



ส ก ว
T R F

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์ โครงการ Clone ทางเดียวกับเอกลักษณ์

โดย รองศาสตราจารย์ ดร.จีวีวรรณ รัตนประเสริฐ และคณะ

พ.ศ. ๒๕๔๗
2547

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ Clone ทางเดียวกับเอกลักษณ์

คณะผู้วิจัย

สังกัด

1. รองศาสตราจารย์ ดร.ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ

มหาวิทยาลัยศิลปากร

2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิตติยา ปภาพจน์

มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

บทคัดย่อ

ชื่อโครงการวิจัย	Clones ทางเดียวกับเอกลักษณ์
ผู้วิจัย	รองศาสตราจารย์ ดร. จีวีวรรณ รัตนประเสริฐ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร E-mail address : ratlach@su.ac.th
ผู้ร่วมวิจัย	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิตติยา ปาภาพจน์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย E-mail address : anipa@mail.utcc.ac.th
แหล่งทุนอุดหนุน	สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
ระยะเวลา	1 ธันวาคม 2544 - 30 พฤศจิกายน 2547
คำหลัก	Order-primal algebra, connected order, minimal variety, monotone function, hyperidentity, essential variables, hypersubstitution

เราเรียก identity $s \approx t$ ว่า hyperidentity ใน finite algebra $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}}))$ ถ้าเมื่อใดก็ตามที่สัญลักษณ์ operations ซึ่งเกิดขึ้นใน s และใน t ตามลำดับ ถูกแทนด้วย terms ของ variety V ที่มี arity เหมือนกัน แล้วผลที่ได้จะเป็น identity ใน V ถ้า $T^{(1)}(\bar{A})$ เป็นสัญลักษณ์แทนเซตของ unary term operations ทั้งหมดของ $\bar{A}$ แล้ว $\bar{A}$ จะสอดคล้องกับ unary hyperidentity $\bar{A}|_{=_{\text{hyp}}} s \approx t$ ก็ต่อเมื่อ $s \approx t$ เป็น identity ใน monoid $(T^{(1)}(\bar{A}); \circ, \text{id}_A)$ เราเรียก finite algebra $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}}))$ ว่า order-primal algebra ถ้ามี partial order $\leq$ บน A ที่ทำให้ clone ของ term operations ทั้งหมดของ $\bar{A}$ คือเซตของ operations ทั้งหมดของ A ซึ่ง preserve $\leq$

โครงการวิจัยนี้ผู้วิจัยศึกษา algebraic properties ของ order-primal algebras สำหรับ connected ordered sets $(A; \leq)$ และพบว่า order-primal algebras เหล่านี้ไม่มี proper subalgebras ไม่มี non-identical automorphisms และเป็น simple algebra ผู้วิจัยค้นพบสมบัติบางประการของ varieties และของ quasivarieties ซึ่งก่อกำเนิดโดย order-primal algebras เหล่านี้ ยิ่งไปกว่านั้นผู้วิจัยได้ใช้สมบัติของ order-primal algebras ในการสร้าง primality criteria อันใหม่สำหรับ finite algebras และพิสูจน์ว่าเซตของ fundamental operation ของ order-primal algebra ไม่สามารถมีเพียง unary operations หรือมีเพียง 1 operation ที่มี arity อย่างน้อย 2 ได้

ผู้วิจัยได้หา partial order relations ทั้งหมดบนเซตจำกัด A เพื่อให้ order-primal algebras ที่สมนัยกัน สอดคล้อง unary hyperidentities $\varphi^{n^2}(x) \approx \varphi^{n^2+K(n)}(x)$ ส่งผลให้สามารถพิสูจน์ได้ว่า non-trivial order-primal algebra ซึ่งไม่สอดคล้อง unary hyperidentity $\psi^{n^2-2}(x_1, x_2) \approx \psi^{n^2-2+K(n^2)}(x_1, x_2)$ เป็น primal algebra

เป็นที่ทราบกันแล้วว่า congruence lattice $\text{Con } \bar{A}$ ของ algebra $\bar{A}$ กำหนดได้โดย unary polynomial operations ของ $\bar{A}$ และถ้า $|A| = n$ โดยที่ทุก γ unary polynomial operation f ของ $\bar{A}$ ซึ่งมี $|\text{Im } f| = |A|$ หรือ $|\text{Im } f| = 1$ แล้ว $\bar{A}$ จะเป็น permutation algebra ซึ่ง permutation algebra มีบทบาทสำคัญสำหรับการศึกษาใน tame congruence theory และถ้า $f: A \rightarrow A$ ไม่ใช่ permutation แล้ว $|A| > |\text{Im } f|$ และจะมีจำนวนเต็มบวกตัวน้อยสุด $\lambda(f)$ ซึ่ง $\text{Im } f^{\lambda(f)} = \text{Im } f^{\lambda(f)+1}$ ผู้วิจัยจึงพิจารณา unary operations f ทั้งหมดซึ่ง $\lambda(f) = n-1$ และ $\lambda(f) = n-2$ และได้หา equivalence relations บน A ทั้งหมดซึ่ง invariant ภายใต้ unary operations f เหล่านั้น

ABSTRACT

Research Title	Monotone Clones and Identities
Researchers	Associate Professor Dr. Chawewan Ratanaprasert Faculty of Sciences, Silpakorn University (E-mail address : ratlach@su.ac.th) Assistant Professor Dr. Nittiya Pabhapote University of Thai Chamber (E-mail address : anipa@mail.utcc.ac.th)
Research Grants	The Thailand Research Fund
Period	December 1, 2001 - November 30, 2004
Key Words	Order-primal algebra, connected order, minimal variety, monotone function, hyperidentity, essential variables, hypersubstitution

An identity $s \approx t$ is called a hyperidentity in a finite algebra $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}}))$ if whenever the operation symbols occurring in s and in t , respectively, are replaced by any terms of variety V of appropriate arity, the identity which results, holds in V . Let $T^{(1)}(\bar{A})$ be the set of all unary term operations of $\bar{A}$. Then $\bar{A}$ satisfies a unary hyperidentity, $\bar{A} \models_{\text{hyp}} s \approx t$ if and only if $s \approx t$ is an identity in the monoid $(T^{(1)}(\bar{A}); \circ, \text{id}_A)$. A finite algebra $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}}))$ is said to be order-primal if its clone of all term operations is the set of all operations defined on A which preserve a given partial order $\leq$ on A .

In the project, we study algebraic properties of order-primal algebras for connected ordered sets $(A; \leq)$. Such order-primal algebras have no proper subalgebras, no non-identical automorphisms and are simple. We prove some properties of the varieties and the quasivarieties generated by order-primal algebras for connected orders. Further, we use the properties of order-primal algebras to formulate a new primality criteria for finite algebras and prove that an order-primal algebra cannot have only unary fundamental operations or only one at least binary fundamental operation.

We determine all partial order relations on a finite set A such that an order-primal algebra with the universe A satisfies the unary hyperidentities $\varphi^{n-2}(x) \approx \varphi^{n-2+K(n)}(x)$. As a consequence we prove that a non-trivial order-primal algebra, which does not satisfy the equation $\psi^{n^2-2}(x_1, x_2) \approx \psi^{n^2-2+K(n^2)}(x_1, x_2)$ as a unary hyperidentity, is primal.

It is well-known that the congruence lattice $\text{Con } \bar{A}$ of an algebra $\bar{A}$ is uniquely determined by the unary polynomial operations of $\bar{A}$. If $|A| = n$ and if for every unary polynomial operation f of $\bar{A}$ with $|\text{Im } f| = |A|$ or $|\text{Im } f| = 1$, then $\bar{A}$ is called a permutation algebra. Permutation algebras play an important role in tame congruence theory. If $f : A \rightarrow A$ is not a permutation, then $|A| > |\text{Im } f|$ and there is a least natural number $\lambda(f)$ with $|\text{Im } f^{\lambda(f)}| = |\text{Im } f^{\lambda(f)+1}|$. We consider unary operation with $\lambda(f) = n-1$ and $\lambda(f) = n-2$ and ask for equivalence relations on A which are invariant under such unary operations.

Executive Summary

ชื่อโครงการวิจัย (ภาษาไทย)	Clones ทางเดียวกับเอกลักษณ์
(ภาษาอังกฤษ)	Hyperidentities and clones)
ชื่อหัวหน้าโครงการวิจัย	รองศาสตราจารย์ ดร. อวีวรรณ รัตนประเสริฐ มหาวิทยาลัยศิลปากร
ผู้ร่วมวิจัย	ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิติยา ปภาพจน์ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย
แหล่งทุนอุดหนุน	สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
ระยะเวลา	1 ธันวาคม 2544 - 30 พฤศจิกายน 2547

วัตถุประสงค์

1. ศึกษา algebraic properties ของ order-primal algebras และของ varieties ที่ generated โดย order-primal algebras แล้วนำมาสร้าง new primality criteria สำหรับ finite algebras
2. ศึกษาหาจำนวนทั้งหมดของ subdirectly irreducible algebras ใน varieties ที่ generated โดย order-primal algebras เพื่อนำไปสู่การกำหนดเงื่อนไขที่จะทำให้ได้ว่า varieties ที่ generated โดย order-primal algebras เป็นชนิด congruence-distributive หรือ congruence-permutable
3. ศึกษาเพื่อ separate monotone clones ของ connected ordered sets จาก $O(A)$ และจาก maximal clones ใน complete lattice ของ clones ทั้งหมดบนเซตจำกัด A ใด ๆ โดยใช้ Hyperidentities หรือโดยวิธีการอื่น ๆ ซึ่งจะทำให้เราทราบว่า monotone clones ของ connected ordered sets เหล่านี้อยู่ในลำดับชั้นที่เท่าใดจาก $O(A)$ ใน complete lattice $L(O_A)$ ของ clones ทั้งหมดบนเซตจำกัด A
4. ศึกษา Tree automata เพื่อให้ได้แนวทางการตอบปัญหาตามวัตถุประสงค์ที่กล่าวไว้ข้างต้น ในอีกด้านหนึ่ง

ความสำคัญของปัญหาและผลงานวิจัย

B. A. Davey, R. W. Quackenbush และ D. Schweigert ได้พิสูจน์ไว้ว่า variety ซึ่งก่อกำเนิดโดย order-primal algebra $\bar{A}$ จะเป็น congruence - distributive ก็ต่อเมื่อ variety นั้นประกอบด้วยอย่างมาก 2 subdirectly irreducible algebras (up to isomorphism)" แต่จนถึงปัจจุบันนี้ยังไม่มีผู้แสดงจำนวนของ subdirectly irreducible algebras ของ variety ซึ่ง ก่อกำเนิดโดย order - primal algebra ผู้วิจัยจึงได้ขยายผลลัพธ์จากโครงการ "Finitely Generated Monotone Clones (FGMC)" (ซึ่งเป็นโครงการวิจัยภายใต้การสนับสนุนของ สกว. โครงการก่อนหน้านี้) เพื่อตอบวัตถุประสงค์ข้อ 1 และ 2 โดยพิสูจน์ว่า order - primal algebras จะไม่มี proper subalgebras ไม่มี non-identical automorphisms และเป็น simple algebras นอกจากนี้ใน class $HS\{\bar{A}\}$ ของ order-primal algebras จะมีเพียง algebras ซึ่งถอดแบบกับ $\bar{A}$ เท่านั้นที่เป็น nontrivial algebras จึงทำให้ได้ว่า variety $V(\bar{A})$ ซึ่งก่อกำเนิดโดย order-primal algebra $\bar{A}$ จะเป็น congruence distributive ก็ต่อเมื่อ $\bar{A}$ เท่านั้นที่เป็น subdirectly irreducible algebra ใน $V(\bar{A})$ แสดงว่า $V(\bar{A})$ จะไม่มี nontrivial subvariety และ variety $V(\bar{A})$ ซึ่งก่อกำเนิดโดย order-primal algebra $\bar{A}$ สำหรับ connected ordered set $(A; \leq)$ จะไม่เป็น congruence-permutable นอกจากนี้ผู้วิจัยยังได้พบวิธีกำหนด new primality criteria สำหรับ finite algebras โดยใช้สมบัติของ order-primal

algebras และได้ขยายการศึกษาใน quasivarieties ด้วยนั่นคือผู้วิจัยศึกษา algebraic properties ของ quasivarieties ที่ generated โดย order - primal algebras และได้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับ $V(\bar{A})$ ซึ่งถูกกำเนิดโดย order - primal algebra ที่จะเป็น minimal variety หรือ minimal quasivariety ผลการศึกษาข้างต้นทั้งหมดได้ถูกเรียบเรียงเป็นบทความทางวิชาการชื่อ "On constative simple and order-primal algebras" ซึ่งได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติชื่อ "Order"

K. Denecke ได้แสดงเซต Σ ของ identities ซึ่ง separate ทุก ๆ maximal clones จาก O_A และผู้วิจัยได้แสดงไว้ในโครงการ FGMC แล้วว่าทุก ๆ monotone clones $Pol_p(\leq)$ จะเป็น subclones ของ maximal clones $Pol_p(r)$ เฉพาะ r ที่เป็น central relations หรือ regularly generation relations เท่านั้น สำหรับในโครงการนี้ผู้วิจัยต้องการศึกษาเพื่อหา identities ที่จะ separate $Pol_p(\leq)$ จาก O_A และจาก maximal clones ซึ่งเป็น superset ของ $Pol_p(\leq)$ ซึ่งจะเป็นการตอบคำถาม "Separation of clones by identities" ในระดับขั้นของ monotone clones และผลการศึกษาปรากฏเป็นการตอบวัตถุประสงค์ที่ 3 เพราะผู้วิจัยสามารถจำแนกเซตอันดับทั้งหมดซึ่ง term clone operations ของ order - primal algebras ที่สมนัยกันสอดคล้อง unary hyperidentities $(\varphi^{n-2}(x) \approx (\varphi^{n-2+K(n)}(x))$ โดยอาศัยฟังก์ชันที่ผู้วิจัยให้ชื่อไว้ว่า long-tail function เป็นเครื่องมือและได้ผลที่สวยงามตามมาคือสามารถพิสูจน์ได้ว่า non-trivial order - primal algebras ที่ไม่สอดคล้องสมการ $\psi^{n-2}(x_1, x_2) \approx \psi^{n-2+K(n)}(x_1, x_2)$ เป็น primal algebras ซึ่งแสดงว่าผู้วิจัยสามารถตอบคำถาม separation of clones by identities ได้ในขั้นของ unbounded monotone clones ใน $L(O_A)$ เป็นผลสำเร็จ ผู้วิจัยจึงได้รวบรวมผลของการศึกษาทั้งหมดเขียนเป็นบทความชื่อ "Hyperidentities in Order - primal Algebras" และได้รับการตีพิมพ์แล้วในวารสารนานาชาติชื่อ "Journal of Applied Algebra and Discrete Structure"

จาก long- tail functions ยังทำให้ผู้วิจัยขยายงานเพิ่มขึ้นจากวัตถุประสงค์ที่ได้ให้ไว้ นั่นคือการค้นพบกลุ่มของฟังก์ชันที่เป็นตัวจักรกลสำคัญของการจำแนก congruences ทั้งหมดของ finite algebras เพราะ congruence lattice ของ algebra $\bar{A}$ ถูกกำหนดได้โดย unary polynomial operations ของ $\bar{A}$ และถ้า ทุก ๆ unary polynomial operation f ของ $\bar{A}$ มีสมบัติว่า $|Im f| = |A|$ หรือ $|Im f| = 1$ แล้ว $\bar{A}$ จะเป็น permutable algebra และนั่นแสดงว่าผู้วิจัยจะได้วิธีการหนึ่งสำหรับจำแนก finite algebras ผู้วิจัยจึงศึกษาปัญหาดังกล่าวและจำแนก equivalence relations บนเซต A ทั้งหมดซึ่ง invariant ภายใต้ unary function f ที่มี pre - period $\lambda(f)$ เป็น $n - 1$ และ $n - 2$ และรวบรวมผลงานเขียน manuscript สำหรับบทความทางวิชาการชื่อ "Unary Operations with Long Pre-periods" เพื่อลงพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติต่อไป

เนื่องจากการประยุกต์ของ universal algebras มีมากมายในทาง theoretical computer sciences โดยใช้ heterogeneous หรือ multi-based algebras ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยจึงร่วมกันศึกษาเพื่อพัฒนางานในด้านนี้โดยหวังให้เกิดทิศทางของการบูรณาการองค์ความรู้ใหม่ที่ผสมผสานกับแขนงวิชาอื่น ๆ และเพื่อให้เป็นการตอบสนองวัตถุประสงค์ข้อที่ 4 ด้วย ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยเริ่มต้นวางนัยทั่วไปในคติของ essential variables สัมพันธ์กับ algebra หรือ variety ด้วยการนิยาม essential operation symbols in term สัมพันธ์กับ algebra หรือ variety โดยเฉพาะกับ menger algebras พร้อมทั้งขยายนิยามเพื่อให้ใช้ได้กับ monoid ของ hypersubstitution และรวบรวมผลของการศึกษาเขียนเป็น manuscript สำหรับบทความทางวิชาการในชื่อ "Essential Operation Symbols in Terms" เพื่อจะลงพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติต่อไป

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยและคณะขอกราบขอบพระคุณ Professor Dr. Klaus Denecke และ Professor Dr. Brian A. Davey เป็นอย่างสูงที่ได้กรุณาเป็นที่ปรึกษา ให้ข้อเสนอแนะ และความคิดเห็นที่เป็นประโยชน์ต่อโครงการวิจัยนี้อย่างมาก

โครงการวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงลงได้เป็นอย่างดี ด้วยทุนอุดหนุนการวิจัยจากสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย ภายใต้ทุนองค์ความรู้ใหม่ (1 ธันวาคม 2545 – 30 พฤศจิกายน 2547)

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อ	(i) - 1
Abstract	(i) - 2
Executive Summary	(ii) -1
กิตติกรรมประกาศ	(ii)
1. บทนำ	1
2. Order-primal Algebras for Connected Ordered Sets	7
3. Hyperidentities in Order-primal Algebras	10
4. Unary Operations with Long Pre-period	13
5. Essential Operation Symbols in Terms	15
หนังสืออ้างอิง	17
Outputs	21
ภาคผนวก	22

1. บทนำ

ให้ A เป็นเซตและ n เป็นจำนวนเต็มบวก เราใช้สัญลักษณ์ A^n แทนผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times \dots \times A$ (ทั้งหมด n ครั้ง) การดำเนินการ n ตำแหน่ง (n -ary operation) บน A คือฟังก์ชันจาก A^n ไปยัง A นั่นคือ " f เป็นการดำเนินการ n ตำแหน่งบน A ก็ต่อเมื่อ $f : A^n \rightarrow A$ " ตัวอย่างเช่น การฉาย (projection) e_i บน A คือฟังก์ชันจาก A^n ไปยัง A ซึ่งกำหนดสำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \dots, n$ และแต่ละสมาชิก $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ โดย $e_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$

ถ้า n และ k เป็นจำนวนเต็มบวกและ g เป็นการดำเนินการ n ตำแหน่งและ $f_1, f_2, \dots, f_n$ เป็นการดำเนินการ k ตำแหน่งบนเซต A แล้ว *superpositions* ของ g และ $f_1, f_2, \dots, f_n$ คือ $g(f_1, \dots, f_n)$ ซึ่งกำหนดค่าสำหรับแต่ละสมาชิก $(x_1, \dots, x_k) \in A^k$ โดย

$$g(f_1, f_2, \dots, f_n)(x_1, \dots, x_k) = g(f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_n(x_1, \dots, x_k))$$

ขอให้สังเกตว่าถ้า f และ g ต่างเป็นฟังก์ชัน 1 ตำแหน่งจาก A ไปยัง A แล้ว *superposition* ของ f และ g ก็คือฟังก์ชันผลประกอบ (composition) $f \circ g$ ที่เรารู้จักกันอย่างดีนั่นเอง

เราใช้สัญลักษณ์ O_A^n แทนเซตของการดำเนินการ n ตำแหน่งบน A ทั้งหมดและใช้สัญลักษณ์ $O_A := \bigcup_{n=1}^{\infty} O_A^n$ แทนเซตของการดำเนินการทั้งหมดบน A และเรานิยามใช้สัญลักษณ์ J_A แทนเซตของการฉายทั้งหมดบน A

ถ้า C เป็นสับเซตของ O_A ซึ่งมีคุณสมบัติปิดภายใต้ *superpositions* ของ *operations* และ $J_A \subseteq C$ เราจะเรียก C ว่า *clone* หรือ *clone of functions* บน A หรือ *subclone* ของ O_A เซต $L(O_A)$ ของ *subclones* ทั้งหมดของ O_A ภายใต้ความสัมพันธ์ "สับเซต $\subseteq$ " เป็น complete lattice ที่มีสมาชิกตัวมากที่สุดคือ O_A และสมาชิกตัวน้อยที่สุดคือ J_A ยิ่งไปกว่านั้นถ้า $H \subseteq O_A$ เราจะเรียก clone ที่เล็กสุด $\langle H \rangle$ ซึ่งมี H เป็นสับเซตว่า *clone ก่อกำเนิดโดย* H และถ้า H เป็นเซตจำกัดแล้ว $\langle H \rangle$ จะเป็น *clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด* (finitely generated)

เราเรียกโครงสร้าง $\bar{A} = (A; F^A)$ ที่ประกอบด้วยเซต A และเซต F^A ของ *operations* บน A ว่า *universal algebra* หรือเรียกสั้น ๆ ว่า *algebra* โดยเรียกเซต A ของ algebra $\bar{A}$ ว่า universe หรือ carrier set และเรียกแต่ละสมาชิกของเซต F^A ว่า fundamental operation เราจะกล่าวว่า algebra $\bar{A}$ เป็น finite algebra ถ้า carrier set A ของ $\bar{A}$ เป็นเซตจำกัดและแต่ละ fundamental operation f ของ $\bar{A}$ จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ f เป็นการดำเนินการ n ตำแหน่ง

ตัวอย่างของ algebras เช่น groups, rings, fields หรือ vector spaces เป็นต้น ใน group theory ตั้งแต่อดีตนับเวลาได้เป็นศตวรรษที่นักคณิตศาสตร์ได้ทำงานวิจัยเพื่อหาทางจำแนก finite groups ทั้งหมด แต่จน ณ ปัจจุบัน เราได้เห็นการจำแนกเพียงบางส่วนของ finite groups เท่านั้นและ

ยังคงมีความพยายามกันต่อ ๆ ไป และเมื่อมีความจำเป็นของการศึกษาเรื่อง algebra ทั่วไป นักคณิตศาสตร์จึงพยายามหาเครื่องมือต่าง ๆ เพื่อจำแนก finite algebras ให้เป็นผลสำเร็จ ในระยะเริ่มต้นได้มีกลุ่มของนักคณิตศาสตร์ศึกษาเกี่ยวกับเรื่อง clones เพื่อใช้เป็นเครื่องมือ ทั้งนี้เพราะสำหรับแต่ละ algebra $\bar{A} = (A; F^A)$ จะมี clone $\langle F^A \rangle$ บน A ซึ่งก่อกำเนิดโดย F^A เสมอซึ่งเราเรียกว่า *term clone operations* และโดยกลับกันแต่ละ clone of functions $C \subseteq O_A$ บนเซต A จะมี algebra ที่สมนัยกันที่เรียกว่า *heterogeneous algebra* ซึ่งเป็น algebra ที่มี carrier set คือ C และ fundamental operations คือ S_m^n (ดูนิยามใน [3]) สำหรับทุก ๆ $m, n \geq 1$ โดยมีแต่ละสมาชิกของ J_A เป็น nullary operations หรือกล่าวง่าย ๆ ว่า S_m^n เป็น superposition ของ $*$, ζ , τ , Δ และ $e_i^?$

ในงานการศึกษาวิจัยด้าน Clone Theory เราพบว่าเซต $L(O_A)$ ของ clones ทั้งหมดบนเซต A เซตหนึ่งจะเป็น complete lattice ภายใต้อันดับ "การเป็นสับเซต $\subseteq$ " โดยมี O_A และ J_A เป็นสมาชิกมากที่สุดและน้อยสุดตามลำดับดังกล่าวแล้ว จึงได้มีความพยายามที่จะบรรยาย subclones ทั้งหมดของ O_A ใน $L(O_A)$ สำหรับแต่ละเซตจำกัด A แต่จวบจนถึงปัจจุบันนี้เราเพียงบอก subclones ทั้งหมดอย่างสมบูรณ์ใน $L(O_A)$ ได้เฉพาะกรณีเมื่อ A เป็นเซตขนาด 2 (ให้สมาชิก 2 ตัวนั้นคือ 0 กับ 1) เท่านั้น ซึ่งเป็นที่รู้จักกันดีในชื่อของ lattice of all Boolean clones และในปีค.ศ.1941 เป็นครั้งแรกที่ L.Post [35] พบว่า lattice of all Boolean clones $L(O_{\{0,1\}})$ มีขนาดเป็น countably infinite ส่วนขนาดของ $L(O_A)$ เมื่อ A ที่มีขนาดตั้งแต่ 3 ขึ้นไปจะเป็น uncountably infinite แสดงให้เห็นว่าโครงสร้างของ $L(O_A)$ ในกรณีเช่นนั้นใหญ่โตมหาศาลมาก ดังนั้นส่วนใหญ่ของโครงสร้างจึงยังไม่เป็นที่รู้จัก

นักคณิตศาสตร์ใช้ความพยายามที่จะจำแนก finite algebra ที่สมนัยกับแต่ละ clone ใน $L(O_A)$ สำหรับขั้นแรก ๆ ก่อนคือขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 โดยขั้นที่ 1 ประกอบด้วย clone O_A ของฟังก์ชันทั้งหมดและเราเรียก algebras ที่สมนัยกับ O_A ในขั้นนี้ว่า primal algebras ส่วนในขั้นที่ 2 เป็นขั้นของ maximal clones เราก็ให้ชื่อเรียก finite algebras ที่สมนัยกับ maximal clones ว่า preprimal algebras ปรากฏว่ามีผลงานการจำแนก finite algebras ขนาดเล็ก ๆ เช่นขนาด 2, 3, 4 และ 5 ที่สมนัยกับ maximal clones ในขั้นที่ 2 ของนักคณิตศาสตร์หลาย ๆ ท่านอยู่มากมายเช่น L. Post, S. Jablonski และ I. Rosenberg เป็นต้นและในที่สุดเมื่อปี ค.ศ.1970 I. Rosenberg [44] ก็ได้จำแนก maximal clones ใน $L(O_A)$ ทั้งหมดของแต่ละเซตจำกัด A เป็นผลสำเร็จโดยแสดงว่าถ้า A เป็นเซตจำกัดแล้ว maximal clones ทั้งหมดใน $L(O_A)$ จะมีอยู่ด้วยกัน 6 พวก โดยให้ชื่อแต่ละพวกตามชนิดของความสัมพันธ์ที่ก่อกำเนิด maximal clones นั้น ๆ ดังต่อไปนี้

1. ความสัมพันธ์การเป็นอันดับที่มีขอบเขต (bounded orders)
2. ความสัมพันธ์สมมูลที่ไม่ใช่เอกลักษณ์และไม่ใช่เอกภาพ (non - trivial equivalence relations)
3. วิธีเรียงสับเปลี่ยนเฉพาะ (prime permutations)
4. ความสัมพันธ์สัมพรรคเฉพาะ (prime affine relations)
5. ความสัมพันธ์กลาง (central relations)
6. ความสัมพันธ์ก่อกำเนิดปกติ (regularly generated relations)

สำหรับจำนวนเต็มบวก k แต่ละสับเซตของ A^k เป็นความสัมพันธ์ k ตำแหน่ง (k -ary relation บน A ดังนั้นเราอาจพิจารณาการดำเนินการ n ตำแหน่งบน A เป็นความสัมพันธ์ $n+1$ ตำแหน่งในรูป

$$\{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \mid x_1, \dots, x_n \in A\}$$

ถ้า f เป็นการดำเนินการ n ตำแหน่งบน A และ $r \subseteq A^k$ เป็นความสัมพันธ์ k ตำแหน่งบน A เราจะกล่าวว่า f ยืนยันหรือคงสภาพ (preserve) r ถ้า r เป็น subalgebra ของ algebra $\langle A; f \rangle$ นั่นคือ "ถ้า $(x_1, \dots, x_n) \in r, \dots, (x_{n1}, \dots, x_{nk}) \in r$ แล้ว $(f(x_{11}, \dots, x_{1n}), \dots, f(x_{n1}, \dots, x_{nk})) \in r$ " สำหรับทุก ๆ $x_{ij} \in A$ เมื่อ $1 \leq i \leq n$ และ $1 \leq j \leq k$ และสำหรับแต่ละความสัมพันธ์ r บน A ถ้านิยามให้

$$\text{Pol}_A(r) = \{f \in O(A) \mid f \text{ คงสภาพ } r\}$$

แล้ว $\text{Pol}_A(r)$ จะเป็น clone บน A และเราเรียก r ในลักษณะนี้ว่าความสัมพันธ์ก่อกำเนิด $\text{Pol}_A(r)$ ดังนั้น clone C บน A เป็น maximal clones ใน $L(O_A)$ ก็ต่อเมื่อ $C = \text{Pol}_A(r)$ เมื่อ r เป็นความสัมพันธ์ในพวกใดพวกหนึ่งใน 6 พวกของความสัมพันธ์ที่กำหนดโดย I. Rosenberg ข้างต้น ผู้ที่ศึกษา algebraic properties ของ pre-primal algebras และเขียนไว้เป็นหนังสือซึ่งมีชื่อเสียงและรู้จักกันโดยทั่วไป ได้แก่ K. Denecke (เขียนหนังสือชื่อ Pre-primal algebras [11] ในปี ค.ศ.1982) และ A. Knoebel (เขียนหนังสือชื่อ The equational classes generated by single functionally precomplete algebras[28] ในปี ค.ศ.1985)

เมื่อหา clones ทั้งหมดบนแต่ละเซตจำกัดที่มีขนาดมากกว่า 2 ยังไม่ได้และได้มีการจำแนก maximal clones ทั้งหมดใน $L(O_A)$ ได้แล้ว นักคณิตศาสตร์ก็สนใจศึกษาการจำแนก clones เล็กสุดเฉพาะกลุ่ม (minimal clones) ทั้งหมดในแลตทิซ $L(O_A)$ ของทุก ๆ เซตจำกัด A ด้วยเช่นกันแต่ยังทำได้ในกรณีเฉพาะเท่านั้น ในขณะเดียวกันเพื่อให้ได้รู้จักกับ $L(O_A)$ มากที่สุดเท่าที่จะทำได้ นักคณิตศาสตร์จึงตั้งคำถามหา clones บน finite set A ทั้งหมดที่เป็นชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัดด้วย

ถ้า A เป็นเซตและ $n \geq 3$ เราเรียกฟังก์ชัน $m : A^n \rightarrow A$ ว่า *near unanimity function* ถ้าแต่ละ x, y ใน A เราได้ว่า $y = m(x, y, \dots, y) = m(y, x, y, \dots, y) = \dots = m(y, \dots, y, x)$ และถ้า C เป็น clone of functions บน A เราจะกล่าวว่า C ยอมรับ (admit) near unanimity function ถ้ามีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $m : A^n \rightarrow A$ เป็น near unanimity function และ $m \in C$

ในปี ค.ศ.1975 K. Baker และ A. Pixley [1] ได้พิสูจน์ว่า clones บนเซตจำกัดซึ่งประกอบด้วย near unanimity function จะเป็น clones ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด และได้พิสูจน์ว่าสำหรับ algebras ซึ่ง term clone operations ประกอบด้วย near unanimity functions จะก่อกำเนิด variety ที่เป็น congruence-distributive [นั่นคือ lattice of congruences ของทุก algebra ใน variety เป็น distributive lattice] นอกจากนี้ D. Lau (ตีพิมพ์ผลงานเป็นภาษาอังกฤษ) ได้พิสูจน์ต่อมาว่า maximal clones ใน $L(O_A)$ ทั้ง 6 พวกที่กำหนดโดย I. Rosenberg ดังกล่าวไว้ข้างต้นเป็นชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัดเกือบทั้งหมด ยกเว้นเฉพาะ clones ซึ่งยืนยันอันดับมีขอบเขตบางกลุ่มเท่านั้น

ถ้า A เป็นเซตและ $\leq$ เป็นความสัมพันธ์ 2 ตำแหน่งซึ่งเราเรียกว่าความสัมพันธ์ทวินาม (binary relation) บน A เราจะเรียก $\leq$ ว่า อันดับ (order) บน A ถ้า $\leq$ เป็นความสัมพันธ์สะท้อน (reflexive) ปฏิสมมาตร (anti-symmetric) และถ่ายทอด (transitive) นอกจากนี้ถ้า $\leq$ เป็นอันดับบนเซต A เราจะเรียกโครงสร้าง $P = \langle A; \leq \rangle$ ว่าเซตอันดับ (ordered set) บน A และถ้า P เป็นเซตอันดับบนเซต A เราจะเรียก $\text{Pol}_A(\leq)$ ว่า monotone clone บนเซต A

ถ้า $\bar{A} = (A; (\hat{f}_i)_{i \in I})$ เป็น finite algebra และเราสามารถนิยามอันดับ $\leq$ บน A ที่ทำให้ term clone operations บน A คือ monotone clone $\text{Pol}_A(\leq)$ เราจะเรียก algebra $\bar{A}$ นี้ว่า order-primal algebra สำหรับ $\leq$

นักคณิตศาสตร์ได้มีคำถามเปิด (open problems) ไว้ว่า

1. เมื่อใดที่ variety ซึ่งก่อกำเนิดโดย order-primal algebra จะเป็น congruence-distributive
2. monotone clone ไตบ้างที่ประกอบด้วย near unanimity function
3. monotone clone ไตบ้างที่เป็นชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด
4. monotone clone ของ unbounded order จะเป็น subclone ของ maximal clones พวกใดใน 6 พวกดังกล่าว

แม้ว่าเราจะรู้จัก maximal clones ทั้งหมดในแลตทิซ $L(O_A)$ ของ clones ทั้งหมดของแต่ละเซตจำกัด A แล้วและทราบว่าแต่ละ proper subclone ของ O_A จะต้องเป็น subclone ของ maximal

clones พวกใดพวกหนึ่งใน 6 พวกดังกล่าว แต่โดยทั่วไปการจะบอกว่าแต่ละ clone เป็น subclone ของ maximal clones พวกใดก็ยังไม่ใช่ง่าย

ในปี ค.ศ.1986 J. Demetrovics, L. Hannak และ L. Ronyai [10] ได้ศึกษาเพื่อตอบคำถามนี้ (นั่นคือคำถามเปิดข้อ 4) ในกรณีเฉพาะเมื่อเซตอันดับเป็น crowns และ fences และในหัวข้อหนึ่งของโครงการ FGMC ผู้วิจัยได้ตอบคำถามเปิดข้างต้นข้อ 2 ข้อ 3 และข้อ 4 สำหรับ monotone clones ของ connected unbounded ordered sets สำหรับกรณีทั่วไป โดยเขียนผลงานวิจัยไว้ในบทความ [38] ซึ่งผลงานของบทความนี้เป็นที่สนใจของนักคณิตศาสตร์ในวงกว้าง นอกจากนี้ก็ยังมีผู้สนใจที่จะศึกษาคำตอบของคำถามเปิดข้อ 1 อยู่ซึ่งรวมถึงผู้วิจัยเองด้วย ดังนั้นการศึกษาคำตอบดังกล่าวจึงเป็นวัตถุประสงค์หนึ่งของโครงการวิจัยนี้

B.A. Davey, R. W. Quackenbush และ D. Schweigert [6] ได้พิสูจน์ในปี ค.ศ.1990 ว่า variety ซึ่งก่อกำเนิดโดย order - primal algebra จะเป็น congruence-distributive ก็ต่อเมื่อ variety นั้นประกอบด้วย subdirectly irreducible algebras อย่างมากเพียง 2 ตัวเท่านั้น (up to isomorphism) แต่จน ณ ปัจจุบันนี้ก็ยังไม่มีการแสดงจำนวนของ subdirectly irreducible algebras ของ variety ซึ่งก่อกำเนิดโดย order - primal algebra ได้ การศึกษาคำตอบดังกล่าว ผู้วิจัยจึงสนใจให้เป็นอีกวัตถุประสงค์หนึ่งของโครงการวิจัยนี้

ได้มีการแสดงการเชื่อมโยงกันในลักษณะถอดแบบระหว่าง heterogeneous algebra กับ clone of functions ที่สมนัยกัน ทำให้เราสามารถศึกษา Clone Theory ได้โดยใช้ทฤษฎีของ heterogeneous algebra นักคณิตศาสตร์จึงใช้ทฤษฎีของ heterogeneous algebra ศึกษา Clone Theory ในอีกทางหนึ่ง โดยตั้งปัญหาของการหาเซต Σ ของ identities ซึ่ง valid ใน C แต่ไม่ valid ใน C' สำหรับแต่ละ clones C และ C' ซึ่ง $C \subset C'$ และเรียกปัญหานี้ว่า "Separation of clones by identities" และเนื่องจาก identities สำหรับ clones มีความสัมพันธ์แบบสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งกับ hyperidentities (hyperidentities ได้ถูกแนะนำครั้งแรกในปี ค.ศ.1993 โดย W. Taylor ใน [48]) เราจึงสามารถประยุกต์ปัญหานี้สำหรับการจำแนก finite algebras ได้เช่นกัน

K. Denecke เป็นผู้สืบทอดการศึกษาเรื่อง hyperidentities อย่างต่อเนื่องเป็นเวลานานกว่า 20 ปีและได้แสดงเซต Σ ของ identities ซึ่ง separate ทุก ๆ maximal clones ที่จำแนกโดย I. Rosenberg จาก O_A ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้เป็นการตอบคำถาม "the functionally complete problems" ในระดับชั้นที่ 1 ใน $L(O_A)$ และในบทความหนึ่ง [38] ของผู้วิจัยก็ได้แสดงว่าทุก ๆ monotone clones $Pol_A(\leq)$ จะเป็น subclones ของ maximal clones ซึ่งก่อกำเนิดโดยความสัมพันธ์ที่เป็น central

relations หรือ regularly generation relations เท่านั้น ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาต่อว่า $\text{Pol}_A(\leq)$ จะอยู่ในระดับชั้นที่เท่าใดใน $L(O_A)$ ในทาง longitude ซึ่งก็เป็นอีกวัตถุประสงค์หนึ่งของโครงการวิจัยนี้ด้วย

D. Hobby และ R. McKenzie ได้แนะนำวิธีหนึ่งของการศึกษา algebraic properties ของ finite algebras โดยเขียนไว้ในหนังสือเรื่อง "The Structure of finite algebras (Tame congruence theory)[26]" ในหนังสือเล่มนี้ได้ใช้แนวคิดของ minimal algebras เป็นเครื่องมืออธิบายการจำแนกกลุ่มของ finite algebras ที่ให้ชื่อเรียกว่า permutation algebras และ K. Denecke [17] ยังได้ศึกษาต่อมาและรวบรวมผลงานเขียนไว้เป็นบทความที่มีความยาว 42 หน้าโดยมีผลหลัก ๆ ก็คือแสดงการเชื่อมโยงกันระหว่าง Mal'cev type conditions กับรูปแบบทั้ง 5 ของ minimal algebras ซึ่งได้นิยามไว้ในหนังสือ Tame congruence theory

จากการศึกษางานวิจัยของนักคณิตศาสตร์ที่กล่าวถึงข้างต้นและผลของงานวิจัยจากโครงการวิจัยก่อน(โครงการ FGMC) ทำให้ผู้วิจัยสนใจศึกษาการตอบปัญหาเปิดต่าง ๆ ดังที่กล่าวไว้ โดยมีวัตถุประสงค์ของการวิจัยดังต่อไปนี้

1. ศึกษา algebraic properties ของ order-primal algebras และของ varieties ที่ generated โดย order-primal algebras แล้วนำมาสร้าง new primality criteria สำหรับ finite algebras
2. ศึกษาหาจำนวนทั้งหมดของ subdirectly irreducible algebras ใน varieties ที่ generated โดย order-primal algebras เพื่อนำไปสู่การกำหนดเงื่อนไขที่จะทำให้ได้ว่า varieties ที่ generated โดย order-primal algebras เป็นชนิด congruence-distributive หรือ congruence-permutable
3. ศึกษาเพื่อ separate monotone clones ของ connected ordered sets จาก $O(A)$ และจาก maximal clones ใน complete lattice ของ clones ทั้งหมดบนเซตจำกัด A ใด ๆ โดยใช้ Hyperidentities หรือโดยวิธีการอื่น ๆ ซึ่งจะทำให้เราทราบว่า monotone clones ของ connected ordered sets เหล่านี้อยู่ในลำดับชั้นที่เท่าใดจาก $O(A)$ ใน complete lattice $L(O_A)$ ของ clones ทั้งหมดบนเซตจำกัด A
4. ศึกษา Tree automata เพื่อให้ได้แนวทางการตอบปัญหาดตามวัตถุประสงค์ที่กล่าวไว้ข้างต้นในอีกด้านหนึ่ง

ผู้วิจัยได้แสดงผลงานวิจัยตามวัตถุประสงค์ข้อที่ 1 และ 2 ไว้ในหัวข้อ 2 ของรายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์นี้ซึ่งเป็นการศึกษา algebraic properties ของ order-primal algebras สำหรับ connected orders และเป็นการขยายผลลัพธ์ที่ได้จากโครงการ FGMC ในอีกทางหนึ่ง

สำหรับหัวข้อ 3 ของรายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์นี้ ผู้วิจัยได้แนะนำชนิดของ unary operation โดยให้ชื่อเรียกว่า long – tail function [43] และใช้เป็นเครื่องมือจำแนก finite order-primal algebras ทั้งหมดที่สอดคล้อง hyperidentities ตามปัญหาของ separation of clones by identities ซึ่งเป็นไปตามวัตถุประสงค์ข้อที่ 3 นอกจากนั้นยังทำให้ผู้วิจัยค้นพบกลุ่มของฟังก์ชันที่น่าเชื่อมั่นว่าจะเป็นเครื่องมือจำแนก congruences ของ finite algebras โดยทั่วไปได้ซึ่งผลดีสำหรับการจำแนกนี้ก็คือ จะทำให้เห็นภาพของ congruence lattice ของ algebra นั้นและจะทำให้เราสามารถจำแนกกลุ่มของ finite algebras กลุ่มหนึ่งได้ ผู้วิจัยจึงแสดงผลการทดลองศึกษาวิธีจำแนกดังกล่าวไว้ในหัวข้อ 4 ของการรายงานฉบับสมบูรณ์

แม้ว่าโมโนดีของ universal algebra จะเป็นลักษณะนามธรรม แต่ปรากฏว่าการประยุกต์กลับมีมากมายในทาง theoretical computer sciences เช่น heterogeneous หรือ multi-based algebras ทำให้เกิดการพัฒนารูปแบบของ theory of automata หรือ turing machines ในลักษณะของ algebraic machines หรือการมอง hypersubstitution ในรูป tree - recognizers เป็นต้น ดังนั้นผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัย(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิตติยา ปภาพจน์) จึงมีความคิดร่วมกันที่จะศึกษาหาทางพัฒนางานในด้านนี้เพื่อให้เกิดทิศทางของการบูรณาการองค์ความรู้ใหม่ผสมผสานกับแขนงวิชาอื่น ๆ ด้วย เราจึงเริ่มต้นวางนัยทั่วไปโมโนดีของ essential variables สัมพันธ์กับ algebra หรือ variety ด้วยการให้นิยาม essential operation symbols in term สัมพันธ์กับ algebra หรือ variety โดยเฉพาะกับ menger algebras พร้อมทั้งขยายนิยามเพื่อให้ใช้ได้กับ monoid ของ hypersubstitution ดังได้แสดงผลงานเหล่านี้ไว้ในหัวข้อ 5 ของการรายงานฉบับสมบูรณ์

2. Order-primal Algebras for Connected Ordered Sets

ถ้า $\bar{A} = (A; (f_i^A)_{i \in I})$ เป็น finite algebra และเราสามารถนิยามอันดับ $\leq$ บน A ที่ทำให้ term clone operations บน A คือ monotone clone $\text{Pol}_A(\leq)$ แล้วเราจะเรียก $\bar{A}$ ว่า order-primal algebra สำหรับ $\leq$ ในหัวข้อนี้ผู้วิจัยจะแสดงการตอบวัตถุประสงค์ข้อที่ 1 และ 2 ของโครงการวิจัยด้วยการศึกษา algebraic properties ของ order-primal algebras สำหรับ connected orders โดยขยายผลลัพธ์ที่ได้จากโครงการ FGMC ทำให้ผู้วิจัยสามารถพิสูจน์ได้ว่า order-primal algebras ดังกล่าวไม่มี proper subalgebras ไม่มี non-identical automorphisms และเป็น simple algebras นอกจากนี้ผู้วิจัยยังพบว่าใน class $\text{HS}\{\bar{A}\}$ ของ order-primal algebras ดังกล่าวจะมีเพียง algebras ซึ่งถอดแบบกับ $\bar{A}$ เท่านั้นที่เป็น nontrivial algebras จึงทำให้ได้ว่า variety $V(\bar{A})$ ซึ่งก่อกำเนิดโดย order-primal algebra $\bar{A}$ จะเป็น congruence distributive ก็ต่อเมื่อ $\bar{A}$ เท่านั้นที่

เป็น subdirectly irreducible algebra ใน $V(\bar{A})$ ซึ่งเป็นการแสดงจำนวนของ subdirectly irreducible algebras ของ variety ซึ่งก่อกำเนิดโดย order-primal algebra ใด ๆ และยังทำให้ได้ว่า ในกรณีเช่นนี้ $V(\bar{A})$ จะไม่มี nontrivial subvariety และ variety $V(\bar{A})$ ซึ่งก่อกำเนิดโดย order-primal algebra $\bar{A}$ สำหรับ connected ordered set $(A; \leq)$ จะไม่เป็น congruence-permutable และสุดท้ายผู้วิจัยได้วิธีกำหนด new primality criteria สำหรับ finite algebras โดยใช้สมบัติของ order-primal algebras นอกจากนี้ผู้วิจัยพร้อมกับกลุ่มที่มงานยังสนใจศึกษา algebraic properties ของ quasivarieties ที่ generated โดย order-primal algebras จนทำให้ได้เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอ สำหรับ $V(\bar{A})$ ซึ่งก่อกำเนิดโดย order-primal algebra ที่จะเป็น minimal variety หรือ minimal quasivariety

ผู้วิจัยขอสรุปผลลัพธ์ที่ได้กล่าวข้างต้นทั้งหมดด้วยทฤษฎีบทที่สำคัญบางทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

Theorem 1 : If $\bar{A} = (A; F^A)$ is an order-primal algebra for connected ordered set $(A; \leq)$, then F^A contains at least two operations one of them at least binary.

Theorem 2 : Let $\bar{A} = (A; F^A)$, $|A| \geq 2$ be an order-primal algebra with respect to an order relation $\leq$ on A with the least element $0 \in A$ or with the greatest element $1 \in A$. Then $\bar{A}$ is semiframal.

Theorem 3 : Let $\bar{A} = (A; F^A)$, $|A| \geq 2$ be an order-primal algebra with respect to an order relation $\leq$ on A with the least element $0 \in A$ or with the greatest element $1 \in A$. Then $V(\bar{A})$ is minimal.

Theorem 4 : Let $\bar{A}$ be an order-primal algebra for connected ordered set $(A; \leq)$ with $|A| \geq 2$. If an algebra $\bar{B} \in V(\bar{A})$ fails to contain a subalgebra isomorphic to $\bar{A}$ then it contains a one-element subalgebra.

Theorem 5 : If $\bar{A}$ is an order-primal algebra for connected ordered set $(A; \leq)$ with $|A| \geq 2$, then $Q(\bar{A})$ is a minimal quasivariety where $Q(\bar{A})$ denote the smallest quasivariety containing $\bar{A}$.

Theorem 6 : Let $\bar{A}$ be an order-primal algebra for connected ordered set $(A; \leq)$ with $|A| \geq 2$. Then the followings are equivalent :

- (i) $V(\bar{A})$ is a minimal variety.
- (ii) $Q(\bar{A})$ is the least nontrivial quasivariety of $V(\bar{A})$.
- (iii) The algebra $\bar{A}$ can be embedded as a subalgebra in any nontrivial algebra $\bar{B} \in V(\bar{A})$.

Theorem 7 : Let $\bar{A}$ be an order-primal algebra for connected ordered set $(A; \leq)$ with $|A| \geq 2$. If $V(\bar{A})$ is a congruence modular variety, then it is a minimal quasivariety.

Theorem 8 : If $\bar{A}$ is an order-primal algebra for connected ordered set $(A; \leq)$ of finite type and with $|A| \geq 2$, then $V(\bar{A})$ is structurally complete if and only if it is a minimal subquasivariety.

Theorem 9 : If $\bar{A} = (A; F^{\bar{A}})$ is a finite algebra with $T(\bar{A}) \supseteq \text{Pol}(\leq)$ for a connected unbounded order on A , then $\bar{A}$ is primal if and only if $\bar{A}$ generates a congruence permutable variety $V(\bar{A})$.

Theorem 10 : If $\bar{A} = (A; F^{\bar{A}})$ is a finite algebra with $T(\bar{A}) \supseteq \text{Pol}(\leq)$ for a connected unbounded order on A , then $\bar{A}$ is primal if and only if $T(\bar{A}) \not\subset \text{Pol}(\rho)$ for every relation ρ from Class (5) and $V(\bar{A})$ is congruence distributive.

ผลงานในหัวข้อนี้ ผู้วิจัยได้นำเสนอในการประชุม ICM 2002 Satellite Conference in Algebra and Related Topics ซึ่งจัดขึ้นที่ The Chinese University of Hongkong เขตปกครองอิสระฮ่องกง ประเทศสาธารณรัฐประชาชนจีน ระหว่างวันที่ 14 – 17 สิงหาคม 2545 ด้วยทุนสนับสนุนค่าใช้จ่ายส่วนหนึ่งจาก SEAMS อีกส่วนหนึ่งจากสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัยและอีกส่วนหนึ่งจากเงินกองทุนส่งเสริมและพัฒนาด้านวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร และการประชุม National Conference on General Algebra and Discrete Mathematics ซึ่งจัดขึ้นที่คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย ระหว่างวันที่ 10 – 13 มีนาคม 2546

ผู้วิจัยได้รวบรวมผลงานที่นำเสนอในหัวข้อนี้ทั้งหมดเขียนเป็นบทความทางวิชาการในชื่อเรื่อง "On constantive simple and order-primal algebras" [42] ซึ่งได้รับการตอบรับให้รอลงตีพิมพ์ในวารสาร "Order" ของประเทศแคนาดา ดังได้แนบสำเนาของ manuscript ของบทความดังกล่าวไว้ในภาคผนวก (ก)

3. Hyperidentities in Order-primal Algebras

ในการศึกษาวิจัยด้าน Clone Theory นักวิจัยได้ศึกษาทั้งทางด้าน longtitude และทาง latitude ของ lattice $L(O_A)$ ของ clone ทั้งหมดบนเซตจำกัด A ในทาง longtitude ได้มีความพยายามที่จะบรรยาย subclones ทั้งหมดของ O_A ใน $L(O_A)$ สำหรับแต่ละเซตจำกัด A แต่จวบจน ณ ปัจจุบันนี้เราเพียงสามารถบอก subclones ทั้งหมดอย่างสมบูรณ์ใน $L(O_A)$ ได้ในกรณีเฉพาะเมื่อขนาดของ A เท่ากับ 2 เท่านั้นซึ่งรู้จักกันดีในชื่อของ lattice of all Boolean clones ซึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $L(O_{\{0,1\}})$ ในปีค.ศ. 1941 เป็นครั้งแรกที่ L. Post [35] พบว่า lattice of all Boolean clones $L(O_{\{0,1\}})$ มีขนาดเป็น countably infinite ส่วนขนาดของ $L(O_A)$ เมื่อ A ที่มีขนาดตั้งแต่ 3 ขึ้นไปจะเป็น uncountably infinite ดังนั้นโครงสร้างของ $L(O_A)$ ในกรณีเช่นนั้นจึงใหญ่โตมหาศาลมาก ทำให้ส่วนใหญ่ของโครงสร้างยังไม่เป็นที่รู้จัก

เมื่อหา clones ทั้งหมดบนแต่ละเซตจำกัดที่มีขนาดมากกว่า 2 ยังไม่ได้ นักคณิตศาสตร์จึงหันมาสนใจศึกษาในทาง latitude นั่นคือพยายามหา clones เล็กสุดเฉพาะกลุ่ม(minimal clones) และ clones ใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม(maximal clones) ทั้งหมดในแลตทิซ $L(O_A)$ ของทุกเซตจำกัด A และปี ค.ศ.1970 I. Rosenberg [44] ได้จำแนก maximal clones ใน $L(O_A)$ ทั้งหมดของแต่ละเซตจำกัด A ว่าประกอบด้วย 6 พวกเท่านั้นโดยให้ชื่อแต่ละพวกตามชนิดของความสัมพันธ์ที่ก่อกำเนิด maximal clones นั้น ๆ ดังกล่าวไว้แล้วในบทนำ

ในหัวข้อนี้ผู้วิจัยเริ่มต้นด้วยการหาวิธีที่จะนำ unary hyperidentities $\varphi^{n-2}(x) \approx \varphi^{n-2+K(n)}(x)$ ซึ่ง separate พวก maximal clones ในพวกที่ 5 และ 6 ที่เป็น superset ของ monotone clones สำหรับ unbounded connected orders มาใช้ประโยชน์สำหรับนำทางหา unary hyperidentities สำหรับวัตถุประสงค์ข้อที่ 3 บ้างและในที่สุดผู้วิจัยก็สามารถจำแนกเซตอันดับทั้งหมดซึ่ง term clone operations ของ order-primal algebras ที่สมนัยกันสอดคล้อง unary hyperidentities นี้และได้ผลที่สวยงามตามมาคือการพิสูจน์ได้ว่า non-trivial order-primal algebras ที่ไม่สอดคล้องสมการ $\psi^{n^2-2}(x_1, x_2) \approx \psi^{n^2-2+K(n^2)}(x_1, x_2)$ จะเป็น primal algebras ซึ่งแสดงว่าผู้วิจัยสามารถตอบคำถาม separation of clones by identities และ the functionally complete problems ได้ในชั้นของ unbounded monotone clones ใน $L(O_A)$ เป็นผลสำเร็จ

ผู้วิจัยขอสรุปถึงทฤษฎีบทที่สำคัญบางทฤษฎีบทซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษาดังต่อไปนี้

Theorem 1 : Let $\leq$ be a connected unbounded order relation on A with the least or the greatest element and suppose that $\leq$ admits a long-tailed function f_{LT} . Further, we suppose that $f_{LT}^{n-1}(d)$ is the least (or the greatest) element with respect to $\leq$. Then the order relation $\leq$ satisfies the following properties.

(C₁) There is a longest chain of consecutive powers

$$f_{LT}^{n-1}(d) \prec f_{LT}^{n-2}(d) \prec \dots \prec f_{LT}^{n-(k+1)}(d) \prec f_{LT}^{n-(k+2)}(d).$$

(C₂) If $0 \leq^* i \leq^* j$, then $(f_{LT}^{n-(k+1)}(d), f_{LT}^{n-(k+1)}(d)) \notin \leq$.

(C₃) For each $x \in \{k+2, \dots, n-1\}$ there is a maximum integer I_x such that $0 \leq^* I_x \leq^* x-1$ and $f_{LT}^{n-(x+1)}(d)$ is incomparable with $f_{LT}^{n-(m+1)}(d)$ for all $I_x <^* m <^* x$ and if $f_{LT}^{n-(m+1)}(d) \leq f_{LT}^{n-(x+1)}(d)$, then $f_{LT}^{n-m}(d) \leq f_{LT}^{n-x}(d)$ for all $m \leq^* I_x$.

Theorem 2 : Let $A = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $n \geq^* 2$ and let $\leq$ be an unbounded connected order defined on A . If 0 is the least (or the greatest) element with respect to $\leq$ and if $\leq$ satisfies the following three conditions (or the dual conditions):

(C1) There is a longest chain of consecutive integers

$$0 \prec 1 \prec 2 \prec 3 \prec \dots \prec k \prec k+1, k \geq^* 1.$$

(C2) If $0 \leq^* i \leq^* j$, then $(j, i) \notin \leq$.

(C3) For each $x \in \{k+2, \dots, n-1\}$ there is a maximum integer $0 \leq^* I_x \leq^* x-1$ such that x is incomparable with m for all $I_x <^* m <^* x$ and from $t \leq x$ follows $t-1 \leq x-1$ for all $m \leq^* I_x$.

Theorem 3 : Let $\leq$ be a connected unbounded order relation with the least (or the greatest) element. Then a long-tailed function f_{LT} preserves $\leq$ if and only if the order $\leq$ satisfies the conditions (C1), (C2), (C3) from Theorem 2.

Theorem 4 : Let $\leq$ be a disconnected order relation on A which is not an antichain. Suppose that a long-tailed function f_{L_T} preserves $\leq$. Then the relation $\leq|_A$ is a linear order or is an unbounded order with the least or the greatest element satisfying conditions (C1), (C2), (C3) from Theorem 2.

Theorem 5 : Let $\leq$ be an order relation on the finite set $A = \{0, 1, \dots, n-1\}$ with $n \geq 2$. Then $\leq$ admits a long-tailed function f_{L_T} if and only if the order $\leq$ satisfies one of the following conditions:

- (i) $(A; \leq)$ is an antichain,
- (ii) $(A; \leq)$ is a chain,
- (iii) $\leq$ is unbounded and connected with the least (the greatest) element and satisfies conditions (C1), (C2), (C3) from Theorem 2,
- (iv) $\leq$ is disconnected and only one connected component A_i with respect to $\leq$ contains more than one element and the restricted order $\leq|_{A_i}$ is connected with the least (the greatest) element and satisfies conditions (C1), (C2), (C3) from Theorem 2.

Theorem 6 : Let $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}})_{i \in I})$ be an order-primal algebra with respect to order relation $\leq$ on A . Then $\bar{A} \models_{\text{hyp}} \varphi^{n^2-2}(x) \approx \varphi^{n^2-2+\kappa(n^2)}(x)$ for a unary operation symbol φ if and only if $\leq$ is different from one of the orders described in Theorem 5 (i) – (ii).

Theorem 7 : Every order-primal algebra $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}})_{i \in I})$, $|A| \geq 2$, for an order relation different from an antichain satisfies the hyperidentity $\psi^{n^2-2}(x_1, x_2) \approx \psi^{n^2-2+\kappa(n^2)}(x_1, x_2)$.

Theorem 8 : Let $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}})_{i \in I})$ be a finite nontrivial order-primal algebra and assume that $\psi^{n^2-2}(x_1, x_2) \approx \psi^{n^2-2+\kappa(n^2)}(x_1, x_2)$ is not a hyperidentity in $\bar{A}$. Then $\bar{A}$ is primal.

ผลงานวิจัยในหัวข้อนี้ผู้วิจัยได้รวบรวมเขียนเป็นบทความทางวิชาการในชื่อเรื่อง "Hyperidentities in Order-primal Algebras" และได้ลงตีพิมพ์แล้วในวารสาร "Journal of Applied Algebra and Discrete Structures" ของ SAS International Publications ดังได้แนบสำเนา reprints ของบทความดังกล่าวไว้ในภาคผนวก (ข) นอกจากนี้ผู้วิจัยได้นำเสนอผลงานนี้ในการประชุมทางวิชาการหัวข้อเรื่อง "Algebra and its Applications" ซึ่งจัดขึ้นที่ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ระหว่างวันที่ 22 – 26 พฤศจิกายน 2547 ซึ่งเป็นการประชุมของกลุ่มนักวิจัยสาขา Universal Algebras ในประเทศไทย

4. Unary Operations with Long Pre-period

ผลการศึกษาของโครงการวิจัยนี้ในหัวข้อ 3 ผู้วิจัยได้อาศัยฟังก์ชันที่ผู้วิจัยให้ชื่อไว้ว่า long – tail function เป็นเครื่องมือจำแนก finite order-primal algebras ทั้งหมดที่สอดคล้อง hyperidentities ตามปัญหาของ separation of clones by identities และ the functionally complete problems ทำให้ผู้วิจัยค้นพบกลุ่มของฟังก์ชันที่น่าเชื่อมั่นว่าจะเป็นเครื่องมือจำแนก congruences ทั้งหมดของ finite algebras โดยทั่วไปได้และถ้าเป็นเช่นนั้นผู้วิจัยจะเห็นภาพ congruence lattices ของ finite algebras กลุ่มนี้ ทั้งนี้เพราะ congruence lattice ของ algebra $\bar{A}$ ถูกกำหนดได้โดย unary polynomial operations ของ $\bar{A}$ และถ้า ทุก γ unary polynomial operation f ของ $\bar{A}$ มีสมบัติว่า $|Im f| = |A|$ หรือ $|Im f| = 1$ แล้ว $\bar{A}$ จะเป็น permutable algebra และเป็นที่ทราบกันดีว่า permutable algebra เป็นตัวจักรกลสำคัญในวิชา Tame Congruence Theory ซึ่งได้เคยกล่าวถึงในบทนำ และนั่นหมายความว่าผู้วิจัยจะได้วิธีการหนึ่งสำหรับจำแนก finite algebras ผู้วิจัยศึกษาปัญหาดังกล่าวด้วยการทดลองจำแนก equivalence relations บนเซต A ซึ่ง invariant ภายใต้ unary function f ที่มี pre-period $\lambda(f)$ เป็น $n - 1$ และ $n - 2$ และปรากฏผลเป็นที่น่าพอใจยิ่ง ผู้วิจัยจึงได้รวบรวมผลงานเขียนเป็น manuscript ดังได้แนบสำเนาของ manuscript ของบทความดังกล่าวไว้ในภาคผนวก (ค) และจะได้นำ manuscript ขอลงตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติที่เหมาะสมต่อไป นอกจากนี้ผู้วิจัยยังวางแผนที่จะนำผลงานของหัวข้อนี้ไปเสนอในที่ประชุมทางวิชาการ "Conference on General Algebra and Applications" ซึ่งจะจัดขึ้นที่ University of Potsdam ประเทศเยอรมันนีในเดือนมีนาคม 2005 อีกด้วย

ผู้วิจัยขอสรุปถึงทฤษฎีบทที่สำคัญบางทฤษฎีบทซึ่งเป็นผลลัพธ์ที่ได้จากการศึกษาดังต่อไปนี้

Theorem 1 : Let A be a finite set with $|A| = n \geq 3$ and let $f : A \rightarrow A$ be an operation. Then $\lambda(f) = n - 2$ and $|\text{Im } f^{n-2}| = 1$ if and only if there are distinct elements $u, v \in A$ such that $A = \{u, v, f(v), \dots, f^{n-2}(v)\}$ and there is an exponent k with $0 \leq k \leq n - 2$ such that $f(u) = f^{k+1}(v)$ and a number m with $m + k = n - 2$ such that $f^n(u) = f^{m+1}(u)$.

Theorem 2 : Let A be a finite set with $|A| = n \geq 3$ and let $f : A \rightarrow A$ be an operation. Then $\lambda(f) = n - 2$ and $|\text{Im } f^{n-2}| = 2$ if and only if there are distinct elements $u, v \in A$ such that either

- (i) $A = \{v, u, f(u), \dots, f^{n-2}(u)\}$ with $v = f(v)$ and $f^{n-1}(u) = f^{n-2}(u)$; or
- (ii) $A = \{u, f(u), f^2(u), \dots, v = f^{n-2}(u), f^{n-1}(u)\}$ where $v = f^n(u) = f^{n-2}(u)$.

Theorem 3 : Let A be a finite set with $|A| \geq 2$ and let θ be a nontrivial equivalence relation defined on A . Then $f \in \text{Pol}(\theta)$ is a LT-function if and only if there is only one block with respect to θ which has more than one element.

Theorem 4 : Let A be a finite set with $|A| = n \geq 3$ and let $\theta \subseteq A \times A$ be a nontrivial equivalence relation. Then there is a unary operation $f : A \rightarrow A$ with $\lambda(f) = n - 2$ and $|\text{Im } f^{n-2}| = 1$ such that θ is invariant under f if and only if either

- (i) there exists only one block with respect to θ which has more than one element ; or
- (ii) there are exactly two blocks with respect to θ with more than one element and one of them consists exactly two elements.

Theorem 5 : Let A be a finite set with $|A| = n \geq 3$ and let $\theta \subseteq A \times A$ be a nontrivial equivalence relation. Then there is a unary operation $f : A \rightarrow A$ with $\lambda(f) = n - 2$ and $|\text{Im } f^{n-2}| = 2$ such that θ is invariant under f if and only if either

- (i) there is only one block B with respect to θ which has more than one element ; or
- (ii) there are only two blocks B and C with respect to θ which has more than one element and $|B| - |C| \leq 1$.

5. Essential Operation Symbols in Terms

ดังกล่าวไว้แล้วในบทนำว่ามโนคติของ universal algebra สามารถประยุกต์ได้กับทาง theoretical computer sciences และเพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ข้อที่ 4 ของโครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัย(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิตติยา ปภาพจน์) ได้วางนัยทั่วไปมโนคติของ essential variables สัมพันธ์กับ algebra หรือ variety ด้วยการให้นิยาม essential operation symbols in term สัมพันธ์กับ algebra หรือ variety โดยเฉพาะกับ menger algebras แล้วศึกษา elementary properties ของ essential operation symbols in term ทำให้ได้แนวทางการขยายนิยามให้ใช้ได้กับ hypersubstitution และปรากฏผลของการศึกษาว่า เซตของ hypersubstitutions บางรูปแบบสำหรับ f_i ทั้งหมดซึ่งเป็น essential สัมพันธ์กับบาง varieties เป็น submonoid ของ monoid ของ hypersubstitutions ทั้งหมด นอกจากการนิยาม essential operation symbols in term ดังกล่าวแล้ว ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยยังนิยาม essential variables in hyperterm สัมพันธ์กับ variety clone V และสามารถพิสูจน์ว่า essential ทั้งสองสมมูลกัน สุดท้ายโดยการใช้ isomorphism ระหว่าง monoid ของ clone endomorphism ทั้งหมดของ monoid ของ hypersubstitutions เราการสมมูลของ essential variables ใน hyperterm สัมพันธ์กับ clone V กับ essential operation symbols in hypersubstitutions สัมพันธ์กับ variety V

ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยขอสรุปผลงานการวิจัยของหัวข้อนี้ด้วยทฤษฎีบทที่สำคัญบางทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

Theorem 1 : Let $s, t \in w_\tau(x_n)$ and let $\underline{A}$ be an algebra of type τ . Then

$$\underline{A} \models_{hyp} s \approx t \Rightarrow Hypess(s, \underline{A}) = Hypess(t, \underline{A})$$

Theorem 2 : If V is a subvariety of W , then $Hypess(t, V) \subseteq Hypess(t, W)$.

Theorem 3 : Let V be a variety of type τ . Then f_i is essential in σ with respect to V iff there exists $\sigma \in M_i$ with $\sigma \neq \sigma_{id}$ such that

$$V \not\models \bar{\sigma}[\sigma(f_i) \approx \sigma(f_i)] .$$

Theorem 4 : Let $V_i = \text{Mod} \{f(x_1, \dots, x_n) \approx x_i\}$. Then V_i is minimal variety.

Theorem 5 : There is a bijective between $w_\tau(\{x_i | i \in I\})$ and $w_\tau(x_n)$ for arbitrary type $\tau = (n_i)_{i \in I}$ with $n_i = n$ for all $i \in I$.

Theorem 6 : If $\sigma = \bar{\eta} \circ \beta \circ \eta^{-1} \circ \alpha$, then $\bar{\sigma} = \bar{\eta} \circ \bar{\beta} \circ \bar{\eta}^{-1}$.

Theorem 7 : Let $\underline{A} \in \text{Alg}(\tau)$ be a non-trivial algebra and let $T \in W_{\tau_w}(X_m)$,
let $f_{m+1}(x_1, \dots, x_n) \approx f_i(x_1, \dots, x_n) \notin \text{Id } \underline{A}$ with $f_{m+1} \notin \text{op}_s(\bar{\eta}(T))$.

Then $\bar{\beta}(T)^{f_{m+1}(\underline{A})} \neq T^{f_{m+1}(\underline{A})} \Leftrightarrow \bar{\eta}(\bar{\beta}(T))^{\sharp} \neq \bar{\eta}(T)^{\sharp}$,

when $\beta: X_m \rightarrow W_{\tau_w}(X_{m+1})$ is a mapping defined by

$$\beta(x_i) = x_i, \forall i \neq m \text{ and } \beta(x_m) = x_{m+1},$$

and when $\bar{\beta}$ is the extension of β to a mapping defined on terms

and when $\bar{\eta}: W_{\tau_w}(\{x_i | i \in I\}) \rightarrow W_{\tau}(X_n)$ is a mapping defined by

$$\bar{\eta}(x_i) = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad \forall i \in I$$

$$\bar{\eta}(\lambda_i) = x_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\bar{\eta}(S^{\circ}(T_0, \dots, T_n)) = S^{\circ}(\bar{\eta}(T_0), \dots, \bar{\eta}(T_n)).$$

Theorem 8 : Let $\underline{A} \in \text{Alg}(\tau)$ be non-trivial algebra of type τ with $\tau = (n_i)_{i \in I}$,
 $n_i = n$ for all $i \in I$ and let

$$T^{(n)}(\underline{A}) = (T^{(n)}(\underline{A}); S^{n, \underline{A}}, e_1^{n, \underline{A}}, \dots, e_n^{n, \underline{A}}), \quad T \in W_{\tau_m}(\{x_{m+1} | i \in I\})$$

and also let $f_{m+1}(x_1, \dots, x_n) \approx f_i(x_1, \dots, x_n) \notin \text{Id } \underline{A}$ with $f_{m+1} \notin \text{op}_s(\bar{\eta}(T))$.

Then $x_i \in \text{Em}(T, T^{(n)}(\underline{A})) \Leftrightarrow f_i \in \text{Hypess}(\bar{\eta}(T), \underline{A})$ where

$\bar{\eta}: W_{\tau_w}(\{x_i | i \in I\}) \rightarrow W_{\tau}(X_n)$ is a mapping defined by

$$\bar{\eta}(x_i) = f_i(x_1, \dots, x_n), \forall i \in I,$$

$$\bar{\eta}(\lambda_i) = x_i, \forall i = 1, \dots, n,$$

$$\bar{\eta}(S^{\circ}(T_0, T_1, \dots, T_n)) = S^{\circ}(\bar{\eta}(T_0), \dots, \bar{\eta}(T_n)).$$

ผู้วิจัยและผู้ร่วมวิจัยได้รวบรวมผลงานที่นำเสนอในหัวข้อนี้ทั้งหมดเขียนเป็น manuscript สำหรับบทความทางวิชาการในชื่อเรื่อง "Essential Operation Symbols in Terms" ดังได้แนบสำเนาของ manuscript ดังกล่าวไว้ในภาคผนวก (ง) และจะได้นำ manuscript ขอลงตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติที่เหมาะสมต่อไป

เอกสารอ้างอิง

1. K.A. Baker and A.F. Pixley, (1975), *Polynomial Interpolation and the Chinese Remainder Theorem for Algebraic Systems*, Math. Z. 14 (165 –174).
2. C. Bergman, (1989), *Structural Completeness in Algebra and Logic*, preprint.
3. G. Birkhoff and J. D. Lipson, (1970), *Heterogeneous algebras*, J. Combinat. Theory 8(115 – 133).
4. S. Burris and H. P. Sankappanavar, (1981), *A course in Universal Algebra*, Springer Verlag, New York.
5. D. Clark and P. Krauss, (1977), *Varieties Generated by Para Primal Algebras*, Algebra Universalis, 7(93 –114).
6. B.A. Davey, R. W. Quackenbush and D. Schweigert, (1990), *Monotone Clone and the Varieties they Determine*, Order 7(145 – 167).
7. J. Demetrovics, L. Hannak, L. Ronyai, *Near Unanimity Functions of Partial Orderings*, Proc. 14 Internat. Sympos. Multiple-valued Logic, Winnipeg, Man. , May 1984, IEEE, (52 – 56)
8. J. Demetrovics, L. Hannak, L. Ronyai, (1986) , *On Algebraic Properties of Monotone Clones*, Order 3,(219 – 225).
9. J. Demetrovics, L. Hannak, L. Ronyai, (1987), *On Monotone Clones*, MTA SZTAKI Tanulmányok ,(39 – 62).
10. J. Demetrovics and L. Ronyai, (1989), *Algebraic Properties of Crowns and Fences*, Order 6, (91 – 99).
11. K. Denecke, (1982), *Preprimal Algebras*, Akademie Verlag, Berlin.
12. K. Denecke, (1988), *Boolean clones and Hyperidentities in Universal Algebras*, Universal and Applied Algebra, Turawa, Poland 3 – 7 May 1988, World Scientific (1989)(23 – 45).
13. K. Denecke and R. Poschel, (1988), *A Characterization of Sheffer functions by hyperidentities*, Semigroup Forum, 37(351 – 362).

14. K. Denecke and R. Poschel, (1988), *The Characterization of primal algebras by hyperidentities*, Contributions to General Algebra 6, Verlag Holder – Pichler – Tempsky, Wien, Verlag B. G. Teubner Stuttgart, (67 – 88).
15. K. Denecke and O. Luders, (1993), *Category equivalences and dualities of varieties and prevarieties generated by single preprimal algebras*, Acta Sci. Math. (Szeged)58 (75 – 92).
16. K. Denecke and O. Luders, (1994), *Category equivalences of clones*, Algebra Universalis, 34(608 – 618).
17. K. Denecke, (1997), *Clones and Hyperidentities*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics 4 (357 – 383).
18. K. Denecke and S. L. Wismath, (2000), *Hyperidentities and Clones*, Gordon and Breach Science Publishers, 2000
19. K. Denecke and J. Koppitz, (2001), *Essential variables in hypersubstitution*, Algebras universalis, 46 (443 – 454).
20. K. Denecke and N. Pabhapote, (2001), *Tree-recognizers and tree-hyperrecognizers*, Contributions to General Algebras 13, Verlag Johannes Heyn, Klagenfurth, 2001(107 – 114).
21. K. Denecke, P. Jampachon and S. L. Wismath, (2003), *Clones of n -ary algebras*, Journal of Applied Algebra and Discrete Structures Vol. 1, No. 2 (141 – 158).
22. D. Duffus and I. Rival, (1981), *A Structure Theory of Ordered Sets*, Discrete Mathematics, 35 (53 – 118).
23. A. L. Foster, (1955), *The identities of $\wedge$ - and unique subdirect factorization within classes of universal algebra*, Math. Zeitschr, 62(171 – 188).
24. A. L. Foster, (1962), *Generalized equational maximality and primal – in the small algebra*, Math. Zeitschr, 79(127 – 146).
25. R. Freese and R. McKenzie, (1987), *Commutator Theory for Congruence Modular Varieties*, London Math. Soc. Lecture Note Series. 125, Cambridge University Press, Cambridge – New York.

26. D. Hobby and R. McKenzie, (1988), *The structure of finite algebras (Tame Congruence Theory)*, American Mathematical Society, Contemporary Mathematics Series, Vol. 76.
27. B. Jonsson, (1967), *Algebras Whose Congruence Lattices are Distributive*, Math. Scand. 21 (110 – 121).
28. A. Knoebel, (1985), *The equational classes generated by single functionally precomplete algebras*, Memoirs of the American Mathematical Society, Nr. 332, Vol. 157, Providence, Rhode Island, U.S.A.
29. P. Krauss, (1972), *On Primal Algebras*, SUNY New Paltz, vol 2(62 – 67).
30. G. Kun, (2000), *Order varieties and monotone retractions of finite posets*, preprint.
31. B. Larose, (2002), *A note on minimal varieties generated by order-primal algebras*, preprint.
32. H. Lausch and W. Nobauer, (1973), *Algebra of polynomials*, North Holland Publ. Comp. New York.
33. R. McKeney, (1990), *Algebraic Properties of Monotone Clones : residual smallness and congruence distributive*, Bull. Austral. Math. Soc. ,41(283 – 300).
34. A. Mitschke, (1978), *Near unanimity identities and congruence distributivity in equational classes*, Algebra Univ. 8(29 – 32).
35. E. L. Post, (1941), *Two-valued iterative systems of mathematical logics*, Ann. Math. Studies 5, Princeton Univ. Press.
36. R. Quackenbush, (1974), *Structure Theory for Equational Classes Generated by Quasi-Primal Algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., 187(127 – 145).
37. R. Quackenbush, I. Rival and I. Rosenberg, (1990), *Clones, Order Varieties, Near Unanimity Functions and Holes*, Order 7(239 – 248).
38. C. Ratanaprasert, (2000), *On Monotone Clones of Connected Ordered sets*, in : General Algebra and Applications, Proceedings of the 59th Arbeitstagung Allgemeine Algebra, Potsdam, (155 – 166), 2000.
39. C. Ratanaprasert, (2002), *All Ordered Sets having Amenable Lattice Order*, Mathematica Slovaca, 52, No. 1 (1 – 11).

40. C. Ratanaprasert, (2004), *All Maximal Clones Containing a Crown*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics 27 (1089 – 1100).
41. C. Ratanaprasert and K. Denecke, (2004), *Hyperidentities in Order-primal Algebras*, Journal of Applied Algebra and Discrete Structures Vol. 2, No. 2 (101 – 118).
42. C. Ratanaprasert, S. Radelecki and K. Denecke, (2003), *On constantive simple and order-primal algebras*, to be published in Order.
43. C. Ratanaprasert and K. Denecke, (2005), *Unary Operations with Long Pre – periods*, manuscript.
44. I. G. Rosenberg, (1970), *Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken*, Rozprawy Cs. Akademie Ved. Ser. Math. Nat. Sci. 80 (3 – 93).
45. G. Rousseau, (1967), *Completeness in finite algebras with a single operation*, Proc. Amer. Math. Soc. 18(1009 – 1013).
46. SI. Shatrakov and K. Denecke, (1998), *Essential variables and separable sets in Universal Algebra*, preprint 1998, to appear in the International Journal of Multiple-valued Logic.
47. G. Tardos, (1986), *A Maximal Clone of Monotone Operations which is not Finitely Generated*, Order 3(211 – 218).
48. W. Taylor, (1993), *Abstract Clone Theory, Algebras and Orders*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London (507 – 530).

Outputs ที่ได้จากการโครงการ

ผลงานการวิจัยเรื่อง Clone ทางเดียวกับเอกลักษณ์ที่ได้ศึกษามาตลอดโครงการ ผู้วิจัยสามารถนำมาเขียนบทความทางวิชาการเพื่อส่งตีพิมพ์ในวารสารทางวิชาการระดับนานาชาติได้ 4 บทความดังต่อไปนี้

1. C. Ratanaprasert , S. Radelecki and K. Denecke, *On constantive simple and order-primal algebras*, Order, (in press). (จำนวน 10 หน้า)
2. C. Ratanaprasert and K. Denecke, *Hyperidentities in Order-primal Algebras*, Journal of Applied Algebra and Discrete Structures, Vol. 2 (2004) (101 – 118).
3. C. Ratanaprasert and K. Denecke, *Unary Operations with Long Pre-period*, (manuscripts จำนวน 13 หน้า).
4. N. Pabhapote, C. Ratanaprasert and K. Denecke, *Essential Operation Symbols in Terms*, (manuscripts จำนวน 14 หน้า).

จำนวนบทความข้างต้นได้เกินเป้าหมายที่ให้ไว้ในข้อเสนอโครงการวิจัยซึ่งตั้งเป้าหมายไว้ว่าจะสามารถเรียบเรียงเป็นบทความทางวิชาการได้ 3 บทความ

ภาคผนวก (ก)

On constantive simple and order-primal algebras

Ch. Ratanaprasert (ratach@su.ac.th)[†]

Department of Mathematics, Faculty of Science, Silpakorn University, Thailand

K. Denecke (kdenecke@rz.uni-potsdam.de)

Institut für Mathematik, Universität Potsdam, Germany

S. Radelecki (matradi@gold.uni-miskolc.hu)^{*}

Institute of Mathematics, University of Miskolc, Hungary

Abstract. A finite algebra $\underline{A} = (A, F^{\underline{A}})$ is said to be order-primal if its clone of all term operations is the set of all operations defined on A which preserve a given partial order $\leq$ on A . In this paper we study algebraic properties of order-primal algebras for connected ordered sets $(A, \leq)$. Such order-primal algebras are constantive, simple and have no non-identical automorphisms. We show that in this case $F^{\underline{A}}$ cannot have only unary fundamental operations or only one at least binary fundamental operation. We prove several properties of the varieties and the quasivarieties generated by constantive and simple algebras and apply these properties to order-primal algebras. Further, we use the properties of order-primal algebras to formulate new primality criteria for finite algebras.

Keywords: order-primal algebra, connected order, minimal variety

08H05, 06A11, 06A06

1. Introduction

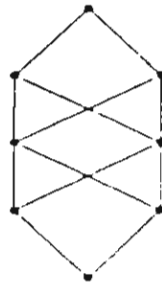
A clone C on a set A is a set of operations defined on A which is closed under composition and contains all projections. If $\underline{A} = (A, F^{\underline{A}})$ is an algebra, then the clone of all term operations $T(\underline{A})$ of $\underline{A}$ is the clone which is generated by $F^{\underline{A}}$. Let $O(A)$ be the clone of all operations defined on A . Finite algebras $\underline{A} = (A, F^{\underline{A}})$ are called primal if $T(\underline{A}) = O(A)$, that is, if every operation defined on A is a term operation of $\underline{A}$. Let $(A, \leq)$ be a finite partially ordered set and let $Pol(\leq)$ be the set of all operations defined on A which preserve the relation $\leq$. Then a finite algebra $\underline{A} = (A, F^{\underline{A}})$ is called *order-primal* if $T(\underline{A}) = Pol(\leq)$. Order-primal algebras have received quite a bit of attention

[†] Research supported by the Thailand Research Fund

^{*} Research supported by the Hungarian research grant No. TO34137 and by the János Bolyai grant

recently, see [3], [11], [13]. A partially ordered set $(A; \leq)$ is called *connected* if for any two elements $a, b \in A$ there exist a natural number n and elements $a = a_0, a_1, \dots, a_n = b$ such that $a_0 \leq a_1 \geq a_2 \leq \dots \geq a_n (\leq a_n) = b$ (or $a_0 \geq a_1 \leq a_2 \geq \dots \leq a_n (\geq a_n) = b$). Clearly, if $(A; \leq)$ has the least element or the greatest element then $(A; \leq)$ is connected. In [3] it was shown that for a connected finite ordered set $(A; \leq)$ the order-primal algebra $\underline{A} = (A, F^{\underline{A}})$ has no proper subalgebra and is simple. Therefore, the only non-trivial algebra in $\mathbf{HS}\{\underline{A}\}$ is isomorphic to $\underline{A}$. The variety $V(\underline{A})$ generated by $\underline{A}$ is congruence distributive if and only if $\underline{A}$ is the only subdirectly irreducible algebra in $V(\underline{A})$. In this case $V(\underline{A})$ has no non-trivial subvariety. If $(A; \leq)$ is a finite bounded ordered set (that is, there exist the least and the greatest element with respect to $\leq$) then $Pol(\leq)$ is one of the maximal subclones of the clone $O(A)$ of all operations defined on A . In this case the order-primal algebra $\underline{A} = (A, F^{\underline{A}})$ generates a minimal variety and has no nontrivial automorphism ([5], [8]).

If the bounded order $\leq$ is given by the following Hasse diagram



then the variety generated by $\underline{A}$ has infinitely many subdirectly irreducible algebras ([8]) and therefore $V(\underline{A})$ is not congruence distributive. But in this case the algebra $\underline{A} = (A; F^{\underline{A}})$ has no finite set $F^{\underline{A}}$ of fundamental operations ([16]). In [4] it was shown that for fences the variety $V(\underline{A})$ is congruence distributive and the algebra $\underline{A}$ can be represented by finitely many fundamental operations. If A is finite, there are only finitely many maximal subclones of $O(\underline{A})$. Every proper subclone of $O(\underline{A})$ is contained in a maximal one. Rosenberg ([14]) described all these maximal subclones by certain classes of relations. The n -ary operation $f \in O(A)$ preserves the h -ary relation $\rho \subseteq A^h$ if $(a_{11}, \dots, a_{1h}) \in \rho, \dots, (a_{n1}, \dots, a_{nh}) \in \rho$ implies $(f(a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, f(a_{1h}, \dots, a_{nh})) \in \rho$. By $Pol(\rho)$ we denote the set of all operations which preserve ρ . $Pol(\rho)$ is always a clone. Every maximal subclone of $O(A)$ can be described in this way using the following classes of relations:

Class(1): is the class of all bounded partial order relations on A .

Class(2): is the class of all binary relations $\{(a, s(a)) | a \in A\}$ where s is a permutation on A without invariant elements with all cycles of the same prime length.

Class(3): is the class of all quaternary relations α defined by $(a, b, c, d) \in \alpha$ if and only if $a + b = c + d$ where $+$ is the addition of an elementary abelian p -group (p is prime) on A .

Class(4): is the class of all non-trivial equivalence relations on A .

Class(5): is the class of all central, i.e., totally reflexive and totally symmetric h -ary relations r with $1 \leq h \leq |A|$ having a non-trivial center. A relation is called totally reflexive if it contains all h -tuples with a repetition of elements. An h -ary relation r is said to be totally symmetric if $(x_0, \dots, x_{h-1}) \in r$ implies $(x_{s(0)}, \dots, x_{s(h-1)}) \in r$ for any permutation s of $\{0, \dots, h-1\}$. The center of a totally symmetric and reflexive h -ary relation r is the set of all elements $c \in A$ such that $(c, x_1, \dots, x_{h-1}) \in r$ for all $x_1, \dots, x_{h-1} \in A$. For $h = 1$ the relation r is simply a subset of A .

Class(6): is the class of all h -regularly generated relations which are defined for $3 \leq h \leq |A|$ by the following steps: for $m \geq 1, m \in \mathbb{N}$ a set $\theta_0, \dots, \theta_{m-1}$ of equivalence relations on A is called h -regular if each $\theta_i, 0 \leq i \leq m-1$ defines exactly h equivalence classes and if the intersection $\bigcap_{i=1}^n \epsilon_i$ of arbitrary m equivalence classes ϵ_i of θ_i is nonempty. An h -ary relation ρ is said to be h -regularly generated associated with $\theta_0, \dots, \theta_{m-1}$ if $(a_1, \dots, a_h) \in \rho$ if and only if for each $0 \leq i \leq m-1$ at least two of the elements $a_1, \dots, a_h$ are equivalent modulo θ_i . (Recall that for $h = |A|$ the clone generated by an h -regularly generated relation on A consists exactly of all unary and all non-surjective operations defined on A . This clone is known under the name Slupecki clone). Then in [13] was proved.

THEOREM 1.1. ([13]) *For an unbounded connected ordered set $(A; \leq)$ the clone $Pol(\leq)$ is not contained in a maximal clone $Pol(\rho)$ where ρ is a relation from one of the classes (1) to (4).*

Using the maximal clones, one gets the following

1.2 Primality Criterion: A finite algebra $\underline{A} = (A; F^{\underline{A}})$ is primal if and only if the clone $T(\underline{A})$ is not contained in one of the maximal clones $Pol(\rho)$ where ρ is a relation from one of the classes (1) to (6).

2. Properties of order-primal algebras for connected orders

Let $\underline{A} = (A; F^{\underline{A}})$ be a finite algebra with $T(\underline{A}) = Pol(\leq)$ for a connected order $\leq$ on A . Then we have:

PROPOSITION 2.1. *$\underline{A}$ is simple, has no proper subalgebra and no non-identical automorphism.*

Proof: For bounded orders this is clear. We assume that $\leq$ is unbounded. Then we can apply Theorem 1.1 to see that $\underline{A}$ is simple and has no nonidentical automorphism. That $\underline{A}$ has no proper subalgebra is trivial, since for every $a \in A$ the constant operation c_a is a term operation of the order primal algebra $\underline{A}$. $\square$

We defined order-primal algebras as non-indexed algebras $\underline{A} = (A; F^{\underline{A}})$. If we change to the indexed form $\underline{A} = (A; (f_i^{\underline{A}})_{i \in I})$ where $f_i^{\underline{A}}$ is n_i -ary, there arises the question for the type $\tau = (n_i)_{i \in I}$ of $\underline{A}$. We recall the following primality criterion of Rousseau for algebras with a single at least binary fundamental operation.

THEOREM 2.2. ([15]) *A finite algebra $\underline{A} = (A; f^{\underline{A}})$ ($|A| > 1$) with a single fundamental operation $f^{\underline{A}}$, where $f^{\underline{A}}$ is at least binary, is primal if and only if $\underline{A}$ is simple, has no proper subalgebra and no non-identical automorphism.*

Then Proposition 2.1 gives the following proposition:

PROPOSITION 2.3. *If $\underline{A} = (A; F^{\underline{A}})$ is an order-primal algebra for a connected ordered set $(A; \leq)$, then $F^{\underline{A}}$ contains at least two operations one of them at least binary.*

Proof: If $F^{\underline{A}}$ contains only unary operations, then the clone $T(\underline{A})$ of all term operations of $\underline{A}$ consists also only of essentially unary operations. But for every order relation $\leq$ on A , there exist monotone operations which are at least essentially binary. Thus $T(\underline{A}) \neq Pol(\leq)$, a contradiction. Assume now that $F^{\underline{A}} = \{f^{\underline{A}}\}$ for an at least binary operation. Since $\underline{A}$ has no proper subalgebra, no non-identical automorphism and it is simple, by Theorem 2.2 it has to be primal; that is, $T(\underline{A}) = Pol(\leq) = O(A)$. This is also a contradiction since $O(A)$ contains operations which are not monotone with respect to $\leq$. $\square$

The following concept is useful to describe the variety $V(\underline{A})$ which is generated by an order-primal algebra $\underline{A}$.

DEFINITION 2.4. ([6]) *A non-trivial finite algebra $\underline{A} = (A; F^{\underline{A}})$ is said to be semiframal if there exist two elements $a, b \in A, a \neq b$ and a binary term operation $f^{\underline{A}}$ such that $f^{\underline{A}}(a, y) = a$ and $f^{\underline{A}}(b, y) = y$ for all $y \in A$.*

Then we can prove:

PROPOSITION 2.5. *Let $\underline{A} = (A; F^{\underline{A}})$, $|A| \geq 2$ be an order-primal algebra with respect to an order relation $\leq$ on A with the least element $0 \in A$ or with the greatest element $1 \in A$. Then $\underline{A}$ is semiframal.*

Proof: Assume that there exists the least element 0 with respect to $\leq$. Consider the binary operation $f^{\underline{A}}$ defined by

$$f^{\underline{A}}(x, y) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ y, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then $f^{\underline{A}}(0, y) = 0$ for all $y \in A$. Since $|A| \geq 2$, there is an element $b \in A$ which is different from 0 and satisfies $f^{\underline{A}}(b, y) = y$ for all $y \in A$. We have to show that $f^{\underline{A}}$ is a term operation of $\underline{A}$. Indeed, let $x_1 \leq x_2$ and $y_1 \leq y_2$. If $x_2 = 0$, then $x_1 = 0$ and $f^{\underline{A}}(x_1, y_1) = f^{\underline{A}}(0, y_1) = 0 \leq 0 = f^{\underline{A}}(0, y_2) = f^{\underline{A}}(x_2, y_2)$. If $x_2 \neq 0$, then $f^{\underline{A}}(x_1, y_1) = 0 \leq y_2 = f^{\underline{A}}(x_2, y_2)$ for the case that $x_1 = 0$ and $f^{\underline{A}}(x_1, y_1) = y_1 \leq y_2 = f^{\underline{A}}(x_2, y_2)$ for the case that $x_1 \neq 0$. Therefore, $f^{\underline{A}}$ is monotone and hence $f^{\underline{A}}$ is a term operation of $\underline{A}$. For the greatest element, one can conclude in a similar way. $\square$

3. Varieties and quasivarieties generated by constantive simple and by order-primal algebras for connected orders

If the variety $V(\underline{A})$ which is generated by an order-primal algebra for a connected order is congruence distributive, then using B. Jonsson's well-known Lemma, every $\underline{B} \in V(\underline{A})$ is isomorphic to a subdirect product of homomorphic images of subalgebras of $\underline{A}$. Since by Proposition 2.1 $\underline{A}$ is simple and has no proper subalgebra, $\underline{A}$ is the only subdirectly irreducible algebra and $V(\underline{A})$ has no nontrivial subvariety ($\underline{A}$ is equationally maximal).

We can generalize this result using the following concept:

A finite non-trivial algebra $\underline{A} = (A; F^{\underline{A}})$ is called *constantive* if all constant operations are term operations of $\underline{A}$. Every order-primal algebra is constantive. Then by a result of Foster([7]), we have.

LEMMA 3.1. ([7]) *Let $\underline{A}$ be a finite nontrivial constantive and simple algebra. If $\underline{A}$ is semiframal, then $V(\underline{A})$ is minimal.*

Then Proposition 2.5 gives:

PROPOSITION 3.2. *Let $\underline{A} = (A; F^{\underline{A}})$ ($|A| \geq 2$) be an order-primal algebra with respect to an order relation $\leq$ on A with the least element $0 \in A$ or the greatest element $1 \in A$. Then $V(\underline{A})$ is minimal.*

For an arbitrary class $\mathcal{K}$ of algebras let $Q(\mathcal{K})$ denote the *smallest quasivariety containing $\mathcal{K}$* . It is well known (see e.g. [2]) that $Q(\mathcal{K}) = \text{ISPP}_{\mathbf{u}}(\mathcal{K})$, where the right-hand side denotes the class of all isomorphic copies of all subalgebras of products of ultraproducts. Clearly, we have $V(\mathcal{K}) = \mathbf{H}(Q(\mathcal{K}))$, i.e., the variety

generated by $\mathcal{K}$ is the class of all homomorphic images of algebras in $Q(\mathcal{K})$. If $\underline{A}$ is an algebra, then $Q(\underline{A})$ stands for the quasivariety $Q(\{\underline{A}\})$.

If $\underline{A}^J$ is a direct power of $\underline{A}$, then to any $a \in A$ there corresponds an element $a^J \in A^J$ with $\pi_j(a^J) = a$ for all $j \in J$, where π_j are the projection mappings. The set $\{a^J \mid a \in a\} \subseteq A^J$ is the universe of the so-called diagonal subalgebra $\underline{\Delta} \subseteq \underline{A}^J$ which is isomorphic to $\underline{A}$.

PROPOSITION 3.3. *Let $\underline{A}$ be a constantive and simple algebra. Then*

- (i) $Q(\underline{A})$ is a minimal quasivariety.
- (ii) If an algebra $\underline{B} \in V(\underline{A})$ fails to contain a subalgebra isomorphic to $\underline{A}$, then it contains a one-element subalgebra.

Proof: (i) Take a nontrivial algebra $\underline{B} \in Q(\underline{A})$. Then $\underline{B} \in \mathbf{ISPP}_u(\{\underline{A}\})$ and $Q(\underline{B}) \subseteq Q(\underline{A})$. Since $\underline{A}$ is finite, we have $\mathbf{P}_u(\{\underline{A}\}) = \{\underline{A}\}$, whence we get that $\underline{B} \in \mathbf{ISP}(\{\underline{A}\})$. Hence, there exists a subalgebra $\underline{C}$ of a direct power $\underline{A}^I$ with $\underline{B} \cong \underline{C}$. Since $\underline{A}$ is constantive, $\underline{C}$ contains the diagonal subalgebra $\underline{\Delta}$ of $\underline{A}^I$ as a subalgebra. As $\underline{\Delta} \cong \underline{A}$, we get $\underline{A} \in \mathbf{IS}(\{\underline{B}\}) \subseteq Q(\underline{B})$ and this gives $Q(\underline{A}) = Q(\underline{B})$, proving the minimality of $Q(\underline{A})$.

(ii) Let $\underline{C}$ be a nontrivial algebra of $V(\underline{A})$. Then there exists a nontrivial algebra $\underline{B} \in Q(\underline{A})$ and a homomorphism $h : \underline{B} \rightarrow \underline{C}$ such that $h(\underline{B}) = \underline{C}$. In view of the proof of (i), $\underline{B}$ must contain a subalgebra $\underline{D}$ isomorphic to $\underline{A}$. As $\underline{A}$ is simple, the subalgebra $h(\underline{D})$ of $\underline{C}$ is either a one-element algebra or we have $h(\underline{D}) \cong \underline{D} \cong \underline{A}$. So if the algebra $\underline{C}$ fails to contain a subalgebra isomorphic to $\underline{A}$, then it has a one element subalgebra, namely $h(\underline{D})$. $\square$

A variety consisting of one-element algebras is called *trivial* or *degenerate*. If no algebra of a variety V consisting of at least two elements has a one-element subalgebra, the variety V is said to be *semidegenerate* ([12]). Now using Proposition 3.3 (ii) we can deduce the following result of [5]:

LEMMA 3.4. ([5]) *If $\underline{A}$ is constantive and simple and $V(\underline{A})$ is semidegenerate, then $V(\underline{A})$ is minimal.*

Proof: Let $\underline{B}$ be a nontrivial algebra of $V(\underline{A})$. Since $\underline{B}$ fails to contain a one-element subalgebra, in view of Proposition 3.3(ii), it contains a subalgebra $\underline{D} \cong \underline{A}$. Hence $\underline{A} \in V(\underline{B})$, and this implies that $V(\underline{A})$ is minimal. $\square$

PROPOSITION 3.5. *Let $\underline{A}$ be a constantive and simple algebra. Then the following are equivalent:*

- (i) $V(\underline{A})$ is a minimal variety.

- (ii) $Q(\underline{A})$ is the least nontrivial quasivariety of $V(\underline{A})$.
- (iii) The algebra $\underline{A}$ can be embedded as a subalgebra in any nontrivial algebra $\underline{B} \in V(\underline{A})$.

Proof: (i) $\Rightarrow$ (ii) Assume that $V(\underline{A})$ is a minimal variety and take any subquasivariety $Q \subseteq V(\underline{A})$. Then $H(Q) = V(Q) = V(\underline{A})$. Hence, there is an algebra $\underline{B} \in Q$ such that $\underline{A}$ is a homomorphic image of $\underline{B}$. As $\underline{A}$ does not contain one-element subalgebras, the same must be valid for $\underline{B}$. Therefore, by applying Proposition 3.3(ii), we get that there exists a subalgebra $\underline{B}'$ of $\underline{B}$ with $\underline{B}' \cong \underline{A}$. Hence $Q(\underline{A}) = Q(\underline{B}') \subseteq Q$, proving (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Let $\underline{B}$ be a nontrivial algebra of $V(\underline{A})$. As $V(\underline{A})$ is locally finite, $\underline{B}$ contains a finite nontrivial algebra $\underline{D}$. Then $Q(\underline{D}) = ISP(\{\underline{D}\})$. Since by assumption $Q(\underline{A}) \subseteq Q(\underline{D}) = ISP(\{\underline{D}\})$, there exists an algebra $\underline{A}' \cong \underline{A}$ with $\underline{A}' \subseteq \underline{B}'$ for some $\underline{B}' \in ISP(\{\underline{D}\})$. Then obviously, there is a subalgebra $\underline{A}''$ of a direct power $\underline{D}^J$ with $\underline{A}'' \cong \underline{A}$. Since $\underline{A}''$ is nontrivial, there exists at least one projection π_{i_0} of $\underline{A}''$ into $\underline{D}$ (where $i_0 \in J$) such that its image is not a one-element algebra. Since $\underline{A}''$ is simple, we get $\underline{A} \cong \underline{A}'' \cong \pi_{i_0}(\underline{A}'') \subseteq \underline{D} \subseteq \underline{B}$, proving (iii).

The implication (iii) $\Rightarrow$ (i) is straightforward. $\square$

Since non-trivial order-primal algebras for connected orders are constantive and simple, Propositions 3.3 and 3.5 are satisfied for those algebras.

An important question is whether the variety generated by an order primal algebra $\underline{A}$ can be congruence modular (congruence distributive) or congruence permutable. It is quite clear that it cannot be congruence permutable. Otherwise in $\underline{A}$ there must exist a term $p^{\underline{A}}$ such the identities $p(x, x, y) \approx y$ and $p(x, y, y) \approx x$ are satisfied in $\underline{A}$. Assume that $a, b \in \underline{A}$ with $a \leq b$ and $a \neq b$. Then from $a \leq a$, $a \leq b$, $b \leq b$ there follows $b = p(a, a, b) \leq p(a, b, b) = a$, a contradiction. It was proved in [5], that a finite algebra $\underline{A} = (A, F^{\underline{A}})$ with $T(\underline{A}) = \langle F^{\underline{A}} \rangle = Pol(\rho)$, where ρ is a relation from Class(6), cannot generate a congruence distributive variety. But then a finite algebra $\underline{A}'$ with $T(\underline{A}') \subseteq T(\underline{A}) = Pol(\rho)$ can also not generate a congruence distributive variety. Indeed, if $T(\underline{A})$ does not contain Jonsson's terms, characterising congruence distributive varieties, then $T(\underline{A}') \subseteq T(\underline{A})$ can also not contain these operations.

Let us now consider the congruence modular case. An important result of [18] is the fact that the variety $V(\underline{A})$ generated by an order-primal algebra is congruence modular if and only if it is congruence distributive. In [10] and [17] several equivalent conditions for the congruence modularity of $V(\underline{A})$ in the case of a finite connected poset $(A, \leq)$ are given. For instance, in [10] is proved that this is equivalent to the existence of a near unanimity function on $\underline{A}$. In [17] several properties of the order variety generated by $(A; \leq)$, i.e. the smallest class of ordered sets which is closed under retractions, products and

subposets which are preserved by every idempotent operation defined on A and contains $(A; \leq)$, were studied. A finite poset $(A, \leq)$ is called *dismantlable* if its elements can be listed in such an order $A = \{x_1, \dots, x_n\}$ that x_i is irreducible in $\{x_i, \dots, x_n\}$. For an equivalent definition see e.g. [19]. Then from a result in [17] one obtains that if $V(\underline{A})$ is congruence modular then the poset of $(A; \leq)$ is dismantlable.

Using the characterization of minimal, locally finite varieties given in [20], B. Larose ([11]) characterized recently all order primal algebras for connected orders which generate a minimal variety.

THEOREM 3.6. ([11]) *Let $\underline{A}$ be an order-primal algebra for a connected order and $|A| \geq 2$. Then $V(\underline{A})$ is minimal if and only if $(A; \leq)$ is dismantlable.*

If for an order-primal algebra $\underline{A}$ for a connected order the variety $V(\underline{A})$ is congruence modular, then by [17] the order $(A; \leq)$ is dismantlable and therefore $V(\underline{A})$ is minimal. But we have also:

PROPOSITION 3.7. *Let $\underline{A}$ be an order-primal algebra for a connected ordered set $(A, \leq)$ with $|A| \geq 2$. If $V(\underline{A})$ is a congruence modular variety, then it is a minimal semidegenerate quasivariety.*

Proof. As we have pointed out before, $V(\underline{A})$ is minimal and its only subdirectly irreducible (nontrivial) algebra is $\underline{A}$. Since in this case any nontrivial algebra of $V(\underline{A})$ is isomorphic to a subdirect power of $\underline{A}$, we conclude that $V(\underline{A}) = Q(\underline{A})$. Hence $V(\underline{A})$ is a minimal quasivariety, according to Proposition 3.3(i). Now, suppose that there is a non-trivial algebra $\underline{B}$ of $V(\underline{A})$ with a one-element subalgebra $\{e\}$. Since $\underline{B}$ is a subdirect power of $\underline{A}$, there is a homomorphism $h : \underline{B} \rightarrow \underline{A}$. Hence we get that $\{h(e)\}$ is a one-element subalgebra of $\underline{A}$, a contradiction. $\square$

A quasivariety Q is called *structurally complete* if for every subquasivariety Q' , which is properly contained in Q the variety $V(Q')$ is properly contained in the variety $V(Q)$ (see [1]). For a variety V the above notion can be formulated similarly: V is structurally complete if and only if any proper subquasivariety of it generates a proper subvariety. Obviously, any minimal quasivariety is structurally complete. It is interesting, that in our case even the converse of this statement is true. In fact, we have the following:

COROLLARY 3.8. *If $\underline{A}$ is an order-primal algebra for a connected ordered set $(A, \leq)$ of finite type and with $|A| \geq 2$, then $V(\underline{A})$ is structurally complete if and only if it is a minimal quasivariety.*

Proof: Assume that $V(\underline{A})$ is structurally complete. Then from $Q(\underline{A}) \subset V(\underline{A})$ there follows $V(\underline{A}) = V(Q(\underline{A})) \subset V(\underline{A})$ - a contradiction. Thus $V(\underline{A}) = Q(\underline{A})$ and hence Lemma 3.3(i) gives that $V(\underline{A})$ is a minimal quasivariety. The converse implication is well-known. $\square$

4. Primality Criteria

If $\underline{A}$ is an order-primal algebra for a connected unbounded order, then by Theorem 1.1 the clone $T(\underline{A})$ of all term operations of $\underline{A}$ is not contained in a maximal clone $Pol(\rho)$ where ρ is a relation from one of the classes (1) to (4). Since $\underline{A}$ is not primal, $T(\underline{A})$ is contained in $Pol(\rho)$ where ρ belongs to Class(5) or to Class(6). We consider the following cases:

1. $T(\underline{A}) \subseteq Pol(\rho)$, ρ belongs to Class(6). Then by the remark in section 3, the algebra $\underline{A}$ cannot generate a congruence distributive (congruence modular) variety.
2. $T(\underline{A}) \not\subseteq Pol(\rho)$, ρ belongs to Class (6). Then $T(\underline{A}) \subseteq Pol(\rho)$ for a relation ρ belonging to Class(5).

Now we assume that $\underline{A} = (A, F^{\underline{A}})$ is an algebra with $T(\underline{A}) \supseteq Pol(\leq)$ for a connected unbounded order $\leq$ on A .

Then using Theorem 1.1 we obtain the following primality criteria:

COROLLARY 4.1. *If $\underline{A} = (A; F^{\underline{A}})$ is a finite algebra with $T(\underline{A}) \supseteq Pol(\leq)$ for a connected unbounded order on A , then $\underline{A}$ is primal if and only if $\underline{A}$ generates a congruence permutable variety $V(\underline{A})$.*

Proof: If $\underline{A}$ is primal then $V(\underline{A})$ is congruence permutable. If conversely $V(\underline{A})$ is congruence permutable then $T(\underline{A}) \not\subseteq Pol(\rho)$ if ρ is a relation from Class(4), Class (5), or Class(6) defining maximal clones. By $T(\underline{A}) \supseteq Pol(\leq)$ for a connected order $\leq$ on A , because of Theorem 1.1 we get $T(\underline{A}) \not\subseteq Pol(\rho)$ where ρ is a relation from one of the classes (1) to (4). Then by the Primality Criterion 1.2, $\underline{A}$ is primal. $\square$

COROLLARY 4.2. *If $\underline{A} = (A; F^{\underline{A}})$ is a finite algebra with $T(\underline{A}) \supseteq Pol(\leq)$ for a connected unbounded order $\leq$ on A , then $\underline{A}$ is primal if and only if $T(\underline{A}) \not\subseteq Pol(\rho)$ for every relation ρ from Class(5) and $V(\underline{A})$ is congruence distributive.*

Proof: $T(\underline{A}) \not\subseteq Pol(\rho)$ for a relation ρ from Class(6). From the assumption and Theorem 1.1 we get primality. The converse is clear. $\square$

References

1. C. Bergman, (1989), *Structural Completeness in Algebra and Logic*, preprint.
2. S. Burris and H. P. Sankappanavar, (1981), *A course in Universal Algebra*, Springer, New York.
3. B.A. Davey, R.W. Quackenbush and D. Schweigert, (1990), *Monotone Clones and the Varieties They Determine*, Order 7(145-167).
4. J. Demetrovics and L. Ronyai, (1989), *Algebraic Properties of Crowns and Fences*, Order 6 (91-99).
5. K. Denecke, (1982), *Preprimal Algebras*, Akademie Verlag, Berlin.
5. A.L. Foster, (1955), *The identities of - and unique subdirect factorization within classes of universal algebra*, Math. Zeitschr, 62(171-188).
7. A.L. Foster, (1962), *Generalized equational maximality and primal - in the small-algebras*, Math. Zeitschr, 79(127-146).
8. A. Knoebel, (1985), *The equational classes generated by single functionally precomplete algebras*, Memoirs of the American Mathematical Society, Nr. 332, Vol. 157, Providence, Rhode Island, USA.
9. G. Kun, (2000), *Order varieties and monotone retractions of finite posets*, preprint.
10. B. Larose, L. Zadori, (1997), *Algebraic properties and dismantlability of finite posets*, Discrete Mathematics, 163(89 - 99).
11. B. Larose, (2002), *A note on minimal varieties generated by order-primal algebras*, preprint 2002.
12. H. Lausch and W. Nöbauer, (1973), *Algebra of polynomials*, North Holland Publ. Comp. New York.
13. C. Ratanaprasert, (2000), *On Monotone Clones of Connected Ordered Sets*, General Algebra and Discrete Mathematics, 59th Arbeitstagung Allgemeine Algebra, Potsdam.
14. I.G. Rosenberg, (1970), *Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken, Struktur der Funktionen von mehreren Veränderlichen auf endlichen Mengen*, Rozprawy Czechosloven. Akademie Věd, Ser. Math. Nat. Sci. 80(3-93).
15. G. Rousseau, (1967), *Completeness in finite algebras with a single operation*, Proc. Amer. Math. Soc 18(1009-1013).
16. G. Tardos, (1986), *A Maximal clone of Monotone Operations which is not Finitely Generated*, Order 3(211-218).
17. G. Kun, Cs. Szabó, (2001), *Order varieties and monotone retractions of finite posets*, Order 18(79-88).
18. R. McKenzie, (1990), *Monotone clones, residual smallness and congruence distributivity*, Bull. of Australian math. Soc. 41(283-290).
19. I. Rival, (1980), *The problem of fixed points in ordered sets*, Ann. Discrete Math. 8(283-292).
20. K. A. Kearnes, Á. Szendrei, (1997) *A characterization of minimal locally finite varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. 345, no. 2(1749-1768).