

Project Code: BRG/18/2543

Project Title: Higher-dimensional Soliton Dynamics

Investigator: Michael A. Allen, Physics Department, Mahidol University

Co-investigator: Sarun Phibanchon, Burapha University

e-mail address: frmaa@mahidol.ac.th

Project Period: 2000–2002

#### Abstract:

Higher-dimensional solitons are nonlinear waves localized in either 2 or 3 dimensions. This study examined the existence, formation, and interaction of higher-dimensional solitons in a number of systems applying to plasma physics. We mostly looked at modified Zakharov-Kuznetsov (ZK) equations which model weakly nonlinear ion-acoustic waves in strong magnetic fields, and in particular those modelling systems with non-isothermal electrons. We demonstrated that, as in the isothermal case, systems with non-isothermal electrons exhibit higher-dimensional soliton solutions with high symmetry and these evolve from perturbed plane (1-d) solitons. We also looked at modified Kadomtsev-Petviashvili (KP) equations. We showed that these have a similar behaviour to the original KP equations, with the modified version with positive dispersion also possessing lump solitons which form after perturbing a plane soliton. This demonstrated that the existence of lump solitons is not a consequence of integrability, a property the KP equations possess but the modified forms do not.

A number of the equations we examined have two nonlinear terms. We discovered new families of algebraic solitons to these in one, two, and three dimensions. In one dimension these appear to collide elastically with ordinary solitons but the collisions are inelastic in the higher-dimensional cases with the algebraic solitons decaying to ordinary ones. Higher-dimensional solitons can be formed as a result of instabilities of plane solitons. We developed techniques to obtain approximate analytical expressions for the growth rate of such instabilities when there are two nonlinear terms. As part of this, we also stumbled across a technique for performing certain types of improper integrals involving hyperbolic functions.

In addition to the interactions of algebraic solitons, we also studied the collisions of spherical solitons with each other and collisions of cylindrical solitons with plane solitons. Collisions between spherical solitons are inelastic. In the case of off-axis collisions, the energy loss was found to show little dependence on the distance between trajectories if the distance was small enough for identity exchange of the solitons to take place. Properties of the emerging solitons were accounted for by using conservation laws. Collisions of cylindrical solitons with plane solitons always resulted in the destruction of the plane soliton. For large amplitude plane solitons, additional cylindrical solitons are formed as a result of the collision.

Keywords: soliton, stability, nonlinear, Zakharov-Kuznetsov equation, non-isothermal electrons

รหัสโครงการ: BRG/18/2543

## ชื่อโครงการ: โซลิต้อนในมิติสูง

ชื่อนักวิจัย: ไมเคิล อลัน ภาควิชาพิสิกส์ ม.มหิดล

ชื่อรองนักวิจัย: ศรีณย์ กิบาลชนม์ ม.บูรพา

e-mail address: frmaa@mahidol.ac.th

## ระยะเวลาโครงการ: ๒๕๔๓-๒๕๔๕

## บทคัดย่อ:

ໂছລິຕອນໃນມີຕືສູງຄືອັດລົ່ນໄມ່ເຊີງເສັ້ນທີ່ດໍາຮັງອຸຍຸໃນ ສອງ ແລະ ສາມ ມີຕີ ໃນການຕຶກຂານ໌ໄດ້ຄັ້ນຫາ ດໍາຮັງອຸຍຸ ຮູບແບບ ແລະ ການນີ້ປັບປຸງພັນນີ້ຂອງໂছລິຕອນໃນມີຕືສູງໃນຮະບົບຕ່າງໆທີ່ປະຢຸກຕົກພລາສາມາ ພຶສິກສົ່ວໂລກ ໂດຍເຮົາພິຈາລະນາສາມການແບບປັບປຸງຂອງໝາຍເລັດລົ່ນໄມ່ເຊີງເສັ້ນຍ່າງອ່ອນໃນສະນາມແມ່ເໜັກຄວາມເຂັ້ມສູງ ເຮົາໄດ້ກຳນົດສາມາດວ່າຮະບົບທີ່ ມີອິເລັກຕຽບຮອນອຸ່ນຫກົມຕ່າງກັນຈະໄທ້ພລເໜລຍທີ່ເປັນໂছລິຕອນໃນມີຕືສູງແລ້ວມີຄວາມເປັນສົມມາຕຽບສູງເຊັ່ນກັນ ໂດຍ ຈະເກີດຂຶ້ນແໜ້ວອັນກັນກັບຮະບົບທີ່ອິເລັກຕຽບຮອນມີອຸ່ນຫກົມໄກລ໌ເຄີຍກັນ ພລດັກລ່າວເກີດຈາກການວິວດັບນີ້ຂອງ ຮະນາບໂছລິຕອນ (ຫົນໜີຕີ) ທີ່ຖຸກຮັບກວນ ນອກຈາກນີ້ເຮັຍ້ງໄດ້ຕຶກຂານສາມການຄາໂດມທີ່ເໜັກ-ເພີ້ດວິເວີຣ໌ຊີ ລືແບບປັບປຸງ ທີ່ສັງເກົ່າແສດງພົດຕິກຣມແບບເດືອນກັບສາມການແບບດັ່ງເດີມ ນອກຈາກນີ້ ສາມການຄາໂດມທີ່ເໜັກ-ເພີ້ດວິເວີຣ໌ຊີ ລືແບບປັບປຸງ ທີ່ສັງເກົ່າແສດງວ່າການດໍາຮັງອຸຍຸຂອງລັມພື້ໂছລິຕອນແລ້ວຈາກໂছລິຕອນແບບຮະນາບ ຖຸກຮັບກວນ ພລທີ່ແສດງນີ້ ແສດງວ່າການດໍາຮັງອຸຍຸຂອງລັມພື້ໂছລິຕອນໄມ່ໃຊ້ສິ່ງທີ່ເກີດກັບຮະບົບທີ່ພລເໜລຍໄດ້ແໜ້ວອັນ ກັບສາມການແບບດັ່ງເດີມ ເພຣະສາມການແບບປັບປຸງນີ້ໄມ່ສາມາດຫາພລເໜລຍໄດ້

เราได้ศึกษาสมการที่ประกอบด้วยความไม่เชิงเส้นสองเทอม และได้ค้นพบโซลิตอนเชิงพีชคณิต ซึ่งมีอยู่ใน หนึ่งสอง และ สามมิติ สำหรับหนึ่งมิติ เมื่อชนกับจะเป็นแบบยึดหยุ่นกับโซลิตอนทั่วไป แต่ การชนกันจะเป็นแบบไม่ยึดหยุ่นในกรณีของโซลิตอนที่อยู่ในมิติที่สูงกว่าหนึ่ง โดยโซลิตอนเชิงพีชคณิต จะถูกตัดออกลับไปเป็นโซลิตอนแบบดังเดิม โซลิตอนในมิติสูงสามารถเกิดขึ้นจากผลของการไม่เสถียร ของระบบโซลิตอน เรายังได้พัฒนาการประมาณของอัตราการโตเชิงวิเคราะห์ของความไม่เสถียรใน กรณีสมการที่มีเทอมไม่เชิงเส้นสองเทอม ผลเหตุการณ์ดังกล่าวทำให้เราค้นการหาคำตอบของปริพันธ์ ไม่ตรงแบบของฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก

นอกเหนือจากการศึกษาปฏิสัมพันธ์ระหว่างโซลิตอనพีซคณิต ได้แสดงว่าการชนกันระหว่างโซลิตอันเชิงทรงกลมจะไม่เสถียร สำหรับกรณีของการชนแบบกราฟเจิง พลังงานที่สูญเสียกับจั่นกับระยะทางของเส้นทางการเคลื่อนที่เพียงเล็กน้อยแต่ถ้าระยะทางสั้นเพียงพอ ก็จะเหมือนกับการเลกเปลี่ยนโซลิตอัน นั่นคือคุณสมบัติของการเกิดโซลิตอันจะต้องให้กฎทรงพลังงานด้วย สำหรับการชนระหว่างโซลิตอันเชิงทรงกราฟยกับโซลิตอันเชิงระบบจะเป็นการแสดงผลของการทำลายโซลิตอันเชิงระบบ แต่ถ้าเอมบริจุดของโซลิตอันเชิงระบบมีค่ามาก ๆ จะสามารถเกิดโซลิตอันเชิงทรงกราฟยกได้หลังจากการชน

คำหลัก: ໂຫລິຕອນ, ດວມເສົ້າຍ, ໄນເຊີງເສັ່ນ, ສມກາຣ ທ່າດລາຮອີ-ຄຸ້ມເນັດຊອພ, ອີເລີກຕຽນອຸ້ນທະນຸມ  
ຕ່າງກັນ