รายงานฉบับสมบูรณ์โครงการวิจัย

ทุนวิจัยทุนริเริ่มโดยผู้อำนวยการ สกว.

โครงการ การแปลงเมทริกซ์บน ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์

Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces

ผศ..ดร.สุเทพ สวนใต้

าควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

scmti005@chiangmai.ac.th

DIG 4080002

รายงานฉบับสมบูรณ์โครงการวิจัย

ทุนวิจัยทุนริเริ่มโดยผู้อำนวยการ สกว.

โครงการ การแปลงเมทริกซ์บน ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์

Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces

โดย ผศ..ดร.สุเทพ สวนใต้

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

scmti005@chiangmai.ac.th

D12 4C80002

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	2
บทคัดย่อภาษาไทย	3
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	9
บทนำ	16
วิธีการทดลอง	19
ผลการทดลอง	20
บทวิจารณ์	25
หนังสืออ้างอิง	27
ผลงานที่ได้รับ	28
ภาคผนวก	39
รายงานการเงิน	40

กิตติกรรมประกาศ

ผู้ดำเนินการวิจัยขอขอบคุณสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย ที่ให้การสนับสนุนเงินทุนสำหรับการดำเนินการวิจัยตลอดโครงการนี้ และต้องขอขอบคุณ ศาสตราจารย์ วิรุฬ สายคณิต และ กองทุนคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ได้ให้การสนับสนุนการเดินทางไปเสนอผลงานที่ประเทศโปแลนด์ ตลอดจนต้องขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์ และ สำนักบริการคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ให้บริการคอมพิวเตอร์ และ ความสะดวกสบายในการใช้บริการอินเตอร์เนท และบริการอื่น ๆ ที่จำเป็นในการดำเนินการวิจัย จนทำให้โครงการดำเนินการลุล่วงไปด้วยดี

บทคัดย่อ

ผลงานวิจัยที่ 1

ชื่อเรื่อง แฟคเตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์สำหรับเนียร์ควอไซ-นอร์ม

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เนียร์ควอไซ-นอร์ม q ได้ถูกนิยามบนปริภูมิเวกเตอร์จริงหรือ เวกเตอร์เชิงซ้อน เราใช้นิยามของการมีขอบเขตเช่นเดียวกับในปริภูมิเวกเตอร์-เชิงทอพอโลยี เพื่อศึกษาเซตที่มีขอบเขตในปริภูมิเนียร์ควอไซ-นอร์ม และ เราศึกษาแฟคเตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์สำหรับเนียร์ควอไซ-นอร์ม q นั่นคือ ค่าคงที่ $\lambda > 0$ ที่ $q(\lambda x) \le \lambda |\alpha|^r q(x)$ สำหรับบาง $r > 0$ และทุกสเกลาร์ α และทุกๆ $x \in X$ เงื่อนไขที่จำเป็น และ เพียงพอสำหรับ เนียร์ควอไซ-นอร์ม ที่มีแฟคเตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์ ได้ถูกศึกษา นอกจากนั้นเราได้แสดงด้วยว่าภายใต้เงื่อนไขใดที่เนียร์ควอไซ-นอร์มธรรมชาติบนปริภูมิลำดับของแมงดอกซ์ $\ell_\infty(p)$ และ $\ell(p)$ มีแฟค-เตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์

คำหลัก เนียร์ควอไซ-นอร์ม แฟคเตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์

ผลงานวิจัยที่ 2

ชื่อเรื่อง แฟคเตอร์ผลคูณสำหรับ พี-เซมินอร์ม

บทคัดย่อ ให้ p เป็นพี-เซมินอร์มบนพีชคณิต A เราศึกษาแฟคเตอร์ผลคูณ และ แฟคเตอร์กำลังสองสำหรับ p นั่นคือ ค่าคงที่ $\mu>0$ และ $\lambda>0$ ซึ่ง $S(xy)\le\mu S(x)S(y)$ และ $S(x^2)\le\lambda S(x)^2$ สำหรับทุกๆ $x,y\in A$ เราได้ให้ลักษณะของแฟคเตอร์เหล่านี้ในเทอมของเคอร์เนลของ p และเรายังแสดงด้วยว่า พี-นอร์มบนพีชคณิตที่มีมิติจำกัด มีแฟคเตอร์ผลคูณเสมอ หลังจากนั้นเราได้แสดงว่า ภายใต้เงื่อนไขใดที่ p มีแฟคเตอร์ผลคูณถ้ามันมีแฟคเตอร์กำลังสอง ในท้ายสุดเราได้แสดงว่า ถ้า A เป็นพีชคณิตสลับที่ แล้ว แฟคเตอร์กำลังสอง เป็นแฟคเตอร์ผลคูณ

คำหลัก แฟคเตอร์ผลคูณ พี-เซมินอร์ม

ผลงานวิจัยที่ 3

ชื่อเรื่อง การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิ ลำดับค่าเวกเตอร์

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $c_0(X,p), c(X,p), \ell_\infty(X,p)$ และ $\ell(X,p)$ ไปยัง ปริภูมิลำดับของสเกลาร์ของแมตตอกซ์ $c_0(q), c(q)$ และ $\ell_\infty(q)$ เมื่อ $p=(p_k)$ และ $q=(q_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก

คำหลัก การแปลงเมทริกซ์ ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์

ผลงานวิจัยที่ 4

ชื่อเรื่อง การแปลงเมทริกซ์จากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ของแมตดอกซ์ไปยังปริภูมิลำดับนาคาโน

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ของแมตดอกซ์ $c_0(X,p)$, $c(X,p)$ และ $\ell_\infty(X,p)$ ไปยัง ปริภูมิลำดับนาคาโน $\ell(q)$ เมื่อ $p=(p_k)$ และ $q=(q_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก

คำหลัก การแปลงเมทริกซ์ ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ของแมตดอกซ์ ปริภูมิลำดับนาคาโน

ผลงานวิจัยที่ 5

ชื่อเรื่อง การแปลงเมทริกซ์ที่เกี่ยวกับปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาโน

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ของนาคาโน $\ell(X,p)$ และ $F_r(X,p)$ ไปยัง E_r และเรายังได้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจาก $\ell(X,p)$ และ $F_r(X,p)$ ไปยัง ปริภูมิลำดับที่มีขอบเขต ℓ_∞ เมื่อ $p=(p_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก ซึ่ง $p_k > 1$ ทุกๆ $k \in N$ และ $r \geq 0$

คำหลัก การแปลงเมทริกซ์ ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ของนาคาโน

ผลงานวิจัยที่ 6

ชื่อเรื่อง การแปลงเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาโน

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาโน $\ell(X,p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ ℓ_∞ และ $\underline{\ell}_\infty(q)$ และเรายังคงให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจาก $M_0(X,p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ $\underline{\ell}_\infty(q)$ เมื่อ $p=(p_k)$ และ $q=(q_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก ซึ่ง $p_k \le 1$ ทุกๆ $k \in N$.

คำหลัก การแปลงเมทริกซ์ ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาโน

ผลงานวิจัยที่ 7

ชื่อเรื่อง การแปลงเมทริกซ์บน ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาโน

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาโน $\ell(X,p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ ℓ_∞, $\underline{\ell}_\infty(q)$, bs และ cs เมื่อ $p=(p_k)$ และ $q=(q_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก ซึ่ง $p_k > 1$ ทุกๆ $k \in N$

คำหลัก การแปลงเมทริกซ์ ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาโน

ผลงานวิจัยที่ 8

ชื่อเรื่อง การแปลงเมทริกซ์ระหว่างปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาโน $\ell(X,p)$ ไปยังปริภูมิ BK ใดๆ และโดยการใช้ผลดังกล่าว เราได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจาก $\ell(X,p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ $\ell_\infty(Y)$, $c_0(Y,q)$, $c(Y)$, $\ell_s(Y)$, $E_r(Y)$, และ $F_s(Y)$ เมื่อ $p=(p_k)$ และ $q=(q_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก ซึ่ง $p_k \le 1$ ทุกๆ $k \in N$ $r \ge 0$ และ $s \ge 1$

คำหลัก การแปลงเมทริกซ์ ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์

ผลงานวิจัยที่ 9

ชื่อเรื่อง การแปลงเมทริกซ์ของบางปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $\ell_\infty(X,p)$ และ $\underline{c_0}(X,p)$ ไปยังปริภูมิลำดับออร์ลิคซ์ ℓ_M เมื่อ $p=(p_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก

คำหลัก การแปลงเมทริกซ์ ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์

ผลงานวิจัยที่ 10

ชื่อเรื่อง ตัวดำเนินการซุเปอร์โพซิชันบนปริภูมิลำดับ $\ell(p)$

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้ลักษณะของตัวดำเนินการซุเปอร์โพซิชันที่กระทำจากปริภูมิลำดับของแมตดอกซ์ $\ell(p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ ℓ_1

คำหลัก ตัวดำเนินการซุเปอร์โพซิชัน ปริภูมิลำดับ

ABSTRACT

Research output no. 1

Title : Scalar Multiplicativity Factors for Near Quasi-Norms

Abstract : In this note a near quasi-norm q is defined on a real or complex vector space X. We use the notion of boundedness as in a general topological vector space to study boundedness of sets in a near quasi-normed space and we study scalar multiplicative factors for q, i.e., constant $\lambda > 0$ for which $q(\lambda x) \leq \lambda |\alpha|^r q(x)$ for some $r > 0$ and for all scalars α and all $x \in X$. The necessary and sufficient conditions for a near quasi-norm q to have multiplicative factors are given. We further show that under what conditions the natural near quasi-norm on the sequence spaces of Maddox $\ell_\infty(p)$ and $\ell(p)$ have scalar multiplicative factors.

Keywords : Near quasi-norms, Scalar Multiplicative factors

Research output no. 2

Title : Multiplicativity Factors for p-Seminorms

Abstract : Let S be a p-seminorm on an algebra A. In this paper we study multiplicativity and quadrativity factors for S, i.e., constants $\mu > 0$ and $\lambda > 0$ for which $S(xy) \leq \mu S(x)S(y)$ and $S(x^2) \leq \lambda S(x)^2$ for all $x, y \in A$. We begin with characterizing these factors in terms of the kernel of S and we also show that p-norms on finite dimensional algebras always have multiplicative factors. We then provide under what conditions does S have multiplicative factors if it has quadrative factors. Finally, we show that if A is commutative then quadrativity factors imply multiplicativity factors.

Keywords : Multiplicative factors, p-seminorms

Research output no. 3

Title : Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces

Abstract : In this paper, we give the matrix characterizations from vector-valued sequence spaces of Maddox $c_0(X,p), c(X,p), \ell_\infty(X,p)$ and $\ell(X,p)$ into scalar-valued sequence spaces of Maddox $c_0(q), c(q)$ and $\ell_\infty(q)$ where $p=(p_k)$ and $q=(q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers.

Keywords : Matrix Transformations, Vector-Valued sequence spaces

Research output no. 4

Title : Matrix Transformations from Vector-Valued Sequence Spaces of Maddox into the Nakano Sequence Space

Abstract : In this paper, we give the matrix characterizations from vector-valued sequence spaces of Maddox $c_0(X,p), c(X,p)$ and $\ell_\infty(X,p)$ into the Nakano sequence space $\ell(q)$ where $p=(p_k)$ and $q=(q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers.

Keywords : Matrix Transformations, Vector-valued sequence spaces of Maddox, Nakano sequence space.

Research output no. 5.

Title : On Matrix Transformations Concerning the Nakano Vector-Valued Sequence Space

Abstract : In this paper, we give the matrix characterizations from Nakano vector-valued sequence spaces $\ell(X,p)$ and $F_r(X,p)$ into E_r and we obtain the matirx characterizations from $\ell(X,p)$ and $F_r(X,p)$ into the bounded sequence space ℓ_∞ as corollaries, where $p=(p_k)$ is a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k > 1$ for all $k \in N$ and $r \geq 0$.

Keywords : Matrix Transformations, Nakano vector-valued sequence space.

Research output no. 6

Title : On Matrix Transformations Related to Nakano Vector-Valued Sequence Space

Abstract : In this paper, we give necessary and sufficient conditions for infinite matrices mapping from Nakano vector-valued sequence spaces $\ell(X,p)$ into the serquence spaces ℓ_∞ and $\underline{\ell}_\infty(q)$ and we also give the matrix characterizations from $M_0(X,p)$ into the space $\underline{\ell}_\infty(q)$ where $p=(p_k)$ and $q=(q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers such that $p_k \le 1$ for all $k \in N$.

Keywords : Matrix Transformations, Nakao vector-valued sequence space.

Research output no. 7

Title : Matrix Transformations on Nakano Vector-Valued Sequence Space

Abstract : In this paper, we give the matrix characterizations from Nakano vector-valued sequence space $\ell(X,p)$ into ℓ_∞, $\underline{\ell}_\infty(q)$, bs and cs where $p=(p_k)$ and $q=(q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers such that $p_k > 1$ for all $k \in N$.

Keywords : Matrix Transformations, Nakao vector-valued sequence space.

Research output no. 8

Title : Matrix Transformations Between Some Vector-Valued Sequence Space

Abstract : In this paper, we give necessary and sufficient conditions for infinite matrices mapping from Nakano vector-valued sequence spaces $\ell(X,p)$ into any BK-space and by using this results we obtain the matrix characterizations from $\ell(X,p)$ into the sequence spaces $\ell_\infty(Y)$, $c_0(Y,q)$ $c(Y)$, $\ell_s(Y)$, $E_r(Y)$, and $F_r(Y)$ where $p=(p_k)$ and $q=(q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers such that $p_k \le 1$ for all $k \in N$, $r \ge 0$, and $s \ge 1$.

Keywords : Matrix Transformations, Vector-valued sequence spaces.

Research output no. 9

Title : Matrix Transformations of Some Vector-Valued Sequence Spaces

Abstract : In this paper, we give the matrix characterizations from vector-valued sequence spaces $\ell_\infty(X,p)$, and $\underline{c_0}(X,p)$ into the Orlicz sequence space ℓ_M where $p=(p_k)$ is a bounded sequences of positive real numbers.

Keywords : Matrix Transformations, Vector-valued sequence spaces .

Research output no. 10

Title : Superposition Operators on the Sequence Space $\ell(p)$

Abstract : In this paper, we give a characterization of superposition operator acting from a sequence space of Maddox $\ell(p)$ into the sequence space ℓ_1 .

Keywords : Superposition operators, Sequence space.

บทนำ

การแปลงเมทริกซ์ (matrix transformations) ของปริภูมิลำดับ (sequence spaces) นับเป็นปัญหาที่สำคัญปัญหาหนึ่งที่มีการทำวิจัยกันมากในสาขาของ Sequence Spaces การศึกษาปัญหาดังกล่าวเป็นการศึกษาหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอให้กับเมทริกซ์อนันต์ที่ส่ง(map) จากปริภูมิลำดับหนึ่งไปยังปริภูมิลำดับหนึ่ง ในอดีตปริภูมิลำดับที่นักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่สนใจศึกษานั้นเป็นปริภูมิลำดับที่เกิดมาจากการประยุกต์ในสาขาวิชาอื่นๆ ซึ่งเป็นปริภูมิลำดับของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน แต่เนื่องด้วยปัญหาต่างๆในยุคปัจจุบันมีความซับซ้อนมากขึ้น การแก้ปัญหาโดยวิธีเก่าๆจึงไม่สามารถใช้ได้เช่นเดียวกันกับปัญหาของการศึกษาการแปลงเมทริกซ์ ในปัจจุบันปริภูมิลำดับที่ศึกษากันส่วนใหญ่ ก็ได้ขยายจากปริภูมิลำดับของจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อนไปเป็นปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์(vector-valued sequence spaces) และเมทริกซ์อนันต์ที่ศึกษานั้นก็ขยายจากเมทริกซ์ของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนไปเป็นเมทริกซ์อนันต์ของตัวดำเนินการ (operator) เพื่อความสะดวกในการกล่าวถึงที่มาและปัญหา ตลอดจนวัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้ เราจะให้สัญลักษณ์และนิยามบางอย่างที่จำเป็นดังต่อไปนี้

ให้ X และ Y เป็นปริภูมิลำดับของจำนวนจริงหรือของจำนวนเชิงซ้อน และ $A = (a_{nk})$ เป็นเมทริกซ์ ของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน แ ละให้ $x = (x_n) \in X$ ถ้า $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$ เป็นอนุกรมลู่เข้าทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ แล้ว จะกล่าวว่า Ax หาค่าได้ และ จะให้ $Ax = (\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k)_{n=1}^{\infty}$ จะกล่าวว่า A ส่ง(map) X ไปยัง Y ซึ่งเขียนแทนด้วย $A : X \to Y$ ถ้า Ax หาค่าได้ และ $Ax \in Y$ ทุกๆ $x \in X$

ให้ E เป็นปริภูมิบานาค(Banach space) และให้ X เป็นปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ใน E (E-valued sequence spaces) และ Y เป็นปริภูมิลำดับของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน สำหรับเมทริกซ์อนันต์ $A = (f_k^n)$ เมื่อ $f_k^n \in E'$(the continuous dual of E) และ ถ้า $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ ลู่เข้าทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะกล่าวว่า Ax หาค่าได้ และจะให้ $Ax = (\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k))_{n=1}^{\infty}$ เรากล่าวว่า A ส่ง X ไปยัง Y ถ้า Ax หาค่าได้ และ $Ax \in Y$ ทุกๆ $x \in X$

ให้ $p=(p_k)$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก Bulut และ Caker [2] ได้นิยามปริภูมิลำดับของจำนวนจริง $\ell(p,s)$ ดังนี้

$$\ell(p,s) = \{(x_k) \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}|x_k|^{p_k} < \infty \}$$

และได้หาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : \ell(p,s) \to c$ และ $A : \ell(p,s) \to \ell_\infty$ เมื่อ ℓ_∞ และ c เป็นปริภูมิลำดับที่มีขอบเขตและลำดับลู่เข้า นักคณิตศาสตร์หลายคนได้ศึกษาการแปลงเมทริกซ์ระหว่างปริภูมิลำดับของจำนวนจริง $c_0(p)$, $\ell(p)$ และ $\ell_\infty(p)$

ในปี ค.ศ. 1993 C.X. Wu และ L. Liu [16] นักคณิตศาสตร์ชาวจีนได้นิยามปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $c_0(E,p)$, $\ell(E,p)$ และ $\ell_\infty(E,p)$ ดังต่อไปนี้

$$c_0(E,p) = \{(x_n) \mid \|x\|^{p_k} \to 0 \}$$

$$\ell(E,p) = \{(x) \mid \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} < \infty \}$$

$$\ell_\infty(E,p) = \{(x) \mid \sup_k \|x_k\|^{p_k} < \infty \}$$

และได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : X \to Y$ ในกรณีที่ $X = c_0(E,p)$, $\ell(E,p)$ และ $\ell_\infty(E,p)$ และ $Y = c_0$, $c_0(q)$, $\ell_\infty(q)$ ซึ่งงานของ C.X. Wu และ L. Liu เป็นงานที่คลุมงานที่นักคณิตศาสตร์หลายคนได้ทำไว้

ในปี ค.ศ. 1995 Mursaleen [10] นักคณิตศาสตร์ชาวอินเดียได้ศึกษาการแปลงเมทริกซ์จากปริภูมิ $\ell(p,s)$ ไปยังปริภูมิ f, f_∞ เมื่อ

$$f = \{x \in \ell_\infty \mid \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} x_{k+n} = L \text{ , uniformly in } n \}$$

และ

$$f_\infty = \{x \mid \sup_{m,n} |\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} x_{k+n}| < \infty \}$$

ถ้าเรานิยามปริภูมิลำดับ $\ell(E,p,s)$, $\ell_\infty(E,p,s)$ และ $c_0(E,p,s)$ เมื่อ $s \geq 0$ ดังนี้

$$\ell(E,p,s) = \{(x_k) \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\|x_k\|^{p_k} < \infty \}$$

$$\ell_\infty(E,p,s) = \{(x_k) \mid \sup_k k^{-s}\|x_k\|^{p_k} < \infty \}$$

$$c_0(E,p,s) = \{(x_k) \mid \frac{\|x_k\|^{p_k}}{k^s} \to 0 \}$$

ปริภูมิทั้งสามเ เป็นปริภูมิที่คลุมปริภูมิที่ C.X. Wu และ L. Liu นิยามไว้ ดังนั้นการศึกษาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : X \to Y$ เมื่อ $X = \ell(E,p,s)$, $\ell_\infty(E,p,s)$ และ $Y = \ell_\infty$, c, c_0, $\ell_\infty(q)$, $c_0(q)$ f, f_∞ จะเป็นงานวิจัยที่คลุมงานวิจัยที่นักคณิตศาสตร์หลายๆคนที่ทำไว้ในอดีต เช่นงานวิจัยของ C.X. Wu และ L. Liu (1993) และ งานของ Mursaleen (1995)

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้คือ

1. หาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : X \to Y$ เมื่อ $X = \ell(E,p,s)$ และ $\ell_\infty(E,p,s)$ และ $Y = c_0$, ℓ_∞, c, $c_0(q)$, $\ell_\infty(q)$, $c(q)$ เมื่อ $q = (q_k) \in c_0$

2. หาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : X \to Y$ เมื่อ $X = \ell(E,p,s)$ และ $\ell_\infty(E,p,s)$ และ Y = bs , bv และ cs

3. หาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : X \to Y$ เมื่อ $X = \ell(E,p,s)$ และ $\ell_\infty(E,p,s)$ และ Y = f และ f_∞

4. หาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : \ell(E,p,s) \to \ell(p,s)$ และ $A : \ell_\infty(E,p,s) \to \ell_\infty(p,s)$

5. หาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : c_0(E,p,s) \to c_0$ และ $A : c_0(E,p,s) \to \ell_\infty(q)$

เมื่อ $q = (q_k)$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก

วิธีการทดลอง

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการแปลงเมทริกซ์ ของปริภูมิลำดับจากเอกสารหมายเลข [1 - 16]
2. ศึกษาสมบัติต่างๆ ของปริภูมิลำดับของแมดดอกซ์ (Maddox sequence spaces) จากเอกสารหมายเลข [5]
3. ศึกษาผลงานวิจัยเกี่ยวกับการแปลงเมทริกซ์ระหว่างปริภูมิลำดับ $c(p)$, $c_0(p)$, $\ell(p)$ และ $\ell_\infty(p)$ จากเอกสารหมายเลข [6]
4. ศึกษางานวิจัยของ Bulut และ Caker ในเอกสารหมายเลข [5] ที่เกี่ยวข้องกับการแปลงเมทริกซ์ ของปริภูมิลำดับ $\ell(p,s)$ ไปยัง ℓ_∞ และ c.
5. ศึกษาคุณความรู้พื้นฐาน และ สมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $c_0(E,p)$, $c(E,p)$, $\ell_\infty(E,p)$ และ $\ell(E,p)$ และการแปลงเมทริกซ์ ของปริภูมิลำดับจากปริภูมิลำดับเหล่านี้ไปยังปริภูมิลำดับ c_0, $c_0(q)$, ℓ_∞ , $\ell_\infty(q)$ จากเอกสารหมายเลข [16]
6. โดยการอาศัยความรู้ที่ได้จากการศึกษาตามระเบียบข้อ 1 - 5 เป็นแนวทางในการคิดค้นทฤษฎีใหม่ ๆ เกี่ยวกับการหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับที่กำหนดให้ไปยังปริภูมิลำดับที่เราสนใจ เพื่อให้ได้ตามวัตถุประสงค์ที่ได้กำหนดไว้

ผลการทดลอง

1. จากการศึกษาสมบัติต่างๆ ของปริภูมิลำดับ $c_0(p)$ $c(p)$ $\ell_\infty(p)$ และ $\ell(p)$ ในเอกสาร [5, 8] ทำให้ได้แนวคิดในการสร้างองค์ความรู้ใหม่ ซึ่งให้ชื่อว่า near quasi - norms จากนั้นได้ศึกษาการมีโครงสร้างเป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงทอพอโลยี (Topological vector space) ของปริภูมิ near quasi-norms และ ศึกษาการมีขอบเขตของเซตในปริภูมิ near quasi-norms ทั้งสองแบบ คือ ในเชิงของเมตริก และในเชิงของเวกเตอร์เชิงทอพอโลยี จะเห็นได้ว่า ปริภูมิ near quasi -norms นั้นไม่จำเป็นต้องเป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงทอพอโลยี ดังนั้นจึงเกิดคำถามว่า เมื่อใดปริภูมิ near quasi-norms เป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงทอพอโลยี จากความพยายามที่จะตอบคำถามนี้ ได้เกิดแนวคิดในการนิยาม แฟคเตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar multiplicative factors) สำหรับ near quasi-norms ใด ๆ บนปริภูมิเวกเตอร์ และจากนั้นก็ได้ศึกษาหาเงื่อนไขในการมีแฟคเตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์ ทั้งในกรณีทั่วไป และ ในกรณีเฉพาะเช่น ในปริภูมิลำดับ $\ell_\infty(p)$ และ $\ell(p)$ เป็นต้น

ผลงานวิจัยที่ได้เกี่ยวกับเรื่องดังกล่าวนี้ให้ชื่อว่า

" Scalar Multiplicativity Factors for Near Quasi-Norms "

ซึ่งได้รับการตีพิมพ์ลงในวารสารนานาชาติชื่อ

" Bull. Cal. Math. Soc. Vol 290 no. 4 , 1998."

วารสารดังกล่าวนี้เป็นวารสารนานาชาติที่มีชื่อเสียงในประเทศอินเดีย สามารถค้นได้จากอินเตอร์เนท

หมายเหตุ ขณะนี้กำลังรอ reprints ของผลงานวิจัยนี้ จำนวน 50 ฉบับ จากวารสารดังกล่าว ซึ่งคาดว่าจะได้รับก่อนเดือน มิถุนายน 2542

2. จากการศึกษาปริภูมิลำดับ $\ell(p)$ เมื่อ $p=(p_k)$ $0<p\le 1$ ทุกๆ $k\in N$ เราพบว่า เมื่อ $p_k=p_{k+1}$ ทุกๆ $k\in N$ จะได้ว่า ปริภูมิ $\ell(p)$ เป็นปริภูมิ p - seminorm สังเกตได้ว่า ทุก ๆ ปริภูมิ p - seminorm เป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงทอพอโลยี จากการศึกษาผลงานของ Grosse - Erdmann ในเอกสาร [5] ทำให้ได้

แนวคิดในการศึกษา พีชคณิตเชิงทอพอโลยี (Topological algebra) โดยการหาเงื่อน ไขของการมีแฟคเตอร์การคูณ (Multiplicative factors) สำหรับ p - seminorm ที่นิยามบน พีชคณิตใด ๆ จากการศึกษาเรื่องดังกล่าวนี้ ทำให้ได้ทฤษฎีใหม่ ๆ ต่าง ๆ อีกมากมาย และ ผู้ทำวิจัยได้รวบรวมไว้ในผลงานชื่อ

"Multiplicativity Factors for p-Seminorms"

และได้นำเอาผลงานดังกล่าวไปเสนอในที่ประชุมนานาชาติทางคณิตศาสตร์ ที่จัดขึ้นที่มหาวิทยาลัย Ateneo de Manila ประเทศฟิลิปปินส์ ระหว่างวันที่ 16 - 17 ธันวาคม 2541 ในการประชุมครั้งนี้ผู้ทำวิจัยได้รับเกียรติเป็น Invited Speaker ของการประชุมในครั้งนี้ด้วย และผลงานดังกล่าวนี้จะตีพิมพ์ลงใน Proceedings ของการประชุมครั้งนี้ โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศฟิลิปปินส์เป็นผู้ดำเนินการ

3. จากการศึกษาความรู้พื้นฐานต่างๆ ในเรื่องที่เกี่ยวกับการแปลงเมทริกซ์ของปริภูมิลำดับ จากเอกสาร [5] และ [16] ผู้ทำวิจัยได้คิดค้นทฤษฎีใหม่ ๆ ที่สามารถให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ของแมดดอกซ์ $c_0(X,p)$ $c(X,p)$ และ $\ell_\infty(X,p)$ ไปยัง ปริภูมิลำดับ $c_0(q)$ $c(q)$ และ $\ell_\infty(q)$ เมื่อ $p=(p_k)$ $q=(q_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก ทฤษฎีที่ได้เป็นองค์ความรู้ใหม่ และ ผู้ ทำวิจัยได้เขียนผลงานดังกล่าวโดยให้ชื่อผลงานนี้ว่า

" Matrix Transformations on Some Vector - Valued Sequence Spacves"

ผลงานวิจัยนี้ได้ส่งไปเพื่อลงตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติที่มีชื่อเสียงในประเทศโปแลนด์ คือวารสาร "Comment. Math."

ส่วนหนึ่งของผลงานวิจัยนี้เป็นงานที่คลุมผลงานของนักคณิตศาสตร์ หลายคน และมีทฤษฎีใหม่เป็นองค์ความรู้ใหม่อีกมากมาย

4. จากผลการทดลองข้อ 3 และจากความรู้พื้นฐานในการศึกษาปริภูมิลำดับ Nakano $\ell(q)$ ผู้ทำวิจัยได้คิดค้นทฤษฎีใหม่ ๆ เกี่ยวกับการให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A

ใน X' ที่ A ส่งจากปริภูมิลำดับ $c_0(X,p)$ $c(X,p)$ และ $\ell_\infty(X,p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ $\ell(q)$ ทฤษฎีต่าง ๆ เกี่ยวกับเรื่องนี้ ผู้ทำวิจัยได้เขียนไว้ในผลงานวิจัยชื่อ " Matrix Transformations from Vector-Valued Sequence Spaces of Maddox into the Nakano Sequence space"

ผลงานเรื่องนี้ ผู้ทำวิจัยได้ส่งไปลงตีพิมพ์ (sumitted) ในวารสาร "Journal of London Mathematical Society" ซึ่งขณะนี้กำลังรอผลการพิจารณาจาก referee อยู่

5. จากการศึกษาปริภูมิลำดับ Nakano $\ell(X,p)$ เราพบว่า $\ell(X,p)$ เป็นปริภูมิ FK-space โดยอาศัยทฤษฎีของ Zeller เราสามารถหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ใน X' (the dual space of X) ที่ A ส่งจาก $\ell(X,p)$ และ $F_r(X,p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ E_r เมื่อ $p_k > 1$ ทุกๆ $k \in N$ และ $r \geq 0$
รายละเอียดของผลงานวิจัยเรื่องนี้ ผู้ทำวิจัยได้เขียนไว้ในเรื่อง

"On Matrix Transformations Concerning the Nakano Vector-Valued Sequence Space"

ผู้ทำวิจัยได้ส่งผลงานนี้เพื่อลงตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติ ชื่อ "Acta Math. Hungar." ซึ่งเป็นวารสารที่มีชื่อเสียงระดับนานาชาติของประเทศฮังการี

6. โดยการประยุกต์ทฤษฎีของ Zeller และสมบัติต่างๆ ของปริภูมิลำดับ $\ell(X,p)$ ℓ_∞ และ $\underline{\ell_\infty}(q)$ เมื่อ $p_k > 1$ ทุกๆ $k \in N$ ทำให้ได้ทฤษฎีใหม่ๆ เกี่ยวกับการให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ใน X' ที่ส่งจากปริภูมิลำดับ $\ell(X,p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ ℓ_∞ และ $\underline{\ell_\infty}(q)$ รายละเอียดเกี่ยวกับทฤษฎีต่างๆเหล่านี้ ผู้ทำวิจัยได้รวบรวมเขียนไว้ในผลงานชื่อ

"On Matrix Transformations Related to Nakano Vector-Valued Sequence Spaces"

ผลงานนี้ ผู้ทำวิจัยได้ส่งเพื่อลงตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติชื่อ
"Bulletin of Calcutta Mathematical Society"

7. ในผลการทดลองข้อ 6 เราได้ทฤษฎีต่าง ๆเกี่ยวกับการหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ที่ A ส่งจากปริภูมิลำดับ $\ell(X,p)$ ไปยัง ℓ_∞ และ $\underline{\ell_\infty}(q)$ ในกรณีที่ $p_k > 1$ ทุกๆ $k \in N$

สำหรับในกรณีที่ $p_k \leq 1$ ทุก ๆ $k \in N$ ผู้ทำวิจัยได้คิดค้นทฤษฎีใหม่ ๆ เพื่อให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ที่ A ส่งจากปริภูมิลำดับ Nakano $\ell(X,p)$ ไปยัง ℓ_∞ และ $\underline{\ell_\infty}(q)$ ผลงานวิจัยนี้มีชื่อว่า
"Matrix Transformations on Nakano Vector-Valued Sequence Spaces"
ซึ่งได้ส่งไปลงตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติของประเทศอาร์เจนตินา

8. จากการศึกษาคิดค้นวิจัยตามผลการทดลองข้อ 7. ทำให้เกิดแนวคิดในการขยายผลของการวิจัยให้กว้างขวางขึ้น (general) โดยการศึกษาการแปลงเมทริกซ์ระหว่างปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ เมทริกซ์อนันต์ที่สนใจนั้นเป็นเมทริกซ์อนันต์ใน $L(X,Y)$ (ปริภูมิของตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขตทั้งหมดจาก X ไปยัง Y)

ผลของการทดลองในข้อนี้ ทำให้ได้ทฤษฎีใหม่ๆ อีกมากมายที่ให้เงื่อนไขที่จำเป็น และ เพียงพอสำหรับเมทริกซ์อนันต์ A ที่ A ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $\ell(X,p)$ ไปยังปริภูมิ BK ใดๆ ในปริภูมิบานาค Y เมื่อ $p_k \leq 1$ ทุก ๆ $k \in N$ จากผลของทฤษฎีที่ได้ ทำให้เราสามารถนำไปประยุกต์หาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ที่ A ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $\ell(X,p)$ ไปยังปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $\ell_\infty(Y)$ $c_0(Y)$ $c(Y)$ $E_r(Y)$ และ $F_r(Y)$ เมื่อ $p_k \leq 1$ ทุก ๆ $k \in N$

รายละเอียดของงานวิจัยนี้ ผู้ทำวิจัยได้เขียนรวบรวมไว้ในผลงานชื่อ
"Matrix Transformations Between Some Vector-Valued Sequence Spaces"

ซึ่งผลงานเรื่องดังกล่าวนี้ได้รับการตอบรับ (accepted) ให้ตีพิมพ์ลงในวารสารนานาชาติชื่อ "SEA. Bull. Math. (Southeast Asian Bulletin of Mathematics) ขณะนี้กำลังรอ reprints จากวารสารดังกล่าวอยู่

9. เนื่องจากปริภูมิลำดับของ ออร์ลิคซ์ (Orlicz sequence space) ℓ_M เป็นปริภูมิที่เป็นที่นิยมศึกษากันมาก เพราะว่าเป็นกรณีทั่วไปของปริภูมิที่เรารู้จัก เช่น ปริภูมิ ℓ_p เป็นต้น ดังนั้น ผู้ทำวิจัยจึงทดลองศึกษาการแปลงเมทริกซ์จากปริภูมิ $\ell_\infty(X,p)$ และ $c_0(X,p)$ ไปยังปริภูมิลำดับออร์ลิคซ์ ℓ_M และได้ผลงานวิจัยในเรื่องนี้ โดยให้ชื่องานวิจัยนี้ว่า

"Matrix Transformations of Some Vector-Valued Sequence Spaces"

ผู้ทำวิจัยได้นำผลงานนี้ไปเสนอในที่ประชุมนานาชาติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง Function Spaces V ซึ่งจัดขึ้นเป็นครั้งที่ 5 ที่มหาวิทยาลัย Adam Mickeywicz ประเทศโปแลนด์ ระหว่างวันที่ 25 สิงหาคม - 3 กันยายน 2541

10. นอกจากผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับเรื่องของการแปลงเมทริกซ์ของปริภูมิลำดับแล้ว ผู้ทำวิจัยยังเกิดแนวคิดในเรื่องที่เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการซุเปอร์โพซิชัน (superposition operators) บนปริภูมิลำดับที่กำลังสนใจศึกษาคือ ปริภูมิลำดับของแมดดอกซ์ $\ell(p)$ ผู้ทำวิจัยได้ค้นพบทฤษฎีใหม่ๆอีกมากมายเกี่ยวกับตัวดำเนินการซุเปอร์โพซิชันที่ส่งจากปริภูมิลำดับ $\ell(p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ ℓ_1 และ ศึกษาการมีขอบเขต (boun dedness) การมีขอบเขตเฉพาะที่ (Locally boundedness) ของตัวดำเนินการซุเปอร์โพซิชันเหล่านั้น ผลงานดังกล่าวนี้ชื่อ

" Superposition Operators on the Sequence Space $\ell(p)$ "

ผลงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้นำไปเสนอในที่ประชุมนานาชาติทางคณิตศาสตร์ ที่จัดที่ โรงแรม TAWANA RAMADA กรุงเทพมหานคร โดยภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เป็นผู้จัดการประชุม ระหว่างวันที่ 8 - 10 ธันวาคม 2540

ผลงานดังกล่าวนี้ได้ตีพิมพ์ลงใน Proceedings ของการประชุม หน้า 172 - 175

บทวิจารณ์

ก่อนอื่นผู้ทำวิจัยต้องขอขอบคุณ สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว) ที่ได้ให้โอกาสผู้ทำวิจัยได้รับการสนับสนุนทุนวิจัยในครั้งนี้ นับว่าเป็นความคล่องตัวในการดำเนินงานของ สกว. เป็นอย่างมากในการให้ทุนสนับสนุนการวิจัยประเภทต่างๆ ตัวอย่างเช่น ทุนวิจัยที่ผู้ทำวิจัยได้รับนี้ เป็นทุนที่ให้โดยความริเริ่มของผู้อำนวยการ สกว. ทุนดังกล่าวนี้ไม่ได้เข้าลักษณะทุนใดเลยที่ทาง สกว. กำหนดไว้ เพราะเดิมนั้นผู้ทำวิจัยได้สมัครขอรับทุนองค์ความรู้ใหม่ ซึ่งมีระยะเวลา 3 ปี แต่เพราะว่าทาง referees ได้ประเมินว่าโครงการของข้าพเจ้านั้นไม่เหมาะที่จะเป็นทุนองค์ความรู้ใหม่ โดยประเมินว่าผลงานที่ได้นั้นไม่มีองค์ความรู้ใหม่ และมีโอกาสตีพิมพ์ได้ไม่ถึง 60 % แต่อย่างไรก็ตามผู้ทำวิจัยต้องขอขอบคุณทาง สกว. อีกครั้งหนึ่งที่ไม่ได้ตัด การสนับสนุนลงอย่างสิ้นเชิง แต่เปิดโอกาสให้ข้าพเจ้าได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยโดยเป็นทุนโดยความริเริ่มจากท่านผู้อำนวยการ สกว. โดยทาง สกว. ได้ขอให้ข้าพเจ้าปรับโครงการใหม่โดยให้งบประมาณได้ไม่เกิน 200,000 บาท (สองแสนบาท) ข้าพเจ้าได้ปรับโครงการในแง่ของงบประมาณ และเวลาจากเดิม 3 ปี เหลือ 1 ปี ครึ่ง โดยทำวิจัยคนเดียว แต่โดยความเป็นจริงแล้ว โครงการดังกล่าวเป็นโครงการใหญ่สามารถให้ผลงานตีพิมพ์ได้มากกว่า 10 papers และ สามารถสร้างเป็นหัวข้อวิทยานิพนธ์สำหรับนักศึกษาปริญญาโท และ เอก ได้มากมาย จากความจริงที่ได้ มีนักศึกษาระดับปริญญาโทที่ได้จบการศึกษาไปแล้ว จำนวน 5 คน ที่ ได้ หัวข้อวิทยานิพนธ์จากแนวคิดในโครงการวิจัยนี้ และ ผู้ทำวิจัยได้กำหนดให้

หัวข้อ "Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces" เป็นหัวข้อวิทยานิพนธ์สำหรับปริญญาเอก 1 คน ซึ่งขณะนี้กำลังดำเนินการค้นคว้าทำวิจัยอยู่ ซึ่งคาดว่าจะจบการศึกษาในปี 2542 - 2543

จากผลงานวิจัยที่ได้จะเห็นว่า ภายในระยะเวลา 1 ปี ครึ่ง นั้น ผู้ทำวิจัยได้ผลงานวิจัย 10 papers โดยมีผลงานที่ได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (accepted) ลงในวารสารนานาชาติแล้วจำนวน 2 papers ขณะนี้กำลังรอ reprints ของงานวิจัย 2 เรื่องดังกล่าว และได้ submitted ผลงานวิจัยเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติอีกจำนวน 5 papers ซึ่งกำลังรอผลการพิจารณาจาก referees ของวารสารต่างๆ

สำหรับผลงานที่เหลืออีก 3 papers นั้น ผู้ทำวิจัยได้นำไปเสนอในที่ประชุมนานาชาติทางคณิตศาสตร์อีก 3 ผลงาน ในจำนวนนี้เป็นการเสนอผลงานในต่างประเทศจำนวน 2 ครั้ง คือที่ประเทศโปแลนด์ และ ประเทศฟิ-ลิปปินส์ สำหรับการไปเสนอผลงานทั้ง 2 ครั้งนั้น ผู้ทำวิจัยได้รับเชิญเป็น Invited Speaker ของการประชุมในครั้งนั้นด้วย แต่เนื่องจากทุนที่ได้รับมีจำนวนน้อยไม่เพียงพอในการเดินทางไปต่างประเทศ ผู้ทำวิจัยต้องขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์ และ กองทุนคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ และ ศาสตราจารย์ วิรุฬ สายคณิต ที่ได้สนับสนุนค่าใช้จ่ายในการเดินทางไปเสนอผลงานในต่างประเทศ มา ณ โอกาสนี้

ตามที่ได้กล่าวแล้วว่า โครงการดังกล่าวตามความจริงแล้วควรใช้เวลามากกว่า 1 ปี ครึ่ง ดังนั้นจึงยังคงมีปัญหาที่น่าสนใจอีกมากมายเกี่ยวกับเรื่องนี้ ที่สามารถคิดค้น วิจัยเป็นองค์ความรู้ใหม่ได้อีกมากมาย

ปัญหาที่ผู้ทำวิจัยยังคงเปิดไว้สำหรับผู้สนใจมีเช่น ปัญหาในการหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ที่ A ส่งจากปริภูมิลำดับ $c_0(X,p)$ $c(X,p)$ $\ell_\infty(X,p)$ และ $\ell(X,p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ f และ f_∞ ปัญหานี้สามารถได้ผลงานวิจัยอีกอย่างน้อย 3 - 4 papers นอกจากนี้แล้วยังมีปัญหาที่ยังเปิดให้สามารถทำการวิจัยได้ในทำนองเดียวกันนี้อีกมากมายเมื่อเราศึกษาปริภูมิลำดับใหม่ๆ

หนังสืออ้างอิง

[1] สาธิ ไชยรัตน์ " การแปลงเมทริกซ์ของปริภูมิลำดับ" วิทยานิพนธ์ขั้นปริญญาโทบัณฑิต วิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ 2538

[2] Bulut, E., and Caker, O., " The sequence space $\ell(p,s)$ and related matrix transformations", Comm. Fac.Sic. Univ Ankara (A,), 28 (1979), 34 -39

[3] Chandrasekhara Rao., Pacific. J. Math. 31(1969), 171 - 174

[4] Cook, G., " Infinite Matrices and Sequence Spaces" London, Mcmilland 1950

[5] Grosse-Erdmann, R.G., "The structure of the sequence spaces of Maddox", Cand.J. Math. 44(1992), 298 - 307

[6] Grosse-Erdmann, R.G., " Matrix Transformations between the sequence spaces of Maddox", J. of Math. Anal. Appl. 180 (1993), 233 - 238.

[7] Kreyzig, E., "Introductory Functional Analysis with Applications", New York, John Wiley & Sons, 1978

[8] Maddox, I.J., " Element of Functional Analysis", Cambridge, Cambridge University Press,1978

[9] Maddox, I.J., "Spaces of strongly summable sequences" "Quart. J. Math. Ocford Ser. (2) 18 (1967), 345 - 355.

[10] Mursaleen, " Infinite Matrices and Almost Convergent Sequence", SEA Bull. Math. Vol. 19 No.1 (1995) 45-48

[11] Nakano, H., " Modulared sequence spaces", Proc. Japan. Acad. 27(1951), 508 - 512

[12] Ruckle, W., " Sequence Spaces" , Boston, Pitman, 1980

[13] Sirajudeen, S.M., "Indian. J. Pure. Appl. Math (9) 12 (1981)

[14] Sirajudeen, S.M., and Somasundaram, D., Indian. J. Pure. Appl. Math (2) 14(1983)

[15] Wilansky, A., "Summability through Functional Analysis" Lehigh University, North - Holland

[16] Wu, C.X., and Liu, L., " Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces", SEA. Bull. Math. Vol.17, No.1 (1993), 83-96

ผลงานวิจัยที่ได้ (Output)

ตามผลการทดลองข้อ 1 - 9 เราได้ผลงานวิจัยดังต่อไปนี้

1. Scalar Multiplicativity Factors for Near Quasi-norms
2. Multiplicativity Factors for p - Seminorms
3. Matrix Transformations on Some Vector - Valued Sequence Spaces
4. Matrix Transformations from Vector - Valued Sequence Spaces of Maddox into the Nakano Sequence Space
5. On Matrix Transformations Concerning the Nakano Sequence Spaces
6. On Matrix Transformations Related to Nakano Vector - Valued Sequence Spaces
7. Matrix Transformations on Nakano Sequence Spaces
8. Matrix Transformations Between Some Vector - Valued Sequence Spaces
9. Matrix Transformations of Some Vector - Valued Sequence Spaces
10. Superposition Operators on the Sequence Space

ผลงานวิจัย 1

ชื่อเรื่อง Scalar Multiplicativity Factors for Near Quasi-norms

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ได้รับการตีพิมพ์ (accepted) **ในวารสารนานาชาติ ชื่อ**
Bull. Math. Soc. no. 1998
(Bulletin of Calcutta Mathematical Society **ในประเทศอินเดีย**

หมายเหตุ กำลังรอ Reprints จำนวน 50 ฉบับ จากวารสารดังกล่าว

Scalar Multiplicativity Factors for Near Quasi-Norms

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this note a near quasi-norm q is defined on a real or complex vector space X. We use the notion of boundedness as in a general topological vector space to study boundedness of sets in a near quasi-normed space and we study scalar multiplicative factors for q, i.e., constant $\lambda > 0$ for which $q(\alpha x) \leq \lambda|\alpha|^r q(x)$ for some $r > 0$ and for all scalars α and all $x \in X$. The necessary and sufficient conditions for a near quasi-norm q to have multiplicative factor are given. We further show that under what conditions the natural near quasi-norm on the sequence spaces of Maddox $\ell_\infty(p)$ and $\ell(p)$ have scalar multiplicative factors.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A16, 46A19, 46A45.

1. INTRODUCTION

Let X be a vector space over a field F where $F = R$ or $F = C$ and $p > 0$. As usual, we call a function $S : X \to R$ a *p-seminorm* if for all $x, y \in X$ and $\alpha \in F$:

$$S(x) \geq 0$$

$$S(\alpha x) = |\alpha|^p S(x)$$

$$S(x + y) \leq S(x) + S(y)$$

If, in addition $S(x) \neq 0$ for all $x \neq 0$ then S is a *p-norm*. If S is a p-seminorm on X we call (X, S) a *p-seminormed linear space (p-semi-NLS)*

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

A *quasi-norm* on X is defined in [5], page 13, to be a function $q : X \to R$ satisfying

(i) $q(0) = 0$

(ii) $q(-x) = q(x)$ for all $x \in X$

(iii) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ for all $x, y \in X$

(iv) if $\alpha_k,\ \alpha \in F$, $|\alpha_k - \alpha| \to 0$ and $x_k, x \in X$, $q(x_k - x) \to 0$, then $q(\alpha_k x_k - \alpha x) \to 0$.

It follows from (i) – (iii) that $q(x) \geq 0$ for all $x \in X$. If the quasi-norm q satisfies $q(x) = 0$ if and only if $x = 0$, then it is said to be *total*.

If q is a quasi-norm on X, then $d(x,y) = q(x-y)$ defines a semi-metric on X which is a metric if and only if q is total. A quasi-normed space (QNLS) is a pair (X,q) where q is a quasi-norm on X. Note that a quasi-normed space is a topological space (TVS) under the metric topology induced by the quasi-norm.

We call a function $q : X \to R$ a *near quasi-norm* if q satisfies the coditions (i), (ii) and (iii) above. *A near quasi-norm space* (NQNLS) is a pair (X,q) where q is a near quasi-norm on X. Note that every seminormed spaces, QNLS-spaces and p-normed spaces are NQNLS-space. A near quasi-norm q is said to be *total* if $q(x) = 0$ implies $x = 0$. From (i) – (iii), we obtain that $q(x) \geq 0$ for all $x \in X$. If q is a near quasi-norm on X, the function $d : X \times X \to R$ defined by $d(x,y) = q(x-y)$ is a translation invaraint semi-metric on X which is a metric if and only if q is total. We call d the semi-metric induced by q. We always assume that a near quasi-normed space carries the metric topology induced by d. We shall see in Section 2 that a near quasi-normed space is not necessarily a TVS and will see in Section 3 that under what conditions a near quasi-norm space is a TVS.

For a near quasi-normed space (X, q) a subset B of X is said to be *bounded* if $x_k \in B$ and $\alpha_k \in F$, $\alpha_k \to 0$, then $\alpha_k x_k \to 0$. If $B \subseteq B(x,r)$ (the open ball center at x and radius r) for some $x \in X$ and for some $r > 0$, then B is said to be *metrically bounded*. We show in Section 1 that in a near quasi-normed space, a bounded subset is metrically bounded, but the converse does not hold in general and we also see in Section 3 that under what conditions a metrically bounded subset is bounded.

Arens and Goldberg [1, 2] defined multiplicative factors for a seminorm on an algebra $\mathcal{A}$ as follows: For a seminorm S on an algebra $\mathcal{A}$, we call $\lambda > 0$ is a *multiplicative factor for* S if $S(xy) \leq \lambda S(x)S(y)$ for all $x, y \in \mathcal{A}$. It is easy to see that if S has a multiplicative factor, then A is a TVS. They also gave necessary and sufficient conditions for a seminorm S in term of its kernel to have multiplicative factors.

Let q be a near quasi-norm on a vector space X. Then q is said to have a *scalar multiplicative factor for* q if there are $\lambda > 0$ and $r > 0$ such that

$$q(\alpha x) \leq \lambda |\alpha|^r q(x) \tag{1.1}$$

for all $\alpha \in F$, $x \in X$.

We call λ in (1.1) , an *r-scalar multiplicative factor for* q. If λ is an r-scalar multiplicative factor for q then so is μ if $\mu \geq \lambda$. Note that norms, seminorms and p-seminorms always have scalar multiplicative factors.

Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive numbers. Maddox [4] introduced the sequence spaces $\ell_\infty(p)$ and $\ell(p)$ as follows:

$\ell_\infty(p) = \{(x_k)\colon\ (x_k)$ is a real sequence such that $\sup_k |x_k|^{p_k} < \infty\}$,

$\ell(p) = \{(x_k)\colon\ (x_k)$ is a real sequence such that $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty\}$

Grosse-Erdmann [3] studied some structures of these sequence spaces in [3]. Let $q_p : \ell_\infty(p) \to R$ and $q'_p : \ell(p) \to R$ be defined by

$$q_p((x_k)) = \sup_k |x_k|^{\frac{p_k}{M}} \quad \text{and} \quad q'_p((x_k)) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k}\Big)^{\frac{1}{M}}$$

where $M = max\{1, \sup_k p_k\}$. It is easy to see that q_p is near quasi-norm on $\ell_\infty(p)$. We shall show in Section 2 that there is a sequence $p = (p_k)$ such that the function $q_p : \ell_\infty(p) \to R$ is not a quasi-norm. Maddox [4] showed that q'_p is a quasi-norm on $\ell(p)$ and in Section 4 we show that under what conditions q_p and q'_p have scalar multiplicative factors.

2. Near Quasi-Normed Spaces

By using the same proof as in [5], Proposition 2, page 3, and Proposition 4, page 15, the following propositon is obtained:

Propositton 2.1 *Let (X, q) be a near quasi-norm space. Then*

(1) The map $(x, y) \mapsto x + y$ from $X \times X \to X$ is continuous.

(2) The map $q : X \to R$ is continuous.

(3) If $\mathcal{U}$ is a neighborhood base at 0 and $U \in \mathcal{U}$, then there exits $V \in \mathcal{U}$ such that $V + V \subseteq U$.

(4) If $\mathcal{U}$ is (open) neighborhood base at 0 in X and $x_0 \in X$, then $x_0 + \mathcal{U} = \{x_0 + U\colon U \in \mathcal{U}\}$ is a (open) neighborhood base at x_0.

Example 2.2 Let $p = (\frac{1}{k})$ and consider the sequence space $\ell_\infty(p)$. We know that the map $q_p : \ell_\infty(p) \to R$, defined by $q_p((x_k)) = \sup_k |x_k|^{\frac{1}{k}}$ is a near quasi-norm on $\ell_\infty(p)$. For each $k \in N$, let $x^{(n)} = (1, 1, 1, ...)$ and $t_n = \frac{1}{n}$ for all $n \in N$. Then $x^{(n)} \to (1, 1, 1, ...)$ and $t_k \to 0$. But we see that

$$q_p(t_n x^{(n)}) = \sup_k \Big(\frac{1}{n}\Big)^{\frac{1}{k}} = 1$$

for all $n \in N$. Then $t_n x^{(n)} \not\to 0$. This shows that the map $(t, x) \mapsto tx$ from $R \times X \to X$ is not continuous and q_p is not a quasi-norm on $\ell_\infty(p)$.

In a near quasi-normed space, by using the same argument as in [5], Theorem 9, page 18, we also have the same criterion for completeness as in a quasi-normed space.

Proposition 2.3 *A near quasi-normed spaced (X, q) is complete iff every absolutely convergent series in X is convergent.*

The following proposition gives some criteria for boundedness in near quasi-normed space.

Proposition 2.4 *Let (X, q) be a near quasi-normed space and $B \in X$. The following are equivalent:*

(1) B is bounded,

(2) for each neighborhood U of 0 in X, there exists a positive real number ϵ such that if $|t| \leq \epsilon$ implies $tB \subseteq U$,

(3) for each neighborhood U of 0 in X, there exists a positive real number t_0 such that if $|t| \geq t_0$ implies $B \subseteq tU$.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) *Assume that B is bounded. Let U be a neighborhood of 0 in X. Suppose that (2) does not hold. Then there is a neighborhood U of 0 in X and a sequence of scalar (t_n) such that $t_n \to 0$ and $t_n B \not\subseteq U$, so that there is a sequence (x_n) in B such that $t_n x_n \notin U$. Hence $(t_n x_n)$ does not converge, so B is not bounded.* □

In the next proposition, we give a relation between boundedness and metrically boundedness in a near quasi-normed space.

Proposition 2.5 *In a near quasi-normed space, a bounded subset is metrically bounded, but the converse does not hold in general.*

Proof. *Let X be a near quasi normed space and $B \subseteq X$ a bounded set. By Proposition 2.4(3), there exists $n \in N$ such that $B \subseteq nB(0,1)$. Since $nB(0,1) \subseteq B(0,n)$, we have $B \subseteq B(0,n)$. Hence B is metrically bounded.*

Now, consider the sequence space $\ell_\infty(p)$ where $p = (\frac{1}{n})$. We know that $(\ell_\infty(p), q_p)$ is a near quasi-normed space. Let $B = \{\frac{1}{n}e : n \in N\}$ where $e = (1, 1, 1, \dots)$. Since $q_p(\frac{1}{n}e) = \sup_k (\frac{1}{n})^{\frac{1}{k}} = 1$ for all $n \in N$, we have B is metrically bounded. For each $n \in N$, let $t_n = \frac{1}{n}$ and $x_n = \frac{1}{n}e \in B$, we see that $q_p(t_n x_n) = \sup_k (\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{k}} = 1$. Hence $t_n x_n \not\to 0$, so that B is not bounded. The proof is now complete. □

In a general TVS, we have that every convergent sequence is bounded, but it is not true in a near quasi-normed space. For example, the sequence (x_n) in $(\ell_\infty(p), q_p)$, where $p = (\frac{1}{n})$ and $x_n = (1, 1, 1, \dots)$ for all $n \in N$, is convergent, but not bounded because $q_p(\frac{1}{n}x_n) = 1$ for all $n \in N$.

We now turn to the question that when the concepts of boundedness and metrically boundedness are equivalent, and we obtain the following theorem.

Theorem 2.6 *In a near quasi-normed space (X, q), if q has a scalar multiplicative factor, then $B \subseteq X$ is bounded if and only if B is metrically bounded.*

Proof. *Let $\lambda > 0$ and $r > 0$ be such that*

$$q(\alpha x) \leq \lambda |\alpha|^r q(x) \text{ for all } \alpha \in F \text{ and } x \in X. \tag{2.1}$$

By proposition 2.4, if B is bounded, then B is metrically bounded.

Conversely, assume that B is metrically bounded. Let $x_k \in B$ and $t_k \in F$, $t_k \to 0$. Then there exists $K > 0$ such $q(x) \le K$ for all $x \in B$. By (2.1), we have

$$q(t_k x_k) \le \lambda |t_k|^r q(x_k) \le \lambda K |t_k|^r.$$

Consequently, $q(t_k x_k) \to 0$, so B is bounded. □

Since every convergent sequence in a near quasi-normed sapce is metrically bounded, we immediately obtain from Theorem 2.5 :

Corollary 2.7 *Let (X, q) be a near quasi-normed space. If q has a scalar multiplicative factor, then every convergent sequence in (X, q) is bounded.*

3. Scalar Multiplicative Factors and Kernels

We begin with the following proposition:

Proposition 3.1 *Let (X, q) be a near quasi-normed space. If q has a scalar multiplicative factor, then q is a quasi-norm.*

Proof. *Suppose that q has a scalar multiplicative factor. Then there are $\lambda > 0$ and $r > 0$ such that*

$$q(\alpha x) \le \lambda |\alpha|^r q(x) \text{ for all } \alpha \in F \text{ and } x \in X \tag{3.1}$$

Let $t_k, t \in F$, $t_k \to t$ and $x_k, x \in X$, $q(x_k - x) \to 0$. By the triangle inequality of q and (3.1), we have

$$q(t_k x_k - tx) \le \lambda |t_k|^r q(x_k - x) + \lambda |t_k - t|^r q(x) \tag{3.2}$$

It follows from (3.2) that $q(t_k x_k - tx) \to 0$, so q satisfies (iv). Hence q is a quasi-norm on X.

If q is a near quasi-norm on X, the kernel of q, denoted by $Ker\ q$, is the set of all $x \in X$ such that $q(x) = 0$. If q is trivail,i.e., $q \equiv 0$, then every $\lambda > 0$ is an r-scalar multiplicative factor for q for all $r > 0$. For a near quasi-norm q and for $r > 0$, define

$$\lambda_{inf}^{(r)} \equiv \sup_{\substack{x \notin Ker\, q \\ \alpha \in F, \alpha \neq 0}} \frac{q(\alpha x)}{|\alpha|^r q(x)}$$

We show in the next theorem that having scalar multiplicative factors of quasi-norms are concerned with the kernel of q and $\lambda_{inf}^{(r)}$.

Theorem 3.2 *Let (X, q) be a non-trivail near quasi-normed sapce, and $r > 0$ Then*

(1) q has r-scalar multiplicative factors if and only if $Ker\ q$ is a closed subspace of X and $1 \le \lambda_{inf}^{(r)} < \infty$

(2) if q has r-scalar multiplicative factors, then $\lambda_{inf}^{(r)}$ is the best(least) r-scalar multiplicative factor for q.

Proof. *(1) Suppose that λ is an r-scalar multiplicative factor for q. Then*

$$q(\alpha x) \leq \lambda|\alpha|^r q(x) \tag{3.3}$$

for all $x \in X$ and $\alpha \in F$. It follows from (3.3) that $\lambda_{inf}^{(r)} \leq \lambda$, so $\lambda_{inf}^{(r)} < \infty$. Since q is non-trivail, there exists $x \in X$ such that $q(x) \neq 0$. Since $\lambda_{inf}^{(r)} \geq \frac{q(1x)}{1^r q(x)}$, we obtain that $\lambda_{inf}^{(r)} \geq 1$. Since $Ker\ q = q^{-1}(\{0\})$ and q is continuous, we have $Ker\ q$ is closed. Now, we show that $Ker\ q$ is a subspace of X. To show this let $x, y \in Ker\ q$ and $\alpha \in F$. By the triangle inequality of q and (3.4), we have $q(x+y) \leq q(x) + q(y) = 0 + 0 = 0$ and $q(\alpha x) \leq \lambda|\alpha|^r q(x) = 0$. Hence $x + y$ and $\alpha x \in Ker\ q$, so that $Ker\ q$ is a subspace of X.

Conversely, assume that $Ker\ q$ is a closed subsoace of X and $1 \leq \lambda_{inf}^{(r)} < \infty$. We shall show that

$$q(\alpha x) \leq \lambda_{inf}^{(r)}|\alpha|^r q(x) \tag{3.4}$$

for all $x \in X$ and $\alpha \in F$.

If $x \in Ker\ q$ and $\alpha \in F$, we have $\alpha x \in Ker\ q$ because $Ker\ q$ is a subspace of X, hence $0 = q(\alpha x) = \lambda_{inf}^{(r)}|\alpha|^r q(x)$. Let $x \notin Ker\ q$. If $\alpha = 0$, then $0 = q(\alpha x) = \lambda|\alpha|^r q(x)$. If $\alpha \neq 0$, then $\frac{q(\alpha x)}{|\alpha|^r q(x)} \leq \lambda_{inf}^{(r)}$, so that $q(\alpha x) \leq \lambda|\alpha|^r q(x)$, so (3.4) is obtained, that is, $\lambda_{inf}^{(r)}$ is an r-scalar multiplicative factor for q. The proof is now complete.

(2) Assume that q has r-scalar multiplicative factors. By (1), we have $\lambda_{inf}^{(r)} < \infty$. If $\lambda > 0$ is an r-scalar multiplicative factor for q, we have

$$q(\alpha x) \leq \lambda|\alpha|^r q(x) \tag{3.5}$$

for all $x \in X$ and $\alpha \in F$.

We obtain from (3.5) that $\lambda_{inf}^{(r)} = \sup_{\substack{x \notin Ker\ q \\ \alpha \in F, \alpha \neq 0}} \frac{q(\alpha x)}{|\alpha|^r q(x)} \leq \lambda$, so (2) is obtained. □

We show in next proposition that there always exists a proper near quasi-norm on every finite dimensional vector space having r-scalar multiplicative factors for all r with $0 < r \leq 1$.

Proposition 3.3 *Let X be a finite dimensional vector space and $0 < r \leq 1$. Then there is a proper near quasi-norm q on X having r-scalar multiplicative factors.*

Proof. *Suppose that $\dim X = n$ and let $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ be a basis for X. For each $i = 1, 2, \ldots, n$, define $q_i : X \to R$ as follows: For $x \in X$, there exists a unique scalars $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ such that $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, let $q_i(x) = |\alpha_i|^r$. It is easy to see thate q_i is a near quasi-norm on X and $q_i(\alpha x) = |\alpha|^r q_i(x)$, so that q_i has scalar multiplicative factors. By the definition of q_i we have $Ker\ q_i = \{\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_j x_j : \alpha_j \in F, j \neq i$, so $Ker\ q \neq \{0\}$ and $Ker\ q \neq X$, hence q_i is proper. This complete the proof.* □

4. Scalar Multiplicative Factors on $\ell_\infty(p)$ and $\ell(p)$.

We start with the following theorem.

Thoerem 4.1 *Let $p=(p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers. Then q_p has scalar multiplicative factors if and only if $p_k = p_{k+1}$ for all $k \in N$.*

Proof. *If $r = p_k = p_{k+1}$ for all $k \in N$, then for $x = (x_k) \in \ell_\infty(p)$ and $\alpha \in F$, we have $q_p(\alpha x) = |\alpha|^r q_p(x)$, so that q_p has scalar multiplicative factors.*

Suppose, conversely, that q_p has scalar multiplicative factors. By Theorem 2.1 (a), there exists $r > 0$ such that

$$\lambda_{inf}^{r} = \sup_{\substack{x \notin Ker\, q_p \\ \alpha \in F, \alpha \neq 0}} \frac{q_p(\alpha x)}{|\alpha|^r q_p(x)} < \infty . \tag{4.1}$$

Let $a = \sup_k p_k$, $b = \inf_k p_k$ and $e = (1, 1, \ldots)$. If $r < \frac{a}{M}$, then for $\alpha \in F$, $|\alpha| \geq 1$, we have

$$\frac{q_p(\alpha e)}{|\alpha|^r q_p(e)} = \sup_k |\alpha|^{\frac{p_k}{M} - r} = |\alpha|^{\frac{a}{M} - r} .$$

So $\lambda_{inf}^{(r)} = \sup_{\substack{x \notin Ker\, q_p \\ \alpha \in F, \alpha \neq 0}} \frac{q_p(\alpha x)}{|\alpha|^r q_p(x)} \geq \sup_{|\alpha| \geq 1} |\alpha|^{\frac{a}{M} - r} = \infty$ which contradicts to (4.1). Hence $r \geq \frac{a}{M}$.

If $r > \frac{a}{M}$, then for $\alpha \in F$, $|\alpha| \leq 1$, we have

$$\frac{q_p(\alpha e)}{|\alpha|^r q_p(e)} = \sup_k |\alpha|^{\frac{b}{M} - r} = |\alpha|^{\frac{b}{M} - r} .$$

Hence, we get

$$\lambda_{inf}^{(r)} = \sup_{\substack{x \notin Ker\, q_p \\ \alpha \in F, \alpha \neq 0}} \frac{q_p(\alpha x)}{|\alpha|^r q_p(x)} \geq \sup_{|\alpha| \leq 1} |\alpha|^{\frac{b}{M} - r} = \infty ,$$

which is a contradiction. Thus, we get $r = \frac{a}{M}$. Then for $\alpha \in F$, $|\alpha| \leq 1$, we have

$$\frac{q_p(\alpha e)}{|\alpha|^r q_p(e)} = \sup_k |\alpha|^{\frac{p_k - a}{M}} = |\alpha|^{\frac{b-a}{M}} ,$$

so if $b < a$, we get

$$\lambda_{inf}^{(r)} \geq \sup_{|\alpha| \leq 1} |\alpha|^{\frac{b-a}{M}} = \infty$$

which again contradicts to (4.1), hence $b = a$, that is $p_k = p_{k+1}$ for all $k \in N$. This complete the proof of the theorem. □

Theorem 4.2a *Let $p=(p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers. Then q_p' has scalar multiplicative factors if and only if $p_k = p_{k+1}$ for all $k \in N$.*

Proof. *If $r = p_k = p_{k+1}$ for all $k \in N$, then for $x = (x_k) \in \ell(p)$ and $\alpha \in F$, we have*

$$q_p'(\alpha x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^r |x_k|^r\right)^{\frac{1}{r}} = |\alpha|^{\frac{r}{r}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^r\right)^{\frac{1}{r}} = |\alpha|^{\frac{r}{r}} q_p'(x),$$

It follows that q_p' has scalar multiplicative factors.

Suppose, conversely, that q_p' has scalar multiplicative factors. By Theorem 2.1 (a), there is $r > 0$ such that

$$\lambda_{inf}^{(r)} = \sup_{\substack{x \notin Ker\, q_p' \\ \alpha \in F,\, \alpha \neq 0}} \frac{q_p'(\alpha x)}{|\alpha|^r q_p'(x)} < \infty. \tag{4.2}$$

Let $a = \sup_k p_k$, $b = \inf_k p_k$ and $e^{(k)}$ be the sequence whose the k^{th} position is 1 and 0 otherwise. If $r < \frac{a}{M}$, then we have $\sup_{\substack{x \notin Ker\, q_p' \\ \alpha \in F,\, \alpha \neq 0}} \frac{q_p'(\alpha x)}{|\alpha|^r q_p'(x)} \geq \sup_{\substack{k \in N \\ \alpha \in F, |\alpha| \geq 1}} \frac{q_p'(\alpha e^{(k)})}{|\alpha|^r q_p'(e^{(k)})} = \sup_{\substack{k \in N \\ \alpha \in F, |\alpha| \geq 1}} |\alpha|^{\frac{p_k}{r} - r} = \sup_{|\alpha| \geq 1} |\alpha|^{\frac{a}{r} - r} = \infty$, *which contradicts to (4.2). Hence $r \geq \frac{a}{M}$. If $r > \frac{a}{M}$, then we have* $\sup_{\substack{x \notin Ker\, q_p' \\ \alpha \in F,\, \alpha \neq 0}} \frac{q_p'(\alpha x)}{|\alpha|^r q_p'(x)} \geq \sup_{\substack{k \in N \\ \alpha \in F, 0 < |\alpha| \leq 1}} \frac{q_p'(\alpha e^{(k)})}{|\alpha|^r q_p'(e^{(k)})} = \sup_{\substack{k \in N \\ |\alpha| \leq 1}} |\alpha|^{\frac{p_k}{r} - r} = \sup_{|\alpha| \leq 1} |\alpha|^{\frac{a}{r} - r} = \infty$, *which also contradicts to (4.2). Thus, we have $r = \frac{a}{M}$. If $b < a$, then* $\sup_{\substack{x \notin Ker\, q_p' \\ \alpha \in F,\, \alpha \neq 0}} \frac{q_p'(\alpha x)}{|\alpha|^r q_p'(x)} \geq \sup_{\substack{k \in N \\ \alpha \in F, 0 < |\alpha| \leq 1}} \frac{q_p'(\alpha e^{(k)})}{|\alpha|^r q_p'(e^{(k)})} \geq \sup_{|\alpha| \leq 1} |\alpha|^{\frac{b}{r} - r} = \infty$, *which is a contradiction, so that $b = a$, hence $p_k = p_{k+1}$ for all $k \in N$. The proof is now complete.* □

ACKNOWLEDGEMENTS

The author would like to thank Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

REFERENCES

[1]. R. Arens, and M. Goldberg, *Multiplicativity factors for seminorms*, J. Math. Anal. Appl. **140** (1990), 469-481.
[2]. R. Arens, and M. Goldberg, *A class of seminorms on function algebras*, J. Math. Anal. Appl. **162** (1991), 592-609.
[3]. K.-G. Grosse- Erdmann, *The structure of the sequence spaces of Maddox*, Canad. J. Math. **44** (1992), 298-307.
[4]. I. J. Maddox, *Elements of functional analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne, 1970.
[5]. C. Swartz, *An introduction to functional analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.

ผลงานวิจัย 2

ชื่อเรื่อง Multiplicativity Factors for p- Seminorms

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้นำไปเสนอในที่ประชุมนานาชาติทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นเกียรติในวันครบวันเกิด 60 ปี ของ Professor Lee Peng Yee ซึ่งจัดขึ้นที่ มหาวิทยาลัย Ateneo de Manila ประเทศฟิลิปปินส์ ระหว่างวันที่ 16 - 17 ธันวาคม 2541

ผลงานนี้จะตีพิมพ์ใน Proceedings ของการประชุม ซึ่งจัดพิมพ์โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศฟิลิปปินส์

Multiplicativity Factors for p-Seminorms

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. Let S be a p-seminorm on an algebra $\mathcal{A}$. In this paper we study multiplicativity and quadrativity factors for S, i.e., constants $\mu > 0$ and $\lambda > 0$ for which $S(xy) \leq \mu S(x)S(y)$ and $S(x^2) \leq \lambda S(x)^2$ for all $x, y \in \mathcal{A}$. We begin with characterizing these factors in terms of the kernel of S and we also show that p-norms on finite dimensional algebras always have multiplicative factors. We then provide under what conditions does S has multiplicative factors if it has quadrative factors. Finally, we show that if $\mathcal{A}$ is commutative then quadrativity factors imply multiplicativity factors.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 17E20, 17C20, 46H05, 46H10, 46J05, 47A30.

1. INTRODUCTION

Let X be a vector space over a field F where $F = R$ or $F = C$.

A *quasi-norm* on X is defined in [5], page 13, to be a function $q : X \to R$ satisfying

(i) $q(0) = 0$

(ii) $q(-x) = q(x)$ for all $x \in X$

(iii) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ for all $x, y \in X$

(iv) if $\alpha_k,\ \alpha \in F$, $|\alpha_k - \alpha| \to 0$ and $x_k,\ x \in X$, $q(x_k - x) \to 0$, then $q(\alpha_k x_k - \alpha x) \to 0$.

It follows from (i) – (iii) that $q(x) \geq 0$ for all $x \in X$. If the quasi-norm q satisfies $q(x) = 0$ if and only if $x = 0$, then it is said to be *total*.

If q is a quasi-norm on X, then $d(x, y) = q(x - y)$ defines a semi-metric on X which is a metric if and only if q is total. A quasi-normed space (QNLS) is a pair (X, q) where q is a quasi-norm on X.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Note that a quasi-normed space is a topological space (TVS) under the metric topology induced by the quasi-norm.

We call a function $q : X \to R$ *a near quasi-norm* if q satisfies the coditions (i), (ii) and (iii) above. *A near quasi-norm space* (NQNLS) is a pair (X, q) where q is a near quasi-norm on X. Note that every seminormed spaces, QNLS-spaces and p-normed spaces are NQNLS-space. A near quasi-norm q is said to be *total* if $q(x) = 0$ implies $x = 0$. From $(i) - (iii)$, we obtain that $q(x) \geq 0$ for all $x \in X$. If q is a near quasi-norm on X, the function $d : X \times X \to R$ defined by $d(x, y) = q(x - y)$ is a translation invaraint semi-metric on X which is a metric if and only if q is total. We call d the semi-metric induced by q. We always assume that a near quasi-normed space carries the metric topology induced by d.

Let q be a near quasi-norm on a vector space X. Then q is said to have a *scalar multiplicative factor for* q if there are $\lambda > 0$ and $r > 0$ such that

$$q(\alpha x) \leq \lambda |\alpha|^r q(x) \tag{1.1}$$

for all $\alpha \in F$, $x \in X$.

S. Suantai [6] gave an example showing that a near quasi-normed space is not necessarily a TVS, but if it has a scalar multiplicative factor, then it is shown in [6] that it is a TVS. It is obvious that every p-seminorm on an algebra is a near quasi-norm having a scalar multiplicative factor, so it is a TVS.

For $p > 0$, we call a function $S : X \to R$ *a p-seminorm* if for all $x, y \in X$ and $\alpha \in F$:

$$S(x) \geq 0$$

$$S(\alpha x) = |\alpha|^p S(x)$$

$$S(x + y) \leq S(x) + S(y)$$

If, in addition $S(x) \neq 0$ for all $x \neq 0$ then S is a *p-norm*. If S is a p-seminorm on X we call (X, S) a *p-seminormed linear space (p-semi-NLS)*

If S is a p-seminorm then S is necessarily positive i.e., $S(x) \geq 0$ for all $x \in \mathcal{A}$. It is obvious that for a p-seminorm S the *kernel of* S, denoted by $Ker\ S$, is a vector subspace of $\mathcal{A}$. We call a p-seminorm S *proper* if S does not vanish identically and $S(x) = 0$ for some $x \neq 0$. Let S be a p-seminorm on $\mathcal{A}$. Then S is said to be *submultiplicative (or simply, multiplicative)* if

$$S(xy) \leq S(x)S(y) \quad \text{for all } x, y \in \mathcal{A};$$

and *subquadrative (or simply, quadrative)* if

$$S(x^2) \leq S(x)^2 \quad \text{for all } x \in \mathcal{A}.$$

R. Arens and M. Goldberg [1,2] studied multiplicativity factors for a seminorm on any algebra.

Exmaple 1.1 Let $\mathcal{B}(H)$ be the algebra of bounded linear operators on a Hilbert sapce H over C. For $p \in R$, $0 < p \leq 1$, let $r_p : \mathcal{B}(H) \to R$ be defined by

$$r_p(A) = \sup_{\substack{x \in H \\ <x,x>=1}} |<Ax, x>|^p.$$

It is easy to see that r_p is a p-norm on $\mathcal{B}(H)$. If $p = 1$, then r_1 is known as the *numerical radius of* A and it is well-known that r_1 is a nonmultiplicative norm on $\mathcal{B}(H)$. (see [5], [6]) Since $r_p(A) = (r_1(A))^p$ for all $A \in \mathcal{B}(H)$, we obtain that r_p is also a nonmultiplicative p-norm on $\mathcal{B}(H)$.

For a positive constant $\mu > 0$, then obviously $S_\mu \equiv \mu S$ is p-seminorm too. We call μ a *multiplicative factor or simply an M-factor for* S if S_μ is multiplicative. Similarly, if $S_\lambda \equiv \lambda S$ is quadrative on $\mathcal{A}$ for $\lambda > 0$, we call λ a *quadrative factor or Q-factor for* S. It is obvious from the definitions that $\mu > 0$ is an M-factor for S iff $S(xy) \leq \mu S(x)S(y)$ for all $x, y \in \mathcal{A}$ and $\lambda > 0$ is a Q-factor for S iff $S(x^2) \leq \lambda S(x)^2$ for all $x \in \mathcal{A}$.

It is obvious that if a p-seminorm S has M-factors, then it has Q-factors, but the converse is often false as we will see in the following example :

Example 1.2 Let $C_{n\times n}$ be the algebra of $n \times n$ complex matrices. For $p \in N$ with $0 < p \leq 1$, define $r_p : C_{n\times n} \to R$ by

$$r_p(A) = \sup_{\substack{x \in C^n \\ <x,x>=1}} |<Ax, x>|^p,$$

where $<x, y> = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k$ if $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in C^n$. It is easy to see that r_p is a p-norm on $C_{n\times n}$. It is known in [5] that r_1 is a quadrative, nonmultiplicative norm on $C_{n\times n}$. Since $r_p(A) = \left(r_1(A)\right)^p$ for all $A \in C_{n\times n}$, we have that r_p is also a quadrative, nonmultiplicative p-norm on $C_{n\times n}$.

The purpose of this paper is to discuss M- and Q-factors for p-norms and proper p-seminorm on arbitrary algebras. We begin in Section 2, by studying the multiplicativity of a p-seminorm S in term of kernel of S and we show that p-norms on finite dimensional algebras always have M-factors. In section 3 we provide conditions for which p-seminorms have Q-factors and we give that under what conditions does a p-seminorm S have M-factors if it has Q-factors.

2. Multiplicativity Factors and Kernels

The following theorem give necessary and sufficient conditions for a p-seminorm S to have M-factors.

Theorem 2.1 *Let S be a p-seminorm on an algebra $\mathcal{A}$. Then*

(1) S has M-factors if and only if $Ker\ S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$ and

$$\mu_{inf} \equiv sup\{S(xy):\ x,y \in \mathcal{A}, S(x)=1, S(y)=1\} < \infty. \tag{2.1}$$

(2) If S has M-factors and $\mu_{inf} > 0$, then μ_{inf} is the best(least) M-factor for S.

(3) If S has M-factors and $\mu_{inf} = 0$, then μ is an M-factor if and only if $\mu > 0$.

Proof. (1) If $\mu > 0$ is an M-factor for S, we have $S(xy) \leq \mu S(x)S(y) = 0$ for all $x \in \mathcal{A}$ and $y \in Ker\ S$. Consequently, $S(xy) = 0$, i.e., $xy \in Ker\ S$. Similarly, we have $yx \in Ker\ S$. Thus $Ker\ S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$. Since $S(xy) \leq \mu S(x)S(y)$ for all $x, y \in \mathcal{A}$, we have $S(xy) \leq \mu$ for all $x, y \in \mathcal{A}$ such that $S(x) = 1$ and $S(y) = 1$. Hence $sup\ \{S(xy): x, y \in \mathcal{A},\ S(x) = 1,\ S(y) = 1\} < \infty$.

Conversely, suppose that $Ker\ S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$ and $\mu_{inf} < \infty$. If $S \equiv 0$, it is obvious that every $\mu > 0$ is an M-factor for S, so S has M-factors. Now, suppose that $S \not\equiv 0$. Let $\mu > 0$ and $\mu \geq \mu_{inf}$. Then

$$S(xy) \leq \mu \ \text{ for all } \ x, y \in \mathcal{A},\ S(x) = 1, S(y) = 1. \tag{2.2}$$

Let $x, y \in \mathcal{A}$. If x or $y \in Ker\ S$, then $xy \in Ker\ S$ since $Ker\ S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$, hence

$$0 = S(xy) = \mu S(x)S(y). \tag{2.3}$$

If $x, y \notin Ker\ S$, then $S(u) = S(v) = 1$ where $u = \dfrac{x}{(S(x))^{\frac{1}{p}}}$ and $v = \dfrac{y}{(S(y))^{\frac{1}{p}}}$. By (2.2), $S(uv) \leq \mu$. But since $S(uv) = \dfrac{S(xy)}{S(x)S(y)}$, we get that $\dfrac{S(xy)}{S(x)S(y)} \leq \mu$. Thus, we have

$$S(xy) \leq \mu S(x)S(y) \ \text{ for all } \ x, y \notin Ker\ S. \tag{2.4}$$

By (2.3) and (2.4) we obtain

$$S(xy) \leq \mu S(x)S(y) \ \text{ for all } \ x, y \in \mathcal{A}.$$

Hence μ is an M-factor for S, so S has M-factors.

(2) If S has M-factors and $\mu_{inf} > 0$, by using the same proof as in the sufficient part of (i) we obtain that μ_{inf} is an M-factor for S and it is clear from the definition of μ_{inf} that if $\mu > 0$ is an M-factor for S, then $\mu_{inf} \leq \mu$, so that μ_{inf} is the least M-factor for S.

(3) If S has M-factors and $\mu_{inf} = 0$, then

$$S(xy) = 0 \ \text{ for all } \ x, y \in \mathcal{A}, S(x) = 1, S(y) = 1. \tag{2.5}$$

If x or $y \in Ker\ S$, then $S(xy) = 0$ since $Ker\ S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$ (by (1)). If $x, y \notin Ker\ S$, then $S(\dfrac{x}{S(x)^{\frac{1}{p}}}) = 1 = S(\dfrac{y}{S(y)^{\frac{1}{p}}})$, it follows from (2.5) that $S(xy) = 0$. Therefore $S(xy) = 0$ for all $x, y \in \mathcal{A}$, so that if $\mu > 0$, we have $S(xy) = 0 \leq \mu S(x)S(y)$ for all $x, y \in \mathcal{A}$. Hence $\mu > 0$ is always an M-factor for S, so we obtain (3).

□

The next theorem show that p-norms on finite dimensional algebras always have M-factors. To show this, we need a lemma.

Lemma 2.2 *Let S be a p-norm on a vector space X. If $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ is linearly independent set of vectors in X, then there is a number $c > 0$ such that for every choice of scalars $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ we have*

$$S\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) \geq c \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p. \tag{2.6}$$

Proof. We first note that if S is a p-seminorm which does not vanish identicaly, then $0 < p \leq 1$. To see this, let $x \in X$, $S(x) \neq 0$, we have by (ii) and (iii) that $2^p S(x) = S(2x) \leq 2S(x)$, so $2^p \leq 2$, hence $0 < p \leq 1$.

For $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, we write $s = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p$. If $s = 0$, then all α_i are zero, so that (2.6) holds for any c. If $s \neq 0$, then (2.6) is equivalent to the inequality which we obtain from (2.6) by dividing by s and writing $\beta_i = \frac{\alpha_i}{s^{\frac{1}{p}}}$, that is

$$S\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i\Big) \geq c \ , \text{ where } \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^p = 1 \tag{2.7}$$

It suffices to prove the existense of a $c > 0$ such that (2.7) holds for every n-tuple of scalars $\beta_1, \dots, \beta_n$ with $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^p = 1$.

Suppose that this is false. Then there exists a sequence (y_m) of vectors

$$y_m = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^{(m)} x_i \quad \text{where} \quad \sum_{i=1}^{n} |\beta_i^{(m)}|^p = 1$$

so that $S(y_m) \to 0$ as $m \to \infty$. Since $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i^{(m)}|^p = 1$, we have $|\beta_i^{(m)}| \leq 1$. Hence for each fixed i, the sequence $(\beta_i^{(m)})$ is bounded. By the Bolzano-Weierstrass theorem, $(\beta_1^{(m)})$ has a covergent subsequence. Let β_1 denote the limit of that subsequence, and let $(y_{1,m})$ denote the corresponding subsequence of (y_m). By the same argument, $(y_{1,m})$ has a subsequence $(y_{2,m})$ for which the corresponding subsequence of scalars $(\beta_2^{(m)})$ converges; let β_2 denote the limit. Continuing in this way, after n steps we obtain a subsequence $(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n,2}, \dots)$ of (y_m) whose terms are of the form

$$y_{n,m} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(m)} x_i \, ,$$

where $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)}|^p = 1$ and $\alpha_i^{(m)} \to \beta_i$ as $m \to \infty$ for all $i = 1, 2, \dots, n$.

Let $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$. Then $y_{n,m} \to y$ as $m \to \infty$. Since $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^{(m)}|^p = 1$ and $\alpha_i^{(m)} \to \beta_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, we thus have $\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^p = 1$, so that not all β_i can be zero. Since $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ is linearly indepentdent, we have $y \neq 0$. By the continuity of p-norm, $\|y_{n,m}\| \to \|y\|$ as $m \to \infty$, we must have $\|y_{n,m}\| \to 0$. Hence $\|y\| = 0$, so that $y = 0$. This contradicts $y \neq 0$, and the lemma is proved. □

Theorem 2.3 *Every p-norm on finite dimensional algebra always has M-factors.*

Proof. Let S be a p-norm on a finite dimensional algebra $\mathcal{A}$. Let $\{x_1, \ldots, x_n\}$ be a basis for $\mathcal{A}$. By Lemma 2.2, there is a number $c > 0$ such that

$$S(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \geq c \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \tag{2.8}$$

for all scalars $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Let $x, y \in \mathcal{A}$. Then we can write $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ and $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ for some $\alpha_i, \beta_i \in F (i = 1, 2, \ldots, n)$, so $xy = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j x_i x_j$. By (2.8), we have

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \leq \frac{1}{c} S(x) \text{ and } \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^p \leq \frac{1}{c} S(y) \tag{2.9}$$

By the properties of the p-norm S and (2.9), we have

$$\begin{aligned} S(xy) &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_i|^p |\beta_j|^p S(x_i x_j) \\ &\leq M \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_i|^p |\beta_j|^p, \quad \text{where } M = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} S(x_i x_j) \\ &= M (\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p)(\sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^p) \\ &\leq \mu S(x) S(y), \quad \text{where } \mu = \frac{M}{c^2}. \end{aligned}$$

Hence μ is an M-factor for S, so the theorem is proved. □

By Theorem 2.1(1) we have that if a p-seminorm S on an algebra $\mathcal{A}$ has M-factors, then $Ker\ S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$. The following theorem shows that this condition is a sufficient condition for a p-seminorm S on a finite dimensional algebra to have M-factors.

Theorem 2.4 *Let S be a p-seminorm on a finite dimensional algebra $\mathcal{A}$. Then S has M-factors if and only if $Ker\ S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$.*

Proof. By Theorm 2.1(1), if S has M-factors, then $Ker\ S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$.

Conversely, suppose $K = Ker\ S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$. Consider the quotient algebra $\mathcal{A}/K$, and define

$$N(x + K) = S(x) \text{ for all } x \in \mathcal{A}.$$

Clearly, N is a p-seminorm on $\mathcal{A}/K$. If $N(x + K) = 0$, then $S(x) = 0$, so that $x \in Ker\ S = K$, hence $x + K = K$ which is zero in $\mathcal{A}/K$, we thus have N is a p-norm on $\mathcal{A}/K$. Thus N has M-factors by Theorem 2.3, and S has the same M-factors on $\mathcal{A}$. This complete the proof. □

For $0 < p \leq 1$, the following theorems and corollaries give the existence of a p-seminorm on a finite dimensional algebra with certain kernel. To do this, we begin with the following lemma.

Lemma 2.5 *Let $\mathcal{A}$ be a finite dimensional vector space and $0 < p \leq 1$. Then there is a p-norm S defined on $\mathcal{A}$.*

Furthermore, if S' is a p-norm on $\mathcal{A}$, then S' is equivalent to S (i.e., there are $a, b > 0$ such that $aS'(x) \leq S(x) \leq bS'(x)$ for all $x \in \mathcal{A}$)

Proof. Let $\{x_1, \ldots, x_n\}$ be a basis for $\mathcal{A}$. For each $x \in \mathcal{A}$, there exists unique $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ such that x can be written in the form $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, let $S(x) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p$. It is obvious that S satisfies (i) and (ii) and $S(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. To show S satisfies (iii), let $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ and $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$, where $\alpha_i, \beta_i \in F (i = 1, \ldots, n)$. Since $|\alpha_i + \beta_i|^p \leq |\alpha_i|^p + |\beta_i|^p$ for all $i = 1, \ldots, n$, we have

$$\begin{aligned} S(x+y) &= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i + \beta_i|^p \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p + \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^p \\ &= S(x) + S(y). \end{aligned}$$

Hence S satisfies (iii). Thus S is a p-norm on $\mathcal{A}$.

Now, suppose that S' is any p-norm on $\mathcal{A}$ and let $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ where $\alpha_i \in F \quad (i = 1, \ldots, n)$. By triangle inequality of S, we have

$$\begin{aligned} S'(x) &\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p S'(x_i) \\ &\leq M \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p \\ &= MS(x) \ , \text{where } M = \sup_{1 \leq i \leq n} S'(x_i). \end{aligned} \tag{2.10}$$

By applying Lemma 2.2 with S', there is $c > 0$ such that

$$S'(x) = S'\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) \geq c \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^p = cS(x) \tag{2.11}$$

It follows from (2.10) and (2.11) that

$$aS'(x) \leq S(x) \leq bS'(x) \text{ for all } x \in \mathcal{A}$$

where $a = \dfrac{1}{M}$ and $b = \dfrac{1}{c}$. Hence S' and S are equivalent. □

Theorem 2.6 *Let $\mathcal{A}$ be an algebra and let K a two-sided ideal in $\mathcal{A}$ such that $\mathcal{A}/K$ is finite dimensional. Then for $0 < p \leq 1$, there is a p-seminorm S on $\mathcal{A}$ with kernel K, having M-factors.*

Proof. Let $p \in R$, $0 < p \leq 1$ and let S' be a p-norm on $\mathcal{A}/K$ defined as in Lemma 2.5. Let

$$S(x) = S'(x + K) \text{ for all } x \in \mathcal{A}$$

It is clear that S is a p-seminorm on $\mathcal{A}$ whose kernel is K. By Theorem 2.3, S' has M-factors on $\mathcal{A}/K$. Thus S has the same factors on $\mathcal{A}$, and the theorem is proved. □

By Theorem 2.6 we obtain :

Corollary 2.7 *Let $\mathcal{A}$ be a finite dimensional algebra and K a two-sided ideal in $\mathcal{A}$. Then for $0 < p \leq 1$, there is a p-seminorm S on $\mathcal{A}$ with kernel K, having M-factors.*

If $\mathcal{A}$ is commutative and $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$ is not invertible, we have

$$< x > \equiv \{xa : a \in \mathcal{A}\}$$

is a two-sided proper ideal in $\mathcal{A}$. By applying Corollary 2.7 with $K = < x >$ we obtain :

Corollary 2.8 *If $\mathcal{A}$ is a commutative finite dimensional algebra and $x \in \mathcal{A}$, $x \neq 0$ is not invertible, then there is a proper p-seminorm S on $\mathcal{A}$ with $S(x) = 0$, having M-factors.*

For a simple algebra, we obtain the following theorem :

Theorem 2.9 *Let $\mathcal{A}$ be an algebra and $0 < p \leq 1$. If $\mathcal{A}$ is simple, then there are no multiplicative proper p-seminorms on $\mathcal{A}$.*

Proof. Let S be a multiplicative p-seminorm on $\mathcal{A}$. By Theorem 2.1 (1), $K = Ker\ S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$. Since $\mathcal{A}$ is simple, $K = \{0\}$ or $K = \mathcal{A}$. In the first case S is a p-norm, and in the second $S = 0$. This complete the proof. □

Since $F_{n\times n}$, the algebra of $n \times n$ matrices over F, is simple (e.g. [4], Theorem 10 p.414), we immediately obtain from Theorem 2.9 :

Corollary 2.10 *There are no multiplicative proper p-seminorm on $F_{n\times n}$.*

3. Quadrativity Factors and Kernel

By using the same proof as in Theorem 1.2, [2] with some modifications we can easily prove the following result :

Theorem 3.1 *Let S be a p-seminorm on an algebra $\mathcal{A}$. Then S has Q-factors if and only if $Ker\ S$ is closed under squaring (i.e., $x^2 \in Ker\ S$ for all $x \in Ker\ S$) and*

$$\lambda_{inf} \equiv \sup \{ S(x^2) : x \in \mathcal{A},\ S(x) \leq 1 \} < \infty. \tag{3.1}$$

Proof. Suppose that $\lambda > 0$ is a Q-factor for S. Then

$$S(x^2) \leq \lambda S(x)^2 \quad \text{for all } x \in \mathcal{A} \tag{3.2}$$

If $x \in Ker\ S$, we obtain from (3.2) that $S(x^2) \leq \lambda S(x)^2 = 0$, so that $S(x^3) = 0$. It follows from (3.2) that $S(x^2) \leq \lambda$ if $S(x) \leq 1$, so $\lambda_{inf} \leq \lambda$, hence (3.1) is satisfied.

Suppose, conversely, that $Ker\ S$ is closed under squaring and (3.1) holds. If $x \in Ker\ S$, by assumption, we have $x^2 \in Ker\ S$, so $S(x^2) = \lambda_{inf} S(x)^2 = 0$. If $x \notin Ker\ S$, then $S(\frac{x}{S(x)^{\frac{1}{p}}}) = 1$, so we obtain from (3.1) that $\frac{S(x^2)}{S(x)^2} = S((\frac{x}{S(x)^{\frac{1}{p}}})^2) \leq \lambda_{inf}$, hence $S(x^2) \leq \lambda_{inf} S(x)^2$. Thus λ_{inf} is a Q-factor for S. This complete the proof. □

Theorem 3.1 gives that under what conditions the p-seminorm S on an algebra $\mathcal{A}$ has Q-factors. We further give another necessary and sufficient conditions for a p-seminorm S to have Q-factors in next theorem. We first need a lemma:

Lemma 3.2 *Let S be a quadratic p-seminorm on an algebra $\mathcal{A}$. Then*

$$S(xy + yx) \leq 2^{3-p} S(x)S(y) \quad \textit{for all } x, y \in \mathcal{A}$$

Proof. Since $2xy + 2yx = (x+y)^2 - (x-y)^2$, we have $2^p S(xy + yx) \leq S((x+y)^2 + S(x-y)^2) \leq 2(S(x) + S(y))^2$, so if $S(x) \leq 1$ and $S(y) \leq 1$, we have

$$S(xy + yx) \leq 2^{3-p}, \tag{3.3}$$

Now, let $x, y \in \mathcal{A}$ be arbitary. Then for $\epsilon > 0$, we have $S(x') \leq 1$ and $S(y') \leq 1$ where $x' = \frac{x}{(S(x)+\epsilon)^{\frac{1}{p}}}$ and $y' = \frac{y}{(S(y)+\epsilon)^{\frac{1}{p}}}$. So by (3.3), we have

$$\frac{1}{(S(x)+\epsilon)(S(y)+\epsilon)} S(xy + yx) = S(x'y' + y'x') \leq 2^{3-p}.$$

Thus $S(xy + yx) \leq 2^{3-p}(S(x)+\epsilon)(S(y)+\epsilon)$ for every $\epsilon > 0$. Since $\epsilon > 0$ is arbitary, we have

$$S(xy + yx) \leq 2^{3-p} S(x)S(y),$$

so we have the lemma. □

For an algebra $\mathcal{A}$, we recall now the *Jordan product* in $\mathcal{A}$, defined by

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx) \quad \text{for all } x, y \in \mathcal{A}.$$

Let $\mathcal{A}^+$ be the algebra obtained by replacing the product in $\mathcal{A}$ by the Jordan product. We call $\mathcal{A}^+$, *the special Jordan algebra associated with* $\mathcal{A}$.

As usual, we call a set $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$ a *Jordan ideal* in $\mathcal{A}$ if $xy + yx \in \mathcal{J}$ for all $x \in \mathcal{A}$ and $y \in \mathcal{J}$.

The next theorem gives necessary and sufficient conditions for a p-seminorm S to have Q-factors.

Theorem 3.3 *Let S be a p-seminorm on an algebra $\mathcal{A}$. Then S has Q-factors if and only if $Ker\ S$ is a Jordan ideal in $\mathcal{A}$ and (3.1) holds.*

Proof. Let λ be a Q-factor for S. Then (3.1) holds by Theorem 3.1. We now show that $Ker\ S$ is a Jordan ideal. Since λS is quadrative, by Lemma 3.2 we have

$$\lambda S(xy+yx) \leq 2^{3-p}\lambda^2 S(x)S(y) \text{ for all } x,y \in \mathcal{A} \tag{3.4}$$

It follows from (3.4) that

$$S(xy+yx) = 0 \text{ for all } x \in Ker\ S, \text{ and } y \in \mathcal{A};$$

that is, $xy+yx \in Ker\ S$, so $Ker\ S$ is a Jordan ideal.

Suppose, conversely, that $Ker\ S$ is a Jordan ideal in $\mathcal{A}$ and $\lambda_{inf} < \infty$. If $x \in Ker\ S$, then $2x^2 = x^2+x^2 = xx+xx \in Ker\ S$ because $Ker\ S$ is a Jordan ideal, so that $S(x^2) = 0$, hence $x^2 \in Ker\ S$. Thus $Ker\ S$ is closed under squaring. So, by Theorem 3.1, S has Q-factors. The proof is now complete. □

Using the same argument as in Corollary 2.1 in [3], we obtain :

Theorem 3.4 *There are no quadrative proper p-seminorm on a simple finite dimensional algebra.*

Example 3.5 Let $C_{n\times n}$ be the algebra of $n \times n$ matrices over C. By Theorem 10 in [4], p. 414, $C_{n\times n}$ is simple, so it follows from Theorem 3.4 that there are no quadrative proper p-seminorm on $C_{n\times n}$.

For a finite dimensional algebra we have the following result :

Theorem 3.6 *Let S be a p-seminorm on a finite dimensional algebra $\mathcal{A}$. Then S has Q-factors if and only if $Ker\ S$ is a Jordan ideal in $\mathcal{A}$.*

Proof. If S has Q-factors then $Ker\ S$ is a Jordan ideal in $\mathcal{A}$ by Theorem 3.1.

Conversely, let $Ker\ S$ be a Jordan ideal in $\mathcal{A}$. Since $Ker\ S$ is a subspace of $\mathcal{A}$, we have $\mathcal{A}/Ker\ S$ is a quotient algebra. Since $\mathcal{A}$ is finite , so is $\mathcal{A}/Ker\ S$. Consider the quotient algebra $\mathcal{A}^+/Ker\ S$. Define $S' : \mathcal{A}^+/Ker\ S \to R$ by

$$S'(x+Ker\ S) = S(x) \quad \text{for all } x \in \mathcal{A}.$$

Clearly S' is a p-norm on $\mathcal{A}^+/Ker\ S$. As $\mathcal{A}/Ker\ S$ is finite dimensional, so is $\mathcal{A}^+/Ker\ S$ having the identical linear structure. By Theorem 2.3, S' has Q-factors. Let $\lambda > 0$ be a Q-factor for S'. Then for $x \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} S(x^2) = S(\tfrac{1}{2}(xx+xx)) &= S(x \circ x) \\ &= S'((x+Ker\ S)(x+Ker\ S)) \\ &\leq \lambda S'(x+Ker\ S)S'(x+Ker\ S) \\ &= \lambda S(x)^2. \end{aligned}$$

So λ is a Q-factor for S on $\mathcal{A}$.

□

We know that if a p-seminorm S has M-factors then it has Q-factors, but the converse is not general true. The next theorem shows that these two kinds of factors are equivalent in a commutative algebra.

Theorem 3.7 *Let $\mathcal{A}$ be a commutative algebra and S be a p-seminorm on $\mathcal{A}$. Then S has M-factors if and only if S has Q-factors.*

Proof. We need only to show that if S is Q-factors, then S has M-factors.

Suppose that S has Q-factors. Then there is a $\lambda > 0$ such that λS is quadrative. Then by Lemma 3.2, we have

$$S(xy + yx) \leq 2^{3-p}\lambda S(x)S(y) \text{ for all } x, y \in \mathcal{A} \tag{3.5}$$

Since $\mathcal{A}$ is commutative, we obtain from (3.5) that

$$S(xy) \leq 2^{3-2p}\lambda S(x)S(y) \quad \text{for all } x, y \in \mathcal{A}.$$

Hence $2^{3-2p}\lambda$ is an M-factor for S. This complete the proof.

□

Acknowledgements

The author would like to thank Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

References

[1]. R. Arens, and M. Goldberg, *A class of seminorms on function algebras*, J. Math. Anal. Appl. 162 (1991), 592-600.
[2]. R. Arens, and M. Goldberg, *Multiplicativity factors for seminorms. II*, J. Math. Anal. Appl. 170 (1992), 401-413.
[3]. G. Birkhoff, and S. Maclane, *A Survey of Modern Algebra*, 4th ed., Macmillan, New York, 1977.
[4]. M. Goldberg, and E. Tadmor, *On the numerical radius and its applications*, Linear Algebra Appl. 42 (1982), 263-284.
[5]. P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Van Nostran, New York, 1967.
[6]. S. Suantai, *Scalar multiplicativity factors for near quasi-norms*, Bull.Cal.Math.Soc 90 (1998), -.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.

ผลงานวิจัย 3

ชื่อเรื่อง Matrix Transformations on Some Vector - Valued Sequence Spaces

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้ส่งไปเพื่อตีพิมพ์ (submitted) **ในวารสารนานาชาติ ชื่อ**
Comment. Math. 1998
(ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I : COMMENTATIONES MATHEMATICAE XXXVII (1998)

Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this paper, we give the matrix characterisations from vector-valued sequence spaces of Maddox $c_0(X,p)$, $c(X,p)$, $\ell_\infty(X,p)$, and $\ell(X,p)$ into scalar-valued sequence spaces of Maddox $c_0(q)$,$c(q)$, and $\ell_\infty(q)$ where $p=(p_k)$ and $q=(q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A45.

1. INTRODUCTION

Let $(X,\|.\|)$ be a Banach space and $p=(p_k)$ a bounded sequence of positive real numbers. We write $x=(x_k)$ with x_k in x for all $k\in N$. The X-valued sequence spaces of Maddox are defined as

$$c_0(X,p)=\{x=(x_k):\lim_{k\to\infty}\|x_k\|^{p_k}=0\},$$
$$c(X,p)=\{x=(x_k):\lim_{k\to\infty}\|x_k-a\|^{p_k}=0 \text{ for some } a\in X\},$$
$$\ell_\infty(X,p)=\{x=(x_k):\sup_k \|x_k\|^{p_k}<\infty\},$$
$$\ell(X,p)=\{x=(x_k):\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^{p_k}<\infty\}$$

When $X=R$ or C, the corresponding spaces are written as $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$ and $\ell(p)$ respectively and each of them is called a *sequence space of Maddox*. These spaces were first introduced and studied by Simons [6], Maddox [3, 4], and Nakano [5]. In [1] the structure of the spaces $c_0(p)$, $c(p)$, and $\ell_\infty(p)$ have been investigated.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

In this paper we consider the problem of characterizing those matrices that map an X-valued sequence spaces of Maddox into scalar-valued sequence spaces of Maddox. Grosse-Erdmann [2] has given characterizations of matrix transformations between the scalar-valued sequence spaces of Maddox. Wu and Liu [8] deal with some of this problem with some conditions on the sequences (p_k) and (q_k). Their characterizations are derived from functional analytic principles. Our approach here is different. We use a method of reduction introduced by Grosse-Erdmann [2]. In [1] it is pointed out that $c_0(p)$ is an echelon space of order 0 and that $\ell_\infty(p)$ is a co-echelon space of order ∞. In this paper we also show that $c_0(X,p)$ is an echelon space of order 0 and $\ell_\infty(X,p)$ is a co-echelon space of order ∞. Therefore these spaces are made up of simpler spaces. We will use certain auxiliary results(Section 3) to reduce our problem to the characterisations of matrix mapping between much simpler spaces.

2. Notation and Definitions

2.1 Let $(X,\|.\|)$ be a Banach space, the space of all sequences in X is denoted by $W(X)$ and $\Phi(X)$ is denoted for the space of all finite sequences in X. When $X = R$ or C, the corresponding spaces are written as w and Φ.

A sequence spaces in X is a linear subspace of $W(X)$. Let E be any X-valued sequence space. For $x \in E$ and $k \in N$, we write x_k stands for the k^{th} term of x. For $k \in N$ denote by e_k the sequence $(0,0,...,0,1,0,...)$ with 1 in the k^{th} position and by e the sequence $(1,1,1,...)$. For $x \in X$ and $k \in N$, let $e^k(x)$ be the sequence $(0,0,...,0,x,0,...)$ with x in the k^{th} position and let $e(x)$ be the sequence $(x,x,x,...)$. For a fixed scalar sequence $\mu = (\mu_k)$ the sequence space E_μ is defined as

$$E_\mu = \{x \in W(X) : (\mu_k x_k) \in E\} .$$

The sequence space E is called *normal* if $x \in E$ and $y \in W(X)$ with $\|y_k\| \le \|x_k\|$ for all $k \in N$ implies that $y \in E$.

2.2 Let $A = (f_k^n)$ with f_k^n in X', the topological dual of X. Suppose that E is a space of X-valued sequences and F a space of scalar-valued sequences. Then A is said to *map* E into F, written by $A : E \to F$ if for each $x = (x_k) \in E$, $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for each $n \in N$, and the sequence $Ax = (A_n(x)) \in F$. Let (E,F) denote for the set of all infinite matrices mapping from E into F. If $u = (u_k)$ and $v = (v_k)$ are scalar sequences, let

$$_u(E,F)_v = \{A = (f_k^n) : (u_n v_k f_k^n)_{n,k} \in (E,F)\}$$

If $u_k \neq 0$ for all $k \in N$, we write $u^{-1} = (\frac{1}{u_k})$. In this paper we are concerned with finding conditions on a matrix $A = (f_k^n)$ that characterise its membership to certain classes (E,F).

2.3 Suppose that the X-valued sequence space E is endowed with some linear topology τ. Then E is called a *K-space* if for each $n \in N$ the n^{th} coordinate mapping $p_k : E \to X$, defined by $p_k(x) = x_k$, is

continuous on E. If, in addition, (E,τ) is an Fréchet (Banach, LF-, LB-) space, then E is called an *FK-(BK-, LFK-, LBK-) space*. Now, suppose that E contains $\Phi(X)$. Then E is said to have *property AB* if the set $\{\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k) : n \in N\}$ is bounded in E for every $x=(x_k)\in E$. It is said to have *property AK* if $\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k) \to x$ in E as $n\to\infty$ for every $x=(x_k)\in E$. It has *property AD* if $\Phi(X)$ is dense in E.

The space $\ell(p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^{p_k}\right)^{1/M}$, where $M=max\{1,\sup_k p_k\}$. The space $c_0(p)$ is an FK-space with AK, $c(p)$ is an FK-space and $\ell_\infty(p)$ is a complete LBK-space with AB (see [1]). It is the same as above the space $\ell(X,p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|_k^{p_k}\right)^{1/M}$, where $M=max\{1,\sup_k p_k\}$. In each of the space $\ell_\infty(X,p)$ and $c_0(X,p)$ we consider the function $g(x)=\sup_k \|x_k\|^{p_k/M}$, where $M=max\{1,\sup_k p_k\}$. It is known that $c_0(X,p)$ is an FK-space with AK under the paranorm g defined as above and $\ell_\infty(X,p)$ is a complete LBK-space with AB. In $c(X,p)$ we consider the function $g(x)=\sup_k \|x_k-a\|^{p_k/M}+\|a\|$ where a is the unique element in X with $x-c(a)\in c_0(X,p)$. Then g is a paranorm on $c(X,p)$ and $c(X,p)$ is an FK-space under this paranorm g.

3. Some Auxiliary Results

In this section we give various useful results that can be used to reduce our problems into some simpler forms.

Proposition 3.1 *Let E and $E_n (n\in N)$ be X-valued sequence spaces, and F and $F_n (n\in N)$ scalar sequence spaces, and let u and v be sequences of real numbers with $u_k\neq 0$, $v_k\neq 0$ for all $k\in N$. Then we have*

(i) $\left(\cup_{n=1}^{\infty}E_n,F\right)=\cap_{n=1}^{\infty}(E_n,F)$

(ii) $(E,\cap_{n=1}^{\infty}F_n)=\cap_{n=1}^{\infty}(E,F_n)$

(iii) $(E_1+E_2,F)=(E_1,F)\cap(E_2,F)$

(iv) $(E,F_1\oplus F_2)=(E,F_1)\oplus(E,F_2)$ *if the following two conditions hold*

(1). E, F_1, and F_2 are FK-spaces and E has AK and

(2). If (x_n) is a sequence in X with $x_n\to 0$ as $n\to\infty$ implies $e^k(x_n)\to(0,0,0,\ldots)$ as $n\to\infty$ in E for all $k\in N$.

(v) $(E,c(q))=(E,c_0(q))\oplus(E,<e>)$ *if E is normal containing $\Phi(X)$, where $q=(q_k)$ is a bounded sequence of positive real numbers.*

(vi) $(E,F_1)=(E,F_2)\cap(\Phi(X),F_1)$ *if E is an FK-space with AD, F_2 is an FK-space and F_1 is a closed subspace of F_2.*

(vii) $(E_u,F_v)={}_v(E,F)_{u^{-1}}$.

Proof. Assertions (i), (ii), (iii), and (vii) are immediate.

To show (iv), suppose that the conditions (1) and (2) hold. It is clear that $(E,F_1)+(E,F_2)\subseteq (E,F_1+F_2)$. Moreover, if $A\in (E,F_1)\cap(E,F_2)$, then $A\in (E,F_1\cap F_2)=(E,0)$, which implies that $A=0$ because E contains Φ. Hence $(E,F_1)+(E,F_2)$ is a direct sum. Now we will show that $(E,F_1\oplus F_2)\subseteq (E,F_1)+(E,F_2)$. Let $A=(f_k^n)\in (E,F_1\oplus F_2)$. For $x\in X$ and $k\in N$, we have $\left(f_k^n(x)\right)_{n=1}^{\infty}=Ae^k(x)\in F_1\oplus F_2$, so that there are unique sequences $\left(b_k^n(x)\right)_{n=1}^{\infty}\in F_1$ and $\left(c_k^n(x)\right)_{n=1}^{\infty}\in F_2$ with

$$\left(f_k^n(x)\right)_{n=1}^{\infty}=\left(b_k^n(x)\right)_{n=1}^{\infty}+\left(c_k^n(x)\right)_{n=1}^{\infty} \tag{3.1}$$

For each $n,k\in N$, let g_k^n and h_k^n be functionals on X defined by

$$g_k^n(x)=b_k^n(x) \text{ and } h_k^n(x)=c_k^n(x) \text{ for all } x\in X$$

Clearly, g_k^n and h_k^n are linear and by (3.1)

$$f_k^n=g_k^n+h_k^n \quad \text{for all } n,k\in N\ . \tag{3.2}$$

Note that $F_1\oplus F_2$ is an FK-space in its direct sum topology. By Zeller's theorem, $A:E\to F_1\oplus F_2$ is continuous. For each $k\in N$, let $T_k:X\to E$ be defined by $T_kx=e^k(x)$. It follows from the condition (2) that T_k is continuous for all $k\in N$.Since the projection P_i of $F_1\oplus F_2$ onto $F_i(i=1,2)$ are continuous and $g_k^n=p_n\circ P_1\circ A\circ T_k$, and $h_k^n=p_n\circ P_2\circ A\circ T_k$ for all $n,k\in N$, we have g_k^n and h_k^n are continuous, so $g_k^n,h_k^n\in X'$ for all $n,k\in N$. Let $B=(g_k^n)$ and $C=(h_k^n)$. By (3.2) we have $A=B+C$ and it is clear that $B\in(\Phi(X),F_1)$ and $C\in(\Phi(X),F_2)$. We will show that $B\in(E,F_1)$ and $C\in(E,F_2)$. To do this, let $x=(x_k)\in E$. By the continuity of the matrix $A:E\to F_1\oplus F_2$ and the AK property for E we find that $A\left(\sum_{k=1}^{n}e^k(x_k)\right)\to Ax$ as $n\to\infty$. Since the projection P_i of $F_1\oplus F_2$ onto $F_i(i=1,2)$ are continuous, we have

$$B\left(\sum_{k=1}^{n}e^k(x_k)\right)=P_1\left(A\left(\sum_{k=1}^{n}e^k(x_k)\right)\right)\to P_1(Ax)\in F_1 \quad \text{and}$$

$$C\left(\sum_{k=1}^{n}e^k(x_k)\right)=P_2\left(A\left(\sum_{k=1}^{n}e^k(x_k)\right)\right)\to P_2(Ax)\in F_2$$

Hence $B\in(E,F_1)$ and $C\in(E,F_2)$,Therefore, we have $A\in(E,F_1)\oplus(E,F_2)$, as desired.

To show (v), suppose E is normal containing $\Phi(X)$. Since $c(q)=c_0(q)\oplus<e>$, using the same proof as in (iv) we have $(E,c_0(q))+(E,<e>)\subseteq(E,\ c_0(q)\oplus<e>)=(E,c(q))$ and $(E,c_0(q))+(E,<e>)$ is a direct sum. If $A=(f_k^n)\in(E,\ c(q))=(E,\ c_0(q)\oplus<e>)$, the same as in (iv) we can write $A=B+C$ with $B=(g_k^n)\in(\Phi(X),c_0(q))$ and $C=(h_k^n)\in(\Phi(X),<e>)$. Let $x\in E$. Then for $\alpha=(\alpha_k)\in\ell_\infty$, we have

$$\|\alpha_kx_k\|=|\alpha_k|\|x_k\|\le\|Mx_k\| \quad \text{, where } M=\sup_k|\alpha_k|\ .$$

By the normality of E implies that $(\alpha_kx_k)\in E$, it follows that $(f_k^n(x_k))_{n,k}\in(\ell_\infty,\ c_0(q)\oplus<e>)$ Since ℓ_∞ is normal, it follows form [2, Proposition 3.1 (vi)] that $(g_k^n(x_k))_{n,k}\in(\ell_\infty,c_0(q))$ and $(h_k^n(x_k))_{n,k}\in(\ell_\infty,<$

$e>$). This implies that $Bx \in c_0(q)$ and $Cx \in <e>$, so we have $B \in (E, c_0(q))$ and $C \in (E, <e>)$, hence $A \in (E, c_0(q)) \oplus (E, <e>)$, so we obtain (v).

It remains to show (vi). Assume that E is an FK-space with AD, F_2 is an FK-spsce and F_1 is a closed subspace of F_2. Clearly, $(E, F_1) \subseteq (E, F_2) \cap (\Phi(X), F_1)$ is always the case. Now, assume that $A = (f_k^n) \in (E, F_2) \cap (\Phi(X), F_1)$ and $x \in E$. By Zeller theorem, $A : E \to F_2$ is continuous. Since E has AD, there is a soquence $(y^{(n)})$ with $y^{(n)} \in \Phi(X)$ for all $n \in N$ such that $y^{(n)} \to x$ in E as $n \to \infty$. By the continuity of A, we have $Ay^{(n)} \to Ax$ in F_2 as $n \to \infty$. Since $Ay^{(n)} \in F_1$ for all $n \in N$ and F_1 is a closed subspace of F_2, we obtain that $Ax \in F_1$. Hence $A \in (E, F_1)$, so that $(E, F_2) \cap (\phi(X), F_1) \subseteq (E, F_1)$. This complete the proof. □

Proposition 3.2 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequences of positive real numbers. Then*

(i) $c(X,p) = c_0(X,p) \dotplus \{e(z) : x \in X\}$.

(ii) $c_0(X,p) = \cap_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{1/p_k})}$. *Hence $c_0(X,p)$ is an echelon space of order 0.*

(iii) $\ell_\infty(X,p) = \cup_{n=1}^{\infty} \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$. *Hence $\ell_\infty(X,p)$ is a co-echelon space of order ∞.*

Proof. Assertion (i) is immediate. To show (ii), let $x \in c_0(X,p)$. Then $\|x_k\|^{p_k} \to 0$ as $k \to \infty$. For each $n \in N$, let $\delta_k = \|x_k\|^{p_k}.n$ for all $k \in N$. We have that $\delta_k \to 0$ as $k \to \infty$; hence $\|x_k\|.n^{1/p_k} = \delta_k^{1/p_k} \to 0$ as $k \to \infty$ (because $p \in \ell_\infty$), so we have $x \in c_0(X)_{(n^{1/p_k})}$. Conversely, assume that $x \in \cap_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{1/p_k})}$. Then $\lim_{k\to\infty} \|x_k\|.n^{1/p_k} = 0$ for every $n \in N$. Then for $n \in N$ we have $\|x_k\|^{p_k} \leq \frac{1}{n}$ for large k, hence $x \in c_0(X,p)$.

It remains to show (iii). If $x \in \ell_\infty(X,p)$, then there is some $n \in N$ with $\|x_k\|^{p_k} \leq n$ for all $k \in N$. Hence $\|x_k\|.n^{-1/p_k} \leq 1$ for all $k \in N$, so that $x \in \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$. On the other hand, if $x \in \cup_{n=1}^{\infty} \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$, then there are some $n \in N$ and $M > 1$ such that $\|x_k\|.n^{-1/p_k} \leq M$ for every $k \in N$. Then we have $\|x_k\|^{p_k} \leq n.M^{p_k} \leq n.M^{\alpha}$ for all $k \in N$, where $\alpha = \sup_k p_k$. Hence $x \in \ell_\infty(X,p)$ □

4. Main Results

We now turn to our main objective, the characterisations of matrix transformations from the vector-valued sequence spaces of Maddox $c_0(X,p)$, $c(X,p)$, $\ell_\infty(X,p)$, and $\ell(X,p)$ into scalar sequence spaces $c_0(q)$, $c(q)$, and $\ell_\infty(q)$. Some results generalize some in [2, 6, 7, 8]. We begin with the following theorem which generalizes [8, Theorem 2.1].

Theorem 4.1 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and $A = (f_k^n)$ an infinite matrix. Then $A \in (c_0(X,p), c_0(q))$ if and only if

(1) $m^{1/q_n} f_k^n \xrightarrow{w^*} 0$ as $n \to \infty$ for every m, $k \in N$ and

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/q_n} \|f_k^n\|_r^{-1/p_k} \to 0$ as n, $r \to \infty$ for every fixed $m \in N$.

Proof. By Proposition 3.2 (ii) we have $c_0(q) = \cap_{m=1}^{\infty} c_{0\{m^{1/q_k}\}}$. It follows from Proposition 3.1 (ii) and (vii) that $A \in (c_0(X,p), c_0(q))$ if and only if $(m^{1/q_k} f_k^n)_{n,k} \in (c_0(X,p), c_0)$ for all $m \in N$. By [8, Theorem 2.4], we have $(m^{1/q_k} f_k^n)_{n,k} \in (c_0(X,p), c_0)$ if and only if (1) and (2) hold. □

The next theorem gives a characterization of infinite matrix A such that $A \in (c_0(X,p), c(q))$. To do this we need a lemma.

Lemma 4.2 *Let (f_k) be a sequence of continuous linear functional on X. Then $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in c_0(X,p)$ if and only if $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| M^{-1/p_k} < \infty$ for some $M \in N$.*

Proof. Suppose that $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| M^{-1/p_k} < \infty$ for some $M \in N$. Let $x = (x_k) \in c_0(X,p)$. Then there is a positive integer K such that $\|x_k\|^{p_k} < \frac{1}{M}$ for all $k \geq K$, hence $\|x_k\| < M^{-1/p_k}$ for all $k \geq K$. Then we have

$$\sum_{k=K}^{\infty} |f_k(x_k)| \leq \sum_{k=K}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\| \leq \sum_{k=K}^{\infty} \|f_k\| M^{-1/p_k} < \infty .$$

It follows that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges.

On the other hand, assume that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x \in c_0(X,p)$. For each $x = (x_k) \in c_0(X,p)$, choose scalar sequence (t_k) with $|t_k| = 1$ such that $f_k(t_k x_k) = |f_k(x_k)|$ for all $k \in N$. Since $(t_k x_k) \in c_0(X,p)$, by our assumption, we have $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t_k x_k)$ converges, so that

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| < \infty \text{ for all } x \in c_0(X,p) . \tag{4.1}$$

Now, suppose that $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| m^{-1/p_k} = \infty$ for all $m \in N$. Choose m_1, $k_1 \in N$ such that

$$\sum_{k \leq k_1} \|f_k\| m_1^{-1/p_k} > 1 ,$$

and choose $m_2 > m_1$ and $k_2 > k_1$ such that

$$\sum_{k_1 < k \leq k_2} \|f_k\| m_2^{-1/p_k} > 2 .$$

Proceeding in this way, we can choose $m_1 < m_2 < \ldots$, and $0 = k_1 < k_2 < \ldots$ such that

$$\sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} \|f_k\| m_i^{-1/p_k} > i .$$

Take x_k in X with $\|x_k\| = 1$ for all k, $k_{i-1} < k \leq k_i$ such that

$$\sum_{k_{i-1}<k\leq k_i} |f_k(x_k)| m_i^{-1/p_k} > i \quad \text{for all } i \in N$$

Put $y = (y_k)$, $y_k = m_i^{-1/p_k} x_k$ for $k_{i-1} < k \leq k_i$, then $y \in c_0(X,p)$, and we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y_k)| \geq \sum_{k_{i-1}<k\leq k_i} |f_k(x_k)| m_i^{-1/p_k} > i \text{ for all } i \in N .$$

Hence we have $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y_k)| = \infty$ which contradicts with (4.1). This complete the proof. □

Theorem 4.3 *Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (c_0(X,p), c(q))$ if and only if there is a sequence (f_k) with $f_k \in X'$ for all $k \in N$ such that*

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| M^{-1/p_k} < \infty$ *for some* $M \in N$,

(2) $m^{1/q_n}.(f_k^n - f_k) \xrightarrow{w^*} 0$ *as* $n \to \infty$ *for every* $m, k \in N$ *and*

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/q_n}.\|f_k^n - f_k\| r^{-1/p_k} \to 0$ *as* $n, r \to \infty$ *for each fixed* $m \in N$.

Proof. If $A \in (c_0(X,p), c(q))$, we have $A \in (c_0(X,p), c_0(q) \oplus < e >)$ since $c(q) = c_0(q) \oplus < e >$. It follows from Proposition 3.1(v) that $A = B + C$, where $B \in (c_0(X,p), c_0(q))$ and $C \in (c_0(X,p), < e >)$. Let $C = (g_k^n)$. Since $\Phi(X) \subseteq c_0(X,p)$, we have $(g_k^n(x))_{n=1}^{\infty} \in < e >$ for all $x \in X$ and $k \in N$, which implies that $g_k^n = g_k^{n+1}$ for all $n, k \in N$. For each $k \in N$, let $f_k = g_k^1$. Then we have $(f_k^n - f_k)_{n,k} \in (c_0(X,p), c_0(q))$. Hence (2) and (3) hold by Theorem 4.1. Since $C = (f_k)_{n,k} \in (c_0(X,p), < e >)$, we have $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in c_0(X,p)$, hence (1) is obtained by Lemma 4.2

Conversely, assume that there is a sequence (f_k) with $f_k \in X'$ for all $k \in N$ such that the conditions (1), (2), and (3) hold. Let $B = (f_k^n - f_k)_{n,k}$ and $C = (f_k)_{n,k}$. It is obvious that $A = B + C$. By the conditions (2) and (3), we obtain by Theorem 4.1 that $B \in (c_0(X,p), c_0(q))$. The condition (1) implies by Lemma 4.2 that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in c_0(X,p)$. This implies $C \in (c_0(X,p), < e >)$. Hence we have by Proposition 3.1(v) that $A \in (c_0(X,p), c(q))$. This completes the proof. □

Theorem 4.4 *Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and $A = (f_k^n)$ an infinite matrix. Then $A \in (\ell_\infty(X,p), c_0(q))$ if and only if*

(1) $m^{1/q_n}.f_k^n \xrightarrow{w^*} 0$ *as* $n \to \infty$ *for every* k *and* $m \in N$ *and*

(2) for each $m, M \in N$, $\sum_{j>k} \|f_j^n\| m^{1/q_n} M^{1/p_j} \to 0$ *as* $k \to \infty$ *uniformly on* $n \in N$.

Proof. Since $c_0(q) = \bigcap_{m=1}^{\infty} c_{0(m^{1/q_k})}$, we have by Proposition 3.1(ii) and (vii) that

$$\begin{aligned} A \in (\ell_\infty(X,p), c_0(q)) &\iff A \in (\ell_\infty(X,p), c_{0(m^{1/q_k})}) \text{ for all } m \in N\,, \\ &\iff (m^{1/q_n} f_k^n)_{n,k} \in (\ell_\infty(X,p), c_0) \text{ for all } m \in N\,, \\ &\iff \text{the conditions (1) and (2) hold (by [8, Theorem 2.9].)} \end{aligned}$$

□

Note that Theorem 4.4 generalizes the result in [8, Theorem 2.8].

We now give a characterization of an infinite matrix A such that $A \in (\ell_\infty(X,p), c(q))$ by using the previous auxiliary results and Theorem 4.4. However, in order to get this, we need the following lemma.

Lemma 4.5 *Let $p = (p_k)$ be bounded sequence of positive real numbers and (f_k) a sequence with $f_k \in X'$ for all $k \in N$. Then $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in \ell_\infty(X,p)$ if and only if $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| n^{1/p_k} < \infty$ for all $n \in N$.*

Proof. If $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| n^{1/p_k} < \infty$ for all $n \in N$, then we have that for each $x = (x_k) \in \ell_\infty(X,p)$, there is $m \in N$ such that $\|x_k\| \le m^{1/p_k}$ for all $k \in N$, hence $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| m^{1/p_k} < \infty$, which implies $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges.

Conversely, assume that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in \ell_\infty(X,p)$. We first note that, by using the same proof as in Lemma 4.2, we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| < \infty \text{ for all } x = (x_k) \in \ell_\infty(X,p)\,. \tag{4.2}$$

Now, suppose that $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| n^{1/p_k} = \infty$ for some $n \in N$. Then we can choose a sequence (k_i) of positive integer with $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ such that

$$\sum_{k_{i-1} < k \le k_i} \|f_k\| n^{1/p_k} > i \text{ for all } i \in N\,.$$

Taking x_k in X with $\|x_k\| = 1$ such that for all $i \in N$,

$$\sum_{k_{i-1} < k \le k_i} |f_k(x_k)| n^{1/p_k} > i\,.$$

Put $y = (y_k) = \left(n^{1/p_k} x_k\right)_{k=1}^{\infty}$. Clearly, $y \in \ell_\infty(X,p)$ and

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y_k)| \geq \sum_{k_{i-1}<k\leq k_i} |f_k(x_k)| n^{1/p_n} > i \text{ for all } i \in N .$$

Hence $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y_k)| = \infty$, which contradicts with (4.2). The proof is now complete. □

Theorem 4.6 *Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell_\infty(X,p),\ c(q))$ if and only if there is a sequence (f_k) with $f_k \in X'$ for all $k \in N$ such that*

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| n^{1/p_k} < \infty$ *for all* $n \in N$,

(2) $m^{1/q_n}(f_k^n - f_k) \xrightarrow{w^*} 0$ *as* $n \to \infty$ *for every* k *and* $m \in N$ *and*

(3) for each $m,\ M \in N$, $\sum_{j>k} \|f_j^n - f_j\| n^{1/q_n} M^{1/p_j} \to 0$ *as* $k \to \infty$ *uniformly on* $n \in N$.

Proof. If $A \in (\ell_\infty(X,p), c(q))$, it follows that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in \ell_\infty(X,p)$, hence (1) holds by Lemma 4.5. Since $c(q) = c_0(q) \oplus < e >$, we have by Proposition 3.1(v) that $A = B + C$ where $B \in (\ell_\infty(X,p),\ c_0(q))$ and $C \in (\ell_\infty(X,p),\ < e >)$. Since $\Phi(X) \subseteq \ell_\infty(X,p)$, it implies that there is a sequence (f_k) with $f_k \in X'$ for all $k \in N$ such that $C = (f_k)_{n,k}$, so we have $(f_k^n - f_k)_{n,k} = B \in (\ell_\infty(X,p),\ c_0(q))$. Hence we obtain (2) and (3) by Theorem 4.4.

Conversely, assume that there is a sequence (f_k) with $f_k \in X'$ for all $k \in N$ such that the conditions (1), (2), and (3) hold. Let $B = (f_k^n - f_k)_{n,k}$ and $C = (f_k)_{n,k}$. The condition (1) implies that $C \in (\ell_\infty(X,p),\ < e >)$ (by application of Lemma 4.5) and the conditions (2) and (3), by Theorem 4.4, implies that $B \in (\ell_\infty(X,p),\ c_0(q))$. By Proposition 3.1(v), we obtain that $A \in (\ell_\infty(X,p),\ c(q))$. This complete the proof. □

Theorem 4.7 *Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (c(X,p),\ \ell_\infty(q))$ if and only if*

(1) $\sup_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\| M^{-1/p_k}\right)^{q_n} < \infty$ *for some* $M \in N$ *and*

(2) $\sup_n \|T_n\|^{q_n} < \infty$ *where* $T_n \in X'$ *is defined by* $T_n x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x)$ *for all* $x \in X$.

Proof. Assume that $A \in (c(X,p),\ \ell_\infty(q))$. Since $c(X,p) = c_0(X,p) + E$ where $E = \{e(x) : x \in X\}$, we have by Proposition 3.1(iii) that $A \in (c_0(X,p),\ \ell_\infty(q))$ and $A \in (E,\ \ell_\infty(q))$. It follows from [8, Theorem 2.10] that the condition (1) holds. Since $A \in (E,\ \ell_\infty(q))$, we have $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x)$ converges for every $x \in X$ and $\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x)\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty(q)$. For each $n \in N$, let $T_n x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x)$ for all $x \in X$. It follows by

Banach-Steinhaus theorem that $T_n \in X'$. Since $\sup_n |T_n(x)|^{q_n} = \sup_n |\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x)|^{q_n} < \infty$, by [8, Theorem 1.1] we have $\sup_n \|T_n\|^{q_n} < \infty$, so (2) is obtained.

Conversely, assume that the conditions (1) and (2) hold. It follows from [8, Theorem 2.10] that $A \in (c_0(X,p), \ell_\infty(q))$. We have by (2) that for each $x \in X$,

$$\sup_n |\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x)|^{q_n} = \sup_n |T_n x|^{q_n} \leq (1+\|x\|)^{\alpha} \sup_n \|T_n\|^{q_n} < \infty$$

where $\alpha = \sup_n q_n$. This implies that $A \in (E, \ell_\infty(q))$ where $E = \{e(x) : x \in X\}$. By an application of Proposition 3.1(iii) we have $A \in (c(X,q), \ell_\infty(q))$. The proof is now complete. □

Theorem 4.8 *Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (c(X,p), c_0(q))$ if and only if*

(1) $m^{1/q_n} f_k^n \xrightarrow{w^*} 0$ *as* $n \to \infty$ *for every* $m, k \in N$,

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/q_n} \|f_k^n\|^{r^{-1/p_k}} \to 0$ *as* $n, r \to \infty$ *for every* $m \in N$ *and*

(3) $|\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x)|^{q_n} \to 0$ *as* $n \to \infty$ *for every* $x \in X$.

Proof. Since $c(X,p) = c_0(X,p) + E$ where $E = \{e(x) : x \in X\}$, we have by Proposition 3.1 (iii), $A \in (c(X,p), c_0(q))$ if and only if $A \in (c_0(X,p), c_0(q))$ and $A \in (E, c_0(q))$. Clearly, $A \in (E, c_0(q))$ if and only if the condition (3) holds. By Theorem 4.1,we have $A \in (c_0(X,p), c_0(q))$ if and only if the conditions (1) and (2) hold. So, we have the theorem. □

Theorem 4.9 *Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (c(X,p), c(q))$ if and only if there is a sequence (f_k) with $f_k^n \in X'$ for all $k \in N$ such that*

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\| M^{-1/p_k} < \infty$ *for some* $M \in N$,

(2) $m^{1/q_n}(f_k^n - f_k) \xrightarrow{w^*} 0$ *as* $n \to \infty$ *for every* m , $k \in N$,

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/q_n} \|f_k^n - f_k\|^{r^{-1/p_k}} \to 0$ *as* $n, r \to \infty$ *for every* $m \in N$ *and*

(4) $(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x))_{n=1}^{\infty} \in c(q)$ *for all* $x \in X$.

Proof. Since $c(X,p) = c_0(X,p) + E$, where $E = \{e(x) : x \in X\}$,it follows from Proposition 3.1 (iii) that $A \in (c(X,p), c(q))$ if and only if $A \in (c_0(X,p), c(q))$ and $A \in (E, c(q))$. By Theorem 4.3, we have $A \in (c_0(X,p), c(q))$ if and only if the conditions (1) - (3) hold, and clearly, $A \in (E, c(q))$ if and only if (4) holds. Hence, the theorem is proved. □

Theorem 4.10 *Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers with $p_k \leq 1$ for all $k \in N$, and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X,p),\ c_0(q))$ if and only if*

(1) $m^{1/q_n} f_k^n \xrightarrow{w^*} 0$ as $n \to \infty$ for every $m,k \in N$ and

(2) there exists $M \in N$ such that $\|m^{1/q_n} f_k^n\|^{p_k} \leq M$ for all $m,n,k \in N$

Proof. Since $c_0(q) = \bigcap_{m=1}^{\infty} c_{0(m^{1/q_n})}$, it follows from Proposition 3.1 (ii) and (vii) that $A \in (\ell(X,p),\ c_0(q))$ if and only if $\left(m^{1/q_n} f_k^n\right)_{n,k} \in (\ell(X,p),\ c_0)$ for all $m \in N$. By [8, Theorem 2.6], we have $\left(m^{1/q_n} f_k^n\right)_{n,k} \in (\ell(X,p),\ c_0)$ if and only if the conditions (1) and (2) hold. The proof is now complete. □

Wu and Lin [8, Theorem 2.7] have given a characterization of an infinite matrix A such that $A \in (\ell(X,p), c_0)$ when $p_k > 1$ for all $k \in N$. By using application of Proposition 3.1 (ii) and (iii) , we obtain the following result.

Theorem 4.11 *Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers with $p_k > 1$ for all $k \in N$, and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X,p), c_0(q))$ if and only if*

(1) $m^{1/q_n} f_k^n \xrightarrow{w^*} 0$ as $n \to \infty$ for all $m,\ k \in N$ and

(2) for each $m \in N$, $\left(\sum_{k=1}^{\infty} (m^{1/q_n}\|f_k^n\|)^{p_k/(p_k-1)} r^{-1/(p_k-1)}\right) \to 0$ as $r \to \infty$ uniformly on $n \in N$.

Acknowledgements

The author would like to thank the Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

References

[1]. K.-G. Grosse-Erdmann, *The structure of the sequence spaces of Maddox*, Canad. J. Math. 44 (1992), 298-307.

[2]. K.-G. Grosse-Erdmann, *Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox*, J. of Math. Anal. Appl. 180 (1993), 223-238.

[3]. I.J. Maddox, *Spaces of strongly summable sequences*, Quart.J. Math. Oxford Ser. (2) 18 (1967), 345 -355.

[4]. I.J. Maddox, *Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 64 (1968), 335 - 340.

[5]. H. Nakano, *Modulared sequence spaces*, Proc. Japan. Acad. 27 (1951), 508-512.

[6]. S. Simons, *The spaces $\ell(p_\nu)$ and $m(p_\nu)$*, Proc. London. Math. Soc. 15 (1965), 422-436.

[7]. A. Wilansky, *Summability through functional analysis*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1984.

[8]. C.X. Wu and L. Liu, *Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces*, SEA. Bull. Math. 17,1 (1993), 83-96.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.
Email : Somti005@chiangmai.ac.th

ผลงานวิจัย 4

ชื่อเรื่อง Matrix Transformations from Vector - Valued Sequence Spaces of Maddox into the Nakano Sequence Space

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้ส่งไปเพื่อตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติ ชื่อ
Journal of London Mathematical Society

Matrix Transformations from Vector-Valued Sequence Spaces of Maddox into the Nakano Sequence Space

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this paper, we give the matrix characterizations from vector-valued sequence spaces of Maddox $c_0(X,p)$, $c(X,p)$ and $\ell_\infty(X,p)$ into the Nakano sequence space $\ell(q)$ where $p=(p_k)$ and $q=(q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A45.

1. INTRODUCTION

Let $(X,\|.\|)$ be a Banach space and $p=(p_k)$ a bounded sequence of positive real numbers. We write $x=(x_k)$ with x_k in X for all $k\in N$. The X-valued sequence spaces $c_0(X,p)$, $c(X,p)$, $\ell_\infty(X,p)$, $\ell(X,p)$, and $\ell_0(X,p)$ are defined as

$$c_0(X,p)=\{x=(x_k): \lim_{k\to\infty}\|x_k\|^{p_k}=0\},$$
$$c(X,p)=\{x=(x_k): \lim_{k\to\infty}\|x_k-a\|^{p_k}=0 \text{ for some } a\in X\},$$
$$\ell_\infty(X,p)=\{x=(x_k): \sup_k \|x_k\|^{p_k}<\infty\},$$
$$\ell(X,p)=\{x=(x_k): \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^{p_k}<\infty\}$$
$$\ell_0(X,p)=\{x=(x_k): \sup_k \|\frac{x_k}{\delta_k}\|^{p_k}<\infty \text{ for some } (\delta_k)\in c_0 \text{ with } \delta_k\neq 0 \text{ for all } k\in N\}$$

When $X=R$ or C the corresponding spaces are written as $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$, $\ell(p)$, and $\ell_0(p)$ respectively. Each of the first three spaces are known as the sequence spaces of Maddox. These spaces were first introduced and studied by Simons [6], Maddox [3, 4]. The space $\ell(p)$ was first defined by Nakano [5] and

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

it is known as the Nakano sequence space. In [1] the structure of the spaces $c_0(p)$, $c(p)$, and $\ell_\infty(p)$ have been investigated.

In this paper we consider the problem of characterizing those matrices that map from vector-valued sequence spaces of Maddox $c_0(X,p)$, $c(X,p)$ and $\ell_\infty(X,p)$ into the Nakano sequence space $\ell(q)$ where $p=(p_k)$ and $q=(q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers. By applying our main results, we also give a characterization of infinite matrix mapping from $c_0(X,p)$ into $\ell(q)$. Wu and Liu [7] deal with the problem of characterization those infinite matrices mapping from $c_0(X,p)$, and $\ell_\infty(X,p)$ into $c_0(q)$ and $\ell_\infty(q)$. Grosse-Erdmann [2] has given characterizations of matrix transformations between the scalar-valued sequence spaces of Maddox. It is pointed out in [1] that $c_0(p)$ is an echelon space of order 0 and that $\ell_\infty(p)$ is a co-echelon space of order ∞. In this paper we also show that $c_0(X,p)$ and $\ell_\infty(X,p)$ is a co-echelon space of order ∞. Therefore these spaces are made up of simpler spaces. We will use certain auxiliary results(Section 3) to reduce our problem to the characterisations of matrix mapping between much simpler spaces.

2. Notation and Definitions

2.1 Let $(X,\|.\|)$ be a Banach space, the space of all sequences in X is denoted by $W(X)$ and $\Phi(X)$ is denoted for the space of all finite sequences in X. When $X=R$ or C, the corresponding spaces are written as w and Φ.

A sequence space in X is a linear subspace of $W(X)$. Let E be an X-valued sequence space. For $x\in E$ and $k\in N$, we write x_k stands for the k^{th} term of x. For $k\in N$ denote by e_k the sequence $(0,0,...,0,1,0,...)$ with 1 in the k^{th} position and by e the sequence $(1,1,1,...)$. For $x\in X$ and $k\in N$, let $e^k(x)$ be the sequence $(0,0,...,0,x,0,...)$ with x in the k^{th} position and let $e(x)$ be the sequence $(x,x,x,...)$. For a fixed scalar sequence $\mu=(\mu_k)$ the sequence space E_μ is defined as

$$E_\mu=\{x\in W(X):(\mu_k x_k)\in E\}\ .$$

2.2 Let $A=(f_k^n)$ with f_k^n in X', the topological dual of X. Suppose that E is a space of X-valued sequences and F a space of scalar-valued sequences. Then A is said to *map* E into F, written by $A:E\to F$ if for each $x=(x_k)\in E$, $A_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for each $n\in N$, and the sequence $Ax=(A_n(x))\in F$. Let (E,F) denote for the set of all infinite matrices mapping from E into F. If $u=(u_k)$ and $v=(v_k)$ are scalar sequences, let

$$_u(E,F)_v=\{A=(f_k^n):(u_n v_k f_k^n)_{n,k}\in(E,F)\}$$

If $u_k\neq 0$ for all $k\in N$, we write $u^{-1}=(\frac{1}{u_k})$.

2.3 Suppose that the X-valued sequence space E is endowed with some linear topology τ. Then E is called a *K-space* if for each $k\in N$ the k^{th} coordinate mapping $p_k:E\to X$, defined by $p_k(x)=x_k$, is

continuous on E. If, in addition, (E,τ) is an Fréchet (Banach, LF-, LB-) space, then E is called an *FK-(BK-, LFK-, LBK-) space*. Now, suppose that E contains $\Phi(X)$. Then E is said to have *property AB* if the set $\{\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k) : n \in N\}$ is bounded in E for every $x = (x_k) \in E$. It is said to have *property AK* if $\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k) \to x$ in E as $n \to \infty$ for every $x = (x_k) \in E$. It has *property AD* if $\Phi(X)$ is dense in E.

The space $\ell(p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k}\right)^{1/M}$, where $M = max\{1, \sup_k p_k\}$. In each of the space $\ell_\infty(X,p)$ and $c_0(X,p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k\|^{p_k/M}$, where $M = max\{1, \sup_k p_k\}$. It is known that $c_0(X,p)$ is an FK-space with AK under the paranorm g defined as above and $\ell_\infty(X,p)$ is a complete LBK-space with AB. In $c(X,p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k - a\|^{p_k/M} + \|a\|$ where a is the unique element in X with $x - e(a) \in c_0(X,p)$. Then g is a paranorm on $c(X,p)$ and $c(X,p)$ is an FK-space under this paranorm g.

3. Some Auxiliary Results

We begin with the following useful results that will be used to reduce our problems into some simpler forms.

Proposition 3.1 *Let E and $E_n (n \in N)$ be X-valued sequence spaces, and F and $F_n (n \in N)$ scalar sequence spaces, and let u and v be scalar sequences with $u_k \neq 0$, $v_k \neq 0$ for all $k \in N$. Then we have*

(i) $\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n, F\right) = \cap_{n=1}^{\infty}(E_n, F)$

(ii) $(E, \cap_{n=1}^{\infty} F_n) = \cap_{n=1}^{\infty}(E, F_n)$

(iii) $(E_1 + E_2, F) = (E_1, F) \cap (E_2, F)$

(iv) $(E_u, F_u) = {}_v(E,F)_{u^{-1}}$.

Proof. All assertions are immediately obtained by the definition. □

Proposition 3.2 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequences of positive real numbers. Then*

(i) $c(X,p) = c_0(X,p) + \{e(x) : x \in X\}$

(ii) $\leq_0(X,p) = \cup_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{-1/p_k})}$. *Hence $c_0(X,p)$ is an echelon space of order 0.*

(iii) $\ell_\infty(X,p) = \cup_{n=1}^{\infty} \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$. *Hence $\ell_\infty(X,p)$ is a co-echelon space of order ∞.*

Proof. It is easy to see that assertion (i) holds. To show (ii), let $x = (x_k) \in \leq_0(X,p)$. Then there is a sequence $(\delta_k) \in c_0$ with $\delta_k \neq 0$ for all $k \in N$ such that $\sup_k \|\frac{x_k}{\delta_k}\|^{p_k} < \infty$. Hence there exists $\alpha > 0$ such that $\|x_k\| \leq \alpha^{1/p_k}|\delta_k|$ for all $k \in N$. Choose $n_0 \in N$ with $n_0 > \alpha$. Then $\|x_k\| n_0^{-1/p_k} \leq \left(\frac{\alpha}{n_0}\right)^{1/p_k} |\delta_k| < |\delta_k|$ which implies that $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| n_0^{-1/p_k} = 0$, hence $x = (x_k) \in c_0(X)_{(n^{-1/p_k})} \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{-1/p_k})}$. On the

other hand, suppose that $x = (x_k) \in \cup_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{-1/p_k})}$. Then $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| n^{-1/p_k} = 0$ for some $n \in N$. Let $\delta = (\delta_k)$ be the sequence definded by

$$\delta_k = \begin{cases} \|x_k\| n^{-1/p_k} & \text{if } \|x_k\| \neq 0 \\ \frac{1}{k} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Clearly $(\delta_k) \in c_0$ and $\left\|\frac{x_k}{\delta_k}\right\|^{p_k} \leq n$ for all $k \in N$, hence $\sup_k \left\|\frac{x_k}{\delta_k}\right\|^{p_k} \leq n$, so $x = (x_k) \in c_0(X, p)$.

Now we show (iii). If $x \in \ell_\infty(X, p)$, then there is some $n \in N$ with $\|x_k\|^{p_k} \leq n$ for all $k \in N$. Hence $\|x_k\|.n^{-1/p_k} \leq 1$ for all $k \in N$, so that $x \in \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$. On the other hand, if $x \in \cup_{n=1}^{\infty} \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$, then there are some $n \in N$ and $K > 1$ such that $\|x_k\|.n^{-1/p_k} \leq K$ for every $k \in N$. Then we have $\|x_k\|^{p_k} \leq n.K^{p_k} \leq n.K^M$ for all $k \in N$, where $M = \sup_k p_k$. Hence $x \in \ell_\infty(X, p)$ □

Proposition 3.3 *Let $E \subseteq W(X)$ be an FK-space with AK property and F an FK-space of scalar sequences. Then for an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (E, F)$ if and only if*

(1) For each $n \in N$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in E$,

(2) For each $k \in N$, $(f_k^n(x))_{n=1}^{\infty} \in F$, and

(3) $A : \Phi(X) \to F$ is continuous when $\Phi(X)$ is considered as a subspace of E.

Proof. Assume that $A \in (E, F)$. Then we have that for $x = (x_k) \in E$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for all $n \in N$, so (1) holds. Since $e^{(k)}(x) \in E$ for all $k \in N$ and all $x \in X$, we obtain that for each $n \in N$, $(f_k^n(x))_{n=1}^{\infty} = Ae^{(k)}(x) \in F$, hence (2) holds. Since E and F are FK-spaces, by Zeller's theorem, $A : E \to F$ is continuous, so that (3) is obtained.

Conversely, assume that the conditions holds. By (1), we have $Ax = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\right)_{n=1}^{\infty} \in W(X)$ for all $x \in E$. It follows from (2) that $Ae^{(k)}(x) \in F$ for all $k \in N$ and all $x \in X$, which implies that $A : \Phi(X) \to F$. By (3), we have $A : \Phi(X) \to F$ is continuous. Let $x = (x_k) \in E$. Since E has the AK property, $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{(k)}(x_k)$ in E. Then $\left(\sum_{k=1}^{n} e^{(k)}(x_k)\right)_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in E. By the continuity and linearity of A, we have $\left(\sum_{k=1}^{n} Ae^{(k)}(x_k)\right)_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in F. Since F is complete, we have $\left(\sum_{k=1}^{n} Ae^{(k)}(x_k)\right)_{n=1}^{\infty}$ converges in F. Since F is a K-space, it implies that $\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\right)_{n=1}^{\infty} \in F$, so that $Ax \in F$. This show that $A : E \to F$. □

4. Main Results

We now turn to our main objective. We begin with giving characterisations of matrix transformations from $c_0(X, p)$ into $\ell(q)$. To do this we need a lemma.

Lemma 4.1 *Let (f_k) be a sequence of continuous linear functional on X. Then $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x=(x_k)\in c_0(X,p)$ if and only if $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|M^{-1/p_k}<\infty$ for some $M\in N$.*

Proof. Suppose that $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|M^{-1/p_k}<\infty$ for some $M\in N$. Let $x=(x_k)\in c_0(X,p)$. Then there is a positive integer K such that $\|x_k\|^{p_k}<\frac{1}{M}$ for all $k\geq K$, hence $\|x_k\|<M^{-1/p_k}$ for all $k\geq K$. Then we have

$$\sum_{k=K}^{\infty}|f_k(x_k)|\leq\sum_{k=K}^{\infty}\|f_k\|\|x_k\|\leq\sum_{k=K}^{\infty}\|f_k\|M^{-1/p_k}<\infty\,.$$

It follows that $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x_k)$ converges.

On the other hand, assume that $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x_k)$ converges for all $x\in c_0(X,p)$. For each $x=(x_k)\in c_0(X,p)$, choose scalar sequence (t_k) with $|t_k|=1$ such that $f_k(t_kx_k)=|f_k(x_k)|$ for all $k\in N$. Since $(t_kx_k)\in c_0(X,p)$, by our assumption, we have $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t_kx_k))$ converges, so that

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x_k)|<\infty\ \text{ for all } x\in c_0(X,p)\,. \tag{4.1}$$

Now, suppose that $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|m^{-1/p_k}=\infty$ for all $m\in N$. Choose m_1, $k_1\in N$ such that

$$\sum_{k\leq k_1}\|f_k\|m_1^{-1/p_k}>1\,,$$

and choose $m_2>m_1$ and $k_2>k_1$ such that

$$\sum_{k_1<k\leq k_2}\|f_k\|m_2^{-1/p_k}>2\,.$$

Proceeding in this way, we can choose $m_1<m_2<\ldots$, and $0=k_1<k_2<\ldots$ such that

$$\sum_{k_{i-1}<k\leq k_i}\|f_k\|m_i^{-1/p_k}>i\,.$$

Take x_k in X with $\|x_k\|=1$ for all k, $k_{i-1}<k\leq k_i$ such that

$$\sum_{k_{i-1}<k\leq k_i}|f_k(x_k)|m_i^{-1/p_k}>i\quad\text{for all }\ i\in N$$

Put $y=(y_k)$, $y_k=m_i^{-1/p_k}.x_k$ for $k_{i-1}<k\leq k_i$, then $y\in c_0(X,p)$, and we have

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(y_k)|\geq\sum_{k_{i-1}<k\leq k_i}|f_k(x_k)|m_i^{-1/p_k}>i\ \text{ for all } i\in N\,.$$

Hence we have $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(y_k)| = \infty$ which contradicts with (4.1). This complete the proof. □

Theorem 4.2 *Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (c_0(X,p), \ell(q))$ if and only if*

(1) For each $n \in N$, there exists $m_n \in N$ such that $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k^n\| m_n^{-1/p_k} < \infty$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}|f_k^n(x)|^{q_n} < \infty$ for every $k \in N$.

(3) $\lim_{m\to\infty}\sup_K \alpha(m,K) = 0$, where the supremum is taken over all finite subset K of N and

$$\alpha(m,K) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\sum_{k\in K} m^{-1/p_k} f_k^n(x_k)\Big|^{q_n} : x_k \in X \text{ and } \|x_k\| \le 1 \text{ for all } k \in K\}.$$

Proof. Assume that $A : c_0(X,p) \to \ell(q)$. By Proposition 3.3 and Lemma 4.1 , the conditions (1) and (2) are obtained. Now we shall show that (3) holds. Let $\varepsilon > 0$ be given. Since $c_0(X,p)$ and $\ell(q)$ are FK-spaces and $c_0(X,p)$ has the AK property, we have by Proposition 3.3 that $A : \Phi(X) \to \ell(q)$ is continuous when $\Phi(X)$ is considered as a subspace of $c_0(X,p)$. Then there exists $m_0 \in N$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\Big|^{q_n} \le \varepsilon \tag{4.2}$$

for all $x = (x_k) \in \Phi(X)$, $\|x\| = \sup_k \|x_k\|^{p_k/M} \le (\frac{1}{m_0})^{1/M}$ where $M = \sup_k p_k$.
Let $K \subset N$ be finite and for $k \in K$, let $x_k \in X$ be such that $\|x_k\| \le 1$. Let $m \in N$, $m \ge m_0$. Let y be the sequence defined by $y_k = m^{-1/p_k}x_k$ if $k \in K$ and 0 otherwise. Then $y \in \Phi(X)$ and $\|y\| = \sup_k \|m^{-1/p_k}x_k\|^{p_k/M} \le (\frac{1}{m})^{1/M} \le (\frac{1}{m_0})^{1/M}$, so by (4.2), $\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\sum_{k\in K} m^{-1/p_k} f_k^n(x_k)\Big|^{q_n} \le \varepsilon$. This implies $\sup_K \alpha(m,K) \le \varepsilon$, hence (3) holds.

Conversely, assume that the conditions (1), (2) and (3) hold. The condition (1) implies, by Lemma 4.1, that for each $n \in N$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in c_0(X,p)$. By (2), we have $((f_k^n(x))_{n=1}^{\infty} \in \ell(q)$ for all $k \in N$. Thus $A : \Phi(X) \to \ell(q)$. We shall show that $A : \Phi(X) \to \ell(q)$ is continuous when $\Phi(X)$ is considered as a subspace of $c_0(X,p)$. Let $\varepsilon > 0$ be given. By (3), there is $m_0 \in N$ such that

$$\sup_K \alpha(m,K) \le \varepsilon \quad \text{for all } m \ge m_0 \tag{4.3}$$

Choose $\delta = (\frac{1}{m_0})^{1/M}$ where $M = \sup_k p_k$. Let $x = (x_k) \in \Phi(X)$ with $\|x\| = \sup_k |x_k|^{p_k/M} \leq \delta$. Then $m_0^{1/p_k}\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$. Let $K = \{k \in N : x_k \neq 0\}$. It follows by (4.3) that

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}|\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)| &= \sum_{n=1}^{\infty}|\sum_{k\in K} f_k^n(x_k)| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}|\sum_{k\in K} m_0^{-1/p_k} f_k^n(m_0^{1/p_k}x_k)| \\ &\leq \epsilon.\end{aligned}$$

Hence, we have $A : \Phi(X) \to \ell(q)$ is continuous. By Proposition 3.3, we obtain that $A : c_0(X,p) \to \ell(q)$. This completes the proof. □

Theorem 4.3 *Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (c(X,p), \ell(q))$ if and only if*

(1) For each $n \in N$, there exists $m_n \in N$ such that $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\| m_n^{-1/p_k} < \infty$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} |f_k^n(x)|^{q_n} < \infty$ for every $k \in N$.

(3) $\lim_{m\to\infty} \sup_K \alpha(m,K) = 0$, where the supremum is taken over all finite subset K of N and

$$\alpha(m,K) = \sup\{\sum_{n=1}^{\infty}|\sum_{k\in K} m^{-1/p_k} f_k^n(x_k)|^{q_n} : x_k \in X \text{ and } \|x_k\| \leq 1 \text{ for all } k \in K\},$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}|\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x)|^{q_n} < \infty$ for all $x \in X$.

Proof. Let $E = \{ e(x) : x \in X \}$. Since $c(X,p) = c_0(X,p) + E$ (Proposition 3.2(i)), it implies by Proposition 3.1(iii) that

$$A : c(X,p) \to \ell(q) \Longleftrightarrow A : c_0(X,p) \to \ell(q) \text{ and } A : E \to \ell(q)$$

It is easy to see that

$$A : E \to \ell(q) \Longleftrightarrow \text{the condition (4) is satisfied.}$$

By Theorem 4.2, we have

$$A : c_0(X,p) \to \ell(q) \Longleftrightarrow \text{the conditions (1), (2) and (3) are satisfied.}$$

Hence we have

$$A : c(X,p) \to \ell(q) \Longleftrightarrow \text{the conditions (1), (2), (3) and (4) are satisfied.}$$

□

Next, we shall give characterizations of infinite matrices mapping from $\ell_\infty(X,p)$ into $\ell(q)$. To do this, we need the following results.

Lemma 4.4 *Let (f_k) be a sequence of continuous linear functionals on X. Then $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for every $x=(x_k)\in\ell_\infty(X)$ if and only if $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|<\infty$*

Proof. If $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|<\infty$, then for each $x=(x_k)\in\ell_\infty(X)$, $\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x_k)|\le\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|\|x_k\|\le\|x\|\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|<\infty$, so that $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x_k)$ converges.

Conversely, assume that $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x_k)$ converges for every $x=(x_k)\in\ell_\infty(X)$. Let T be a functional on $\ell_{inf\,q}(X)$ by $Tx=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x_k)$ for $x=(x_k)\in\ell_{inf\,q}(X)$. Clearly, T is linear. For each $n\in N$, let $s_n=\sum_{k=1}^{n}f_k\circ p_k$. Then s_n is in the dual space of $\ell_\infty(X)$ since $\ell_\infty(X)$ is a K-space. It is clear that $s_n(x)\to Tx$ as $n\to\infty$ for all $x\in\ell_\infty(X)$. It follows by Banach-Steinhaus theorem that T is in the dual space of $\ell_\infty(X)$. Hence, there is a positive real number α such that

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x_k)\right|\le\alpha \tag{4.4}$$

for all $x=(x_k)\in\ell_\infty(X)$ with $\|x\|\le 1$.

Let $x_k\in X$ be such that $\|x_k\|\le 1$ for all $k\in N$. Then the sequence $x=(x_k)\in\ell_\infty(X)$ with $\|x\|\le 1$, we can choose a scalar sequence (t_k) with $|t_k|=1$ such that $f_k(t_kx_k)=|f_k(x_k)|$ for all $k\in N$. Clearly, $(t_kx_k)\in\ell_\infty(X)$ and $\|(t_kx_k)\|\le 1$. It follows by (4.4)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x_k)|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t_kx_k)\right|\le\alpha \tag{4.5}$$

for all sequence $x=(x_k)$ with $\|x_k\|\le 1$ for all $k\in N$.

It follows from (4.5) that $\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|\le\alpha$ for all $n\in N$, hence $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|\le\alpha$. This complete the proof. □

Theorem 4.5 *Let $q=(q_k)$ be a sequence of positive real numbers and $A=(f_k^n)$ an infinite matrix. Then $A\in(\ell_\infty(X),\ell(q))$ if and only if*

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k^n\|<\infty$ *for every $n\in N$, and*

(2) $\lim_{m\to\infty}\alpha_m=0$ *where* $\alpha_m=\sup\{\sum_{n=1}^{\infty}m^{-1/q_n}\left|\sum_{k=1}^{\infty}f_k^n(x_k)\right|^{q_n}\ :\ x_k\in X,\|x_k\|\le 1\}$.

Proof. *Assume that* $A : \ell_\infty(X) \to \ell(q)$. *Then we have* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ *converges for all* $n \in N$ *and all* $x = (x_k) \in \ell_\infty(X)$. *By Lemma 4.4 , the conditions (1) is obtained. Now we shall show that (2) holds. Let* $\varepsilon > 0$ *be given. Since* $\ell_\infty(X)$ *and* $\ell(q)$ *are FK-spaces, we have, by Zeller's theorem, that* $A : \ell_\infty(X) \to \ell(q)$ *is continuous. Then there exists* $m_0 \in N$ *such that*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \Big|^{q_n} \le \varepsilon \tag{4.6}$$

for all $x = (x_k) \in \ell_\infty(X)$, $\|x\| = \sup_k \|x_k\| \le \dfrac{1}{m_0}$.
Let $x_k \in X$ *be such that* $\|x_k\| \le 1$ *for all* $k \in N$. *Let* $m \in N$, $m \ge m_0$. *Then the sequence* $y = (m^{-1} x_k) \in \ell_\infty(X)$ *and* $\|y\| \le \dfrac{1}{m} \le \dfrac{1}{m_0}$. *By (4.6), we have*

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^{-q_n} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \Big|^{q_n} \le \varepsilon$$

This implies $|\alpha_m| \le \varepsilon$, *so* $\lim_{m \to \infty} \alpha_m = 0$.

Conversely, assume that the conditions (1) and (2) hold. Let $x = (x_k) \in \ell_\infty(X)$ *with* $\|x\| \le 1$. *Then* $\|x_k\| \le 1$ *for all* $k \in N$. *The condition (1) implies, by Lemma 4.4, that for each* $n \in N$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ *converges, hence* $Ax \in W(X)$. *By (2), there is* $m_0 \in N$ *such that*

$$\Big(\frac{1}{m_0}\Big)^M \sum_{n=1}^{\infty} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \Big|^{q_n} \le \sum_{n=1}^{\infty} m_0^{-q_n} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \Big|^{q_n} \le 1$$

where $M = \sup_k p_k$.

Hence $\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \Big|^{q_n} \le m_0^M$, *so* $Ax \in \ell(q)$. *This implies that* $Ax \in \ell(q)$ *for all* $x \in \ell_\infty(X)$. *Therefore* $A \in (\ell_\infty(X),\ \ell(q))$

□

Theorem 4.6 *Let* $p = (p_k)$ *and* $q = (q_k)$ *be bounded sequences of positive real numbers and let* $A = (f_k^n)$ *be an infinite matrix. Then* $A \in (\ell_\infty(X,p), \ell(q))$ *if and only if*

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/p_k} \|f_k^n\| < \infty$ *for every* $m, n \in N$, *and*

(2) For each $m \in N$, $\lim_{i \to \infty} \alpha_i^{(m)} = 0$

where $\alpha_i^{(m)} = \sup \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} i^{-1/q_n} \Big| \sum_{k=1}^{\infty} m^{1/p_k} f_k^n(x_k) \Big|^{q_n} : x_k \in X, \|x_k\| \le 1 \Big\}$

Proof. *Since* $\ell_\infty(X,p) = \cup_{m=1}^{\infty} \ell_\infty(X)_{(m^{-1/p_k})}$, *we have by Proposition 3.1(i) that*

$$A \in (\ell_\infty(X,p), \ell(q)) \iff A \in (\ell_\infty(X)_{(m^{-1/p_k})},\ \ell(q)) \text{ for every } m \in N .$$

It follows by Proposition 3.1(iv) that for each $m \in N$,

$$A \in (\ell_\infty(X)_{(m^{-1/p_n})},\ \ell(q)) \iff (m^{1/p_n} f_k^n)_{n,k} \in (\ell_\infty(X),\ \ell(q)).$$

It follows by Theorem 4.5 that

$$A \in (\ell_\infty(X,p),\ \ell(q)) \iff \text{the conditions (1) and (2) are satisfied.}$$

□

Theorem 4.7 *Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (c_0(X,p), \ell(q))$ if and only if*

(1) For each $m, n \in N$, $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/p_n} \|f_k^n\| < \infty$.

(2) For each $m \in N$, $\sum_{n=1}^{\infty} m^{q_n/p_n} |f_k^n(x)|^{q_n} < \infty$ for every $k \in N$.

(3) For each $m \in N$, $\lim_{i \to \infty} \sup_K \alpha(i,m,K) = 0$,

where the supremum is taken over all finite subset K of N, and

$$\alpha(i,m,K) = \sup \{ \sum_{n=i}^{\infty} i^{-q_n} \Big| \sum_{k \in K} m^{1/p_k} f_k^n(x_k) \Big|^{q_n} \ : \ x_k \in X \text{ and } \|x_k\| \le 1 \text{ for all } k \in K \}.$$

Proof. *By Proposition 3.2(ii), we have $c_0(X,p) = \cup_{m=1}^{\infty} c_0(X)_{(m^{-1/p_n})}$. It follows by Proposition 3.1(i) and (iv) that*

$$A \in (c_0(X,p), \ell(q)) \iff (m^{1/p_n} f_k^n)_{n,k} \in (c_0(X),\ \ell(q)) \text{ for every } m \in N.$$

It follows by Theorem 4.2 that

$$A \in (c_0(X,p), \ell(q)) \iff (1), (2), \text{ and } (3) \text{ are satisfied.}$$

□

Acknowledgements

The author would like to thank the Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

References

[1]. K.-G. Grosse-Erdmann, *The structure of the sequence spaces of Maddox*, Canad. J. Math. **44** (1992), 298-307.
[2]. K.-G. Grosse-Erdmann, *Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox*, J. of Math. Anal. Appl. **180** (1993), 223-238.
[3]. I.J. Maddox, *Spaces of strongly summable sequences*, Quart.J. Math. Oxford Ser. (2) **18** (1967), 345 -355.
[4]. I.J. Maddox, *Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **64** (1968), 335 - 340.
[5]. H. Nakano, *Modulared sequence spaces*, Proc. Japan. Acad. **27** (1951), 508-512.
[6]. S. Simons, *The spaces $\ell(p_\nu)$ and $m(p_\nu)$*, Proc. London. Math. Soc. **15** (1965), 422-436.
[7]. C.X. Wu and L. Liu, *Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces*, SEA. Bull. Math. **17**,1 (1993), 83-96.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.
Email : Scmti005@chiangmai.ac.th

ผลงานวิจัย 5

ชื่อเรื่อง On Matrix Transformations Concerning the Nakano Sequence Spaces

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้ส่งไปเพื่อตีพิมพ์ (submitted) **ในวารสารนานาชาติ ชื่อ**
Acta. Math. Hungar.

On Matrix Transformations Concerning the Nakano Vector-Valued Sequence Space

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this paper, we give the matrix characterizations from Nakano vector-valued sequence space $\ell(X,p)$ and $F_r(X,p)$ into E_r and we also obtain the matrix charcterizations from $\ell(X,p)$ and $F_r(X,p)$ into the bounded sequence space ℓ_∞ as corollaries, where $p=(p_k)$ is a bounded sequences of positive real numbers such that $p_k > 1$ for all $k \in N$ and $r \geq 0$.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A45.

1. INTRODUCTION

Let $(X, \|.\|)$ be a Banach space , $r \geq 0$ and $p=(p_k)$ a bounded sequence of positive real numbers. We write $x=(x_k)$ with x_k in X for all $k \in N$. The X-valued sequence spaces $c_0(X,p)$, $c(X,p)$, $\ell_\infty(X,p)$, $\ell(X,p)$, $E_r(X,p)$ and $F_r(X,p)$ are defined as

$$c_0(X,p) = \{x=(x_k) : \lim_{k\to\infty} \|x_k\|^{p_k} = 0\},$$
$$c(X,p) = \{x=(x_k) : \lim_{k\to\infty} \|x_k - a\|^{p_k} = 0 \text{ for some } a \in X\},$$
$$\ell_\infty(X,p) = \{x=(x_k) : \sup_k \|x_k\|^{p_k} < \infty\},$$
$$\ell(X,p) = \{x=(x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} < \infty\},$$
$$E_r(X,p) = \{x=(x_k) : \sup_k \frac{\|x_k\|^{p_k}}{k^r} < \infty\},$$
$$F_r(X,p) = \{x=(x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} k^r \|x_k\|^{p_k} < \infty\}.$$

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

When $X = K$, the scalar field of X, the corresponding spaces are written as $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$,$\ell(p)$, $E_r(p)$ and $F_r(p)$, respectively. The spaces $c_0(p)$, $c(p)$ and $\ell_\infty(p)$ are known as the sequence spaces of Maddox. These spaces were first introduced and studied by Simons [6], Maddox [3, 4]. The space $\ell(p)$ was first defined by Nakano [5] and it is known as the Nakano sequence space and the space $\ell_\infty(X,p)$ is known as the Nakano vector-valued sequence space. When $p_k = 1$ for all $k \in N$, the spaces $E_r(p)$ and $F_r(p)$ are written as E_r and F_r, respectively. These two sequence spaces were first introduced by Cooke [1]. Grosse-Erdmann [2] has given characterisations of infinite matrices between scalar-valued sequence spaces of Maddox. Wu and Liu [7] gave necessary and sufficient conditions for infinite matrices mapping from $c_0(X,p)$, $\ell_\infty(X,p)$ into $c_0(q)$ and $\ell_\infty(q)$.

In this paper we give characterisation of infinite matrices mapping from $\ell(X,p)$ and $F_r(X,p)$ into E_r and by application of these results we can also characterise those infinite matrices mapping from the sapce $\ell(X,p)$ and $F_r(X,p)$ into $\ell_{\infty f t_p}$ when $p_k > 1$ for all $k \in N$.

2. Notation and Definitions

Let $(X, \|.\|)$ be a Banach space, the space of all sequences in X is denoted by $W(X)$ and $\Phi(X)$ is denoted for the space of all finite sequences in X. When X is K, the scalar field of X , the corresponding spaces are written as w and Φ.

A sequence space in X is a linear subspace of $W(X)$. Let E be an X-valued sequence space. For $x \in E$ and $k \in N$, we write x_k stands for the k^{th} term of x. For $k \in N$ denote by e_k the sequence $(0,0,...,0,1,0,...)$ with 1 in the k^{th} position and by e the sequence $(1,1,1,...)$. For $x \in X$ and $k \in N$, let $e^k(x)$ be the sequence $(0,0,...,0,x,0,...)$ with x in the k^{th} position and let $e(x)$ be the sequence $(x,x,x,...)$. We call a sequence space E *normal* if $(t_k x_k) \in E$ for all $x = (x_k) \in E$ and $t_k \in K$ with $|t_k| = 1$ for all $t_k \in N$. For a fixed scalar sequence $\mu = (\mu_k)$ the sequence space E_μ is defined as

$$E_\mu = \{x \in W(X) : (\mu_k x_k) \in E\} .$$

Let $A = (f_k^n)$ with f_k^n in X', the topological dual of X. Suppose that E is a space of X-valued sequences and F a space of scalar-valued sequences. Then A is said to *map* E into F, written by $A : E \to F$ if for each $x = (x_k) \in E$, $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for each $n \in N$, and the sequence $Ax = (A_n(x)) \in F$. Let (E,F) denote for the set of all infinite matrices mapping from E into F.

Suppose that the X-valued sequence space E is endowed with some linear topology τ. Then E is called a *K-space* if for each $k \in N$ the k^{th} coordinate mapping $p_k : E \to X$, defined by $p_k(x) = x_k$, is continuous on E. If, in addition, (E,τ) is an Fréchet (Banach, LF-, LB-) space, then E is called an *FK-(BK-, LFK-, LBK-) space*. Now, suppose that E contains $\Phi(X)$. Then E is said to have *property AB* if the set $\{\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k) : n \in N\}$ is bounded in E for every $x = (x_k) \in E$. It is said to have *property AK* if $\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k) \to x$ in E as $n \to \infty$ for every $x = (x_k) \in E$. It has *property AD* if $\Phi(X)$ is dense in E.

The space $\ell(X,p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k}\right)^{1/M}$, where $M = max\{1, \sup_k p_k\}$

In each of the space $\ell_\infty(X,p)$ and $c_0(X,p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k\|^{p_k/M}$, where $M = max\{1, \sup_k p_k\}$. It is known that $c_0(X,p)$ is an FK-space with AK under the paranorm g defined as above and $\ell_\infty(X,p)$ is a complete LBK-space with AB. In $c(X,p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k - a\|^{p_k/M} + \|a\|$ where a is the unique element in X with $x - e(a) \in c_0(X,p)$. Then g is a paranorm on $c(X,p)$ and $c(X,p)$ is an FK-space under this paranorm g.

3. Main Results

We first give a characterisation of an infinite matrix mapping from $\ell(X,p)$ into E_r when $p_k > 1$ for all $k \in N$.

Theorem 3.1 *Let $p = (p_k)$ be bounded sequences of positive real numbers with $p_k > 1$, $r \geq 0$ and let $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ for all $k \in N$. For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (\ell(X,p), E_r)$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} n^{-rq_k} m_0^{-(q_k-1)} < \infty$.*

Proof. Assume that $A \in (\ell(X,p), E_r)$. For each $k \in N$, we have $\sup_n n^{-r}|f_k^n(x)| < \infty$ for all $x \in X$ since $e^{(k)}(x) \in \ell(X,p)$ for all $x \in X$. It follows by the uniform bounded principle that there is an $M_k > 1$ such that

$$\sup_n n^{-r}\|f_k^n\| \leq M_k . \tag{3.1}$$

Suppose that

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} n^{-rq_k} m^{-(q_k-1)} = \infty \quad \text{for every } m \in N \tag{3.2}$$

For $n \in N$, we have by (3.1) that

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_j} m_0^{-(q_j-1)} &= \sum_{j=1}^{k_0} \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_j} m_0^{-(q_j-1)} + \sum_{j>k_0} \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_j} m_0^{-(q_j-1)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_0} M_j^{q_j} m_0^{-(q_j-1)} + \sum_{j>k_0} \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_j} m_0^{-(q_j-1)}.\end{aligned}$$

This implies by (3.2) that

$$\sup_n \sum_{j>k} \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_k} m^{-(q_j-1)} = \infty \quad \text{for all } k, m \in N \tag{3.3}$$

By (3.2) and (3.3) we can choose $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$, $m_1 < m_2 < \dots$, $m_i > 2^i$ and $n_i \to \infty$, such that for all $i \geq 1$

$$\sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} \|f_j^{m_i}\|^{q_j} n_i^{-rq_j} m_i^{-(q_j-1)} > i$$

And we choose $x_j \in X$ with $\|x_j\| = 1$ such that for all $i \geq 1$

$$a_i = \sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} |f_j^{m_i}(x_j)|^{q_j} n_i^{-rq_j} m_i^{-(q_j-1)} > i$$

and put $y = (y_j)$ where $y_j = m_i^{-(q_j-1)} n_i^{-rq_j/p_j} |f_j^{m_i}(x_j)|^{(q_j-1)} a_i^{-1} x_j$ if $k_{i-1} < j \leq k_i$.
Thus

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^{p_j} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} a_i^{-p_j} m_i^{-p_j(q_j-1)} \|f_j^{m_i}(x_j)\|^{p_j(q_j-1)} n_i^{-rq_j} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} a_i^{-p_j} m_i^{-q_j} |f_j^{m_i}(x_j)|^{q_j} n_i^{-rq_j} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{-1} m_i^{-1} \sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} |f_j^{m_i}(x_j)|^{q_j} n_i^{-rq_j} m_i^{-(q_j-1)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.
\end{aligned}$$

Hence $y = (y_j) \in \ell(X,p)$. Since $\ell(X,p)$ is normal, by using the same proof as in [7], Theorem 1.3 we obtain that

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k^n(y_k)|}{n^r} < \infty \tag{3.3}$$

Since $1 + q_j/p_j = q_j$, for all $j \in N$, we have that for each $i \in N$,

$$n_i^{-r} \sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} |f_j^{m_i}(y_j)| = \sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} |f_j^{m_i}(x_j)|^{q_j} n_i^{-r(1+q_j/p_j)} m_i^{-(q_j-1)} a_i^{-1} = \sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} |f_j^{m_i}(x_j)|^{q_j} n_i^{-rq_j)} m_i^{-(q_j-1)} a_i^{-1} = 1$$

Thus $n_i^{-r} \sum_{j=1}^{\infty} |f_j^{m_i}(y_j)| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} n_i^{-r} |f_j^{m_i}(y_j)| = \infty$ which contradicts to (3.4), hence $A : \ell(X,p) \to E_r$.

Conversely, assume that the condition holds. Then there are $m_0 \in N$ and $K > 1$ such that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} n^{-rq_k} m_0^{-(q_k-1)} < K \text{ for all } n \in N. \tag{3.5}$$

Let $x = (x_k) \in \ell(X,p)$. Note that for $a, b > 0$, we have

$$ab \leq a^{p_k} + b^{q_k}. \tag{3.6}$$

It follows by (3.5) and (3.6) that for $n \in N$,

$$\begin{aligned} n^{-r}\Big|\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\Big| &= n^{-r}\Big|\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(m_0^{-1/p_k} m_0^{1/p_k} x_k)\Big| \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty}(n^{-r} m_0^{-1/p_k}\|f_k^n\|)(\|m_0^{1/p_k} x_k\|) \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} n^{-rq_k} m_0^{-q_k/p_k}\|f_k^n\|^{q_k} + \sum_{k=1}^{\infty}\|m_0^{1/p_k} x_k\|^{p_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} n^{-rq_k} m_0^{-(q_k-1)}\|f_k^n\|^{q_k} + m_0\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^{p_k} \\ &\le K + m_0\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^{p_k}. \end{aligned}$$

Hence $n^{-r}\sup_n \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\right| < \infty$, so that $Ax \in E_r$. This completes the proof. □

Theorem 3.2 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k > 1$ for all $k \in N$, $r \ge 0$, $s \ge 0$ and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (F_r(X,p),\ E_s)$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that*

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{-rq_k/p_k}\|f_k^n\|^{q_k} n^{-sq_k} m_0^{-(q_k-1)}\right) < \infty.$$

Proof. Since $F_r(X,p) = \ell(X,p)_{(k^r/p_k)}$, it is easy to show that ,

$$A \in (F_r(X,p),\ E_r) \iff \left(k^{-r/p_k} f_k^n\right)_{n,k} \in (\ell(X,p)\ E_r)$$

By Theorem 3.1 we have

$$\left(k^{-r/p_k} f_k^n\right)_{n,k} \in (\ell(X,p)\ E_s) \iff \text{there is } m_0 \in N \text{ such that } \sup_n \sum_{k=1}^{\infty}\left(k^{-rq_k/p_k}\|f_k^n\|^{q_k} n^{-sq_k} m_0^{-(q_k-1)} < \infty.\right.$$

Thus the theorem is proved. □

Since $E_0 = \ell_\infty$, the following two results are obtained directly by Theorem 3.1 and Theorem 3.2 , respectively.

Corollary 3.3 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers with $p_k > 1$ and let $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ for all $k \in N$. For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (\ell(X,p),\ \ell_\infty)$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty}\|f_k^n\|^{q_k} m_0^{-(q_k-1)} < \infty$.*

Corollary 3.4 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers with $p_k > 1$ and let $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ for all $k \in N$. For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (F_p(X,p), \ell_\infty)$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{-rq_k/p_k} \|f_k^n\|^{q_k} m_0^{-(q_k-1)}\right) < \infty$.*

Acknowledgements

The author would like to thank the Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

References

[1]. R.G. Cooke, *Infinite Matrices and Sequence Spaces*, London : Macmillan, 1950.
[2]. K.-G. Grosse-Erdmann, *Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox*, J. of Math. Anal. Appl. 180 (1993), 223-238.
[3]. I.J. Maddox, *Spaces of strongly summable sequences*, Quart.J. Math. Oxford Ser. (2) 18 (1967), 345 -355.
[4]. I.J. Maddox, *Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 64 (1968), 335 - 340.
[5]. H. Nakano, *Modulared sequence spaces*, Proc. Japan. Acad. 27 (1951), 508-512.
[6]. S. Simons, *The spaces $\ell(p_\nu)$ and $m(p_\nu)$*, Proc. London. Math. Soc. 15 (1965), 422-436.
[7]. C.X. Wu and L. Liu, *Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces*, SEA. Bull. Math. 17,1 (1993), 83-96.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.
Email : Scsti006@chiangmai.ac.th

ผลงานวิจัย 6

ชื่อเรื่อง On Matrix Transformations Related to Nakano Vector - Valued Sequence Spaces

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้ส่งไปเพื่อตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติ ชื่อ
Bull. Math. Soc. no. 1998
(Bulletin of Calcutta Mathematical Society) ในประเทศอินเดีย

On Matrix Transformations Related to Nakano Vector-Valued Sequence Space

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this paper, we give necessary and sufficient conditions for infinite matrices mapping from Nakano vector-valued sequence space $\ell(X,p)$ into the sequence spaces ℓ_∞ and $\ell_\infty(q)$ and we also give the matrix characterfizations from $M_0(X,p)$ into the space $\ell_\infty(q)$ where $p=(p_k)$ and $q=(q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A45.

1. INTRODUCTION

Let $(X,\|\cdot\|)$ be a Banach space and $p=(p_k)$ a bounded sequence of positive real numbers. We write $x=(x_k)$ with x_k in X for all $k \in N$. The X-valued sequence spaces $c_0(X,p)$, $c(X,p)$, $\ell_\infty(X,p)$, $\ell(X,p)$, $\ell_\infty(X,p)$, and $M_0(X,p)$ are defined as

$$c_0(X,p)=\{x=(x_k): \lim_{k\to\infty}\|x_k\|^{p_k}=0\},$$
$$c(X,p)=\{x=(x_k): \lim_{k\to\infty}\|x_k-a\|^{p_k}=0 \text{ for some } a\in X\},$$
$$\ell_\infty(X,p)=\{x=(x_k): \sup_k \|x_k\|^{p_k}<\infty\},$$
$$\ell(X,p)=\{x=(x_k): \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^{p_k}<\infty\}$$
$$\ell_\infty(X,p)=\{x=(x_k): \lim_{k\to\infty}\|\delta_k x_k\|^{p_k}=0 \text{ for each } (\delta_k)\in c_0\}$$
$$M_0(X,p)=\cup_{n=1}^{\infty}\ell(X)_{(n^{-1/p_k})}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

When $X = K$, the scalar field of X, the corresponding spaces are written as $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$,$l(p)$, $\underline{\ell}_\infty(p)$, and $M_0(p)$, respectively. Each of the first three spaces are known as the sequence spaces of Maddox. These spaces were first introduced and studied by Simons (1965), Maddox (1967, 1968). The space $\ell(p)$ was first defined by Nakano (1951) and it is known as the Nakano sequence space and the space $\ell_\infty(X,p)$ is known as the Nakano vector-valued sequence space. The spaces $\underline{\ell}_\infty(p)$ and $M_0(p)$ were first introduced by Grosse-Erdmann (1992) and he has investigated the structure of the spaces $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$ and $\underline{\ell}_\infty(p)$. In [1], he also showed that $\underline{\ell}_\infty(p) = \cap_{n=1}^{\infty}\ell_{\infty(n^{1/p_k})}$. Grosse-Erdmann (1993) gave the matrix characterizations between scalar-valued sequence spaces of Maddox. Wu and Liu (1993) deal with the problem of characterizations those infinite matrices mapping from $c_0(X,p)$, $\ell_\infty(X,p)$ into $c_0(q)$ and $\ell_\infty(q)$ where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers. S. Suantai (1999) gave the matrix characterizations from $\ell(X,p)$ into the vector-valued sequence spaces $c_0(Y,q)$, $c(Y)$, and $\ell_s(Y)$ where $q = (q_k)$ is a sequence of positive real numbers, Y a Banach space and $s \geq 1$.

2. Notation and Definitions

Let $(X, \|.\|)$ be a Banach space, the space of all sequences in X is denoted by $W(X)$ and $\Phi(X)$ is denoted for the space of all finite sequences in X. When X is K, the scalar field of X , the corresponding spaces are written as w and Φ.

A sequence space in X is a linear subspace of $W(X)$. Let E be an X-valued sequence space. For $x \in E$ and $k \in N$, we write x_k stands for the k^{th} term of x. For $k \in N$ denote by e_k the sequence $(0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ with 1 in the k^{th} position and by e the sequence $(1, 1, 1, ...)$. For $x \in X$ and $k \in N$, let $e^k(x)$ be the sequence $(0, 0, ..., 0, x, 0, ...)$ with x in the k^{th} position and let $e(x)$ be the sequence $(x, x, x, ...)$. For a fixed scalar sequence $\mu = (\mu_k)$ the sequence space E_μ is defined as

$$E_\mu = \{x \in W(X) : (\mu_k x_k) \in E\} .$$

Let $A = (f_k^n)$ with f_k^n in X', the topological dual of X. Suppose that E is a space of X-valued sequences and F a space of scalar-valued sequences. Then A is said to map E into F, written by $A : E \to F$ if for each $x = (x_k) \in E$, $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for each $n \in N$, and the sequence $Ax = (A_n(x)) \in F$. Let (E,F) denote for the set of all infinite matrices mapping from E into F.

Suppose that the X-valued sequence space E is endowed with some linear topology τ. Then E is called a K-space if for each $k \in N$ the k^{th} coordinate mapping $p_k : E \to X$, defined by $p_k(x) = x_k$, is continuous on E. If, in addition, (E,τ) is an Fréchet (Banach, LF-, LB-) space, then E is called an *FK-(BK-, LFK-, LBK-) space*. Now, suppose that E contains $\Phi(X)$. Then E is said to have *property AB* if the set $\{\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k) : n \in N\}$ is bounded in E for every $x = (x_k) \in E$. It is said to have *property AK* if $\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k) \to x$ in E as $n \to \infty$ for every $x = (x_k) \in E$. It has *property AD* if $\Phi(X)$ is dense in E.

The space $\ell(X,p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k}\right)^{1/M}$, where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$; it is even a BK-space if $p_k \geq 1$ for all $k \in N$, with a norm given by

$$\|x\| = inf\{\, \rho > 0 \,:\, \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k/\rho\|^{p_k} \leq 1 \,\}$$

In each of the space $\ell_\infty(X,p)$ and $c_0(X,p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k\|^{p_k/M}$, where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$. It is known that $c_0(X,p)$ is an FK-space with AK under the paranorm g defined as above and $\ell_\infty(X,p)$ is a complete LBK-space with AB. In $c(X,p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k - a\|^{p_k/M} + \|a\|$ where a is the unique element in X with $x - x(a) \in c_0(X,p)$. Then g is a paranorm on $c(X,p)$ and $c(X,p)$ is an FK-space under this paranorm g.

3. Main Results

We begin with giving the matrix characterizations from $\ell(X,p)$ into ℓ_∞.

Theorem 3.1 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers with $p_k \leq 1$ for all $k \in N$ and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X,p), \ell_\infty)$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that $\sup_{n,k} m_0^{-1/p_k} \|f_k^n\| < \infty$.*

Proof. Assume that $A \in (\ell(X,p), \ell_\infty)$. In $\ell(X,p)$, we consider it as a paranormed space with the paranorm g defined as above and since $p_k \leq 1$ for all $k \in N$, we have $M = \max\{1, \sup_k p_k\} = 1$. Now, we write $\|.\|$ stands for the paranorm g. By Zeller's theorem, $A : \ell(X,p) \to \ell_\infty$ is continuous. Then there is $m_0 \in N$ such that

$$\sup_n \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\right| \leq 1 \quad \text{for all } x \in \ell(X,p) \text{ with } \|x\| \leq \frac{1}{m_0} \tag{3.1}$$

Let $n, k \in N$ be fixed and let $x_k \in X$ be such that $\|x_k\| \leq 1$. Then $e^{(k)}(m_0^{-1/p_k} x_k) \in \ell(X,p)$ and $\|e^{(k)}(m_0^{-1/p_k} x_k)\| \leq \frac{1}{m_0}$. By (3.1), we have

$$m_0^{-1/p_k} |f_k^n(x_k)| \leq \sup_{r \in N} |f_r^n(m_0^{-1/p_k} x_k)| = \|Ae^{(k)}(m_0^{-1/p_k} x_k)\| \leq 1 .$$

This implies that $\sup_{n,k} m_0^{-1/p_k} \|f_k^n\| < \infty$.

Conversely, assume that the condition holds. Let $x = (x_k) \in \ell(X,p)$. By assumption, there is a $C > 0$ such that

$$m_0^{-1/p_k} \|f_k^n\| < C \quad \text{for all } n, k \in N . \tag{3.2}$$

Since $\|m_0^{1/p_k}x_k\| \to 0$ as $k \to \infty$, there is a $k_0 \in N$ such that $\|m_0^{1/p_k}x_k\| < 1$ for all $k \geq k_0$. Since $0 < p_k \leq 1$ for all $k \in N$, we have

$$\|m_0^{1/p_k}x_k\| \leq \|m_0^{1/p_k}x_k\|^{p_k} \quad \text{for all } k \geq k_0. \tag{3.3}$$

It follows by (3.2) and (3.3) that

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\|m_0^{1/p_k}x_k\| &= \sum_{k=1}^{k_0}\|m_0^{1/p_k}x_k\| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\|m_0^{1/p_k}x_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0}\|m_0^{1/p_k}x_k\| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\|m_0^{1/p_k}x_k\|^{p_k} \\ &= K_1 + m_0\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\|x_k\|^{p_k} \\ &\leq K_1 + m_0\|x\| \end{aligned} \tag{3.4}$$

where $K_1 = \sum_{k=1}^{k_0}\|m_0^{1/p_k}x_k\|$.

For $n \in N$, by (3.2) and (3.4) we have

$$\begin{aligned}|A_n x| &= \Big|\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n\big(m_0^{-1/p_k}(m_0^{1/p_k}x_k)\big)\Big| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m_0^{-1/p_k}\|f_k^n\|.\|m_0^{1/p_k}x_k\| \\ &\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\|m_0^{1/p_k}x_k\| \\ &\leq C(K_1 + m_0\|x\|).\end{aligned}$$

where $K_1 = \sum_{k=1}^{k_0}\|m_0^{1/p_k}x_k\|$.

This implies that $\sup_n |A_n x| < \infty$, so that $Ax \in \ell_\infty$. This completes the proof. □

When $p_k = 1$ for all $k \in N$, we obtain the following result directly from Theorem 3.1.

Corollary 3.2 *For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (\ell(X), \ell_\infty)$ if and only if $\sup_{n,k}\|f_k^n\| < \infty$.*

Theorem 3.3 *Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of real numbers with $p_k \leq 1$ for all $k \in N$. Then for an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (\ell(X,p), \ell_\infty(q))$ if and only if for each $m \in N$, there is $r_m \in N$ such that $\sup_{n,k} r_m^{-1/p_k}m^{1/q_k}\|f_k^n\| < \infty$.*

Proof. Since $\ell_\infty(q) = \cap_{m=1}^{\infty}\ell_{\infty(m^{1/q_k})}$, it follows that

$$A \in (\ell(X,p), \ell_\infty(q)) \iff A \in (\ell(X,p), \ell_{\infty(m^{1/q_k})}) \text{ for all } m \in N.$$

For each $m \in N$, we can easily show that

$$A \in (\ell(X,p),\ \ell_{\infty(m^{1/p_k})}) \iff (m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X,p),\ \ell_\infty).$$

By Theorem 3.1 we obtain that for each $m \in N$,

$$(m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X,p),\ \ell_\infty) \iff \text{there is } r_m \in N \text{ such that } \sup_{n,k} r_m^{-1/p_k} m^{1/p_k} \|f_k^n\| < \infty.$$

This completes the proof. □

Theorem 3.4 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (M_0(X,p), \underline{\ell}_\infty(q))$ if and only if for each r and $s \in N$, $\sup_{n,k} s^{1/p_k} r^{1/p_k} \|f_k^n\| < \infty$.*

Proof. Since $M_0(X,p) = \cup_{m=1}^\infty \ell(X)_{(m^{-1/p_k})}$, we have

$$A \in (M_0(X,p), \underline{\ell}_\infty(q)) \iff A \in (\ell(X)_{(r^{-1/p_k})},\ \underline{\ell}_\infty(q)) \text{ for all } r \in N$$

and since $\underline{\ell}_\infty(q) = \cap_{s=1}^\infty \ell_{\infty(s^{1/p_k})}$, it follows that for $r \in N$,

$$A \in (\ell(X)_{(r^{-1/p_k})},\ \underline{\ell}_\infty(q)) \iff A \in (\ell(X)_{(r^{-1/p_k})},\ \ell_{\infty(s^{1/p_k})}) \text{ for all } s \in N.$$

For $r, s \in N$, we can easily show that

$$A \in (\ell(X)_{(r^{-1/p_k})},\ \ell_{\infty(s^{1/p_k})}) \iff \left(s^{1/p_k} r^{1/p_k} f_k^n\right)_{n,k} \in (\ell(X),\ \ell_\infty).$$

For $r, s \in N$, we obtain by Corollary 3.2

$$\left(s^{1/p_k} r^{1/p_k} f_k^n\right)_{n,k} \in (\ell(X),\ \ell_\infty) \iff \sup_{n,k} s^{1/p_k} r^{1/p_k} \|f_k^n\| < \infty.$$

Thus the theorem is proved. □

Acknowledgements

The author would like to thank the Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

References

K.-G. Grosse-Erdmann (1992), *The structure of the sequence spaces of Maddox*, Canad. J. Math. **44**, 298.

K.-G. Grosse-Erdmann (1993), *Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox*, J. of Math. Anal. Appl. **180**, 223.

I.J. Maddox (1967), *Spaces of strongly summable sequences*, Quart.J. Math. Oxford Ser. (2) **18**, 345.

I.J. Maddox (1968), *Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **64**, 335.

H. Nakano (1951), *Modulared sequence spaces*, Proc. Japan. Acad. **27**, 508.

S. Simons (1965), *The spaces $\ell(p_v)$ and $m(p_v)$*, Proc. London. Math. Soc. 15, 422.
S. Suantai (1999), *Matrix transformations between some vector-valued sequence spaces*, to appear in SEA. Bull. Math..
C.X. Wu and L. Liu (1993), *Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces*, SEA. Bull. Math. 17,1, 83.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.
Email : Scmti005@chiangmai.ac.th

ผลงานวิจัย 7

ชื่อเรื่อง Matrix Transformations on Nakano Vector - Valued Sequence Spaces

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้ส่งไปเพื่อตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติ ของประเทศ อาร์เจนตินา

Matrix Transformations on Nakano Vector-Valued Sequence Space

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this paper, we give the matrix characterizations from Nakano vector-valued sequence space $\ell(X,p)$ into ℓ_∞ , $\ell_\infty(q)$, bs and cs where $p=(p_k)$ and $q=(q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers such that $p_k>1$ for all $k\in N$.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A45.

1. INTRODUCTION

Let $(X,\|\cdot\|)$ be a Banach space and $p=(p_k)$ a bounded sequence of positive real numbers. We write $x=(x_k)$ with x_k in X for all $k\in N$. The X-valued sequence spaces $c_0(X,p)$, $c(X,p)$, $\ell_\infty(X,p)$, $\ell(X,p)$, and $f_\infty(X,p)$ are defined as

$$c_0(X,p)=\{x=(x_k):\lim_{k\to\infty}\|x_k\|^{p_k}=0\},$$
$$c(X,p)=\{x=(x_k):\lim_{k\to\infty}\|x_k-a\|^{p_k}=0 \text{ for some } a\in X\},$$
$$\ell_\infty(X,p)=\{x=(x_k):\sup_k \|x_k\|^{p_k}<\infty\},$$
$$\ell(X,p)=\{x=(x_k):\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^{p_k}<\infty\}$$
$$f_\infty(X,p)=\{x=(x_k):\lim_{k\to\infty}\|\delta_k x_k\|^{p_k}=0 \text{ for each } (\delta_k)\in c_0\}$$

When $X=K$, the scalar field of X, the corresponding spaces are written as $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$,$\ell(p)$, and $f_\infty(p)$, respectively. The spaces $c_0(p)$, $c(p)$ and $\ell_\infty(p)$ are known as the sequence spaces of Maddox. These spaces were first introduced and studied by Simons [6], Maddox [3, 4]. The space $\ell(p)$ was first defined by Nakano [5] and it is known as the Nakano sequence space and the space $\ell(X,p)$ is known as

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

the Nakano vector-valued sequence space. The spaces $\underline{\ell}_\infty(p)$ was first intriduced by Grosse-Erdmann [1] and he has investigated the structure of the spaces $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$ and $\underline{\ell}_\infty(p)$. In [1], he also showed that $\underline{\ell}_\infty(p) = \cap_{k=1}^{\infty} \ell_{\infty(a^{1/p_k})}$. Grosse-Erdmann [2] has given characterizations of infinite matrices between scalar-valued sequence spaces of Maddox. Wu and Liu [7] gave necessary and sufficient conditions for infinite matrices mapping from $c_0(X,p)$, $\ell_\infty(X,p)$ into $c_0(q)$ and $\ell_\infty(q)$.

2. Notation and Definitions

Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space, the space of all sequences in X is denoted by $W(X)$ and $\Phi(X)$ is denoted for the space of all finite sequences in X. When X is K, the scalar field of X , the corresponding spaces are written as w and Φ.

A sequence space in X is a linear subspace of $W(X)$. Let E be an X-valued sequence space. For $x \in E$ and $k \in N$, we write x_k stands for the k^{th} term of x. For $k \in N$ denote by e_k the sequence $(0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ with 1 in the k^{th} position and by e the sequence $(1, 1, 1, ...)$. For $x \in X$ and $k \in N$, let $e^k(x)$ be the sequence $(0, 0, ..., 0, x, 0, ...)$ with x in the k^{th} position and let $e(x)$ be the sequence $(x, x, x, ...)$. We call a sequence space E *normal* if $(t_k x_k) \in E$ for all $x = (x_k) \in E$ and $t_k \in K$ with $|t_k| = 1$ for all $t_k \in N$. For a fixed scalar sequence $\mu = (\mu_k)$ the sequence space E_μ is defined as

$$E_\mu = \{x \in W(X) : (\mu_k x_k) \in E\} .$$

Let $A = (f_k^n)$ with f_k^n in X', the topological dual of X. Suppose that E is a space of X-valued sequences and F a space of scalar-valued sequences. Then A is said to *map* E into F, written by $A : E \to F$ if for each $x = (x_k) \in E$, $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for each $n \in N$, and the sequence $Ax = (A_n(x)) \in F$. Let (E, F) denote for the set of all infinite matrices mapping from E into F.

Suppose that the X-valued sequence space E is endowed with some linear topology τ. Then E is called a *K-space* if for each $k \in N$ the k^{th} coordinate mapping $p_k : E \to X$, defined by $p_k(x) = x_k$, is continuous on E. If, in addition, (E, τ) is an Fréchet (Banach, LF-, LB-) space, then E is called an *FK-(BK-, LFK-, LBK-) space*. Now, suppose that E contains $\Phi(X)$. Then E is said to have *property AB* if the set $\{\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k) : n \in N\}$ is bounded in E for every $x = (x_k) \in E$. It is said to have *property AK* if $\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k) \to x$ in E as $n \to \infty$ for every $x = (x_k) \in E$. It has *property AD* if $\Phi(X)$ is dense in E.

The space $\ell(X,p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k}\right)^{1/M}$, where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$

In each of the space $\ell_\infty(X,p)$ and $c_0(X,p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k\|^{p_k/M}$, where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$. It is known that $c_0(X,p)$ is an FK-space with AK under the paranorm g defined as above and $\ell_\infty(X,p)$ is a complete LBK-space with AB. In $c(X,p)$ we consider the function

$g(x) = \sup_k \|x_k - a\|^{p_k/M} + \|a\|$ where a is the unique element in X with $x - e(a) \in c_0(X,p)$. Then g is a paranorm on $c(X,p)$ and $c(X,p)$ is an FK-space under this paranorm g.

The sequence spaces cs and bs are also mentioned in this paper where

$$cs = \{ x = (x_k) \ : \ \sum_{k=1}^{\infty} x_k \ \text{converges.} \}, \text{ with } \|x\| = \sup_n \ |\sum_{k=1}^{n} x_k|,$$

$$bs = \{ x = (x_k) \ : \ \sup_n \ |\sum_{k=1}^{n} x_k| < \infty \}, \text{ with } \ \|x\| = \sup_n \ |\sum_{k=1}^{n} x_k|$$

These two spaces are both BK-spaces, cs has the AK property and it is a closed subspace of bs.

3. Main Results

We first give a characterization of an infinite matrix mapping from $\ell(X,p)$ into ℓ_∞ when $p_k > 1$ for all $k \in N$.

Theorem 3.1 *Let $p = (p_k)$ be bounded sequences of positive real numbers with $p_k > 1$ and let $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ for all $k \in N$. For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (\ell(X,p), \ell_\infty)$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} m_0^{-(q_k-1)} < \infty$.*

Proof. Assume that $A \in (\ell(X,p), \ell_\infty)$. For each $k \in N$, we have $\sup_n |f_k^n(x)| < \infty$ for all $x \in X$ since $e^{(k)}(x) \in \ell(X,p)$ for all $x \in X$. It follows by the uniform bounded principle that there is an $M_k > 1$ such that $\sup_n \|f_k^n\| \le M_k$. Suppose that

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} m^{-(q_k-1)} = \infty \quad \text{for every } m \in N \tag{3.1}$$

First, we show that

$$\sup_n \sum_{j>k} \|f_j^n\|^{q_j} m^{-(q_j-1)} = \infty \quad \text{for all } k, m \in N \tag{3.2}$$

For this, if not, then there are k_0, $m_0 \in N$ and $K > 1$ such that

$$\sup_n \sum_{j>k_0} \|f_j^n\|^{q_j} m_0^{-(q_j-1)} < K$$

For $n \in N$, we have

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j^n\|^{q_j} m_0^{-(q_j-1)} &= \sum_{j=1}^{k_0} \|f_j^n\|^{q_j} m_0^{-(q_j-1)} + \sum_{j>k_0} \|f_j^n\|^{q_j} m_0^{-(q_j-1)} \\ &\le \sum_{j=1}^{k_0} M_j^{q_j} m_0^{-(q_j-1)} + K. \end{aligned}$$

This implies that $\sup_n \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j^n\|^{q_j} m_0^{-(q_j-1)} < \infty$, which contradicts (3.1), so (3.2) holds.

By (3.1) and (3.2) we can choose $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$, $m_1 < m_2 < \dots$, $m_i > 2^i$ and $n_i \to \infty$, such that for all $i \geq 1$

$$\sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} \|f_j^{n_i}\|^{q_j} m_i^{-(q_j-1)} > i$$

And we choose $x_j \in X$ with $\|x_j\| = 1$ such that for all $i \geq 1$

$$a_i = \sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} m_i^{-(q_j-1)} > i$$

and put $y = (y_j)$ where $y_j = m_i^{-(q_j-1)} |f_j^{n_i}(x_j)|^{(q_j-1)} a_i^{-1} x_j$ if $k_{i-1} < j \leq k_i$.
Thus

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^{p_j} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} a_i^{-p_j} m_i^{-p_j(q_j-1)} |f_j^{n_i}(x_j)|^{p_j(q_j-1)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} a_i^{-p_j} m_i^{-q_j} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{-1} m_i^{-1} \sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} m_i^{-(q_j-1)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1.
\end{aligned}$$

Hence $y = (y_j) \in \ell(X,p)$. Since $\ell(X,p)$ is normal, it follows by [7], Theorem 1.3

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |f_k^n(y_k)| < \infty \tag{3.3}$$

But we have for each $i \in N$,

$$\sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} |f_j^{n_i}(y_j)| = \sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} m_i^{-(q_j-1)} a_i^{-1} = 1$$

Thus $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j^{n_i}(y_j)| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k_{i-1}<j\leq k_i} |f_j^{n_i}(y_j)| = \infty$ which contradicts to (3.3), hence $A : \ell(X,p) \to \ell_\infty$.

Conversely, assume that the condition holds. Then there are $m_0 \in N$ and $K > 1$ such that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} m_0^{-(q_k-1)} < K \text{ for all } n \in N. \tag{3.4}$$

Let $x = (x_k) \in \ell(X,p)$. Note that for $a, b \geq 0$, we have

$$ab \leq a^{p_k} + b^{q_k}. \tag{3.5}$$

It follows by (3.4) and (3.5) that for $n \in N$,

$$\begin{aligned}
|\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)| &= |\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(m_0^{-1/p_k} \cdot m_0^{1/p_k} x_k)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} m_0^{-q_k/p_k} \|f_k^n\|^{q_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \|m_0^{1/p_k} x_k\|^{p_k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} m_0^{-(q_k-1)} \|f_k^n\|^{q_k} + m_0 \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} \\
&\leq K + m_0 \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k}.
\end{aligned}$$

Hence $\sup_n |\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)| < \infty$, so that $Ax \in \ell_\infty$. This completes the proof. □

Theorem 3.2 *Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers such that $p_k > 1$ for all $k \in N$ and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X,p), \ell_\infty(q))$ if and only if for each r and $s \in N$, $\sup_{n,k} s^{1/q_k} r^{-1/p_k} \|f_k^n\| < \infty$*

Proof. Since $\ell_\infty(p) = \cap_{r=1}^{\infty} \ell_{\infty(r^{1/p_k})}$, it follows that,

$$A \in (\ell(X,p), \ell_\infty(q)) \iff A \in (\ell(X,p), \ell_{\infty(r^{1/q_k})}) \text{ for all } r \in N$$

It is easily to show that for $r \in N$,

$$A \in (\ell(X,p), \ell_{\infty(r^{1/q_k})}) \iff (r^{1/q_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X,p), \ell_\infty).$$

For $r \in N$, we obtain by Theorem 3.1

$$(r^{1/q_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X,p), \ell_\infty) \iff \text{there is } m_r \in N \text{ such that } \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} r^{q_k/q_k} \|f_k^n\|^{q_k} m_r^{-(q_k-1)} < \infty.$$

Thus the theorem is proved. □

Theorem 3.3 *Let $p = (p_k)$ be bounded sequences of positive real numbers with $p_k > 1$ and let $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ for all $k \in N$. For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (\ell(X,p), bs)$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \|\sum_{i=1}^{n} f_k^i\|^{q_k} m_0^{-(q_k-1)} < \infty$.*

Proof. For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, we can easily show that

$$A \in (\ell(X,p), bs) \iff (\sum_{i=1}^{n} f_k^i)_{n,k} \in (\ell(X,p), \ell_\infty).$$

This implies by Theorem 3.1 that $A \in (\ell(X,p),\ bs)$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \| \sum_{i=1}^{n} f_k^i \|^{q_k} m_0^{-(q_k-1)} < \infty .$$

□

Theorem 3.4 *Let $p = (p_k)$ be bounded sequences of positive real numbers with $p_k > 1$ and let $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ for all $k \in N$. For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (\ell(X,p),\ cs)$ if and only if*

(1) there is $m_0 \in N$ such that $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \| \sum_{i=1}^{n} f_k^i \|^{q_k} m_0^{-(q_k-1)} < \infty$.

(2) For each $k \in N$ and $x \in X$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_k^n(x)$ converges.

Proof. The necessity is obtained by Theorem 3.1 and by the fact that $e^{(k)}(x) \in \ell(X,p)$ for every $k \in N$ and $x \in X$.

Now, suppose that (1) and (2) hold. By Theorem 3.3, we have $A : \ell(X,p) \to bs$. Let $x = (x_k) \in \ell(X,p)$. Since $\ell(X,p)$ has the AK property, we have $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} e^{(k)}(x_k)$ in $\ell(X,p)$. By Zeller's theorem, $A : \ell(X,p) \to bs$ is continuous. It implies that $Ax = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Ae^{(k)}(x_k)$. By (2), $Ae^{(k)}(x_k) \in cs$ for all $k \in N$. Since cs is a closed subspace of bs, it implies that $Ax \in cs$. Hence the proof is now complete.

□

Acknowledgements

The author would like to thank the Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

References

[1]. K.-G. Grosse-Erdmann, *The structure of the sequence spaces of Maddox*, Canad. J. Math. **44** (1992), 298-307.

[2]. K.-G. Grosse-Erdmann, *Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox*, J. of Math. Anal. Appl. **180** (1993), 223-238.

[3]. I.J. Maddox, *Spaces of strongly summable sequences*, Quart.J. Math. Oxford Ser. (2) **18** (1967), 345 -355.

[4]. I.J. Maddox, *Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **64** (1968), 335 - 340.

[5]. H. Nakano, *Modulared sequence spaces*, Proc. Japan. Acad. 27 (1951), 508-512.

[6]. S. Simons, *The spaces $\ell(p_v)$ and $m(p_v)$*, Proc. London. Math. Soc. **15** (1965), 422-436.

[7]. C.X. Wu and L. Liu, *Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces*, SEA. Bull. Math. **17**,1 (1993), 83-96.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.
Email : Somti305@chiangmai.ac.th

ผลงานวิจัย 8

ชื่อเรื่อง Matrix Transformations Between Some Vector - Valued Sequence Spaces

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้

Suthep Suantai

ผลงานนี้ได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (accepted) ในวารสารนานาชาติ ชื่อ SEA. Bull. Math. (Southeast Asian Bulletin of Mathematics)

On Matrix Transformations between Some Vector-Valued Sequence Spaces

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this paper, we give necessary and sufficient conditions for infinite matrices mapping from the Nakano vector-valued sequence space $\ell(X,p)$ into any BK-space and by using this result we obtain the matrix characterisations from $\ell(X,p)$ into the sequence spaces $\ell_\infty(Y)$, $c_0(Y,q)$, $c(Y)$,$\ell_s(Y)$, $E_r(Y)$, and $F_r(Y)$ where $p=(p_k)$ and $q=(q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers such that $p_k \le 1$ for all $k \in N$, $r \ge 0$, and $s \ge 1$.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A45.

1. INTRODUCTION

Let $(X,\|.\|)$ be a Banach space and $p=(p_k)$ a bounded sequence of positive real numbers. We write $x=(x_k)$ with x_k in X for all $k \in N$. The X-valued sequence spaces $c_0(X,p)$, $c(X,p)$, $\ell_\infty(X,p)$, $\ell(X,p)$, $E_r(X,p)$ and $F_r(X,p)$ are defined as

$$c_0(X,p)=\{x=(x_k): \lim_{k\to\infty}\|x_k\|^{p_k}=0\},$$

$$c(X,p)=\{x=(x_k): \lim_{k\to\infty}\|x_k-a\|^{p_k}=0 \text{ for some } a\in X\},$$

$$\ell_\infty(X,p)=\{x=(x_k): \sup_k \|x_k\|^{p_k}<\infty\},$$

$$\ell(X,p)=\{x=(x_k): \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^{p_k}<\infty\},$$

$$E_r(X,p)=\{x=(x_k): \sup_k \frac{\|x_k\|^{p_k}}{n^r}<\infty\},$$

$$F_r(X,p)=\{x=(x_k): \sum_{k=1}^{\infty}k^r\|x_k\|^{p_k}<\infty\}.$$

When $X=K$, the scalar field of X the corresponding spaces are written as $c_0(p)$,$c(p)$, $\ell_\infty(p)$, $\ell(p)$, $E_r(p)$ and $F_r(p)$, respectively and the first three spaces are known as *the sequence spaces of Maddox*.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

These spaces were first introduced and studied by Simons [8], Maddox [4, 5]. The space $\ell(p)$ was first introduced by Nakano [6]. When $p_k = 1$ for all $k \in N$, the space $E_r(p)$ and $F_r(p)$ are written as E_r and F_r, respectively. These two spaces were first definded by Cooke [1]. The structure of sequence spaces $c_0(p)$, $c(p)$, and $\ell_\infty(p)$ have been investigated by Grosse-Erdmann [2] and in [3] he has given characterisations of matrix transformations between the scalar-valued sequence spaces of Maddox. Wu and Liu [9] deal with the problem of characterisations of infinite matrices mapping from $c_0(X,p)$ and $\ell_\infty(X,p)$ into $c_0(q)$ and $\ell_\infty(q)$.

2. Notation and Definitions

Let $(X, \|.\|)$ and $(Y, \|.\|)$ be Banach spaces, the space of all continuous linear operators from X into Y is denoted by $\mathcal{L}(X,Y)$. Let $W(X)$ and $\Phi(X)$ denote for the space of all sequences in X and the space of all finite sequences in X. When $X = K$, the scalar filed of X, the corresponding spaces are written as W and Φ, respectively.

A sequence spaces in X is a linear subspace of $W(X)$. Let E be any X-valued sequence space. For $x \in E$ and $k \in N$, we write x_k stands for the k^{th} term of X. For $x \in X$ and $k \in N$, let $e^k(x)$ be the sequence $(0, 0, ..., 0, x, 0, ...)$ with x in the k^{th} position and let $e(x)$ be the sequence $(x, x, x, ...)$. For a fixed scalar sequence $\mu = (\mu_k)$ the sequence space E_μ is defined as

$$E_\mu = \{x \in W(X) : (\mu_k x_k) \in E\} .$$

Let $A = (T_k^n)$ with T_k^n in $\mathcal{L}(X,Y)$. Suppose that E is an X-valued sequence space and F an Y-valued sequence space. Then A is said to *map* E into F, written by $A : E \to F$ if for each $x = (x_k) \in E$, $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^n(x_k)$ converges for each $n \in N$, and the sequence $Ax = (A_n(x)) \in F$. Let (E,F) denote for the set of all infinite matrices mapping from E into F. If $u = (u_k)$ and $v = (v_k)$ are scalar sequences, let

$${}_u(E,F)_v = \{A = (T_k^n) : (u_n v_k T_k^n)_{n,k} \in (E,F)\}$$

If $u_k \neq 0$ for all $k \in N$, we write $u^{-1} = (\frac{1}{u^k})$.

Suppose that the X-valued sequence space E is endowed with some linear topology τ. Then E is called a *K-space* if for each $k \in N$ the k^{th} coordinate mapping $p_k : E \to X$, defined by $p_k(x) = x_k$, is continuous on E. If, in addition, (E,τ) is an Fréchet (Banach, LF-, LB-) space, then E is called an *FK-(BK-, LFK-, LBK-) space*. Now, suppose that E contains $\phi(X)$. Then E is said to have *property AB* if the set $\{\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k) : n \in N\}$ is bounded in E for every $x = (x_k) \in E$. It is said to have *property AK* if $\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k) \to x$ in E as $n \to \infty$ for every $x = (x_k) \in E$. It has *property AD* if $\Phi(X)$ is dense in E.

The space $\ell(p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k}\right)^{1/M}$, where $M = max\{1, \sup_k p_k\}$ (see [6]). The space $c_0(p)$ is an FK-space with AK, $c(p)$ is an FK-space and $\ell_\infty(p)$

is a complete LBK-space with AB (see [2, 6]). It is known that the space $\ell(X,p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_k^p\right)^{1/M}$, where $M = max\{1, \sup_k p_k\}$. In each of the space $\ell_\infty(X,p)$ and $c_0(X,p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k\|^{p_k/M}$, where $M = max\{1, \sup_k p_k\}$. It is known that $c_0(X,p)$ is an FK-space with AK under the paranorm g defined as above and $\ell_\infty(X,p)$ is a complete LBK-space with AB. In $c(X,p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k - a\|^{p_k/M} + \|a\|$ where a is the unique element in X with $x - e(a) \in c_0(X,p)$. Then g is a paranorm on $c(X,p)$ and $c(X,p)$ is an FK-space under this paranorm.

3. Some Auxiliary Results

In this section we give some useful results that can be used to reduce our problems into some simpler forms.

Proposition 3.1 *Let E and $E_n (n \in N)$ be X-valued sequence spaces, and F and $F_n (n \in N)$ Y-valued sequence spaces, and let u and v be sequences of real numbers with $u_k \neq 0$, $v_k \neq 0$ for all $k \in N$. Then we have*

(i) $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n, F) = \cap_{n=1}^{\infty} (E_n, F)$

(ii) $(E, \cap_{n=1}^{\infty} F_n) = \cap_{n=1}^{\infty} (E, F_n)$

(iii) $(E_u, F_v) = e(E,F)_{u^{-1}}$.

Proof. Assertions (i), (ii) and (iii) are immediately obtained directly by the definitions.

Proposition 3.2 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers and $r \geq 0$. Then*

(i) $F_r(X,p) = \ell(X,p)_{(n^r)}$.

(ii) $c_0(X,p) = \cap_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{1/p_k})}$.

Proof. Assertions (i) is obviously obtained by the definition.

To show (ii), let $x \in c_0(X,p)$. Then $\|x_k\|^{p_k} \to 0$ as $k \to \infty$. For each $n \in N$, let $\delta_k = \|x_k\|^{p_k} . n$ for all $k \in N$. We have that $\delta_k \to 0$ as $k \to \infty$; hence $\|x_k\| . n^{1/p_k} = \delta_k^{1/p_k} \to 0$ as $k \to \infty$ (because $p \in \ell_\infty$), so we have $x \in c_0(X)_{(n^{1/p_k})}$. Conversely, assume that $x \in \cap_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{1/p_k})}$. Then $\lim_{k \to \infty} \|x_k\| . n^{1/p_k} = 0$ for every $n \in N$. Then for $n \in N$ we have $\|x_k\|^{p_k} \leq \frac{1}{n}$ for large k, hence $x \in c_0(X,p)$. □

4. Main Results

We begin with giving the matrix characterisations mapping from $\ell(X,p)$ into a BK-space where $p_k \leq 1$ for all $k \in N$.

Theorem 4.1 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$ and let E be a Y-valued sequence space which is a BK-space. Then for an infinite matrix $A = (T_k^n)$, $A \in (\ell(X,p),\ E)$ if and only if*

(1) For each $k \in N$, $(T_k^n(x))_{n=1}^{\infty} \in E$ for all $x \in X$ and

(2) There exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x)\| \leq 1$$

Proof. Suppose that $A \in (\ell(X,p),\ E)$. Since $e^k(x) \in \ell(X,p)$ for all $x \in X$ and all $k \in N$, we have $Ae^k(x) \in E$, so (1) is obtained. Now, we shall show that the condition (2) is satisfied. By Zeller's theorem, we have that $A : \ell(X,p) \to E$ is continuous. Then there exists $m_0 \in N$ such that

$$x = (x_k) \in \ell(X,p),\ \ \|x\| \leq \frac{1}{m_0} \ \Rightarrow\ \|Ax\| \leq 1\,. \tag{4.1}$$

Let $x \in X$ with $\|x\| \leq 1$ and $k \in N$. We have $m_0^{-1/p_k} e^k(x) \in \ell(X,p)$ and $\|m_0^{-1/p_k} e^k(x)\| = \frac{1}{m_0}$. By (4.1) we have $\|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| \leq 1$. This implies that

$$\sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| \leq 1\,.$$

Hence (2) holds.

Conversely, assume that the conditions (1) and (2) hold. By (2), there is $m_0 \in N$ such that

$$\sup_k \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x)\| \leq 1 \tag{4.2}$$

for all $x \in X$ with $\|x\| \leq 1$.

This implies by (4.2) that

$$\sup_k \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x)\| \leq \|x\| \tag{4.3}$$

for all $x \in X$.

Let $x = (x_k) \in \ell(X,p)$. For each $k \in N$, we have by (4.3) that

$$\begin{aligned} \|Ae^k(x_k)\| &= \|A(m_0^{1/p_k}(m_0^{-1/p_k} e^k(x_k)))\| \\ &= m_0^{1/p_k} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x_k))\| \\ &\leq m_0^{1/p_k} \|x_k\|. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Since $(m_0^{1/p_k} x_k) \in \ell(X,p)$, so $(m_0^{1/p_k} x_k) \in c_0(X,p) \subseteq c_0(X)$, hence there is a $k_0 \in N$ such that $m_0\|x_k\| < 1$ for all $k > k_0$. Since $0 < p_k \leq 1$ for all $k \in N$, we have

$$m_0^{1/p_k} \|x_k\| \leq (m_0^{1/p_k} \|x_k\|)^{p_k} = m_0 \|x_k\|^{p_k} \tag{4.5}$$

for all $k > k_0$.

It follows by (4.4) and (4.5) that

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\|Ae^k(x_k)\| &\le \sum_{k=1}^{\infty} m_0^{1/p_k}\|x_k\| \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} m_0^{1/p_k}\|x_k\| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} m_0^{1/p_k}\|x_k\| \\ &\le \sum_{k=1}^{k_0} m_0^{1/p_k}\|x_k\| + m_0 \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\|x_k\|^{p_k} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Hence $\sum_{k=1}^{\infty} Ae^k(x_k)$ converges absolutely in E. Since E is Banach, $\sum_{k=1}^{\infty} Ae^k(x_k)$ converges in E. Let $y=(y_k)\in E$ be the sum of $\sum_{k=1}^{\infty} Ae^k(x_k)$. Since E is a K-space, we have that for each $m\in N$, p_m is continuous, so that

$$y_m = p_m(y) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} p_m(Ae^k(x_k)) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k^m(x_k)$$

This implies that Ax exists and $(Ax)_m = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^m(x_k) = y_m$, hence $Ax\in E$.

This completes the proof. □

When $p_k = 1$ for all $k\in N$, the following result are obtained directly from Theorem 4.1

Theorem 4.2 *Let E be a Y-valued sequence space which is a BK-space and $A=(T_k^n)$ an infinite matrix. Then $A\in(\ell(X),\ E)$ if and only if*

(1) For each $k\in N$, $(T_k^n(x))_{n=1}^{\infty}\in E$ for all $x\in X$ and

(2) $\sup_k \sup_{\|x\|\le 1}\|Ae^k(x)\| < \infty$. □

Theorem 4.3 *Let $p=(p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k\le 1$ for all $k\in N$ and let $A=(T_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A\in(\ell(X,p),\ \ell_\infty(Y))$ if and only if*

(1) For each $k\in N$, $\sup_n\|T_k^n\| < \infty$ and

(2) There exists $m_0\in N$ such that

$$\sup_{n,k} m_0^{-1/p_k}\|T_k^n\| \le 1$$

Proof. By Theorem 4.1, to prove this theorem we only show that the the conditions (1) and (2) are equivalent to the conditions (1') and (2'), respectively, where

(1') For each $k\in N$, $Ae^k(x)\in\ell_\infty(Y)$ for all $x\in X$ and

(2') There exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_k \sup_{\|x\| \le 1} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x)\| \le 1 .$$

The conditions (1) and (1') are equivalent by the uniform bounded principle.

If (2) holds, for $k, n \in N$ and $x \in X$ with $\|x\| \le 1$, we have $m_0^{-1/p_k}\|T_k^n x\| \le m_0^{-1/p_k}\|T_k^n\|.\|x\| \le m_0^{-1/p_k}\|T_k^n\| \le 1$, which implies

$$\sup_k \sup_{\|x\| \le 1} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x)\| = \sup_k \sup_{\|u\| \le 1} \sup_n m_0^{-1/p_k}\|T_k^n x\| \le 1 ,$$

so (2') is obtained.

Now, suppose that (2') holds. Then there exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_n m_0^{-1/p_k}\|T_k^n x\| = \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x)\| \le 1 \tag{4.6}$$

for all $k \in N$ and all $x \in N$ with $\|x\| \le 1$.

It follows by (4.6) that for each $n, k \in N$, $m_0^{-1/p_k}\|T_k^n\| \le 1$, so (2) is obtained. □

By using the same proof as in Theorem 4.3 we obtain :

Theorem 4.4 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k \le 1$ for all $k \in N$ and let $A = (T_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X,p),\ c_0(Y)$ if and only if*

(1) For each $k \in N$, $T_k^n(x) \to 0$ as $n \to \infty$ for all $x \in X$ and

(2) There exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_{n,k} m_0^{-1/p_k}\|T_k^n\| \le 1$$

Theorem 4.5 *Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers such that $p_k \le 1$ for all $k \in N$ and let $A = (T_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X,p),\ c_0(Y,q))$ if and only if*

(1) For each $k \in N$ and $m \in N$, $m^{1/p_k} T_k^n(x) \to 0$ as $n \to \infty$ for all $x \in X$ and

(2) For each $m \in N$, there exists $r_m \in N$ such that

$$\sup_{n,k} r_m^{-1/p_k} m^{1/p_k}\|T_k^n\| \le 1$$

Proof. By Proposition 3.1 (ii) and 3.2 (ii), we have

$$A \in (\ell(X,p),\ c_0(Y,q)) \iff A \in (\ell(X,p),\ c_0(Y)_{(m^{1/r_k})}) \text{ for all } m \in N.$$

It follows by Proposition 3.1 (iii) that for each $m \in N$,

$$A \in (\ell(X,p),\ c_0(Y)_{(m^{1/r_k})}) \iff \left(m^{1/q_k} T_k^n\right)_{n,k} \in (\ell(X,p),\ c_0(Y)) .$$

By Theorem 4.4, we obtain that

$$\left(m^{1/q_n} T_k^n\right)_{n,k} \in (\ell(X,p),\, c_0(Y)) \iff \text{(1) and (2) are satisfied.}$$

□

By applying Theorem 4.1 and using the same proof as in Theorem 4.3 we obtain :

Theorem 4.6 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$ and let $A = (T_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X,p),\, c(Y)$ if and only if*

(1) For each $k \in N$, $\lim_{n\to\infty} T_k^n(x)$ exists for all $x \in X$ and

(2) There exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_{n,k} m_0^{-1/p_k} \|T_k^n\| \leq 1$$

By applying Theorem 4.1 we also have the following result.

Theorem 4.7 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$, $s \geq 1$ and let $A = (T_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X,p),\, \ell_s(Y))$ if and only if*

(1) For each $k \in N$, $(T_k^n(x))_{n=1}^{\infty} \in \ell_s(Y)$ for all $x \in X$ and

(2) There exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_k \sup_{\|x\|\leq 1} \sum_{n=1}^{\infty} m_0^{s/p_k} \|T_k^n x\|^s \leq 1 .$$

Since $E_r(Y) = \ell_\infty(Y)_{(k^{-r})}$, the following result is obtained by Proposition 3.1 (iii) and Theorem 4.3.

Theorem 4.8 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$, $r \geq 0$ and let $A = (T_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X,p),\, E_r(Y))$ if and only if*

(1) For each $k \in N$, $\sup_n \|n^{-r} T_k^n\| < \infty$ and

(2) There exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_{n,k} m_0^{-1/p_k} n^{-r} \|T_k^n\| \leq 1$$

Since $F_r(Y) = \ell(Y)_{(k^{-r})}$, by applying Proposition 3.1 (iii) and Theorem 4.1 we obtain :

Theorem 4.9 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$, $r \geq 0$ and let $A = (T_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X,p),\, F_r(Y))$ if and only if*

(1) For each $k \in N$, $(n^r T_k^n(x))_{n=1}^{\infty} \in \ell(Y)$ for all $x \in X$ and

(2) There exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_k \sup_{\|x\| \le 1} \sum_{n=1}^{\infty} m_0^{-1/p_n} n^r \|T_k^1 x\| \le 1 .$$

Acknowledgements

The author would like to thank Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

References

[1]. R.G. Cooke, *Infinite Matrices and Sequence Spaces*, London : Macmillan, 1950.

[2]. K.-G. Grosse-Erdmann, *The structure of the sequence spaces of Maddox*, Canad. J. Math. **44** (1992), 298-307.

[3]. K.-G. Grosse-Erdmann, *Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox*, J. of Math. Anal. Appl. **180** (1993), 223-238.

[4]. I.J. Maddox, *Spaces of strongly summable sequences*, Quart.J. Math. Oxford Ser. (2) **18** (1967), 345 -355.

[5]. I.J. Maddox, *Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **64** (1968), 335 - 340.

[6]. I.J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne, 1970.

[7]. H. Nakano, *Modulared sequence spaces*, Proc. Japan. Acad. **27** (1951), 508-512.

[8]. S. Simons, *The spaces $\ell(p_\nu)$ and $m(p_\nu)$*, Proc. London. Math. Soc. **15** (1965), 422-436.

[9]. C.X. Wu and L. Liu, *Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces*, SEA. Bull. Math. **17,1** (1993), 83-90.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.
Email : Somti005@chiangmai.ac.th

ผลงานวิจัย 9

ชื่อเรื่อง Matrix Transformations of Some Vector - Valued Sequence Spaces

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้นำไปเสนอในที่ประชุมนานาชาติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง "Function Spaces V" ที่มหาวิทยาลัย Adam Mickeywicz ประเทศโปแลนด์ ระหว่างวันที่ 25 สิงหาคม - 3 กันยายน 2541

Matrix Transformations of Some Vector-Valued Sequence Spaces

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this paper, we give the matrix characterizations from vector-valued sequence spaces $\ell_\infty(X,p)$, and $c_0(X,p)$ into the Orlicz sequence space ℓ_M where $p=(p_k)$ is a bounded sequences of positive real numbers.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A45.

1. INTRODUCTION

Let $(X,\|.\|)$ be a real Banach space and $p=(p_k)$ a bounded sequence of positive real numbers. We write $x=(x_k)$ with x_k in X for all $k\in N$. The X-valued sequence spaces $c_0(X,p)$, $c(X,p)$, $\ell_\infty(X,p)$, $\ell(X,p)$, and $c_0(X,p)$ are defined as

$$c_0(X,p)=\{x=(x_k):\lim_{k\to\infty}\|x_k\|^{p_k}=0\},$$
$$c(X,p)=\{x=(x_k):\lim_{k\to\infty}\|x_k-a\|^{p_k}=0 \text{ for some } a\in X\},$$
$$\ell_\infty(X,p)=\{x=(x_k):\sup_k \|x_k\|^{p_k}<\infty\},$$
$$\ell(X,p)=\{x=(x_k):\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^{p_k}<\infty)$$
$$c_0(X,p)=\{x=(x_k):\sup_k\|\frac{x_k}{\delta_k}\|^{p_k}<\infty \text{ for some } (\delta_k)\in c_0 \text{ with } \delta_k\neq 0 \text{ for all } k\in N\}$$

When $X=R$, the corresponding spaces are written as $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$,$\ell(p)$, and $c_0(p)$ respectively. Each of the first four spaces are known as the sequence spaces of Maddox. These spaces were first introduced and studied by Simons [7], Maddox [4, 5], and Nakano [6]. In [2] the structure of the spaces $c_0(p)$, $c(p)$, and $\ell_\infty(p)$ have been investigated.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

Let $M : R \to [0, \infty)$ be convex, even, continuous and $M(u) = 0 \iff u = 0$. For a given real sequence $x = (x_n)$, define

$$\varrho_M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M(x_n) ,$$

$$\ell_M = \{x = (x_k) : \varrho_M(\lambda x) < \infty \text{ for some} \lambda > 0\}, \text{ and}$$

$$\|x\| = inf\{\lambda > 0 : \varrho_M(\frac{x}{\lambda}) \leq 1\} \text{ for } x \in \ell_M.$$

The sequence space $(\ell_M, \|.\|)$ is known as the Orlicz sequence space and it is a BK-space.

In this paper we consider the problem of characterizing those matrices that map an X-valued sequence spaces $\ell_\infty(X, p)$ and $c_0(X, p)$ into the Orlicz sequence spaces. Wu and Liu [8] deal with the problem of characterization those infinite matrices mapping from $c_0(X, p)$, $c(X, p)$, $\ell_\infty(X, p)$ and $\ell(X, p)$ into the scalar-sequence spaces of Maddox with some conditions on the sequences (p_k) and (q_k). Grosse-Erdmann [3] has given characterizations of matrix transformations between the scalar-valued sequence spaces of Maddox. Their characterizations are derived from functional analytic principles. Our approach here is different. We use a method of reduction introduced by Grosse-Erdmann [3]. In [2] it is pointed out that $c_0(p)$ is an echelon space of order 0 and that $\ell_\infty(p)$ is a co-echelon space of order ∞. In this paper we also show that $c_0(X, p)$ and $\ell_\infty(X, p)$ is a co-echelon space of order ∞. Therefore these spaces are made up of simpler spaces. We will use certain auxiliary results(Section 3) to reduce our problem to the characterisations of matrix mapping between much simpler spaces.

2. Notation and Definitions

2.1 Let $(X, \|.\|)$ be a real Banach space, the space of all sequences in X is denoted by $W(X)$ and $\Phi(X)$ is denoted for the space of all finite sequences in X. When $X = R$, the corresponding spaces are written as w and Φ.

A sequence space in X is a linear subspace of $W(X)$. Let E be any X-valued sequence space. For $x \in E$ and $k \in N$, we write x_k stands for the k^{th} term of x. For $k \in N$ denote by e_k the sequence $(0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ with 1 in the k^{th} position and by e the sequence $(1, 1, 1, ...)$. For $x \in X$ and $k \in N$, let $e^k(x)$ be the sequence $(0, 0, ..., 0, x, 0, ...)$ with x in the k^{th} position and let $e(x)$ be the sequence $(x, x, x, ...)$. For a fixed scalar sequence $\mu = (\mu_k)$ the sequence space E_μ is defined as

$$E_\mu = \{x \in W(X) : (\mu_k x_k) \in E\} .$$

The sequence space E is called *normal* if $x \in E$ and $y \in W(X)$ with $\|y_k\| \leq \|x_k\|$ for all $k \in N$ implies that $y \in E$.

2.2 Let $A = (f_k^n)$ with f_k^n in X', the topological dual of X. Suppose that E is a space of X-valued sequences and F a space of scalar-valued sequences. Then A is said to *map* E into F, written by $A : E \to F$ if for each $x = (x_k) \in E$, $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for each $n \in N$, and the sequence

$Ax = (A_n(x)) \in F$. Let (E,F) denote for the set of all infinite matrices mapping from E into F. If $u = (u_k)$ and $v = (v_k)$ are scalar sequences, let

$$ {}_u(E,F)_v = \{A = (f_k^n) : (u_n v_k f_k^n)_{n,k} \in (E,F)\ \} $$

If $u_k \neq 0$ for all $k \in N$, we write $u^{-1} = (\frac{1}{u_k})$.

2.3 Suppose that the X-valued sequence space E is endowed with some linear topology τ. Then E is called a *K-space* if for each $n \in N$ the n^{th} coordinate mapping $p_k : E \to X$, defined by $p_k(x) = x_k$, is continuous on E. If, in addition, (E,τ) is an Fréchet (Banach, LF-, LB-) space, then E is called an *FK-(BK-, LFK-, LBK-) space*. Now, suppose that E contains $\Phi(X)$. Then E is said to have *property AB* if the set $\{\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k) : n \in N\ \}$ is bounded in E for every $x = (x_k) \in E$. It is said to have *property AK* if $\sum_{k=1}^{n} e^k(x_k) \to x$ in E as $n \to \infty$ for every $x = (x_k) \in E$. It has *property AD* if $\Phi(X)$ is dense in E.

3. Some Auxiliary Results

In this section we give various useful results that can be used to reduce our problems into some simpler forms.

Proposition 3.1 *Let E and $E_n (n \in N)$ be X-valued sequence spaces, and F and $F_n (n \in N)$ scalar sequence spaces, and let u and v be sequences of real numbers with $u_k \neq 0$, $v_k \neq 0$ for all $k \in N$. Then we have*

(i) $\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n, F\right) = \cap_{n=1}^{\infty}(E_n, F)$

(ii) $(E, \cap_{n=1}^{\infty} F_n) = \cap_{n=1}^{\infty}(E, F_n)$

(iii) $(E_1 + E_2, F) = (E_1, F) \cap (E_2, F)$

(iv) $(E, F_1) = (E, F_2) \cap (\Phi(X), F_1)$ *if E is an FK-space with AD, F_2 is an FK-space and F_1 is a closed subspace of F_2.*

(v) $(E_u, F_v) = {}_u(E,F)_{v^{-1}}$.

Proof. Assertions (i), (ii), (iii), and (v) are immediate. To show (iv), assume that E is an FK-space with AD, F_2 is an FK-space and F_1 is a closed subspace of F_2. Clearly, $(E,F_1) \subseteq (E,F_2) \cap (\Phi(X),F_1)$ is always the case. Now, assume that $A = (f_k^n) \in (E,F_2) \cap (\phi(X),F_1)$ and $x \in E$. By Zeller's theorem, $A : E \to F_2$ is continuous. Since E has AD, there is a sequence $(y^{(n)})$ with $y^{(n)} \in \Phi(X)$ for all $n \in N$ such that $y^{(n)} \to x$ in E as $n \to \infty$. By the continuity of A, we have $Ay^{(n)} \to Ax$ in F_2 as $n \to \infty$. Since $Ay^{(n)} \in F_1$ for all $n \in N$ and F_1 is a closed subspace of F_2, we obtain that $Ax \in F_1$. Hence $A \in (E,F_1)$, so that $(E,F_2) \cap (\Phi(X),F_1) \subseteq (E,F_1)$. This complete the proof. □

Proposition 3.2 *Let $p = (p_k)$ be a bounded sequences of positive real numbers. Then*

(i) $c_0(X,p) = \cup_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{-1/p_k})}$. *Hence $c_0(X,p)$ is an echelon space of order 0.*

(ii) $\ell_\infty(X,p) = \cup_{n=1}^{\infty} \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$. *Hence* $\ell_\infty(X,p)$ *is a co-echelon space of order* ∞.

Proof. (i) Let $x = (x_k) \in \underline{c}_0(X,p)$. Then there is a sequence $(\delta_k) \in c_0$ with $\delta_k \neq 0$ for all $k \in N$ such that $\sup_k \|\frac{x_k}{\delta_k}\|^{p_k} < \infty$. Hence there exists $\alpha > 0$ such that $\|x_k\| \leq \alpha^{1/p_k}|\delta_k|$ for all $k \in N$. Choose $n_0 \in N$ with $n_0 > \alpha$. Then $\|x_k\| n_0^{-1/p_k} \leq (\frac{\alpha}{n_0})^{1/p_k}|\delta_k| < |\delta_k|$ which implies that $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| n_0^{-1/p_k} = 0$, hence $x = (x_k) \in c_0(X)_{(n^{-1/p_k})} \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{-1/p_k})}$. On the other hand, suppose that $x = (x_k) \in \cup_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{-1/p_k})}$. Then $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| n^{-1/p_k} = 0$ for some $n \in N$. Let $\delta = (\delta_k)$ be the sequence definded by

$$\delta_k = \begin{cases} \|x_k\| n^{-1/p_k} & \text{if } \|x_k\| \neq 0 \\ \frac{1}{k} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Clearly $(\delta_k) \in c_0$ and $\|\frac{x_k}{\delta_k}\|^{p_k} \leq n$ for all $k \in N$, hence $\sup_k \|\frac{x_k}{\delta_k}\|^{p_k} \leq n$, so $x = (x_k) \in \underline{c}_0(X,p)$.

Now we show (ii). If $x \in \ell_\infty(X,p)$, then there is some $n \in N$ with $\|x_k\|^{p_k} \leq n$ for all $k \in N$. Hence $\|x_k\| . n^{-1/p_k} \leq 1$ for all $k \in N$, so that $x \in \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$. On the other hand, if $x \in \cup_{n=1}^{\infty} \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$, then there are some $n \in N$ and $M > 1$ such that $\|x_k\| . n^{-1/p_k} \leq M$ for every $k \in N$. Then we have $\|x_k\|^{p_k} \leq n.M^{p_k} \leq n.M^{\alpha}$ for all $k \in N$, where $\alpha = \sup_k p_k$. Hence $x \in \ell_\infty(X,p)$ □

3. Main Results

We now turn to our main objective. We begin with giving characterisations of matrix transformations from $\ell_\infty(X)$ and $c_0(X)$ into ℓ_M. To do this we need a lemma.

Lemma 4.1 Let $E \in \{\ell_\infty(X), c_0(X)\}$ and (f_k) a sequence of continuous linear functionals on X. Then $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for every $x = (x_k) \in E$ if and only if $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$

Proof. If $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$, then for each $x = (x_k) \in E$, $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\| \leq \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$, so that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges.

Conversley, assume that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for every $x = (x_k) \in E$. Define $T : E \to R$ by $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$. Clearly, T is linear. For each $n \in N$, let $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \circ p_k$. Then $s_n \in E'$ since E is a K-space. It is clear that $s_n(x) \to Tx$ as $n \to \infty$ for all $x \in E$. It follows by Banach-Steinhaus theorem that $T \in E'$. Hence there is a positive real number α such that

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)\right| \leq \alpha \tag{4.1}$$

for all $x = (x_k) \in E$ with $\|x\| \leq 1$.

For each $x=(x_k)\in E$ with $\|x\|\le 1$, we can choose a real sequence (t_k) with $|t_k|=1$ for all $k\in N$ such that $f_k(t_kx_k)=|f_k(x_k)|$ for all $k\in N$. Clearly, $(t_kx_k)\in E$ and $\|(t_kx_k)\|\le 1$. It follows by (4.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x_k)|=\Big|\sum_{k=1}^{\infty}f_k(t_kx_k)\Big|\le\alpha \tag{4.2}$$

for all $x=(x_k)\in E$ with $\|x\|\le 1$.

It implies by (4.2) that

$$\sum_{k=1}^{n}|f_k(x_k)|\le\alpha \tag{4.3}$$

for all $n\in N$ and all $x_k\in X$ with $\|x_k\|\le 1$.

It follows from (4.3) that $\sum_{k=1}^{n}\|f_k\|\le\alpha$ for all $n\in N$, hence $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k\|\le\alpha$. This complete the proof. □

Theorem 4.2 *Let $A=(f_k^n)$ be an infinite matrix and $E\in\{\ell_\infty(X),c_0(X)\}$. Then $A\in(E,\ell_M)$ if and only if*

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k^n\|<\infty$ *for every* $n\in N$, *and*

(2) There exists $K>0$ *such that* $\sum_{n=1}^{\infty}M\big(\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{\infty}f_k^n(x_k)\big)\le 1$ *for every* $(x_k)\in E$ *with* $\|x_k\|\le 1$ *for all* $k\in N$.

Proof. Assume that $A\in(E,\ell_\infty)$. Then $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x_k)$ converges for all $x=(x_k)\in E$. Hence (1) holds by Lemma 4.1. Since E and ℓ_∞ are BK-spaces, by Zeller's theorem, A is continuous. It follows that there exists $K>0$ such that

$$\|Ax\|\le K \tag{4.4}$$

for every $x=(x_k)\in E$ with $\|x_k\|\le 1$ for all $k\in N$.

Then we have $\|A\big(\frac{1}{K}x\big)\|\le 1$ for all $x=(x_k)\in E$ with $\|x_k\|\le 1$ for all $k\in N$. By [1, Theorem 1.38(1)], we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}M\big(\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x_k)\big)\le 1$$

for every $x=(x_k)\in E$ with $\|x_k\|\le 1$ for all $k\in N$. Hence (2) holds.

Conversely, assume that (1) and (2) hold. By Lemma 4.1 , we have $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x_k)$ converges for every $x=(x_k)\in E$. Let $K>0$ be such that $\sum_{n=1}^{\infty}M\big(\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{\infty}f_k^n(x_k)\big)\le 1$ for every $x=(x_k)\in E$ with $\|x_k\|\le 1$ for all $k\in N$. Then for $x=(x_k)\in E$ and $x\ne 0$, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}M\big(\frac{1}{K\|x\|}\sum_{k=1}^{\infty}f_k^n(x_k)\big)=\sum_{n=1}^{\infty}M\big(\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{\infty}f_k^n\big(\frac{x_k}{\|x\|}\big)\big)\le 1$$

which implies that $Ax\in\ell_M$, hence we have $A\in(E,\ell_M)$. □

Corollary 4.3 *Let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. If $(\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|)_{n=1}^{\infty} \in \ell_M$, then $A \in (\ell_\infty(X), \ell_M)$.*

Proof. Assume that $(\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|)_{n=1}^{\infty} \in \ell_M$. Then there exists $\lambda > 0$ and $\alpha > 1$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} M(\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|) \leq \alpha$. Let $x = (x_k) \in \ell_\infty(X)$ and $\|x\| \leq 1$. Then $\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$, so $|f_k^n(x_k)| \leq \|f_k^n\|$ for all $n, k \in N$. Putting $K = \frac{\alpha}{\lambda}$. Since M is convex, even, and increasing on $[0, \infty)$, it follows that

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{\lambda}{\alpha} \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\lambda \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\right|\right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\lambda \sum_{k=1}^{\infty} |f_k^n(x_k)|\right) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|\right) \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

It follows by Theorem 4.2 that $A \in (\ell_\infty(X), \ell_M)$. □

Theorem 4.4 *Let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix and let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers. Then $A \in (\ell_\infty(X, p), \ell_M)$ if and only if*

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/p_k} \|f_k^n\| < \infty$ for all $m, n \in N$, and

(2) There exists $K > 0$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{\infty} m^{1/p_k} f_k^n(x_k)\right) \leq 1$$

for every sequence (x_k) with $\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$.

Proof. By Proposition 3.2(ii), we have $\ell_\infty(X, p) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \ell_\infty(X)_{(m^{-1/p_k})}$. It implies by Proposition 3.1(i) that

$$A \in (\ell_\infty(X, p), \ell_M) \Longleftrightarrow A \in (\ell_\infty(X)_{(m^{-1/p_k})}, \ell_M) \text{ for all } m \in N$$

By Proposition 3.1(v), we have

$$A \in (\ell_\infty(X)_{(m^{-1/p_k})}, \ell_M) \Longleftrightarrow (m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell_\infty(X), \ell_M)$$

We have by Theorem 4.2 that

$$(m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell_\infty(X), \ell_M) \Longleftrightarrow \text{ the conditions (1) and (2) hold.}$$

Hence the theorem is proved. □

Theorem 4.5 *Let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix and let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers. Then $A \in (c_0(X,p),\ \ell_M)$ if and only if*

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/p_k}\|f_k^n\| < \infty$ *for all* $m, n \in N$, *and*

(2) There exists $K > 0$ *such that*

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\Big(\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/p_k} f_k^n(x_k)\Big) \le 1$$

for every sequence $(x_k) \in c_0(X)$ *with* $\|x_k\| \le 1$ *for all* $k \in N$.

Proof. Since $c_0(X,p) = \cup_{m=1}^{\infty} c_0(X)_{(m^{-1/p_k})}$, we have by Proposition 3.1(i) that

$$A \in (c_0(X,p),\ \ell_M) \Longleftrightarrow A \in (c_0(X)_{(m^{-1/p_k})},\ \ell_M) \text{ for all } m \in N$$

By Proposition 3.1(v), we have

$$A \in (c_0(X)_{(m^{-1/p_k})},\ \ell_M) \Longleftrightarrow (m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (c_0(X),\ \ell_M)$$

It follows by Theorem 4.2 that

$$(m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell_\infty(X),\ \ell_M) \Longleftrightarrow \text{ the conditions (1) and (2) hold.}$$

Hence we have the theorem. □

Acknowledgements

The author would like to thank the Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

References

[1]. S. Chen, *Geometry of Orlicz spaces*, the Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, Warszawa, 1996.
[2]. K.-G. Grosse-Erdmann, *The structure of the sequence spaces of Maddox*, Canad. J. Math. 44 (1992), 298-307.
[3]. K.-G. Grosse-Erdmann, *Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox*, J. of Math. Anal. Appl. 180 (1993), 223-238.
[4]. I.J. Maddox, *Spaces of strongly summable sequences*, Quart.J. Math. Oxford Ser. (2) 18 (1967), 345 -355.
[5]. I.J. Maddox, *Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 64 (1968), 335 - 340.
[6]. H. Nakano, *Modulared sequence spaces*, Proc. Japan. Acad. 27 (1951), 508-512.
[7]. S. Simons, *The spaces $\ell(p_\nu)$ and $m(p_\nu)$*, Proc. London. Math. Soc. 15 (1965), 422-436.
[8]. C.X. Wu and L. Lin, *Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces*, SEA. Bull. Math. 17,1 (1993), 83-96.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.
Email : Scmt1005@chiangmai.ac.th

ผลงานวิจัย 10

ชื่อเรื่อง Superposition Operators on the Sequence Space

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้ได้นำเสนอในที่ประชุมนานาชาติทางคณิตศาสตร์ ที่จัดขึ้นที่ โรงแรม TAWANA RAMADA กรุงเทพฯ โดยภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ระหว่างวันที่ 8 - 10 ธันวาคม 2540

ผลงานนี้ ตีพิมพ์ใน Proceedings ของการประชุม หน้า 172 - 175

Superposition Operators on the Sequence Space $\ell(p)$

Suthep Suantai
Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand.

ABSTRACT

In this paper, we give a characterization of superposition operator acting from a sequence space of maddox $\ell(p)$ into the sequence space ℓ_1.

INTRODUCTION

Let $\mathbb{R}$ be the set of all real numbers, $\mathbb{N}$ the set of all natural numbers and S the set of all real sequences. For $n \in \mathbb{N}$, we denote the nth term of sequence x by x_n and write $x = (x_n)$.

Let $\ell_1 = \{x \in S \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}$ equipped with the norm $\|.\|_{\ell_1}$ defined by

$$\|x\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \quad \text{for every } x \in \ell_1$$

Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive numbers. The sequence space of Maddox $\ell(p)$ is defined as

$$\ell(p) = \{x \in S \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty\}.$$

This space was introduced by Maddox [2] and it is a paranormed sequence space with the paranorm $\|.\|$ defined as

$$\|(x_k)\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} \quad \text{where } M = \max\{1, \sup_k p_k\}.$$

For $r > 0$, let

$E_r = \{x \in S \mid \sup_k \frac{|x_k|}{k^r} < \infty\}$ equipped with the norm $\|.\|_{E_r}$ defined by

$$\|x\|_{E_r} = \sup_k \frac{|x_k|}{k^r} \quad \text{for every } x \in E_r.$$

$F_r = \{x \in S \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^r |x_k| < \infty\}$ equipped with the norm $\|.\|_{F_r}$ defined by

$$\|x\|_{F_r} = \sum_{k=1}^{\infty} k^r |x_k| \quad \text{for every } x \in F_r.$$

Let $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $P_f: S \to S$ be definded as

$$P_f(x) = (f(k, x_k)) \quad \text{for every } x \in S.$$

The operator P_f is called a ***superposition operator***. The superposition operator P_f is said to act from a sequence space X into a sequence space Y if $P_f(x) \in Y$ for all $x \in X$. Characterization of P_f on Orlice sequence spaces was given by J. Robert and I.V.

Shragin [3], [4]. Chew Tuan Seng [1] has given a characterization of P_f on w_0. S. Suantai [5] has given a characterization of P_f on the sequence spaces E_r and F_r. In this note, we use the same technics as in [5] to characterize P_f on the sequence space $\ell(p)$.

MATERIALS AND METHODS

The main purpose of this paper is the following theorem

Theorem 1. Let $f: N\times R \to R$ be such that for each $k \in N$, $f(k,.)$ is bounded on every bounded subset of R. A superposition operator acts from $\ell(p)$ into ℓ_1 if and only if there are $\alpha > 0$, $\beta > 0$ and a sequence $(c_k) \in \ell_1$ such that for each $k \in N$, $|f(k,t)| \le c_k + \alpha|t|^{p_k}$ whenever $|t|^{p_k} \le \beta$.

Proof For the proof of sufficiency suppose that there are $\alpha > 0$, $\beta > 0$ and a sequence $(c_k) \in \ell_1$ such that for each $k \in N$, $|f(k,t)| \le c_k + \alpha|t|^{p_k}$ whenever $|t|^{p_k} \le \beta$. Let $x = (x_k) \in \ell(p)$. Since $x_k \to 0$, there is an $i \in N$ such that $|x_k|^{p_k} \le \beta$ for all $k \ge i$. Then $|f(k,x_k)| \le c_k + \alpha|x_k|^{p_k}$ for all $k \ge i$. Hence

$\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| \le \sum_{k=1}^{\infty}c_k + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^{p_k} < \infty$. Therefore $P_f(x) = (f(k,x_k)) \in \ell_1$.

Suppose, conversely, that p_f acts from $\ell(p)$ into ℓ_1. For each $\alpha, \beta > 0$ and for each $k \in N$, we define

$$A(k,\alpha,\beta) = \{ t \in R \mid |t|^{p_k} \le \min\{\beta, \frac{|f(k,x)|}{\alpha}\} \} \quad \text{and}$$

$$B(k,\alpha,\beta) = \sup \{ |f(k,t)| \mid t \in A(k,\alpha,\beta) \}.$$

Then we have

$$|f(k,t)| \le B(k,\alpha,\beta) + \alpha|t|^{p_k} \text{ whenever } |t|^{p_k} \le \beta. \qquad (1)$$

We shall show that there are some $\alpha, \beta > 0$ such that $(B(k,\alpha,\beta)) \in \ell_1$. To prove this suppose that $(B(k,\alpha,\beta)) \notin \ell_1$ for all $\alpha, \beta > 0$. Then $\sum_{k=1}^{\infty}B(k,2^i,\frac{1}{2^i}) = \infty$ for all $i \in N$. Then there exists a sequence of integers (n_j) with $n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_j < \ldots$ such that n_1 is the least positive integer so that $\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_1}B(k,\alpha) > 1$. For each $j \in N$, we can choose $\varepsilon_j > 0$ such that

$$\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}B(k,\alpha) - (n_j - n_{j-1})\varepsilon_j > 1 \qquad (2)$$

For each $j \in N$ and for all $k \in N$ with $n_{j-1} + 1 \le k < n_j$, there exists $x_k \in A(k,2^j,\frac{1}{2^j})$ such that

$$|f(k,x_k)| \ge B(k,2^j,\frac{1}{2^j}) - \varepsilon_j \qquad (3)$$

Since $x_k \in A(k,2^j,\frac{1}{2^j})$, we get that

$$|x_k|^{p_k} \le \frac{1}{2^j} \text{ and } |x_k|^{p_k} \le \frac{|f(k,x_k)|}{2^j} \tag{4}$$

Since $\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j} B(k,2^j,\frac{1}{2^j}) \le 1$ and $|f(k,x_k)| \le B(k,2^j,\frac{1}{2^j})$, it follows from (4) that

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}|x_k|^{p_k} &\le \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j-1}|f(k,x_k)| + \frac{1}{2^j}\\ &\le \frac{1}{2^j}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j-1} B(k,2^j,\frac{1}{2^j}) + \frac{1}{2^j}\\ &\le \frac{1}{2^{j-1}}.\end{aligned}$$

Then $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^{p_k} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}|x_k|^{p_k} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{j-1}} = 2$, so that $(x_k) \in \ell(p)$. By assumption, we have that $P_f(x) = (f(k,x_k)) \in \ell_1$. But we have from (2) and (3) that for each $j \in N$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}|f(k,x_k)| &> \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k,2^j,\frac{1}{2^j}) - \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}\varepsilon_j\\ &- \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k,2^j,\frac{1}{2^j}) - (n_j - n_{j-1})\varepsilon_j\\ &< 1.\end{aligned}$$

Hence $\sum_{k=1}^{\infty}|f(k,x_k)| = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j}|f(k,x_k)| = \infty$ which is a contradiction because $(f(k,x_k)) \in \ell_1$. Thus there are $\alpha, \beta > 0$ such that $(B(k,\alpha,\beta)) \in \ell_1$. Putting $c_k = B(k,\alpha,\beta)$ for all $k \in N$, so $(c_k) \in \ell_1$ and we have from (1) that for each $k \in N$, $|f(k,t)| \le c_k + \alpha|t|^{p_k}$ whenever $|t|^{p_k} \le \beta$. ∎

If $f(k,.)$ is continuous for every $k \in N$, the following result is obtained directly from Theorem 1.

Corollary 2 Let $f: N \times R \to R$ be such that for each $k \in N$, $f(k,.)$ is continuous on R. A superposition operator P_f acts from $\ell(p)$ into ℓ_1 if and only if there are $\alpha > 0$, $\beta > 0$ and a sequence $(c_k) \in \ell_1$ such that for each $k \in N$,

$$|f(k,t)| \le c_k + \alpha|t|^{p_k} \text{ whenever } |t|^{p_k} \le \beta.$$

Example 3 Let $f: N\times R \to R$ be defined by

$$f(k,t) = \sqrt{t}\left(\frac{2^t}{k^3} + 3t^{2p_k}\sin kt\right)$$

Let $\alpha = 3$ and $\beta = 1$. Then for $t \in R$, $|t|^{p_k} \le \beta = 1$, we have $|f(k,t)| \le c_k + \alpha|t|^{p_k}$ where $c_k = \frac{2}{k^3}$ for all $k \in N$. It follows from Corollary 2 that the superposition operator P_f acts from $\ell(p)$ into ℓ_1.

Example 4. Let $p = (p_k)$ be a sequence with $p_k = \frac{1}{k}$ for all $k \in N$ and let $f: N\times R \to R$ be defined by $f(k,t) = t^{\frac{1}{k^2}}$. Let $\alpha, \beta > 0$ and $(c_k) \in \ell_1$. Choose $k_0 \in N$ be such that $c_{k_0} + \alpha\frac{1}{2^{k_0}} < \frac{1}{2}$ and $\frac{1}{2^{k_0}} \le \beta$. Let $t = \frac{1}{2^{k_0^2}}$.
Then we have

$$|f(k,t)| = \frac{1}{2} > c_{k_0} + \alpha\frac{1}{2^{k_0}} = c_{k_0} + \alpha|t|^{p_{k_0}}.$$

It follows from Corollary 2 that P_f does not acts from $\ell(p)$ into ℓ_1.

RESULTS AND DISCUSSION

We give the main results of this paper in Theorem 1 and Corollary 2. In Theorem 1 necessary and sufficient conditions for superposition operators acting from $\ell(p)$ into ℓ_1 are given when f(k, .) satisfies the condition that it is bounded for every bounded subset of R, but in Corollary 2 such conditions are given when f(k, .) is continuous on R for each $k \in N$. The last two examples give us the functions f(k, t) for which for each $k \in N$, f(k,.) is continuous and P_f acts from $\ell(p)$ into ℓ_1 in Example 3, but does not act from $\ell(p)$ into ℓ_1 in Example 4.

For solid sequence spaces, we can use the same technics as in Theorem 1 to characterize superposition operators acting from those spaces into ℓ_1

REFERENCES

1. Chew Tuan Seng, 1990). *Superposition operators on w_0 and W_0*, Comment. Math. (2) 29 149 - 153.

2. Maddox I. J., (1967). *Spaces of strongly summable sequences*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 18 , 345-355.

3. Robert J., (1964). *Continuité d'un opérateur nonlinéar sur certains espaces de suites*, C. R. Acad. Sci.Paris, Ser A 259, 1287 -1290.

4. Shragin I.V., (1976). *Condition for imbedding of classes and their consequences*, (Russian) Mat. Zametki (5) 20, 681 -692.

5. Suantai S., (1997). *Boundedness of superposition operators on E_r and F_r*, to be appear in Comment. Math. 37.

ภาคผนวก

1. สัญญารับทุนอุดหนุนการวิจัย ทุนริเริ่มโดยผู้อำนวนการ สกว.
2. เอกสารหมายเลข 1 โครงการ "การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์"
3. เอกสารหมายเลข 2 รายชื่อผู้ทำโครงการ
4. เอกสารหมายเลข 3 การจ่ายเงิน
5. เอกสารแสดงการตอบรับ (accepted) ให้ตีพิมพ์ผลงานในวารสารนานาชาติต่างๆ
6. หนังสือแสดงการเป็นวิทยากรรับเชิญ (Invited Speaker) ในการประชุมนานาชาติ

สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
ฝ่ายสนับสนุนการวิจัยเชิงวิชาการ
ทุนวิจัยริเริ่มโดยผู้อำนวยการ สกว.

สัญญารับทุนอุดหนุนการวิจัย

โครงการ "การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์"

สัญญานี้ทำขึ้น ณ สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) ตั้งอยู่ชั้น 19 อาคารมหานครยิบซั่ม 539/2 ถนนศรีอยุธยา แขวงถนนพญาไท เขตราชเทวี กรุงเทพมหานคร เมื่อวันที่ 1 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2540 ระหว่าง สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย โดย นายวิจารณ์ พานิช ซึ่งต่อไปในสัญญานี้เรียกว่า "ผู้ให้ทุน" ฝ่ายหนึ่ง กับ นายสุเทพ สวนใต้ อยู่ที่ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ต.ห้วยแก้ว อ.เมือง จ.เชียงใหม่ ซึ่งต่อไปในสัญญานี้เรียกว่า "ผู้รับทุน" อีกฝ่ายหนึ่ง คู่สัญญาได้ตกลงกันต่อไปนี้

ข้อ 1. ผู้ให้ทุนตกลงให้ทุนอุดหนุนโครงการวิจัยเรื่อง "การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์" ตามเอกสารแนบหมายเลข 1 ในวงเงิน 199,900 บาท (หนึ่งแสนเก้าหมื่นเก้าพันเก้าร้อยบาทถ้วน)

ข้อ 2. ผู้รับทุนรับจะดำเนินการวิจัยตามวิธีการที่เสนอไว้ให้ครบถ้วนสมบูรณ์ ตามเอกสารแนบหมายเลข 1 หากเกิดอุปสรรคไม่สามารถดำเนินการวิจัยได้ด้วยประการใดก็ดี ผู้รับทุนจะรีบรายงานให้ผู้ให้ทุนทราบทันที เพื่อพิจารณาหาทางแก้ไขหรือดำเนินการตามที่สมควรต่อไป

ข้อ 3. ผู้ให้ทุนจะจ่ายเงินให้กับผู้รับทุนตามกำหนดเวลาและเงื่อนไขในเอกสารแนบหมายเลข 3

ผู้รับทุนจะควบคุมการใช้เงินทุนให้เป็นไปอย่างประหยัด และตามหลักเกณฑ์ที่ผู้ให้ทุนกำหนด ตลอดจนเตรียมหลักฐานบัญชีการจ่ายเงิน เพื่อให้ผู้ให้ทุนตรวจสอบได้เมื่อสิ้นสุดสัญญา หรือตามที่ผู้ให้ทุนเห็นสมควร

ข้อ 4. ผู้รับทุนยินยอมให้ผู้ให้ทุน หรือผู้ที่ผู้ให้ทุนมอบหมาย เข้าในสถานที่ทำการของผู้รับทุน หรือสถานที่ที่ผู้รับทุนทำการวิจัยอยู่ เพื่อประโยชน์ในการติดตามและประเมินโครงการได้

ข้อ 5. ผู้รับทุนจะนำส่งผลงาน ซึ่งมีรูปแบบและเนื้อหาตามในเอกสารแนบหมายเลข 4 หรือตามเกณฑ์ที่ผู้ให้ทุนกำหนด ภายในเวลาดังนี้

5.1 รายงานความก้าวหน้าฉบับที่ 1 และรายงานการเงิน ภายใน 6 เดือนหลังจากลงนามในสัญญา

5.2 รายงานความก้าวหน้าฉบับที่ 2 และรายงานการเงิน ภายใน 12 เดือนหลังจากลงนามในสัญญา

5.3 รายงานฉบับสมบูรณ์และรายงานการเงิน ภายใน 18 เดือนหลังจากลงนามในสัญญา

5.4 การเสนอผลงานด้วยวาจา (oral presentation) ตามวันเวลาที่ผู้ให้ทุนจะกำหนด

ในรายงานฉบับสมบูรณ์ให้มีบทคัดย่อ (abstract) ทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษ และนอกจากฉบับพิมพ์เป็นเล่มแล้วให้ส่งเป็น diskette ด้วย

ข้อ 6. การระงับงานชั่วคราวและการบอกเลิกสัญญา

6.1 ผู้ให้ทุนมีสิทธิระงับงานทั้งหมดหรือแต่บางส่วน หรือบอกเลิกสัญญานี้ได้ ถ้าผู้ให้ทุนเห็นว่าผู้รับทุนมิได้ปฏิบัติงานด้วยความชำนาญ หรือด้วยความเอาใจใส่ในวิชาชีพเท่าที่พึงคาดหมายได้จากนักวิจัยในระดับเดียวกัน หรือมิได้ปฏิบัติตามข้อสัญญาและเงื่อนไขที่กำหนดในสัญญานี้ หรือเมื่อผู้ให้ทุนเห็นว่าควรจะยุติการดำเนินการในโครงการ ในกรณีเช่นนี้ ผู้ให้ทุนจะมีหนังสือแจ้งให้ผู้รับทุนทราบ และการระงับงานหรือการบอกเลิกสัญญาดังกล่าว จะมีผลในเวลาไม่น้อยกว่า 60 วัน นับจากวันที่ผู้รับทุนได้รับหนังสือบอกกล่าวนั้น

6.2 ผู้รับทุนมีสิทธิบอกเลิกสัญญาได้ ถ้าผู้ให้ทุนมิได้ปฏิบัติหน้าที่ความรับผิดชอบตามที่ระบุไว้ในสัญญานี้ ในกรณีเช่นนี้ ผู้รับทุนจะต้องมีหนังสือถึงผู้ให้ทุน ระบุรายละเอียดถึงสาเหตุและเหตุผลในการขอเลิกสัญญา ถ้าผู้ให้ทุนมิได้ดำเนินการแก้ไขให้เป็นที่พอใจภายในระยะเวลา 30 วัน นับแต่วันที่ได้รับหนังสือบอกกล่าวนั้น ผู้รับทุนมีสิทธิบอกเลิกสัญญา

6.3 เมื่อมีการบอกเลิกสัญญาตามข้อ 6.1 หรือ 6.2 ผู้ให้ทุนจะจ่ายเงินให้แก่ผู้รับทุนตามส่วนที่เป็นธรรมและเหมาะสมเฉพาะตามที่กำหนดในเอกสารแนบหมายเลข 3 และผู้รับทุนจะต้องคืนเครื่องมือเครื่องใช้และวัสดุอุปกรณ์ทั้งหลายที่ผู้รับทุนได้จัดซื้อด้วยทุนทรัพย์ของผู้ให้ทุน ให้แก่ผู้ให้ทุนทั้งหมด

ข้อ 7. ผู้รับทุนยอมรับว่ามิได้เป็นตัวแทนหรือกระทำการแทนผู้ให้ทุนแต่อย่างใดในการปฏิบัติงานตามสัญญานี้ และผู้รับทุนจะป้องกันมิให้ผู้ให้ทุนต้องรับผิดชอบในบรรดาสิทธิเรียกร้องค่าเสียหาย ค่าใช้จ่าย หรือราคารวมตลอดถึงการเรียกร้องโดยบุคคลที่สามอันเกิดจากความผิดพลาดหรือการละเว้นไม่กระทำการของผู้รับทุน หรือของลูกจ้างของผู้รับทุน

ข้อ 8. ผู้รับทุนจะต้องรับผิดต่อการละเมิดบทบัญญัติแห่งกฎหมาย หรือสิทธิใดๆในสิทธิบัตรหรือลิขสิทธิ์ของบุคคลที่สาม ซึ่งผู้รับทุนนำมาใช้ในการปฏิบัติงานตามสัญญานี้

ข้อ9. ในการเผยแพร่ข้อมูล ข่าวสารอันเกี่ยวกับผลงานของโครงการ ในสิ่งพิมพ์ใดหรือสื่อใด ในแต่ละครั้ง ผู้รับทุนต้องระบุข้อความว่า "ได้รับทุนอุดหนุนจาก สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย" หรือ แจ้งข้อความดังกล่าวด้วยทุกครั้ง

สัญญานี้ทำขึ้น 2 ฉบับ มีข้อความตรงกัน คู่สัญญาได้อ่านและเข้าใจข้อความในสัญญานี้โดยตลอดแล้ว จึงได้ลงลายมือชื่อไว้เป็นสำคัญต่อหน้าพยานแต่ละฝ่าย และต่างเก็บไว้ฝ่ายละฉบับ

ลงชื่อ ..... ผู้ให้ทุน

(นายวิจารณ์ พานิช)

ผู้อำนวยการสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

ลงชื่อ ..... ผู้รับทุน

(นายสุเทพ สวนใต้)

ลงชื่อ ..... พยานฝ่ายรับทุน

(นายอมร วาสนาจิตร)

ลงชื่อ ..... พยานฝ่ายให้ทุน

(นายวุฒิพงศ์ เตชะสำรวยจิน)

สัญญาเลขที่ DIG 8/02/2540

โครงการ "การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์"

Title: Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces

สรุปข้อเสนอโครงการ

ผู้เสนอโครงการ	:	ดร. สุเทพ สวนใต้ (Mr. Suthep Suantai) ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ถ.หัวยแก้ว อ.เมือง จ.เชียงใหม่ 50200 โทรศัพท์: 053-221699 ต่อ 3327 ที่บ้าน 053-804254 หรือ 01-9523530 e-mail: scmti005@chiangmai.ac.th
หน่วยงานที่ร่วมมือ	:	-
ระยะเวลาดำเนินการ	:	18 เดือน
งบประมาณที่เสนอ	:	199,900 บาท

ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

การแปลงเมทริกซ์ (matrix transformations) ของปริภูมิลำดับ (sequence spaces) นับเป็นปัญหาที่สำคัญปัญหาหนึ่งที่มีการทำวิจัยกันมากในสาขาของ Sequence Spaces การศึกษาปัญหาดังกล่าว เป็นการศึกษาหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอให้กับเมทริกซ์อนันต์ ที่ส่ง(map)จากปริภูมิลำดับหนึ่งไปยังปริภูมิลำดับหนึ่ง ในอดีตปริภูมิลำดับที่นักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่สนใจศึกษานั้นเป็นปริภูมิลำดับที่เกิดมาจากการประยุกต์ในสาขาวิชาอื่นๆ ซึ่งเป็นปริภูมิลำดับของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน แต่เนื่องด้วยปัญหาต่างๆ ในยุคปัจจุบันมีความซับซ้อนมากขึ้นการแก้ปัญหาโดยวิธีเก่าๆจึงไม่สามารถใช้ได้เช่นเดียวกันกับปัญหาของการศึกษาการแปลงเมทริกซ์ ในปัจจุบันปริภูมิลำดับที่ศึกษากันส่วนใหญ่ก็ได้ขยายจากปริภูมิลำดับของจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อนไปเป็นปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์(vector-valued sequence spaces) และ เมทริกซ์อนันต์ที่ศึกษานั้นก็ขยายจากเมทริกซ์ของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนไปเป็นเมทริกซ์อนันต์ของตัวดำเนินการ (operator) เพื่อความสะดวกในการกล่าวถึงที่มาและปัญหาตลอดจนวัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้เราจะให้สัญลักษณ์และนิยามบางอย่างที่จำเป็นดังต่อไปนี้

ให้ X และ Y เป็นปริภูมิลำดับของจำนวนจริงหรือของจำนวนเชิงซ้อน และ $A = (a_{nk})$ เป็นเมทริกซ์ของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน และให้ $x = (x_n) \in X$ ถ้า $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ทุกๆ $n \in N$ แล้ว จะกล่าวว่า Ax หาค่าได้ และจะให้ $Ax = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \right)_{n=1}^{\infty}$ จะกล่าวว่า A ส่ง(map) X ไปยัง Y ซึ่งเขียนแทนด้วย $A : X \to Y$ ถ้า Ax หาค่าได้ และ $Ax \in Y$ ทุกๆ $x \in X$

ให้ E เป็นปริภูมิบานาค(Banach space) และให้ X เป็นปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ใน E (E-valued sequence spaces) และ Y เป็นปริภูมิลำดับของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน สำหรับเมทริกซ์อนันต์ $A = (f_k^n)$ เมื่อ $f_k^n \in E'$ (the continuous dual of E) และ ถ้า $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ ลู่เข้าทุกๆ $n \in N$ จะกล่าวว่า

Ax หาค่าได้ และจะให้ $Ax = (\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k))_{n=1}^{\infty}$ จะกล่าวว่า A ส่ง X ไปยัง Y ถ้า Ax หาค่าได้ และ $Ax \in Y$ ทุกๆ $x \in X$

ให้ $p = (p_k)$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก Bulut และ Caker ได้นิยามปริภูมิลำดับของลำดับจำนวนจริง $\ell(p,s)$ ดังนี้

$$\ell(p,s) = \{(x_k) \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}|x_k|^{p_k} < \infty\}$$

และ ได้พาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : \ell(p,s) \to c$ และ $A : \ell(p,s) \to \ell_\infty$ เมื่อ ℓ_∞ และ c เป็นปริภูมิลำดับที่มีขอบเขตและลำดับสู่เข้านักคณิตศาสตร์หลายคนได้ศึกษาการแปลงเมทริกซ์ระหว่างปริภูมิลำดับของจำนวนจริง $c_0(p)$, $\ell(p)$ และ $\ell_\infty(p)$

ในปี ค.ศ. 1993 C.X. Wu และ L. Liu นักคณิตศาสตร์ชาวจีนได้นิยามปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $c_0(E,p)$, $\ell(E,p)$ และ $\ell_\infty(E,p)$ ดังต่อไปนี้

$$c_0(E,p) = \{(x_n) \mid \|x\|^{p_k} \to 0\}$$

$$\ell(E,p) = \{(x) \mid \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

$$\ell_\infty(E,p) = \{(x) \mid \sup_k \|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

และได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : X \to Y$ ในกรณีที่ $X = c_0(E,p), \ell(E,p)$ และ $\ell_\infty(E,p)$ และ $Y = c_0$, $c_0(q)$, $_\infty(q)$ ซึ่งงานของ C.X. Wu และ L.Liu เป็นงานที่คลุมงานที่นักคณิตศาสตร์หลายคนได้ทำไว้

ในปี ค.ศ. 1995 Mursaleen นักคณิตศาสตร์ชาวอินเดียได้ศึกษาการแปลงเมทริกซ์จากปริภูมิ $_\ell(p,s)$ ไปยังปริภูมิ f, f_∞ เมื่อ

$$f = \{x \in \ell_\infty \mid \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} x_{k+n} = L, \quad \}$$

และ

$$f_\infty = \{x \mid \sup_{m,n} |\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} x_{k+n}| < \infty\}$$

ถ้าเรานิยามปริภูมิลำดับ $\ell(E,p,s)$, $\ell_\infty(E,p,s)$ และ $c_0(E,p,s)$ เมื่อ $s \geq 0$ ดังนี้

$$\ell(E,p,s) = \{(x_k) \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}\|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

$$\ell_\infty(E,p,s) = \{(x_k) \mid \sup_k k^{-s}\|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

$$c_0(E,p,s) = \{(x_k) \mid \frac{\|x_k\|^{p_k}}{k^s} \to 0\}$$

ปริภูมิทั้งสาม เป็นปริภูมิที่คลุมปริภูมิที่ C.X. Wu และ L. Liu นิยามไว้ ดังนั้นการศึกษาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : X \to Y$ เมื่อ $X = \ell(E,p,s)$, $\ell_\infty(E,p,s)$ และ $Y = \ell_\infty$, c, c_0, $\ell_\infty(q)$, $c_0(q)$ f, f_∞ จะเป็นงานวิจัยที่คลุมงานวิจัยที่นักคณิตศาสตร์หลายๆคนที่ทำไว้ในอดีต เช่นงานวิจัยของ C.X. Wu และ L. Liu (1993) และ งานของ Mursaleen (1995)

วัตถุประสงค์

1. หาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : X \to Y$ เมื่อ $X = \ell(E,p,s)$ และ $\ell_\infty(E,p,s)$ และ $Y = c_0$, ℓ_∞, c, $c_0(q)$, $\ell_\infty(q)$, $c(q)$ เมื่อ $q = (q_k) \in c_0$

2 หาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : X \to Y$ เมื่อ $X = \ell(E,p,s)$ และ $\ell_\infty(E,p,s)$ และ Y = bs , bv และ cs

3 หาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : X \to Y$ เมื่อ $X = \ell(E,p,s)$ และ $\ell_\infty(E,p,s)$ และ Y = f และ f_∞

4 หาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : \ell(E,p,s) \to \ell(p,s)$ และ $A : \ell_\infty(E,p,s) \to \ell_\infty(p,s)$

5 หาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A : c_0(E,p,s) \to c_0$ และ $A : c_0(E,p,s) \to \ell_\infty(q)$ เมื่อ $q = (q_k)$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก

ระเบียบวิธีวิจัย

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการแปลงของปริภูมิลำดับ จากเอกสารที่เกี่ยวข้อง

2. ศึกษาผลงานวิจัยเกี่ยวกับการแปลงเมทริกซ์ระหว่างปริภูมิลำดับ $c_0(p), \ell(p), \ell_\infty(p)$ จากเอกสารที่เกี่ยวข้อง

3. ศึกษางานวิจัยของ Bulut และ Cakar [2] ที่เกี่ยวกับการแปลงเมทริกซ์ของปริภูมิลำดับ $\ell(p,s)$ ไปยัง ℓ_∞และ c

4. ศึกษาคุณสมบัติต่างๆของปริภูมิ f และ f_∞ จากเอกสารที่เกี่ยวข้องตลอดจนศึกษา ลักษณะของเมทริกซ์ A ที่ส่ง $\ell(p,s)$ ไปยัง f และ f_∞

5. ศึกษาคุณสมบัติต่างๆเกี่ยวกับปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $c_0(E,p), \ell(E,p)$ และ $\ell_\infty(E,p)$ จากเอกสารที่เกี่ยวข้อง และศึกษาการแปลงเมทริกซ์จากปริภูมิ เหล่านั้นไปยังปริภูมิ ลำดับ c_0, $c_0(q)$, $\ell_\infty, \ell_\infty(q)$

6. เดินทางไปค้นคว้าหาเอกสารที่เกี่ยวข้องเพิ่มเติมยังห้องสมุดคณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ทุกๆเดือน และเดินทางไปห้องสมุดภาควิชาคณิตศาสตร์ ของ International University of Singapore ซึ่งเป็นแหล่งที่มีวารสารเกี่ยวกับเรื่องที่ทำวิจัยเป็นจำนวนมาก เพื่อค้นคว้าเอกสารและพบกับ Professor Dr. Lee Peng Yee เพื่อแลกเปลี่ยนความคิดและ แนวทาง การทำวิจัย

7. โดยการผสมผสานความรู้พื้นฐานที่ได้จากการศึกษาตามระเบียบวิธีตามข้อ 1 - 6 และประสบการณ์ที่ได้จากการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและปรึกษากับนักวิจัยชาวต่างประเทศที่มีการเชื่อมโยงการทำวิจัยกันอยู่ หาแนวทางในการคิดค้นทฤษฎีใหม่ๆที่เกี่ยวกับการหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ไปยังปริภูมิลำดับของจำนวนจริงตามวัตถุประสงค์ที่ให้ไว้ในข้อ 1 - 5

แผนการดำเนินงานวิจัยตลอดโครงการในแต่ละช่วง 6 เดือน

กิจกรรมและขั้นตอนดำเนินงาน	ช่วง 6 เดือนแรกของการวิจัย					
	1	2	3	4	5	6
1. ศึกษาความรู้พื้นฐานจากเอกสาร [4] - [7]	←→					
2. ศึกษาในเรื่องการแปลงเมทริกซ์ ระหว่างปริภูมิลำดับ $\ell(p)$, $\ell_\infty(p)$ และ $c_0(p)$ จาก [3] [8] [9]	←→					
3. ศึกษาพื้นฐานของการแปลงเมทริกซ์จาก $\ell(p,s)$ ไปยัง ℓ_∞, c จากเอกสาร [2]		←→				
4.ศึกษาคุณสมบัติของปริภูมิ f, f_∞ และ การแปลงเมทริกซ์จาก $\ell(p,s)$ ไปยัง f, f_∞ จากเอกสาร [10]			←→			
5.ศึกษาการแปลงเมทริกซ์ของปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ จากเอกสาร [12] และอื่นๆ				←→		
6. เดินทางไปหาเอกสารที่เกี่ยวข้อง					←→	
7.ศึกษาคุณสมบัติต่างๆของปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ที่สนใจคือ $\ell(E,p,s)$ $\ell_\infty(E,p,s)$, $c_0(E,p,s)$					←→	←→
8. รายงานความคืบหน้าของโครงการ						←→

กิจกรรมและขั้นตอนดำเนินงาน	ช่วง 6 เดือนที่สองของการวิจัย					
	1	2	3	4	5	6
9. สร้างทฤษฎีสำหรับหาเงื่อนไขและหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งระหว่างปริภูมิลำดับที่กำหนดตามวัตถุประสงค์ 4.1	←	→				
10. สร้างทฤษฎีสำหรับหาเงื่อนไขและหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งระหว่างปริภูมิลำดับที่กำหนดตามวัตถุประสงค์ 4.2			←	→		
11. สร้างทฤษฎีสำหรับหาเงื่อนไขและหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งระหว่างปริภูมิลำดับที่กำหนดตามวัตถุประสงค์ 4.3					←	→
12. ส่งผลงานบางส่วนตีพิมพ์						↔
13. รายงานความคืบหน้าของโครงการ						↔

กิจกรรมและขั้นตอนดำเนินงาน	ช่วง 6 เดือนสุดท้ายของการวิจัย					
	1	2	3	4	5	6
14. สร้างทฤษฎีสำหรับหาเงื่อนไขและหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งระหว่างปริภูมิลำดับที่กำหนดตามวัตถุประสงค์ 4.4	←	→	→			
15. สร้างทฤษฎีสำหรับหาเงื่อนไขและหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งระหว่างปริภูมิลำดับที่กำหนดตามวัตถุประสงค์ 4.5			←	→	→	
16. รายงานผลก้าวหน้างานวิจัย						↔
17. ตีพิมพ์ผลงานวิจัย						↔
18. รายงานผลการวิจัยฉบับสมบูรณ์						←

ผลประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.ได้ความรู้และทฤษฎีบทใหม่ๆที่เกี่ยวกับการแปลงเมทริกซ์ของปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ไปยังปริภูมิลำดับของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

2.ได้ทฤษฎีบทที่เป็นองค์ความรู้ใหม่ในการศึกษาสมบัติที่สำคัญต่างๆของปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ เพื่อเป็นเครื่องมือที่จะศึกษาวิจัยในระดับต่อๆไป

3. ได้แนวคิดในการหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ซึ่งส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ที่เราศึกษาเพื่อเป็นแนวทางของผู้ที่สนใจในการนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

ชื่อหัวข้อเรื่องและชื่อวารสารวิชาการระดับนานาชาติ ที่คาดว่าจะได้รับการตีพิมพ์

เรื่อง " Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces "

วารสาร " Comment . Math. Univ. Carolinae" หรือ " Journal of Mathematical Analysis and Applications" หรือ "Bulletin of The Calcutta Mathematical Society "

สัญญาเลขที่ DIG 8/02/2540

โครงการ "การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์"

Title: Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces

รายชื่อผู้ทำงานในโครงการ

---

1. นายสุเทพ สวนไต้ (Mr. Suthep Suantai) หัวหน้าโครงการ

สัญญาเลขที่ DIG 8/02/2540
โครงการ "การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์"
Title: Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces
การจ่ายเงิน

งบประมาณรวม	ในวงเงิน 199,900.00 บาท (หนึ่งแสนเก้าหมื่นเก้าพันเก้าร้อยบาทถ้วน)
งวดที่ 1	จำนวน 70,300.00 บาท (เจ็ดหมื่นสามร้อยบาทถ้วน) จ่ายภายใน 30 วัน หลังจากวันลงนามในสัญญา
งวดที่ 2	จำนวน 74,300.00 บาท (เจ็ดหมื่นสี่พันสามร้อยบาทถ้วน) จ่ายภายใน 30 วัน หลังจากผู้ให้ทุนเห็นชอบกับรายงานความก้าวหน้า 6 เดือน และรายงานการเงินแล้ว
งวดที่ 3	จำนวน 7300.00 บาท (เจ็ดพันสามร้อยบาทถ้วน) จ่ายภายใน 30 วัน หลังจากผู้ให้ทุนเห็นชอบกับรายงานความก้าวหน้า 12 เดือน และรายงานการเงินแล้ว
งวดที่ 4	จำนวน 48,000.00 บาท (สี่หมื่นแปดพันบาทถ้วน) เป็นค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ 6 เดือนสุดท้าย จ่ายเมื่อผู้ให้ทุนเห็นชอบกับรายงานฉบับสุดท้าย และรายงานการเงินฉบับสุดท้ายแล้ว

สัญญาเลขที่ DIG 8/02/2540
โครงการ "การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์"
Title: Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces
การจ่ายเงิน

ชื่อบัญชีโครงการ		MTSP
เลขที่บัญชี		521-1-38422-9
ธนาคาร		กรุงไทย สาขา ถ. สุเทพ
ผู้มีอำนาจสั่งจ่าย	1.	นายสุเทพ สวนใต้
	2.	นางสรกมล กันทรี
	3.	นางนิภา สุชาติสกุลศรี
	4.	.....

เงื่อนไขการสั่งจ่าย คือ ลงนามไม่น้อยกว่าสองในสาม โดยหนึ่งในสองต้องเป็นนายสุเทพ สวนใต้

ลงนาม.....
(นายสุเทพ สวนใต้)
ผู้รับทุน

Southeast Asian Bulletin of Mathematics

Editorial Office : Professor K.P. Shum
Department of Mathematics
The Chinese University of Hong Kong
Shatin, N.T., Hong Kong.
Tel: (852) 2609 7988

E-mail address: KPShum@math.cuhk.edu.hk Fax: (852) 2603 5154

Southeast Asian Bulletin of Mathematics
Springer-Verlag

Ref no: 2617

Professor Suthep Suantai
Dept. of Math.
Faculty of Science,
Chiang Mai University
Chiang Mai, Thailand
(50200)

27th November, 1998

Dear Professor Suantai:

I am pleased to inform you that your paper "Matrix transformations between some vector-valued sequence spaces" had been recommended to publish in our journal for publication. Please revise your paper according to the referee report. Please sent it to us with the diskette and sign your fax/e-mail address in the copyright form and sent it to us as well.

Yours sincerely,

Professor K.P. Shum
Editor
C/O Dept of Math.,
Chinese University of Hong Kong.
Hong Kong, Shatin, N.T.

Referee's report on
Matrix transformations between some vector-valued sequence spaces
By Suthep Suantai

The paper provides an interesting extension of Zeller theory to the vector-valued sequence spaces. The main result is Theorem 4.1, and the proof is correct. There are two typing errors in the proof. In the line after eq (4.1) ‖...‖=1/m_0 should read ‖...‖≤ 1/m_0. Also in the line after eq (4.4) m_0‖x_k‖<1 should read m_0^{1/p_k}‖x_k‖<1. Other theorems are consequences of Theorem 4.1.
The author should check other typing errors. For example, p.2 line 3 definded should read defined; line 21 denote for the set should read denote the set; and line 23 A=(f_k^n) should read A=(T_k^n).

Page 3 line 5 g(x)=sup...+‖all is not a paranorm. A paranorm must satisfy ‖0‖=0 whereas g(a)=0 and not necessarily g(0).

I recommend the paper for publication in the Bulletin.

BULLETIN OF THE
CALCUTTA MATHEMATICAL SOCIETY
AE 374, SECTOR 1, SALT LAKE CITY, CALCUTTA-700 064 (INDIA)

To

Dr. Suthep Suantai
Dept. of Mathematics
Chiang Mai University
Thailand

Reference : Paper No. 122/98 Date 09-07-1998

Title of the paper. Scalar Multiplicativity Factors for near Quasi-Normas

Name of the author/s. Suthep Suantai

Dear Sir/Madam,

☐ Received with thanks the above mentioned paper No ..... Further information will follow in due course. Please quote your above paper No. in future communication.

☐ Please send First copy. The paper will be processed only after the receipt of the first copy.

☐ Please send the duplicate copy of the paper and the diagrams (duly traced by a draughtsman) in Chinese ink if they are not already sent. Please note that authour is charged the cost of printing the paper, if accepted, at the rate of Rs. 50 or $ 15 per printed page. The author is also charged for cost of preparing the blocks of his or her paper.

☐ The above paper is with the referee. You will be informed of the position as soon as the comments of the referee will be received.

☐ The above paper has been fomally accepted for reading in a general meeting of the society and will apear in the Bulletin only if it is approved in the said meeting.

☑ The above paper has been formally accepted for publication and will appear in the Bulletin in due course. Referee's comments awlosed

☐ The above paper has not been recommended by our referee for publication in our Bulletin. It is returned with the referee's comments.

☐ The peper in the present form has not been recommended by the referee for publication in the Bulletin. The paper is returned with the referee's comments by separate post. The referee's comments is sent to you. If you agree with the comments, please modify the above paper in the light of referee's comments and send the modified peper with a copy of the previous version of your papers in duplicate for further consideration.

Thank you for your interest in our Bulletin.

Yours faithfully.

EDITORIAL SECRETARY

TELEX : 021-5380 BID IN
FAX : (0091) 33-376200

PHONE : 37-8882
GRAM : CALMATHSOC

CALCUTTA MATHEMATICAL SOCIETY

AE-374, SECTOR I, SALT LAKE CITY, CALCUTTA-700064, INDIA

To

Dr. Suthep Suantai
Department of Mathematics
Faculty of Science
Chiang Mai University
Chiang Mai 50200, Thailand

Invoice No. CMS/V/90/98/483
Date 17. 7. 1998

DESCRIPTION	(U. S. A.) $	C.
Page charges for the paper entitled as ' Scalar Multiplicativity Factors for near Quasi-Normas' - 12 pages	360	00
Likely to appear in the Bulletin, Vol. 90 No. 4 (1998)		
Air-Mail for 50 reprints Delivery and Registered Postage	12	00
Bank Charge	3	00
* Less Commission @ 10%		
TOTAL	375	00

(U. S. A.) Dollar Three hundred and seventyfive only Cent nil only

M. R. Adhikari
Secretary
Calcutta Mathematical Society

N. B.—Bank charges to be included if payment is made on any Bank outside Calcutta.
** Allowed to the Book-sellers only for a complete Volume.*
Mode of Payment : by D/D or A/c. Payee cheque drawn in favour of Calcutta Mathematical Society.

Southeast Asian Mathematical Society

awards this

Certificate of Appreciation

to

SUTHEP SUANTAI

in grateful recognition for services rendered as

Invited Speaker

during the

International Mathematics Conference in honor of Professor Lee Peng Yee on his 60th Birthday

held at Ateneo de Manila University
on December 16 – 17, 1998

Polly Wee Sy
POLLY WEE SY
President, SEAMS

รายงานการเงิน

งวดที่ 1. ได้รับจาก สกว. จำนวน 70,300 บาท ได้เบิกใช้ในการดำเนินการวิจัยตามกิจกรรมที่เสนอไปจำนวน 70,048.50 บาท โดยจำแนกตามหมวดต่าง ๆ ดังนี้

รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
ก. หมวดค่าตอบแทน	
1. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน มิถุนายน 22540	9,000
2. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน กรกฎาคม 22540	9,000
3. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน สิงหาคม 22540	9,000
4. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน กันยายน 22540	9,000
5. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน ตุลาคม 22540	9,000
6. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน พฤศจิกายน 22540	9,000
7. ค่าพิมพ์บทความ 3 บทความ	2,000
รวม	56,000
ข. หมวดค่าวัสดุ	
1. ค่าถ่ายเอกสาร - เข้าเล่ม 2 เล่ม (ใบเสร็จเลขที่ 0016 จรัสธุรกิจ 12/6/40)	137
2. กระดาษ A4 10 รีม และ ถ่ายเอกสารเข้าเล่ม 6 เล่ม (ใบเสร็จเลขที่ 0163 จรัสธุรกิจ 25/6/40)	2,700
3. ค่าถ่ายเอกสาร - เข้าเล่ม 1 เล่ม (ใบเสร็จเลขที่ 0571 ปุเปี้กีอปปี้ 3/7/40)	310
4. ถ่ายเอกสาร - เข้าเล่ม 5 เล่ม และ กระดาษปกรายงานสี 2 รีม (ใบเสร็จเลขที่ 0164 จรัสธุรกิจ 20/8/40)	2,200
5. กระดาษปกรายงานสี 2 รีม ค่าถ่ายเอกสาร - เข้าเล่ม 7 เล่ม (ใบเสร็จเลขที่ 0531 จรัสธุรกิจ 30/8/40)	2,000

6. ค่าถ่ายเอกสาร ค่าเข้มเล่ม (ใบเสร็จเลขที่ 7422 จรัสธุรกิจ 10 /11 / 40)	380
7. ค่าถ่ายเอกสาร (ใบเสร็จเลขที่ 0697 1 /12/40 จรัสธุรกิจ)	60
8. ค่าถ่ายเอกสารลงแผ่นใส (ใบเสร็จเลขที่ 0927 6/12/40 จรัสธุรกิจ)	200
9. ค่าหนังสือ 3 รายการตามใบเสร็จเลขที่ 02-03870 ของ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 8/ 12 /40	1,580.50
10. ค่าซื้อบทความ จาก Uncover (ใบเสร็จเลขที่ 485404 25 / 12 / 40)	1,500
11. ค่าทำรายงานผลความกาวหน้า 6 เดือนแรก	500
รวม	11,567.50
ค. หมวดค่าใช้สอย 1. ค่าเครื่องบินกรุงเทพ - เชียงใหม่ และภาษีสนามบิน 2. ค่าไปรษณียภัณฑ์ลงทะเบียนระหว่างประเทศ	 1,680 801
รวม	2,481
รวมรายจ่าย	70,048.50
สรุปเงินคงเหลือจากงวดที่ 1 จำนวน 70,300 - 70,048.5 0	251.50

เงินงวดที่ 2. ได้รับจาก สกว. จำนวน 74,300 บาท ได้เบิกใช้ในการดำเนินการวิจัยตามกิจกรรมที่เสนอไป โดยจำแนกตามหมวดต่าง ๆ ดังนี้

รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
ก. หมวดค่าตอบแทน	
1. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน ธันวาคม 2540	9,000
2. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน มกราคม 2541	9,000
3. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน กุมภาพันธ์ 2541	9,000
4. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน มีนาคม 2541	9,000
5. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน เมษายน 2541	9,000
6. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน พฤษภาคม 2541	9,000
7. ค่าพิมพ์บทความ 1 บทความ ด้วย AMS-TEX	1,000
8. ค่าตอบแทนคนทำบัญชี	3,000
รวม	58,000
ข. หมวดค่าวัสดุ	
1. ค่าถ่ายเอกสาร และเข้าปก (หนังสือ 6 เล่ม)	2,380
2. กระดาษ A4 10 รีม	1,200
3. กระดาษปกรายงานสี 2 รีม	400
4. ค่าถ่ายเอกสารลงแผ่นใส	500
5. ค่าซื้อบทความ จาก Uncover	513
6. ค่าหนังสือ INTERNET VISUAL	295
7. ค่าหมึกพิมพ์ INKJET ค่า Diskette 4 กล่อง	1,930
9. ค่าถ่ายเอกสาร และเข้าเล่ม (หนังสือ 5 เล่ม)	1,850
9. ค่าทำรายงานผลความการหน้า 6 เดือนแรก	2,000
รวม	11,068

รวมรายจ่ายของงวดที่ 2	69,068
เงินคงเหลืองวดที่ 2 74,300 - 69,068	5,232
เงินคงเหลือที่ยกมาจากงวดที่ 1	251.50
รวมเงินคงเหลือจากงวดที่ 1 และ งวดที่ 2	5,483.50

งวดที่ 3. เงินงวดที่ 3 ที่ได้รับจาก สกว. จำนวน 7,300 บาท ได้เบิกไปใช้ดังรายการต่อไปนี้

รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
ก. หมวดค่าตอบแทน	
- ค่าพิมพ์ผลงานวิจัย 6 เรื่อง	1,800
- ค่าพิมพ์รายงานฉบับสมบูรณ์	1,500
ข. หมวดค่าใช้สอย	
- ค่าถ่ายเอกสาร รายงานฉบับสมบูรณ์ จำนวน 20 เล่ม และ ค่าเย็บเล่ม และเข้าปก	1,600
- ค่าส่ง papers ไปตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ (ค่าไปรณีย์ ค่าธรรมเนียม ค่าส่ง)	1,102
- ค่าพิมพ์ผลงาน และ ค่า Reprints ผลงาน จำนวน 50 ชุด ที่ถูกเรียกเก็บจากวารสาร Bull. Cal. Math. Soc.	15,909.25
รวมรายจ่ายงวดที่ 3	21,911.25
<u>รายรับ</u>	
1. เงินจากงวดที่ 3	7,300
2. เงินเหลือจากงวด 1 และ 2	5,483.50
3. ดอกเบี้ยเงินฝากจากบัญชี	2,409.99
รวมรับ	15,193.45
<u>สรุป</u> ได้จ่ายเงินเกินงบประมาณที่ได้รับจำนวน 21,911.25 - 15,193.45	6,717.80

ลงชื่อ ..... ฝ่ายบัญชี
(นาง สกาวลี กันทวี)

ลงชื่อ ..... หัวหน้าโครงการ
(ผศ ดร.สุเทพ สวนใต้)

THIS BOOK SHOULD BE PRODUCED FOR DEPOSIT OR WITHDRAWAL
PLEASE NOTIFY US OF ANY CHANGE OF ADDRESS OR LOSS OF PASSBOOK

คำเตือน

ต้องนำสมุดคู่ฝากเงินนี้มาทุกครั้งที่มีการฝากหรือถอน
โปรดแจ้งธนาคาร เมื่อสมุดคู่ฝากสูญหายหรือเปลี่ยนที่อยู่ใหม่

521-1-38422-9

สำนักงาน สุขุมวิท
Office

บัญชีเลขที่ 521-1-38422-9
Account No.

ชื่อบัญชี
Account Name

MTSP ไทย นายสุเทพ สวนใต้

ประเภทบัญชี S/A

ลายมือชื่อผู้มีอำนาจลงนาม
Authorized Signature

จำนวน 2/0639,600,000

รหัส 62-101

วัน เดือน ปี D M Y	สาขาที่ DEP no	ประเภท CODE	ถอน WITHDRAWAL	ฝาก DEPOSIT	คงเหลือ BALANCE	ประทับสมุดคู่ฝาก STAMP
						ยกมาจากหน้า
24.04.40	521	B/F			***********0.00	61581
24.04.40	521	DCA		*******1,000.00	*******1,000.00	34105 2
28.05.40	813	TTS		*******70,300.00	********71,300.00	61001 3
22.06.40	521	INP		**********258.60	********71,558.60	800000 4
07.07.40	521	WCA	*******15,000.00		********56,558.60	33506 5
07.07.40	521	WCAE		*******15,000.00	********71,558.60	33506 6
08.07.40	521	WCA	*******12,000.00		********59,558.60	34105 7
21.08.40	521	WCA	*******12,000.00		********47,558.60	33802 8
27.10.40	521	WCA	*******12,000.00		********35,558.60	33802 9
20.12.40	521	INP		********1,210.42	********36,769.02	800000 10
30.12.40	521	WCA	*******34,300.00		*********2,469.02	34105 12
04.02.41	813	TTS		*******74,300.00	********76,769.02	61005 1
06.03.41	521	WCA	*******18,000.00		********58,769.02	33504 4
09.04.41	521	WCA	*******18,000.00		********40,769.02	33503 5
06.05.41	521	WCA	*******18,000.00		********22,769.02	33503 6
20.06.41	521	INP		**********540.97	********23,309.99	800000 7
21.07.41	521	WCA	*******10,000.00		*********13,309.99	33503 8
24.07.41	013	TTS		********7,300.00	********21,009.99	31705 9
24.07.41	813	TTSR	********7,300.00		*********13,709.99	31705 10
24.07.41	013	TTS		********7,300.00	********21,009.99	80209 11

ดำอธิบาย "ประเภท" โปรดดูปกหลังด้านใน
FOR INTERPRETATION OF "CODE" ABOVE, PLEASE SEE INSIDE BACK COVER.

วัน เดือน ปี D M Y	สำนักงาน DEP no	ที่รหัส CODE	ถอน WITHDRAWAL	ฝาก DEPOSIT	คงเหลือ BALANCE	ผู้ทำรายการ STAFF ID.
						บัญชีเลขที่
02.10.41	521	MCA	********10,000.00		**********11,009.99	34204 1
16.10.41	521	MCA	********10,000.00		***********1,009.99	30705 2
						3
						4
						5
						6
						7
						8
						9
						10
						11
						12
						13
						14
						15
						16
						17
						18
						19
						20
						21

สำหรับรายการ "รหัส" โปรดดูด้านหลังสมุดบัญชีนี้

FOR INTERPRETATION OF "CODE" ABOVE, PLEASE SEE INSIDE BACK COVER