ์ไม่ตรงแบบของฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก

นอกเหนือจากการศึกษาปฏิสัมพันธ์ระหว่างโซลิตอนพีชคณิต ได้แสดงว่าการชนกันระหว่างโซลิตอนเชิงทรงกลมจะไม่เสถียร สำหรับกรณีของการชนแบบกระเจิง พลังงานที่สูญเสียกับจะขึ้นกับระยะทางของเส้นทางการเคลื่อนที่เพียงเล็กน้อยแต่ถ้าระยะทางสั้นเพียงพอก็จะเหมือนกับการแลกเปลี่ยนโซลิตอน นั่นคือคุณสมบัติของการเกิดโซลิตอนจะต้องให้กฎทรงพลังงานด้วย สำหรับการชนระหว่างโซลิตอนเชิงทรงกระบอกรับกับโซลิตอนเชิงระนาบจะเป็นการแสดงผลของการทำลายโซลิตอนเชิงระนาบ แต่ถ้าแอมพลิจูดของโซลิตอนเชิงระนาบมีค่ามาก ๆ จะสามารถเกิดโซลิตอนเชิงทรงกระบอกรับได้หลังจากการชน

คำหลัก: โซลิตอน, ความเสถียร, ไม่เชิงเส้น, สมการ ซาคคารอฟ-คุชเน็ตซอฟ, อิเล็กตรอนอุณหภูมิต่างกัน