



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ :

**“FIXED POINT THEOREMS IN BANACH SPACES AND BANACH
ALGEBRAS”**

โดย ศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ ธรรมพงษา
และคณะ

14 สิงหาคม 2553

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ :

“FIXED POINT THEOREMS IN BANACH SPACES AND BANACH ALGEBRAS”

คณะผู้วิจัย

- | | |
|------------------------------|--|
| 1. ศ.ดร. สมพงษ์ ธรรมพงษา | ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ |
| 2. นายวรพงศ์ ฟูปิ่นวงศ์ | ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ |
| 3. นางสาววารุณันท์ อินธาก่อน | ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ |
| 4. นางสาวทักษพร บุตรสาร | ภาควิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ |

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

ACKNOWLEDGEMENT

จากการสนับสนุนของสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว) ต่องานวิจัยทางคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งทางคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ ที่คนส่วนใหญ่จะมองข้ามเพราะเข้าใจไม่ถึง ทำให้คณิตศาสตร์และนักคณิตศาสตร์ในประเทศไทย ก้าวหน้าไปเคียงบ่าเคียงไหล่กับคณิตศาสตร์และนักคณิตศาสตร์ระดับโลก ที่เห็นได้ชัดคือกลุ่มวิจัยทางทฤษฎีจุดตรึง เป็นกลุ่มที่โตที่สุดในประเทศไทย และเป็นกลุ่มเดียวที่สามารถจัดการประชุมวิชาการ(ที่จัดเป็นประจำทุกปี) และจัดประชุมนานาชาติที่เน้นเฉพาะผลงานทาง “ทฤษฎีจุดตรึง” สมาชิกในกลุ่มทุกรุ่นได้รับการสนับสนุนจาก สกว จึงทำให้ผลิตผลงานอย่างต่อเนื่องเป็นที่ประจักษ์ต่อชาวโลก พวกเราหลายคนได้รับเป็น referee ให้กับหลาย ๆ journal

สำหรับการสนับสนุนของ สกว ต่อโครงการวิจัยนี้ ได้สร้างนักวิจัยรุ่นล่าสุดให้เติบโตขึ้นอย่างแข็งแกร่งซึ่งหวังว่าพวกเขาจะได้รับการสนับสนุนจาก สกว ต่อไป ส่วนผลงานที่ได้สร้างขึ้นสอดคล้องกับที่เสนอในโครงการ และการตีพิมพ์ทำได้ใกล้เคียงกับที่คาดหวัง และมีบางส่วนที่นอกเหนือจากที่นำเสนอ จึงขอขอบคุณเป็นอย่างสูงต่อ สกว อีกครั้งหนึ่ง

คณะผู้วิจัย

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ค้นพบทฤษฎีจุดตรึงสำหรับการส่งเชิงเดียวและการส่งหลายค่าบนปริภูมิเมตริก และปริภูมิบานาค ผลงานที่เกี่ยวข้องกับเงื่อนไข (DL) และ คุณสมบัติ (D) ถูกนำไปประยุกต์กับการส่งที่หลากหลายขึ้น คุณสมบัติจุดตรึงต่าง ๆ สำหรับพีชคณิตบานาคได้ค้นพบภายในรูปแบบนानาชนิด ตลอดจนปัญหาและข้อคาดการณ์ที่น่าสนใจได้ถูกวิเคราะห์ไว้ด้วยสำหรับผู้สนใจ นอกจากนี้ ยังได้นำเสนอทฤษฎีบทการลู่เข้าทั้งแบบอ่อนและแบบเข้มเพื่อหาคำตอบ (จุดตรึง) สำหรับปัญหาต่าง ๆ

คำหลัก: จุดตรึง ปริภูมิบานาค พีชคณิตบานาค การลู่เข้าแบบอ่อน การลู่เข้าแบบเข้ม

ABSTRACT

Fixed points theorems for single- and multi-valued mappings are obtained for metric and Banach spaces. Results in connection with the (DL)-condition and Property (D) are applied to more mappings. Fixed point properties for Banach algebras are obtained under various conditions. We analyze and leave some open problems and conjectures for further study to interested people. Moreover, we also derive some weak and strong convergence theorems for finding solutions (i.e., fixed points) to various kinds of problems.

Keywords: fixed points, Banach spaces, Banach algebras, weak convergence, strong convergence

CONTENTS

Acknowledgement	ii
Abstract	iii
Executive summary	1
Output	8
Appendix	9
Appendix 1: S. Dhompongsa, H. Yingtaweessittikul, Fixed Point for Multivalued Mappings and the Metric Completeness, Fixed Point Theory and Applications, 2009, Article ID 972395, 1-15. (Impact Factor 1.525)	10
Appendix 2: S. Dhompongsa, W. Fupinwong, The fixed point property of unital abelian Banach algebras, Fixed Point Theory and Applications, 2010 (2010) Article 362829, 1-13. (Impact Factor 1.525)	26
Appendix 3: S. Dhompongsa, W. Fupinwong, and W. Lawton, Fixed point properties of C*-algebras, Journal of Mathematical Analysis and Applications, (in press). (Impact Factor 1.225)	29
Appendix 4: S. Dhompongsa, W. Takahashi, and H. Yingtaweessittikul, Weak convergence theorems for equilibrium problems with nonlinear operators in Hilbert spaces, Fixed Point Theory: An International Journal on Fixed Point Theory, Computation and Applications, (accepted). (Impact Factor 0.7)	42
Appendix 5: S. Dhompongsa, W. Inthakon, and W. Takahashi, A weak convergence theorem for common fixed points of some generalized nonexpansive mappings and nonspreading mappings in a Hilbert space, Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, (revision submitted). (Impact Factor 0.915)	56

Appendix 6: S. Dhompongsa, W. Takahashi, and H. Yingtaweessittikul,
Strong convergence theorems for equilibrium problems with
nonlinear operators in Hilbert spaces, Pacific J. of Optimization
(submitted).

68

EXECUTIVE SUMMARY

1. Project Title

FIXED POINT THEORY OF BANACH SPACES AND BANACH ALGEBRAS

2. Proposer's name, organization and telephone/fax numbers

2.1 Sompong Dhompongsa

Professor, Ph.D., Principal Investigator

Department of Mathematics

Chiang Mai University

Chiang Mai, 50200 Thailand

Tel. (053) 94-3327 ext. 25

Fax.(053) 892-280

e-mail : sompongdc@chiangmai.ac.th

นายสมพงษ์ ธรรมพงษ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

จ.เชียงใหม่ 50200

โทรศัพท์ (053) 94-3327 ต่อ 25

โทรสาร (053) 892-280

2.2 Worapong Fupinwong

Student, Co-investigator

Department of mathematics

Chiangmai University

Chiang Mai, 50200 Thailand

Tel. (053) 94-3327

Fax.(053)892-280

e-mail : g4865050@cm.edu

นายวรพงศ์ ฟูปินวงศ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

จ.เชียงใหม่ 50200

โทรศัพท์ (053) 94-3327

โทรสาร (053)892-280

2.3 Warunun Inthakon

Student, Co-investigator

Department of mathematics

Chiangmai University

Chiang Mai, 50200 Thailand

นางสาววรุณันท์ อินธาก้อน

ภาควิชาคณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

จ.เชียงใหม่ 50200

โทรศัพท์ (053) 94-3327

Tel. (053) 94-3327

โทรสาร (053)892-280

Fax.(053)892-280

e-mail : g490531009@cm.edu

2.4 Taksaporn Butsan

Student, Co-investigator

นางสาวทักษพร บุตรสาร

Department of mathematics

ภาควิชาคณิตศาสตร์

Chiangmai University

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

Chiang Mai, 50200 Thailand

จ.เชียงใหม่ 50200

Tel. (053) 94-3327

โทรศัพท์ (053) 94-3327

Fax.(053)892-280

โทรสาร (053)892-280

e-mail : g490531008@cm.edu

3. Research Field

FUNCTIONAL ANALYSIS AND TOPOLOGY

4. Problem statement and importance

The fixed point property (FPP) has been studied since J.Brouwer and S.Banach leading to several celebrated theorems such as Brouwer's Fixed Point Theorem and the principle of Banach's Contraction Mapping. The theory of fixed point property is one of the most important subject in pure and applied Mathematics. It contributes to a variety of applications in many fields of mathematics such as the theory of operators, control theory, approximation theory, and theory of equations. Using geometric property to study FPP has been developed since W. A. Kirk who proved in 1965 that a Banach space with a normal structure has weakly fixed point property .

The fixed point property is still proven to be the most important research problem in Mathematics and is continuing to be of interest to mathematicians worldwide. The study of nonexpansive mappings has been substantially motivated by the study of monotone and accretive operators, two classes of operators which arise naturally in the theory of differential equations. As an example, Kato (1967) has obtained the following basic result : For a Banach

space X , a subset D of X , and a map $T:D \rightarrow X$, then T is accretive if and only if for each $x, y \in D$ and $\lambda \geq 0$, $\|x - y\| \leq \|x - y + \lambda(Tx - Ty)\|$. Thus a mapping $T:D \rightarrow X$ is accretive if and only if the mapping $J_\lambda = (I - \lambda T)^{-1}$ (called the resolvent of T) is nonexpansive on its domain.

Other examples showing that the notion of nonexpansive mappings and their sets of fixed points play a crucial role in optimization theory (see [2, 22, 27, 29, 32, 33, 36, 37, 40]). In these studies, some forms of convergence theorems for nonexpansive mappings are considered.

The study of nonexpansive mappings and their fixed points could be extended to Banach Algebras. In their papers [27], they investigate when various Banach spaces associated to a locally compact group have the fixed point property for nonexpansive mappings or normal structure.

In view of the importance of this subject, the Principal Investigator (PI) and his group intend to continue their work on the mathematics itself, rather than on its applications. One part of the project then aims at establishing new concepts and results for fixed point theory in Banach spaces. Two of the main tools, among others, that the PI plans to employ and develop further are “the Dominguez – Lorenzo condition” proposed by Dhompongsa and others [8], and “Property (D)” proposed by Dhompongsa and others [6]. For the second part, the project will concentrate on the fixed point property of Banach algebras, especially, C^* - algebras.

This project will be undertaken for three years in collaboration with the PI's colleague and his students at Chiang Mai University. The PI has created a group of students working on Geometric Property, in particular, on the Fixed Point Property in Banach spaces and metric spaces. The impact of this project will not only contribute to advance the knowledge of the mathematical society itself, but will also strengthen the research group, especially students as its members, in Thailand.

5. Objective of Research

- 5.1 To investigate the significance the Dominguez – Lorenzo condition and Property (D). (See [8, 6]).

5.2 To strengthen the Dominguez – Lorenzo condition and Property (D) so that they can be applied to more mappings, especially, to nonself multivalued mappings.

5.3 To establish fixed point theorems in Banach algebras (See [26, 25, 17,34]).

6. Plan of Research

6.1 Collecting known results concerning the FPP and related concepts in Banach spaces and Banach algebras.

6.2 Preparing specific problem for research topics.

6.3 Solving problems.

6.4 Writing papers.

Plan for each 6 month period :

- June 1, 2008 – November 30, 2008: Writing a paper on “ On properties that imply the Dominguez – Lorenzo condition”.
- December 1, 2008 - May 31, 2009: Writing papers on “On property (D) and its generalization”.
- June 1, 2009 - November 30, 2009: Writing papers.
- December 1, 2009 - May 31, 2009: Writing papers.
- June 1, 2010 - November 30, 2010: Writing a paper on “ Fixed point theorems in Banach spaces and Banach algebras”.
- December 1, 2009 - May 31, 2010: Writing a paper on “Geometric properties in Banach spaces and Banach algebras”.

7. Methodology of Research

7.1 Apply the Dominguez – Lorenzo condition to new spaces.

7.2 Apply Property (D) to new spaces and to new mappings.

7.3 Apply a new tool, namely, the nonstandard analysis technique to the fixed point property in Banach spaces.

7.4 Modify standard methods or invent new ones in proving the existence of fixed points.

7.5 Study geometric properties of some Banach algebras.

8. Expected output

The PI expects to publish papers in strong international journals chosen from:

1 Tentative Titles: On properties that imply the Dominguez – Lorenzo condition.

J. Math. Anal. Appl. (IF 1.225)

2 Tentative Titles: On Property (D) and its generalization.

J. Math. Anal. Appl. (IF 1.225)

3. Tentative Title: Fixed point property in (some) C^* -algebras .

J. Functional Analysis (IF 0.879)

9. Selected published research papers related to research project matter.

- [1] A.G. Aksoy and M.A. Khamsi, *Nonstandard methods in fixed point theory*, pp.139, Springer-Verlag, Heidelberg, 1990.
- [2] V. Berinde, *Iterative approximation of fixed points*, pp.284, Efemeride Publishing House, (2002).
- [3] W.L. Bynum, *Normal structure coefficients for Banach spaces*, Pacific J. Math. 86 (1980) 427-436.
- [4] E. Casini, *About some parameters of normed linear spaces*, Atti Acc. Linzei Rend. fis.- S.VIII, LXXX, (1986) 11-15.
- [5] J.A. Clarkson, *The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue spaces*, Ann. of Math. 38 (1937) 114-115.
- [6] S. Dhompongsa, T. Dominguez Benavides, A. Kaewcharoen, A. Kaewkhao, B. Panyanak, *The Jordan-von Neumann constants and fixed points for multivalued nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 320(2006) 916-927.
- [7] S. Dhompongsa, A. Kaewkhao, *A note on properties that imply the fixed point property*, Abstr. Appl. Anal., V(2006), Article ID34959, 1-12.
- [8] S. Dhompongsa, A. Kaewchareon, and A. Kaewkhao, *The Dominguez - Lorenzo condition and fixed points for multivalued mappings*, Nonlinear Anal. 64 (2006) 958-970.
- [9] S. Dhompongsa, A. Kaewkhao, and S. Tasena, *On a generalized James constant*, J. Math. Anal. Appl. 285 (2003) 419-435.
- [10] S. Dhompongsa, P. Piraisangjun, and S. Saejung, *Generalised Jordan-von Neumann constants*

- and uniform normal structure, Bull. Austral. Math. Soc. 67 (2003) 225-240.
- [11] T. Dominguez Benavides, P. Lorenzo Ramirez, *Asymptotic centers and fixed points for multivalued nonexpansive mappings*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, 58(2004), 37-45.
 - [12] T. Dominguez Benavides and B. Gavira, *The fixed point property for multivalued nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 328(2007) 1471-1483.
 - [13] E.L. Fuster, *Moduli and constants ...what a show !*, (2002) (preprint).
 - [14] J. Gao and K.S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 48 (1990) 101-112.
 - [15] J. Gao and K.S. Lau, *On two classes of Banach spaces with uniform normal structure*, Studia Math. 99 (1) (1991) 40-56.
 - [16] J. Garcia-Falset, e. Llorens-Fuster, and E. M. Mazcunan-Navarro, *Banach spaces which are r-uniformly noncreasy*, Nonlinear Anal., 53 (2003), no. 7-8, 957-975.
 - [17] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey and W. Schachermayer, *Some topological and geometrical structures in Banach spaces*, Memoirs Amer. Math. Soc. 378 (1987). MR 84I:46027.
 - [18] R.C. James, *Uniformly nonsquare Banach spaces*, Ann. of Math. 80 (1964) 542-550.
 - [19] M. Kato, L. Maligranda, and Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient in Banach spaces*, Studia Math. 144 (3) (2001) 275-293.
 - [20] M. Kato and Y. Takahashi, *On the von Neumann-Jordan constant for Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (4) (1997) 1055-1062.
 - [21] W. A. Kirk, S. Massa, *Remarks on asymptotic and Chebyshev centers*, Houston J. Math. 16 (1990), 364-375.
 - [22] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Approximating zero points of accretive operators in strictly convex Banach spaces*, Proc. of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Hirosaki (2001) 191-196.
 - [23] T. Kuczumow, S. Prus, *Compact asymptotic centers and fixed points of multivalued nonexpansive mappings*, Houston. J. Math., vol. 16, No. 4, 1990.
 - [24] T. C. Lim, *A fixed point theorem for multivalued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space*, Bull. Amer. Math. Soc. 80(1974), 1123-1126.
 - [25] A. T. Lau and P. F. Mah, *Normal structure in dual spaces associated with a locally compact group*, Trans. Amer. Math. Soc. 310 (1988) 341-353.

- [26] A. T. Lau, P. F. Mah, and A. Ulger, *Fixed point property and normal structure for Banach spaces associated to locally compact groups*, Amer. Math. Soc. 125 (1997) 2021-2027.
- [27] S. Matsushita and D. Kuroiwa, *Some observations of approximation of fixed points of nonexpansive nonself-mappings*, Proc. of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Hirosaki (2001) 275-279.
- [28] S. B. Nadler, Jr., *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Math. 30 (1969) 475-488.
- [29] K. Nakajo and W. Takahashi, *Approximation of a zero of maximal monotone operators in Hilbert spaces*, Proc. of the international Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Hirosaki (2001) 303-314.
- [30] S. Prus, *Some estimates for the normal structure coefficient in Banach spaces*, Rendiconti del Cir. Mat. di Palermo, (1991) 128-135.
- [31] B. Sims, *Ultra-techniques in Banach Spaces Theory*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, No.60, pp.117, Kingston, Canada, 1982.
- [32] W. Takahashi, *Fixed point theorems and proximal point algorithms*, Proc. of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Hirosaki, (2001) 471- 481.
- [33] K.K. Tan and H.K. Ku, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process*, J. Math. Anal. Appl. 178 (1993) 301-308.
- [34] K. Taylor, *Geometry of the Fourier algebras and locally compact groups with atomic representations*, Math. Ann. 262 (1983) 183-190. MR 84h:43020.
- [35] A. Wisnicki and J. Wosko, *Banach ultrapower and multivalued nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. and Appl. 326 (2007) 845-857.
- [36] H.K. Xu, *Iterative algorithms for nonlinear operators*, J. London Math. Soc. (2) 66 (2002) 240-256.
- [37] H.K.Xu, *An iterative approach to quadratic optimization*, JOTA, V.111 No.3 (2003) 659-678.
- [38] H.K.Xu, *Multivalued nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Analysis. 43 (2001), 693 - 706.
- [39] H.K.Xu, *Metric Fixed Point Theory for Multivalued Mappings*, Dissertations Math. (Rozprawy Mat.) 389 (2000).
- [40] H.K. Xu and X.M. Yin, *Strong convergence theorems for nonexpansive nonself-mappings*, Nonlinear Analysis 24 (1995) 223-228.

OUTPUT

- S. Dhompongsa, H. Yingtaweessittikul, Fixed Point for Multivalued Mappings and the Metric Completeness, Fixed Point Theory and Applications, 2009, Article ID 972395, 1-15. Appendix 1

- W. Fupinwong , and S. Dhompongsa, The fixed point property of unital abelian Banach algebras, Fixed Point Theory and Applications, 2010 (2010) Article 362829, 1-13. Appendix 2

- S. Dhompongsa, W. Fupinwong, and W. Lawton, Fixed point properties of C^* -algebras, Journal of Mathematical Analysis and Applications, (in press). Appendix 3

- S. Dhompongsa, W. Takahashi, and H. Yingtaweessittikul, Weak convergence theorems for equilibrium problems with nonlinear operators in Hilbert spaces, Fixed Point Theory, (accepted) . Appendix 4

- S. Dhompongsa, W. Inthakon, and W. Takahashi, A weak convergence theorem for common fixed points of some generalized nonexpansive mappings and nonspreading mappings in a Hilbert space, Optimization: Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research, (revision submitted). Appendix 5

- S. Dhompongsa, W. Takahashi, and H. Yingtaweessittikul, Strong convergence theorems for equilibrium problems with nonlinear operators in Hilbert spaces, Pacific J. of Optimization, (submitted). Appendix 6