

บทคัดย่อ

ชื่อโครงการวิจัย	Clones ทางเดียวกับเอกลักษณ์
ผู้วิจัย	รองศาสตราจารย์ ดร. จวีวรรณ รัตนประเสริฐ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร E-mail address : ralach@su.ac.th
ผู้ร่วมวิจัย	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิตติยา ปภาพจน์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย E-mail address : anipa@mail.utcc.ac.th
แหล่งทุนอุดหนุน	สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
ระยะเวลา	1 ธันวาคม 2544 - 30 พฤศจิกายน 2547
คำหลัก	Order-primal algebra, connected order, minimal variety, monotone function, hyperidentity, essential variables, hypersubstitution

เราเรียก identity $s \approx t$ ว่า hyperidentity ใน finite algebra $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}}))$ ถ้าเมื่อใดก็ตามที่สัญลักษณ์ operations ซึ่งเกิดขึ้นใน s และใน t ตามลำดับ ถูกแทนด้วย terms ของ variety V ที่มี arity เหมือนกัน แล้วผลที่ได้จะเป็น identity ใน V ถ้า $T^{(1)}(\bar{A})$ เป็นสัญลักษณ์แทนเซตของ unary term operations ทั้งหมดของ $\bar{A}$ แล้ว $\bar{A}$ จะสอดคล้องกับ unary hyperidentity $\bar{A} \models_{hyp} s \approx t$ ก็ต่อเมื่อ $s \approx t$ เป็น identity ใน monoid $(T^{(1)}(\bar{A}); \circ, id_A)$ เราเรียก finite algebra $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}}))$ ว่า order-primal algebra ถ้ามี partial order $\leq$ บน A ที่ทำให้ clone ของ term operations ทั้งหมดของ $\bar{A}$ คือเซตของ operations ทั้งหมดของ A ซึ่ง preserve $\leq$

โครงการวิจัยนี้ผู้วิจัยศึกษา algebraic properties ของ order-primal algebras สำหรับ connected ordered sets $(A; \leq)$ และพบว่า order-primal algebras เหล่านี้ไม่มี proper subalgebras ไม่มี non-identical automorphisms และเป็น simple algebra ผู้วิจัยค้นพบสมบัติบางประการของ varieties และของ quasivarieties ซึ่งก่อกำเนิดโดย order-primal algebras เหล่านี้ ยิ่งไปกว่านั้นผู้วิจัยได้ใช้สมบัติของ order-primal algebras ในการสร้าง primality criteria อันใหม่สำหรับ finite algebras และพิสูจน์ว่าเซตของ fundamental operation ของ order-primal algebra ไม่สามารถมีเพียง unary operations หรือมีเพียง 1 operation ที่มี arity อย่างน้อย 2 ได้

ผู้วิจัยได้นำ partial order relations ทั้งหมดบนเซตจำกัด A เพื่อให้ order-primal algebras ที่สมนัยกัน สอดคล้อง unary hyperidentities $\varphi^{n-2}(x) \approx \varphi^{n-2+K(n)}(x)$ ส่งผลให้สามารถพิสูจน์ได้ว่า non-trivial order-primal algebra ซึ่งไม่สอดคล้อง unary hyperidentity $\psi^{n^2-2}(x_1, x_2) \approx \psi^{n^2-2+K(n^2)}(x_1, x_2)$ เป็น primal algebra

เป็นที่ทราบกันแล้วว่า congruence lattice $\text{Con } \bar{A}$ ของ algebra $\bar{A}$ กำหนดได้โดย unary polynomial operations ของ $\bar{A}$ และถ้า $|A| = n$ โดยที่ทุก ๆ unary polynomial operation f ของ $\bar{A}$ ซึ่งมี $|\text{Im } f| = |A|$ หรือ $|\text{Im } f| = 1$ แล้ว $\bar{A}$ จะเป็น permutation algebra ซึ่ง permutation algebra มีบทบาทสำคัญสำหรับการศึกษาใน tame congruence theory และถ้า $f: A \rightarrow A$ ไม่ใช่ permutation แล้ว $|A| > |\text{Im } f|$ และจะมีจำนวนเต็มบวกตัวน้อยสุด $\lambda(f)$ ซึ่ง $|\text{Im } f|^{\lambda(f)} = |\text{Im } f|^{\lambda(f)+1}$ ผู้วิจัยจึงพิจารณา unary operations f ทั้งหมดซึ่ง $\lambda(f) = n-1$ และ $\lambda(f) = n-2$ และได้นำ equivalence relations บน A ทั้งหมดซึ่ง invariant ภายใต้ unary operations f เหล่านั้น

ABSTRACT

Research Title	Monotone Clones and Identities
Researchers	Associate Professor Dr. Chawewan Ratanaprasert Faculty of Sciences, Silpakorn University (E-mail address : ratach@su.ac.th) Assistant Professor Dr. Nittiya Pabhapote University of Thai Chamber (E-mail address : anipa@mail.utcc.ac.th)
Research Grants	The Thailand Research Fund
Period	December 1, 2001 - November 30, 2004
Key Words	Order-primal algebra, connected order, minimal variety, monotone function, hyperidentity, essential variables, hypersubstitution

An identity $s \approx t$ is called a hyperidentity in a finite algebra $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}}))$ if whenever the operation symbols occurring in s and in t , respectively, are replaced by any terms of variety V of appropriate arity, the identity which results, holds in V . Let $T^{(1)}(\bar{A})$ be the set of all unary term operations of $\bar{A}$. Then $\bar{A}$ satisfies a unary hyperidentity, $\bar{A} \models_{hyp} s \approx t$ if and only if $s \approx t$ is an identity in the monoid $(T^{(1)}(\bar{A}); \circ, id_A)$. A finite algebra $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}}))$ is said to be order-primal if its clone of all term operations is the set of all operations defined on A which preserve a given partial order $\leq$ on A .

In the project, we study algebraic properties of order-primal algebras for connected ordered sets $(A; \leq)$. Such order-primal algebras have no proper subalgebras, no non-identical automorphisms and are simple. We prove some properties of the varieties and the quasivarieties generated by order-primal algebras for connected orders. Further, we use the properties of order-primal algebras to formulate a new primality criteria for finite algebras and prove that an order-primal algebra cannot have only unary fundamental operations or only one at least binary fundamental operation.

We determine all partial order relations on a finite set A such that an order-primal algebra with the universe A satisfies the unary hyperidentities $\varphi^{n-2}(x) \approx \varphi^{n-2+K(n)}(x)$. As a consequence we prove that a non-trivial order-primal algebra, which does not satisfy the equation $\psi^{n^2-2}(x_1, x_2) \approx \psi^{n^2-2+K(n^2)}(x_1, x_2)$ as a unary hyperidentity, is primal.

It is well-known that the congruence lattice $\text{Con } \bar{A}$ of an algebra $\bar{A}$ is uniquely determined by the unary polynomial operations of $\bar{A}$. If $|A| = n$ and if for every unary polynomial operation f of $\bar{A}$ with $|\text{Im } f| = |A|$ or $|\text{Im } f| = 1$, then $\bar{A}$ is called a permutation algebra. Permutation algebras play an important role in tame congruence theory. If $f : A \rightarrow A$ is not a permutation, then $|A| > |\text{Im } f|$ and there is a least natural number $\lambda(f)$ with $\text{Im } f^{\lambda(f)} = \text{Im } f^{\lambda(f)+1}$. We consider unary operation with $\lambda(f) = n-1$ and $\lambda(f) = n-2$ and ask for equivalence relations on A which are invariant under such unary operations.