

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การจำแนกพืชชนิดจำกัดด้วย
ฟังก์ชันที่ไม่สมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

โดย

รองศาสตราจารย์ ดร. นววรรณ รัตนประเสริฐ

กรกฎาคม 2551

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การจำแนกพืชชนิดจำกัดด้วย ฟังก์ชันที่ไม่สมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

คณะผู้วิจัย

สังกัด

รองศาสตราจารย์ ดร.ณวิวรรณ รัตนประเสริฐ

มหาวิทยาลัยศิลปากร

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ Professor Dr. Klaus Denecke เป็นอย่างสูงที่ได้กรุณาเป็นที่ปรึกษา ให้ข้อเสนอแนะและความคิดเห็นที่เป็นประโยชน์ต่อโครงการวิจัยนี้อย่างมาก

โครงการวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงลงได้เป็นอย่างดี ด้วยทุนอุดหนุนการวิจัยจากสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย ภายใต้ทุนองค์ความรู้ใหม่ (28 กรกฎาคม 2548 – 28 กรกฎาคม 2551)

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อ	(i) - 1
Abstract	(i) - 2
Executive Summary	(ii) -1
กิตติกรรมประกาศ	(iii)
1. บทนำ	1
2. Partial Unary Operations with Long Pre-periods	4
3. N-ary Operations with Long Pre-periods	5
4. Iteration of Total and Partial Unary Operations	6
5. Semigroup Properties of N-ary Operations on Finite Sets	7
หนังสืออ้างอิง	9
Outputs	13
ภาคผนวก	14-17

บทคัดย่อ

ชื่อโครงการวิจัย

การจำแนกพีชคณิตจำกัดด้วยฟังก์ชันที่ไม่สมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

ผู้วิจัย

รองศาสตราจารย์ ดร. ธีรวัชร รัตนประเสริฐ

คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร e-mail address : ratach@su.ac.th

แหล่งทุนอุดหนุน

สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

ระยะเวลา

28 กรกฎาคม 2548 - 28 กรกฎาคม 2551

คำหลัก

unary operation, pre-period, partial operation, n-ary operation, invariant equivalence relation, clone, semigroup, band

สำหรับแต่ละ unary operation f บนเซตจำกัด A ซึ่ง $|A| = k$ จะมีโซ่ลดลง $A \supseteq \text{Im } f \supseteq \text{Im } f^2 \supseteq \dots \supseteq \text{Im } f^n = \text{Im } f^{n+1}$ โดยเรียกจำนวนเต็มบวกตัวน้อยสุด $\lambda(f)$ ที่ทำให้ $\text{Im } f^{\lambda(f)} = \text{Im } f^{\lambda(f)+1}$ ว่า pre-period ของ f และ pre-period ของ f มีค่าจาก 0 ถึง $k-1$ ถ้า $\lambda(f) = k-1$ เมื่อ $k \geq 1$ เราเรียก f ว่า long-tailed (LT) -operation และถ้า $\lambda(f) = k-2$ เมื่อ $k \geq 2$ เราเรียก f ว่า (LT_1) -operation ได้มีการจำแนก Unary (LT) - และ (LT_1) -operations ตลอดจนบรรยาย equivalence relations ทั้งหมดซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ f ในโครงการวิจัยนี้ เราศึกษา ให้นิยามและจำแนก n -ary operations สำหรับทุก $n > 1$ ซึ่งเป็นทั้ง (LT) - และ (LT_1) -operations รวมถึงบรรยาย invariant equivalence relations ทั้งหมดซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ f ผลการศึกษาเหล่านี้สามารถประยุกต์กับสาขาวิชาอื่นๆ ที่ดำเนินการศึกษาด้วยวิธี iteration และ recursion นอกจากนี้ยังจำแนก unary operations บนเซตจำกัดทั้งหมดซึ่ง $\lambda(f) = k-t$ สำหรับทุก $1 \leq t \leq n-1$ และให้รายละเอียดเกี่ยวกับ equivalence relations บนเซตจำกัดซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ unary operations เหล่านี้

เราใช้สัญลักษณ์ $f : A \rightarrow A$ แทน partial unary operation ซึ่งนิยามบน A ถ้า f เป็น partial unary operation เราแทนโดเมนของ f ด้วย $\text{dom } f$ และให้ $\text{Im } f = \{ f(a) \mid a \in \text{Dom } f \}$ แทนเซตส่วนฉายของ f และถ้า f เป็น proper partial operation บน A ที่ไม่สมนัยหนึ่งต่อหนึ่งบน $\text{dom } f$ แล้ว $|A| > |\text{dom } f| \geq |\text{Im } f|$ และมีจำนวนเต็มบวกตัวน้อยสุด $\lambda(f)$ ที่ทำให้ $\text{Im } f^{\lambda(f)} = \text{Im } f^{\lambda(f)+1}$ ในโครงการวิจัยนี้เราศึกษาเพื่อจำแนก partial unary operations ที่มี $\lambda(f) = k$ และ $\lambda(f) = k-1$ และในทั้งสองกรณีเราบรรยาย equivalence relations บน A ทั้งหมดซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ f ผลงานเหล่านี้เป็นการวางนัยทั่วไปของกรณี total unary operations

เราอาจศึกษา algebraic structure ของ Clone ได้หลายแบบ และเพราะเราอาจนิยาม $(n+1)$ -ary operation บน $O^n(A)$ โดย $S^n(f, g_1, \dots, g_n)(a_1, \dots, a_n) := f(g_1(a_1, \dots, a_n), \dots, g_n(a_1, \dots, a_n))$ สำหรับทุก n -ary operations $f, g_1, \dots, g_n$ บน A และ $a_1, \dots, a_n \in A$ จึงได้นิยาม binary operation $+$ บน $O^n(A)$ โดย $f + g := S^n(f, g_1, \dots, g_n)$ ที่ทำให้ $(O^n(A); +)$ เป็น semigroup สำหรับโครงการวิจัยนี้ แทนที่จะศึกษา clone บนเซตจำกัดใดๆ ซึ่งเป็นโครงสร้างที่ซับซ้อนและยุ่งยาก เราศึกษา semigroups ของ n -ary operations ซึ่งเป็น subsemigroups ของ $(O^n(A); +)$ และศึกษาสมบัติของ semigroup เหล่านี้แทน ตลอดจนศึกษา Green's relations และจำแนก constant subsemigroups, rectangular bands และ normal bands ใน $(O^n(A); +)$

ABSTRACT

Research Title	Classification of finite algebras by unary non-bijective functions
Researcher	Ass. Prof. Dr. Chawewan Ratanaprasert, Faculty of Science, Silpakorn University. E-mail address : ratach@su.ac.th
Research Grants	The Thailand Research Fund
Period	July 28, 2005 – July 28, 2008
Keywords	unary operation, pre-period, partial operation, n-ary operation, invariant equivalence relation, clone, semigroup, band

Iterating a unary operation f defined on a finite set A with $|A| = k$, one obtains the descending chain $A \supseteq \text{Im } f \supseteq \text{Im } f^2 \supseteq \dots \supseteq \text{Im } f^m = \text{Im } f^{m+1}$. The least integer $\lambda(f)$ with $\text{Im } f^{\lambda(f)} = \text{Im } f^{\lambda(f)+1}$ is called the pre-period of f . The pre-period of f is an integer between 0 and $k - 1$. If $\lambda(f) = k - 1$ and $k \geq 1$, then f is called a long-tailed (LT)-operation and if $\lambda(f) = k - 2$ for $k \geq 2$, f is said to be an (LT_1) -operation. Unary (LT) - and (LT_1) -operations and their invariant equivalence relations have been characterized. In the project, we consider the iteration of n -ary operations for $n > 1$, define and characterize (LT) - and (LT_1) -operations and their invariant equivalence relations. The results can be applied in all fields where iteration and recursion plays a role.

We denote a partial unary operation f defined on A by $f : A \rightarrow \circ A$ and denote the domain of f by $\text{dom } f$ and also let $\text{Im } f = \{ f(a) \mid a \in \text{Dom } f \}$ be the image of f . If $f : A \rightarrow \circ A$ is a proper partial operation on A which is not bijective on its domain, then $|A| > |\text{dom } f| \geq |\text{Im } f|$ and there is a least integer $\lambda(f)$ with $\text{Im } f^{\lambda(f)} = \text{Im } f^{\lambda(f)+1}$. In the project, we characterize partial unary operations with $\lambda(f) = k$ and $\lambda(f) = k - 1$. In both cases, we describe the equivalence relations on A which are invariant with respect to such partial unary operations. This generalizes similar results for total unary operations.

There are several ways to regard a clone as an algebraic structure. If $f, g_1, \dots, g_n$ are n -ary operations defined on A , by $S^n(f, g_1, \dots, g_n)(a_1, \dots, a_n) := f(g_1(a_1, \dots, a_n), \dots, g_n(a_1, \dots, a_n))$ for all $a_1, \dots, a_n \in A$ an $(n+1)$ -ary operation on the set $O^n(A)$ of all n -ary operations can be defined; and one can derive a binary operation $+$ defined by $f+g := S^2(f, g_1, \dots, g_n)$ and obtains a semigroup $(O^n(A); +)$. The collection of all clones of operations on a finite set forms a complete lattice. This lattice is well-described if $|A| = 2$. If $|A| > 2$, this lattice is uncountably infinite and very complex. In the project, instead of clones we study semigroups of n -ary operations, i.e. subsemigroups of the semigroup $(O^n(A); +)$ and their properties. We consider Green's relations for the semigroup $(O^n(A); +)$, characterize all constant subsemigroups of $(O^n(A); +)$, all semilattices, rectangular bands and normal bands contained in $(O^n(A); +)$.

Executive Summary

ชื่อโครงการวิจัย (ภาษาไทย)	การจำแนกพีชคณิตจำกัดด้วยฟังก์ชันที่ไม่สมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง
(ภาษาอังกฤษ)	Classification of finite algebras by unary non-bijective functions
ชื่อหัวหน้าโครงการวิจัย	รองศาสตราจารย์ ดร. อนุวรรตน์ รัตนประเสริฐ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร
แหล่งทุนอุดหนุน	สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
ระยะเวลา	28 กรกฎาคม 2548 - 28 กรกฎาคม 2551

วัตถุประสงค์

1. จำแนก partial unary operations f บนเซตจำกัด A ที่มี period $\lambda(f) = n$ และ $\lambda(f) = n-1$ เมื่อ $n = |A|$ และให้รายละเอียดเกี่ยวกับ equivalence relations บน A ซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ f
2. จำแนก unary functions f บนเซตจำกัด A ที่มี pre-period $\lambda(f) = n - t$ สำหรับทุก t ซึ่ง $1 \leq t \leq n-1$ เมื่อ $n = |A|$ และให้รายละเอียดเกี่ยวกับ equivalence relations บน A ซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ f
3. จำแนก n -ary functions บนเซตจำกัด A ที่มี period $\lambda(f) = k - t$ สำหรับทุก t ซึ่ง $1 \leq t \leq k-1$ เมื่อ $k = |A|$ และให้รายละเอียดเกี่ยวกับ equivalence relations บน A ซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ f และประยุกต์กับปัญหา functional completeness problem ของ multiple-valued logic
4. ศึกษาสมบัติของ semigroups ของ n -ary operations ซึ่งเป็น subsemigroups ของ semigroup $(O^n(A); +)$ ศึกษา Green's relations สำหรับ $(O^n(A); +)$ และจำแนก constant subsemigroups ทั้งหมดของ $(O^n(A); +)$ จำแนก rectangular bands และ normal bands ใน $(O^n(A); +)$

ความสำคัญของปัญหาและผลงานวิจัย

ถ้า A เป็น finite set ซึ่งขนาดของ A คือ $n := |A| \geq 2$ เราแทนเซตของ unary operations ทั้งหมดที่นิยามบน A ด้วยสัญลักษณ์ H_A และแทนเซตของ permutations ทั้งหมดที่นิยามบน A ด้วยสัญลักษณ์ S_A และถ้า $f \in H_A$ จะให้ $\text{Im } f := \{f(a) | a \in A\}$ แทน image ของ f และให้ $\lambda(f)$ แทนจำนวนเต็มไม่เป็นลบที่น้อยที่สุด m ที่ทำให้ $\text{Im } f^m = \text{Im } f^{m+1}$ และเรียกจำนวน $\lambda(f)$ ว่า the pre-period ของ f Denecke, Poschel และ Wismath ได้จำแนกสมาชิกในเซตโดยใช้ $\lambda(f)$ ด้วยการพิสูจน์ว่า $\lambda(f) = n-1$ ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิก $d \in A$ ซึ่ง $A = \{d, f(d), f(d)^2, \dots, f^{n-1}(d)\}$ นอกจากนี้ยังพบว่า mono-unary hyperidentities $\varphi^{n-2}(x) \approx \varphi^{n-2+K(n)}(x)$ มีความสำคัญต่อการ separate maximal clones จาก the clone O_A

ถ้า $\bar{A}$ เป็น algebra แล้วเป็นที่ทราบกันดีว่า the congruence lattice $\text{Con } \bar{A}$ of $\bar{A}$ จะ uniquely determined โดย unary polynomial operations ของ $\bar{A}$ และถ้า $|A| = n$ และทุก unary polynomial operation f ของ $\bar{A}$ ซึ่ง $|\text{Im } f| = |A|$ หรือ $|\text{Im } f| = 1$ แล้ว $\bar{A}$ เป็น permutation algebra ซึ่งเป็น algebras อีกชนิดหนึ่งที่มี

ความสำคัญใน Tame Congruence Theory แต่ถ้า $f : A \rightarrow A$ ไม่ใช่ permutation แล้ว $|A| > |\text{Im} f|$ และจะมีจำนวนเต็มบวกน้อยสุด $\lambda(f)$ ซึ่ง $\text{Im} f^{\lambda(f)} = \text{Im} f^{\lambda(f)+1}$.

ในโครงการวิจัย MCI ของผู้วิจัยภายใต้การสนับสนุนของ the Thailand Research Fund (TRF) ได้ศึกษา unary operations ซึ่ง $\lambda(f) = n-1$ และ $\lambda(f) = n-2$ เมื่อ $n \geq 3$ และได้จำแนก equivalence relations บน A ทั้งหมดซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ unary operations f ดังกล่าวและได้แสดงการประยุกต์โดยพิสูจน์ว่า “แต่ละ finite group ซึ่งมี unary polynomial operation ที่มีสมบัติดังกล่าวเป็น simple group หรือมีเฉพาะ normal subgroup ที่มี index 2” ยิ่งไปกว่านั้นยังสามารถจำแนกสมาชิกของ A เช่นเดียวกับกรณี $\lambda(f) = n-1$ ผลงานวิจัยเหล่านี้ได้ลงตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติชื่อ “Discrete Mathematics” ซึ่งอยู่ในฐานข้อมูล ISI ผลงานดังกล่าวทำให้ผู้วิจัยเชื่อมั่นว่า pre-periods ของ unary functions บนเซตจำกัดจะเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งสำหรับการจำแนก finite algebras

ในโครงการวิจัยนี้ เราขยายการศึกษาไปสู่กรณีทั่วไป โดยการจำแนก unary functions บนเซตจำกัดที่มี pre-period $\lambda(f) = n - t$ สำหรับทุกๆ $1 \leq t \leq n - 1$ และให้รายละเอียดเกี่ยวกับ equivalence relations บนเซตจำกัดนั้นๆ ซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้แต่ละ unary operations f และในการศึกษาหาเครื่องมือเพื่อการพิสูจน์ดังกล่าว งานวิจัยได้ขยายวงกว้างออกไป สำหรับทุกๆ n -ary operations และ partial operations ด้วย ผลงานวิจัยเหล่านี้จะเป็นเครื่องมือช่วยศึกษา congruence lattice $\text{Con } \bar{A}$ ของ finite algebra $\bar{A}$ ใดๆ ต่อไป และผู้วิจัยได้รวบรวมผลงานเหล่านี้เขียนเป็นบทความทางวิชาการจำนวน 3 บทความได้แก่

1. Partial Unary Operations with Long Pre-periods ซึ่งได้ลงตีพิมพ์แล้วในวารสารระดับนานาชาติชื่อ Journal of Applied Algebra and Discrete Structures ใน Vol. 5, No. 3 หน้า 133-145
2. N-ary Operations with Long Pre-periods ผู้วิจัย submit ไปยัง Journal of Multiple-Valued Logic ซึ่งเป็นวารสารระดับนานาชาติในฐานข้อมูล ISI และได้รับ accepted แล้ว
3. Iteration of Total and Partial Unary Operations ผู้วิจัย submit ไปยังวารสารระดับนานาชาติในฐานข้อมูล ISI ชื่อ Algebra Colloquium

ผู้ร่วมวิจัยได้ปรึกษาและตั้งข้อสังเกตว่าเซตของ unary operations ทั้งหมดบนเซต A ที่ไม่ใช่เซตว่างเซตหนึ่งกับ composition ของฟังก์ชันเป็น semigroup ที่มีเอกลักษณ์หรือก็คือ monoid ของ full transformation semigroup จึงได้ร่วมกันนิยาม binary operation $+$ บนเซต $O^n(A)$ ของ n -ary operations และศึกษาสมบัติของ semigroup เหล่านี้แทน เช่นเรามองหา idempotent และ regular elements ทั้งหมดของ $(O^n(A); +)$ เราศึกษา Green's relations สำหรับ semigroup $(O^n(A); +)$ และจำแนก constant subsemigroups ทั้งหมดของ $(O^n(A); +)$ จำแนก semilattices ทั้งหมด จำแนก rectangular bands และ normal bands ใน $(O^n(A); +)$ และรวบรวมผลงานทั้งหมดเขียนเป็นบทความทางวิชาการชื่อ Semigroup Properties of N-ary Operations on Finite Sets ซึ่งขณะนี้ได้รับการยอมรับและลงตีพิมพ์แล้วในวารสาร Asian-European Journal of Mathematics โดยจะปรากฏใน Vol.1, No.1 หน้า 27- 44

1. บทนำ

ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและ n เป็นจำนวนเต็มบวก สัญลักษณ์ A^n หมายถึงผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times \dots \times A$ (ทั้งหมด n ครั้ง) การดำเนินการ n ตำแหน่ง (n -ary operation) บน A คือฟังก์ชันจาก A^n ไปยัง A นั่นคือ f เป็นการดำเนินการ n ตำแหน่งบน A ก็ต่อเมื่อ $f: A^n \rightarrow A$ ตัวอย่างเช่น การฉาย (projection) e_i บน A คือฟังก์ชันจาก A^n ไปยัง A ซึ่งกำหนดสำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \dots, n$ และแต่ละสมาชิก $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ โดย $e_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$

ถ้า n และ k เป็นจำนวนเต็มบวกและ g เป็นการดำเนินการ n ตำแหน่งและ $f_1, f_2, \dots, f_n$ เป็นการดำเนินการ k ตำแหน่งบนเซต A แล้ว *superpositions* ของ g และ $f_1, f_2, \dots, f_n$ คือ $g(f_1, \dots, f_n)$ ซึ่งกำหนดค่าสำหรับแต่ละสมาชิก $(x_1, \dots, x_k) \in A^k$ โดย

$$g(f_1, f_2, \dots, f_n)(x_1, \dots, x_k) = g(f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_n(x_1, \dots, x_k))$$

ขอให้สังเกตว่าถ้า f และ g ต่างเป็นฟังก์ชัน 1 ตำแหน่งจาก A ไปยัง A แล้ว *superposition* ของ f และ g ก็คือฟังก์ชันผลประกอบ (composition) $f \circ g$ ที่รู้จักกันเป็นอย่างดีนั่นเอง

เราใช้สัญลักษณ์ O_A^n แทนเซตของการดำเนินการ n ตำแหน่งบน A ทั้งหมดและใช้สัญลักษณ์ $O_A := \bigcup_{n=1}^{\infty} O_A^n$ แทนเซตของการดำเนินการทั้งหมดบน A และเรานิยมใช้สัญลักษณ์ J_A แทนเซตของการฉายทั้งหมดบน A

ถ้า C เป็นสับเซตของ O_A ซึ่งมีสมบัติปิดภายใต้ *superpositions* ของ operations และ $J_A \subseteq C$ จะเรียก C ว่า *clone* หรือ *clone of functions* บน A หรือ *subclone* ของ O_A เซต $L(O_A)$ ของ *subclones* ทั้งหมดของ O_A ภายใต้ความสัมพันธ์ “สับเซต $\subseteq$ ” เป็น complete lattice ที่มีสมาชิกตัวมากที่สุดคือ O_A และสมาชิกตัวน้อยที่สุดคือ J_A ยิ่งไปกว่านั้นถ้า $H \subseteq O_A$ เราจะเรียก clone ที่เล็กที่สุด $\langle H \rangle$ ซึ่งมี H เป็นสับเซตว่า *clone ก่อกำเนิดโดย H* และถ้า H เป็นเซตจำกัดแล้ว $\langle H \rangle$ จะเป็น *clone ชนิดก่อกำเนิดแบบจำกัด (finitely generated)*

เรียกโครงสร้าง $\bar{A} = (A; F^A)$ ที่ประกอบด้วยเซต A ที่ไม่ใช่เซตว่างและเซต F^A ของ operations บน A ว่า *universal algebra* หรือเรียกสั้นๆ ว่า *algebra* โดยเรียกเซต A ของ algebra $\bar{A}$ ว่า universe หรือ carrier set และเรียกแต่ละสมาชิกของเซต F^A ว่า fundamental operation เรากล่าวว่า algebra $\bar{A}$ เป็น finite algebra ถ้า carrier set A ของ $\bar{A}$ เป็นเซตจำกัดและแต่ละ fundamental operation f ของ $\bar{A}$ มีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ f เป็นการดำเนินการ n ตำแหน่ง

ตัวอย่างของ algebras เช่น groups, rings, fields หรือ vector spaces เป็นต้น ปัจจุบัน ทฤษฎีบทมากมายใน group theory มีความสำคัญในการประยุกต์กับวิทยาศาสตร์กายภาพ และ

ตั้งแต่อดีตนับเวลาได้เป็นศตวรรษที่นักคณิตศาสตร์ได้ทำงานวิจัยเพื่อหาทางจำแนก finite groups ทั้งหมด แต่จน ณ ปัจจุบัน เราได้เห็นการจำแนกเพียงบางส่วนของ finite groups เท่านั้นและยังคงมีความพยายามกันต่อไป ทั้งนี้เพื่อพัฒนามโนคติให้ทันต่อการประยุกต์

สำหรับ finite algebras โดยทั่วไปก็มีความสำคัญต่อหลายๆ แขนงวิชาที่ศึกษาโดยใช้ finiteness เป็นตัวสานต่อเรื่องราวในเนื้อหานั้นๆ เช่น computer science เป็นต้น และการศึกษา finite algebras ที่สำคัญอย่างหนึ่งซึ่งเป็นที่สนใจกันอย่างกว้างขวางก็ยังคงเป็นการจำแนก finite algebras และศึกษา algebraic properties ของแต่ละกลุ่ม finite algebras ในปี 1980 R. McKenzie และ D. Hobby ได้พัฒนาทฤษฎีใหม่ขึ้นเรียกว่า “Tame Congruence Theory” ซึ่งเป็นทฤษฎีซึ่งศึกษาทฤษฎีโครงสร้างด้วยการใช้สิ่งที่เรียกว่า *minimal algebra* เป็นเครื่องมือ และในปี 1988 K. Denecke ได้ให้การจำแนก minimal algebras ทั้งหมดด้วยสมบัติของ congruence lattices ของ algebras ทั้งหมดใน variety ที่ก่อกำเนิดโดย minimal algebras นักคณิตศาสตร์ท่านอื่นๆ ได้พยายามหากลุ่ม algebras อื่นๆ เพื่อศึกษาให้ได้การจำแนกให้มากที่สุด

นักคณิตศาสตร์กลุ่มหนึ่งได้ศึกษาเกี่ยวกับ clones ทั้งนี้เพราะแต่ละ algebra $\bar{A} = (A; F^A)$ จะมี clone $\langle F^A \rangle$ บน A ซึ่งก่อกำเนิดโดย F^A ที่เรียกว่า *term clone operations* และโดยกลับกันแต่ละ clone of functions $C \subseteq O_A$ บนเซต A จะมี algebra ซึ่ง *term clone operations* คือ C นอกจากนี้เรายังอาจพิจารณาแต่ละ clone เป็น algebra ที่เรียกว่า *heterogeneous algebra* ซึ่งเป็น algebra ที่มี carrier set คือ C และ fundamental operations คือ S_m^n (ดูนิยามใน [3]) สำหรับทุกๆ $m, n \geq 1$ โดยมีแต่ละสมาชิกของ J_A เป็น nullary operations หรือกล่าวง่ายๆ ว่า S_m^n เป็น superposition ของ $*, \zeta, \tau, \Delta$ และ e_1^2 เมื่อ clone เป็น algebra จึงมีความหมายที่จะกล่าวถึง identities สำหรับ clones เพื่อสื่อถึง algebras ที่เกี่ยวข้อง อย่างไรก็ตามทุกๆ clone identity อาจเขียนได้ในรูป hyperidentity และโดยกลับกัน ในปี 1988 K. Denecke และ R. Poschel ได้ให้เกณฑ์สำหรับ finite algebras ที่มีขนาดเป็น prime power และมีเพียงหนึ่ง fundamental operation (ซึ่งเรียกว่า Sheffer function) ที่จะเป็น primal algebra โดยใช้ unary hyperidentities และได้จำแนก primal algebras โดยใช้ hyperidentities

ให้ A เป็น finite set ซึ่งขนาดของ A คือ $n := |A| \geq 2$ เราแทนเซตของ unary operations ทั้งหมดที่นิยามบน A ด้วยสัญลักษณ์ H_A และแทนเซตของ permutations ทั้งหมดที่นิยามบน A ด้วยสัญลักษณ์ S_A และถ้า $f \in H_A$ จะให้ $\text{Im } f := \{f(a) | a \in A\}$ แทน image ของ f และให้ $\lambda(f)$ แทนจำนวนเต็มไม่เป็นลบที่น้อยสุด m ที่ทำให้ $\text{Im } f^m = \text{Im } f^{m+1}$ และเรียกจำนวน $\lambda(f)$ ว่า the *pre-period*

ของ f Denecke, Poschel และ Wismath ได้จำแนกสมาชิกในเซตโดยใช้ $\lambda(f)$ ด้วยการพิสูจน์ว่า $\lambda(f) = n-1$ ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิก $d \in A$ ซึ่ง $A = \{d, f(d), f(d)^2, \dots, f^{n-1}(d)\}$ นอกจากนี้ยังพบว่า mono-unary hyperidentities $\varphi^{n-2}(x) \approx \varphi^{n-2+K(n)}(x)$ มีความสำคัญต่อการ separate maximal clones จาก the clone O_A

ถ้า $\bar{A}$ เป็น algebra แล้วเป็นที่ทราบกันดีว่า the congruence lattice $\text{Con } \bar{A}$ of $\bar{A}$ จะ uniquely determined โดย unary polynomial operations ของ $\bar{A}$ และถ้า $|A| = n$ และทุกๆ unary polynomial operation f ของ $\bar{A}$ ซึ่ง $|\text{Im } f| = |A|$ หรือ $|\text{Im } f| = 1$ แล้ว $\bar{A}$ เป็น permutation algebra ซึ่งเป็น algebras อีกชนิดหนึ่งที่มีความสำคัญใน Tame Congruence Theory ที่กล่าวถึงข้างต้น แต่ ถ้า $f : A \rightarrow A$ ไม่ใช่ permutation แล้ว $|A| > |\text{Im } f|$ และจะมีจำนวนเต็มบวกน้อยสุด $\lambda(f)$ ซึ่ง $\text{Im } f^{\lambda(f)} = \text{Im } f^{\lambda(f)+1}$.

เราเรียก finite algebra $\bar{A} = (A; (f_i^{\bar{A}}))$ ว่า order-primal algebra ถ้า clone ของ term functions ทั้งหมดของ $\bar{A}$ คือเซตของ operations บน A ทั้งหมดซึ่ง preserve order $\leq$ ที่นิยามบน A ในโครงการวิจัย MCI ของผู้วิจัยภายใต้การสนับสนุนของ Thailand Research Fund(TRF) ได้พบ mono-unary hyperidentity และ binary hyperidentity สำหรับ order-primal algebras และได้ จำแนก order-primal algebras ซึ่งสอดคล้อง hyperidentities เหล่านี้และผลงานดังกล่าวนี้แสดงว่า เราสามารถจำแนก finite algebra ได้กลุ่มหนึ่งแล้วด้วย hyperidentities นอกจากนี้ในโครงการ ดังกล่าว ผู้วิจัยยังได้ศึกษา unary operations ซึ่ง $\lambda(f) = n-1$ และ $\lambda(f) = n-2$ เมื่อ $n \geq 3$ และได้ จำแนก equivalence relations บน A ทั้งหมดซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ unary operations f ดังกล่าว และได้แสดงการประยุกต์โดยพิสูจน์ว่า “แต่ละ finite group ซึ่งมี unary polynomial operation ที่มี สมบัติดังกล่าวเป็น simple group หรือมีเฉพาะ normal subgroup ที่มี index 2” ยิ่งไปกว่านั้นยังสามารถจำแนกสมาชิกของ A เช่นเดียวกับกรณี $\lambda(f) = n-1$ ผลงานวิจัยเหล่านี้ทำให้ผู้วิจัยเชื่อมั่นว่า pre-periods ของ unary functions บนเซตจำกัดจะเป็นเครื่องมืออย่างหนึ่งสำหรับการจำแนก finite algebras

ในโครงการวิจัยนี้ เราขยายการศึกษาไปสู่กรณีทั่วไป โดยการจำแนก unary functions บน เซตจำกัดที่มี pre-period $\lambda(f) = n - t$ สำหรับทุกๆ $1 \leq t \leq n - 1$ และให้รายละเอียดเกี่ยวกับ equivalence relations บนเซตจำกัดนั้นๆ ซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้แต่ละ unary operations f และในการศึกษาหาเครื่องมือเพื่อการพิสูจน์ดังกล่าว งานวิจัยได้ขยายวงกว้างออกไป สำหรับทุกๆ n -ary operations และ partial operations ด้วย ผลงานวิจัยเหล่านี้จะเป็นเครื่องมือช่วยศึกษา congruence lattice $\text{Con } \bar{A}$ ของ finite algebra $\bar{A}$ ใดๆ ต่อไป

โครงการวิจัยนี้ได้ผลงานวิจัยซึ่งบรรลุผลดังต่อไปนี้

1. จำแนก partial unary operations f บนเซตจำกัด A ที่มี period $\lambda(f) = n$ และ $\lambda(f) = n-1$ และให้รายละเอียดเกี่ยวกับ equivalence relations บน A ซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ f
2. จำแนก unary functions f บนเซตจำกัด A ที่มี pre-period $\lambda(f) = n - t$ สำหรับทุกๆ t ซึ่ง $1 \leq t \leq n-1$ และให้รายละเอียดเกี่ยวกับ equivalence relations บน A ซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ f
3. จำแนก n -ary functions บนเซตจำกัด A ที่มี period $\lambda(f) = n - t$ สำหรับทุกๆ t ซึ่ง $1 \leq t \leq n-1$ และให้รายละเอียดเกี่ยวกับ equivalence relations บน A ซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ f และประยุกต์กับปัญหา functional completeness problem ของ multiple-valued logic
4. ศึกษาสมบัติของ semigroups ของ n -ary operations ซึ่งเป็น subsemigroups ของ semigroup $(O^n(A); +)$ ศึกษา Green's relations สำหรับ $(O^n(A); +)$ และจำแนก constant subsemigroups ทั้งหมดของ $(O^n(A); +)$ จำแนก rectangular bands และ normal bands ใน $(O^n(A); +)$

2. Partial Unary Operations with Long Pre-periods

เพราะว่าเป้าหมายหลักของโครงการวิจัยคือการได้การจำแนก unary functions f บนเซตจำกัด A ที่มี pre-period $\lambda(f) = n - t$ สำหรับทุกๆ t ซึ่ง $1 \leq t \leq n-1$ เมื่อ $n = |A|$ และให้รายละเอียดเกี่ยวกับ equivalence relations บน A ซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ f และจากการศึกษาอย่างละเอียดของผลงานในบทความ “Unary Operations with Long Pre-periods” ซึ่งเป็นบทความหนึ่งของผู้วิจัยในโครงการ MCI ภายใต้การสนับสนุนของสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย(สกว.) และได้ลงตีพิมพ์ในวารสาร Discrete Mathematics แล้วและปรากฏว่าเราจะสามารถขยายผลงานสู่กรณีทั่วไปดังวัตถุประสงค์ได้ ถ้าเราศึกษาและได้ผลในทำนองเดียวกันนี้สำหรับกรณีของ partial operations ผู้วิจัยจึงได้ศึกษาสมบัติของ partial operations และได้ขยายงานวิจัยสำหรับกรณีนี้เป็นผลสำเร็จ นั่นคือได้จำแนก partial unary operations f บนเซตจำกัด A ที่มี period $\lambda(f) = n$ และ $\lambda(f) = n-1$ และให้รายละเอียดเกี่ยวกับ equivalence relations บน A ซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ f ผู้วิจัยได้รวบรวมผลงานทั้งหมดเขียนเป็นบทความทางวิชาการโดยให้ชื่อว่า “Partial Unary Operations with Long

Pre-periods” และขณะนี้บทความนี้ได้ลงตีพิมพ์แล้วในวารสาร “Applied Algebra and Discrete Structure” ดังได้แสดงสำเนาของ reprint ของบทความดังกล่าวในภาคผนวก (ก)

3. N-ary Operations with Long Pre-periods

กรณี n-ary เป็นที่สนใจในวงวิชาการทั้งนี้เพราะ fundamental operations ของ finite algebras ใดๆ เป็น finitary operations ผู้วิจัยจึงได้รับคำแนะนำจากผู้เชี่ยวชาญให้ลองหา characterization สำหรับกรณี n-ary operations เพื่อจะได้ช่วยการศึกษา the congruence lattice $\text{Con } \bar{A}$ ของ finite algebra $\bar{A}$ ใดๆ ต่อไป ผู้วิจัยจึงขยายงานดังกล่าวจากกรณี unary operations และ partial operations ไปสู่กรณี n-ary operations เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ โดยสามารถจำแนก n-ary functions บนเซตจำกัด A ที่มี long period และให้รายละเอียดเกี่ยวกับ equivalence relations บน A ซึ่งไม่แปรเปลี่ยนภายใต้ f ทั้งหมด นอกจากนี้ผลงานวิจัยในกรณีนี้ยังสามารถประยุกต์กับหลายๆ สาขาวิชาที่ศึกษาโดยใช้ iteration และ recursion ทำหน้าที่หลักในการดำเนินเรื่องราวอีกด้วย โดยเฉพาะการประยุกต์กับปัญหา functional completeness problem ของ multiple-valued logic ผู้วิจัยจึงรวบรวมผลงานกรณี n-ary operations ทั้งหมดเขียนเป็น manuscript ของบทความทางวิชาการโดยให้ชื่อว่า “N-ary Operations with Long Pre-periods” และนำไป submit เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติคือ “Journal of Multiple-Valued Logic” ซึ่งเป็นวารสารที่มีค่า impact factor ตามฐานข้อมูล ISI และได้รับการตอบรับแล้ว และผู้วิจัยได้แนบสำเนาของ manuscript ของบทความดังกล่าว ดังแสดงในภาคผนวก (ข)

ผู้วิจัยได้รับมอบหมายจากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ให้เป็นประธานคณะกรรมการจัดการประชุม Annual Meeting in Mathematics on “National Conference on Algebra and Applications, 5th Conference for Young Algebraists in Thailand” ในช่วง 15 – 17 มีนาคม 2549 ดังแจ้งในรายงานประจำปีและผู้วิจัยได้ให้บรรยายผลงานวิจัยต่อที่ประชุม

นอกจากนี้ ผู้วิจัยได้รวบรวมผลงานวิจัยของทั้งสองบทความคือ “Partial Unary Operations with Long Pre-periods” และ “N-ary Operations with Long Pre-periods” เสนอเป็นผลงานวิจัยแบบ Poster ในการประชุมประจำปี “นักวิจัยรุ่นใหม่ ... พบ ... เมธีวิจัยอาวุโส สกว.” ครั้งที่ 3 ระหว่าง 12–14 ตุลาคม 2549 ที่ผ่านมา

4. Iteration of Total and Partial Unary Operations

ผู้วิจัยได้ศึกษาการจำแนกฟังก์ชันที่ไม่สมนัยหนึ่งต่อหนึ่งซึ่งนิยามบนเซตจำกัดที่มี pre-period (A characterization of unary functions defined on a finite set with pre-period) $\lambda(f) = n - t$ สำหรับ $1 \leq t \leq n - 1$ โดยประยุกต์ผลงานของบทความ “Unary Operations with Long Pre-periods” ดังกล่าวในหัวข้อบทนำโดยใช้ผลงานของบทความดังกล่าวในหัวข้อ 2 และหัวข้อ 3 เป็นเครื่องมือ ทำให้ได้การจำแนกที่สำคัญซึ่งพอจะสรุปโดยสังเขปเป็นทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

Theorem 1 : Let A be a finite set with $|A| = n \geq 3$ and let $f : A \rightarrow A$ be a unary operation with pre-period $\lambda(f) = n - t$ for all $1 < t < n - 1$. Then

- (i) there is the largest subset C of A such that the restriction of f to C is a permutation,
- (ii) there is a nonempty subset D with empty - intersection to $\text{Im}f$ such that
$$A - C = \bigcup_{v \in D} \{v, f(v), \dots, f^{m_v}(v)\} \text{ where } f^{m_v+1}(v) \in C \text{ and}$$

$$|v, f(v), \dots, f^{m_v}(v)| \leq n - t \text{ for all } v \in D$$
- (iii) there is an element $u \in D$ such that $m_u + 1 = n - t$.

Theorem 2 : Let A be a finite set with $|A| = n \geq 3$ and let $f : A \rightarrow A$ be a unary operation satisfying (i) – (iii) of Theorem 1. Then there are $\emptyset \neq C = \text{Im}f^{\lambda(f)}$ and $\emptyset \neq D \subseteq A - \text{Im}f$ such that

$$A = \bigcup_{v \in D} \{v, f(v), \dots, f^{m_v}(v), \dots, f^{p_v}(v)\} \cup \bigcup_{c \in C} \{c, f(c), \dots, f^{q_c}(c)\}$$

where

- (a) $0 \leq m_v \leq n - t - 1$ and $f^{p_v+1}(v) = f^{m_v+1}(v)$ for all $v \in D$,
- (b) there is a $u \in D$ such that $m_u + 1 = n - t$, and
- (c) $f^{q_c}(c) = c$ for all $c \in C$.

Theorem 3 : Let A be a finite set with $|A| = n \geq 3$ and let $f : A \rightarrow A$ be a unary operation.

If there are $\emptyset \neq C = \text{Im } f^{\lambda(f)}$ and $\emptyset \neq D \subseteq A - \text{Im } f$ such that

$$A = \bigcup_{v \in D} \{v, f(v), \dots, f^{m_v}(v), \dots, f^{p_v}(v)\} \cup \bigcup_{c \in C} \{c, f(c), \dots, f^{q_c}(c)\}$$

where Conditions (a), (b) and (c) in Theorem 2 are satisfied, then $\lambda(f) = n - t$.

นอกจากนี้ยังให้รายละเอียดของ equivalence relations บนเซตจำกัด A ซึ่ง invariant ภายใต้ unary operations ที่มี pre-period $\lambda(f) = n - t$ สำหรับ $1 \leq t \leq n - 1$ เมื่อ $n = |A|$ ผู้วิจัยจึงได้รวบรวมผลงานทั้งหมดเขียนเป็นบทความทางวิชาการโดยให้ชื่อว่า “Iteration of Total and Partial Unary Operations” และนำไป submit เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติคือ “Algebra Colloquium” ซึ่งเป็นวารสารที่มีค่า impact factor ตามฐานข้อมูล ISI และผู้วิจัยได้แนบสำเนาของ manuscript ของบทความดังกล่าว ดังแสดงในภาคผนวก (ค)

ผู้วิจัยได้รับมอบหมายจากภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร ให้เป็นคณะกรรมการชุดทำงานเพื่อจัดการประชุม “National Workshop and Conference on Mathematics” ในโอกาสครบรอบ 35 ปีคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร และผู้วิจัยเป็นประธานในส่วนงาน Conference ของ Algebra ในช่วง 1-5 ตุลาคม 2550 ดังแจ้งในรายงานประจำปี แล้วและผู้วิจัยได้เสนอผลงานวิจัยดังกล่าวในที่ประชุม

5. Semigroup Properties of N-ary Operations on Finite Sets

ผู้วิจัยได้รับเชิญจาก Prof. Dr. Klaus Denecke, Institute für Mathematik, Allgemeine Algebra und Diskrete Mathematik, Am Neuen Palais, Potsdam, Germany ให้ร่วมทำงานวิจัยกับท่านในสาขา General Algebra and Applications in Theoretical Computer Science ในหัวข้อ “Unary algebras and unary operations” ระหว่างวันที่ 20 เมษายน – 26 พฤษภาคม 2550 ในหัวข้อ “Unary algebras” ดังแจ้งในรายงานประจำปี ในการทำงานร่วมกันครั้งนั้น ผู้ร่วมวิจัยได้ร่วมปรึกษาหารือและตั้งข้อสังเกตกันว่า เนื่องจากเซตของ unary operations ทั้งหมดบนเซต A ที่ไม่ใช่เซตว่างเซตหนึ่งกับ composition ของฟังก์ชันเป็น semigroup ที่มีเอกลักษณ์หรือก็คือ monoid ที่รู้จักกันในชื่อ full transformation semigroup จึงเป็นที่น่าสนใจที่จะนิยามและศึกษา semigroup properties ของ semigroup ของ partial หรือ n -ary operations ทั้งหมดบนเซต A ด้วย และผู้วิจัยได้กลับมาศึกษาเพื่อสานต่อความคิดดังกล่าว

ต่อมาในช่วง 1 – 21 ตุลาคม 2550 ผู้วิจัยในนามภาควิชาคณิตศาสตร์และ Prof. Dr. Klaus Denecke ได้รับทุนสนับสนุนจาก DAAD ให้เป็น host จัด “Workshop for Young Algebraists in Thailand” ในหัวข้อ Algebraic Aspects of Tree Automata and Tree Languages” ณ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร เพื่อกระตุ้นให้เกิดเครือข่ายการทำงานวิจัยด้าน Universal Algebras ของบุคลากรที่เป็นนักวิชาการในประเทศไทยและเพื่อให้นักศึกษาหันมาสนใจศึกษาต่อในด้านนี้มากขึ้น ในช่วงเวลาดังกล่าวผู้วิจัย Prof. Dr. Denecke และ R. Butkote ซึ่งเป็นนักศึกษาระดับปริญญาเอกของ Institute für Mathematik, University of Potsdam, Germany ภายใต้ supervision ของ Prof. Dr. Denecke ได้มีเวลาวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวร่วมกันอีกครั้ง จนได้ผลงานที่มีน้ำหนักมากพอ จึงร่วมกันเขียน manuscript ของบทความทางวิชาการโดยให้ชื่อว่า “Semigroup Properties of n -ary Operations on Finite Sets” และนำไป submit เพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติคือ “Journal of Asian-European Mathematics” ซึ่งขณะนี้บทความดังกล่าวได้รับลงตีพิมพ์แล้ว ดังแสดงสำเนาของ reprint ในภาคผนวก (ง)

เอกสารอ้างอิง

1. J. Berman, *On the congruence lattice of unary algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 36, 1972, 34-80.
2. K.A. Baker and A.F. Pixley, (1975), *Polynomial Interpolation and the Chinese Remainder Theorem for Algebraic Systems*, Math. Z. 14 (165-174).
3. G. Birkhoff and J. D. Lipson, (1970), *Heterogeneous algebras*, J. Combinat. Theory 8(115 – 133).
4. K. Denecke, (1982), *Preprimal Algebras*, Akademie Verlag, Berlin.
5. K. Denecke, *Boolean clones and Hyperidentities in Universal Algebras*, Universal and Applied Algebra, Turawa, Poland 3 – 7 May 1988, World Scientific (1989)(23 – 45).
6. K. Denecke and R. Poschel, (1988), *A Characterization of Sheffer functions by hyperidentities*, Semigroup Forum, 37(351 – 362).
7. K. Denecke and R. Poschel, (1988), *The Characterization of primal algebras by hyperidentities*, Contributions to General Algebra 6, Verlag Holder – Pichler – Tempsky, Wien, Verlag B. G. Teubner Stuttgart, (67 – 87).
8. K. Denecke, (1990), *Minimal Algebras and Category Equivalences*, Beitrage zur Algebra und Geometrie 31(121 – 141).
9. K. Denecke and O. Luders, (1993), *Category equivalences and dualities of varieties and prevarieties generated by single preprimal algebras*, Acta Sci. Math. (Szeged)58(75 – 92).
10. K. Denecke and O. Luders, (1995), *Category equivalences of clones*, Algebra Universalis, 34(608 – 618).
11. K. Denecke, (1998), *Tame Congruence Theory*, East – West Journal of Mathematics: Vol. 1, No. 1(1 – 42).
12. K. Denecke and S. L. Wismath, (2000), *Hyperidentities and Clones*, Gordon and Breach Science Publishers.

13. K. Denecke, S. L. Wismath, *Universal Algebra and Coalgebra*, Manuscript, 2006.
14. K. Denecke and P. Glubudom, (2006), *Green's quasiorder on Menger algebras of terms*, Thai Journal of Mathematics, Vol. 4, 49-61.
15. D. Duffus and I. Rival, (1981), *A Structure Theory of Ordered Sets*, Discrete Mathematics, 35 (53-118).
16. D. Hobby and R. McKenzie, (1988), *The structure of finite algebras (Tame Congruence Theory)*, American Mathematical Society, Contemporary Mathematics Series, Vol. 76.
17. J. M. Howie, (1978), *Idempotent generators in finite full transformation semigroups*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 81, no. 3-4, (317 – 323).
18. J.M. Howie, (1981), *Some subsemigroups of infinite full transformation semigroups*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 88, no. 1-2, (159 – 167).
19. J.M. Howie, (1995), *Fundamentals of Semigroup Theory*, Oxford Science Publications.
20. D. Jakubikova-Studenovska, *Partial monounary algebras with common congruence relations*, Czechoslovak Mathematical Journal, 32(107)1982, 307-326.
21. D. Jakubikova-Studenovska, *On Congruence Relations of Monounary Algebras I*, Czechoslovak Mathematical Journal, 32(107)1982, 437-459.
22. D. Jakubikova-Studenovska, *On Congruence Relations of Monounary Algebras II*, Czechoslovak Mathematical Journal, 33(108)1982, 448-466.
23. E. W. Kiss and E. Prohle, (1988), *Problems and results in tame congruence theory*, Mathematical Institute of Hungarian Academy of Sciences, Preprint No. 60.
24. D. Lau, *Function Algebras on Finite Sets*, Springer 2006.
25. I. A. Mal'cev, (1971), *Iterative algebras and Post varieties*, In: The meta-mathematics of algebraic systems, North Holland, Amsterdam(396–415).

26. D. Papert, (1964), *Congruence relations in semilattices*, London Math. Soc. 39 (723 – 729).
27. R. Poschel and L. A. Kaluznin, (1979), *Funktionen- und Relationen- algebren*, VEB DWW, Berlin 1979; Birkhauser, Basel u. Stuttgart.
28. E.L. Post, (1921) *Introduction to a general theory of elementary propositions*, Amer. Journal Math. 43(1921), 163 – 185.
29. E.L. Post, (1941) *The two- valued iterative systems of mathematical logic*, Ann. Math. Studies 5, Princeton University Press, 1941.
30. M. Pouzet and D. Richard (eds) (1984), *Orders : description and roles*, Annals of Discrete Mathematics 23, North – Holland, Amsterdam.
31. R. Quackenbush, I. Rival and I. Rosenberg, (1990), *Clones, Order Varieties, Near Unanimity Functions and Holes*, Order 7(239-248).
32. C. Ratanaprasert, *On Monotone Clones of Connected Ordered sets*, General Algebra and Discrete Mathematics, 59th Arbeitstagung Allgemeine Algebra, Potsdam, February 2000.
33. C. Ratanaprasert and K. Denecke, (2004), *Hyperidentities in Order-primal algebras*, Journal of Applied Algebra and Discrete Structures, Vol 2 (101–118).
34. C. Ratanaprasert and K. Denecke, *Unary Operations with Long Pre-periods*, Discrete Mathematics, Available on line 26 November 2007.
35. C. Reischer, D. Schweigert and D. A. Simovici, (1986), *A completeness criterion by functional equations*, Preprint.
36. I. Rival, (ed) (1982), *Ordered sets*, NATO ASI Series 83, Reidel, Dordrecht.
37. I. Rival, (1989), *Order: a theory with a view*, in Klassifikation und Ordnung, INDEKS Verlag, Frankfurt.
38. I. G. Rosenberg, (1970), *Complete sets for finite algebras*, Math. Nachr. 44 (253 – 258).
39. I. G. Rosenberg, (1990), *Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken*, Rozprawy Cs. Akademie Ved. Ser. Math. Nat. Sci. 80 (3 - 93).

40. G. Rousseau, (1967), *Completeness in finite algebras with a single operation*, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1009 – 1013).
41. B. M. Schein, V. S. Trohimenko, *Algebras of multiplace functions*, Semigroup Forum, Vol. 17(1979), 1-64.
42. D. Schweigert, (1983), *On varieties of clones*, Semigroup Forum 26, (275 – 285).
43. D. Schweigert, *Clones equations and hyperidentities*, Preprint, Universitat Kaiserslautern.
44. D. Schweigert, (1985), *Clones of term functions of lattices and abelian groups*, Algebras Universalis 20 (27 – 33).
45. D. Schweigert and K. Denecke, (1987), *Hyperidentities and completeness properties of finite algebras*, Preprint.
46. L. A. Skornjakov, *Unars*, Colloquium on universal algebra, Esztergom, 1977, 133-136.
47. R.P. Sullivan, (1975), *Generalised partial transformation semigroups*, J. Austral. Math. Soc. 19 , part 4 (470 – 473).
48. R.P. Sullivan, (1991), *Transformation semigroups and linear algebras*, Monash Conferences on Semigroup Theory (Melbourne, 1990), (290 – 295).
49. R.P. Sullivan, (1995), *Congruences on transformation semigroups with fixed rank*, Proc. London Math. Soc. (3) 70 , no. 3, (556 – 580).
50. R.P. Sullivan, (1999), *Transformation semigroups : past, present and future*, Semigroups(Braga, 1999), (191 – 243).
51. W. Taylor, (1981), *Hyperidentities and hypervarieties*, Aequat. Math 23 (30 – 49).
52. W. Taylor, (1993), *Abstract Clone Theory*, Algebras and Orders, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London (507-530).
53. D. Zupnik, *Cayley functions*, Semigroup Forum, Vol.3(1972),349-358.

Outputs ที่ได้จากโครงการ

ผลงานการวิจัยของโครงการ “การจำแนกพีชคณิตจำกัดด้วยฟังก์ชันที่ไม่สมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง” ผู้วิจัยสามารถนำมาเขียนเป็นบทความทางวิชาเพื่อส่งตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติจำนวน 2 บทความและระดับนานาชาติในฐานข้อมูล ISI จำนวน 2 บทความ รวม 4 บทความซึ่งเกินเป้าหมายที่ให้ไว้ในข้อเสนอโครงการที่ตั้งเป้าหมายไว้จำนวน 3 บทความ
บทความทั้ง 4 บทความได้แก่

1. C. Ratanaprasert and K. Denecke, *Partial Unary Operations with Long Pre-periods*, Journal of Applied Algebra and Discrete Structures, Vol. 5(2007), No. 3, pp. 133-145.
2. C. Ratanaprasert and K. Denecke, *N-ary Operations with Long Pre-periods*, Journal of Multiple-Valued Logic, accepted (2006).
3. C. Ratanaprasert and K. Denecke, *Iteration of Total and Partial Unary Operations*, Algebra Colloquium, submitted (2007).
4. R. Butkote, K. Denecke and C. Ratanaprasert, *Semigroup Properties of N-ary Operations on Finite Sets*, Asian-European Journal of Mathematics, Vol.1, No.1 (2008), pp. 27- 44.