

รายงานฉบับสมบูรณ์โครงการวิจัย

ทุนวิจัยทุนริเริ่มโดยผู้อำนวยการ สกว.

โครงการ การแปลงเมทริกซ์บน ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์

Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces

ผศ..ดร.สุเทพ ลวนใต้

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

scmti005@chiangmai.ac.th

DIU 4080002

รายงานฉบับสมบูรณ์โครงการวิจัย

ทุนวิจัยทุนริเริ่มโดยผู้อำนวยการ สกว.

โครงการ การแปลงเมทริกซ์บน ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์

Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces

โดย

ผศ..ดร.สุเทพ สอนได้

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

scmti005@chiangmai.ac.th

DI 4080002

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	2
บทคัดย่อภาษาไทย	3
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	9
บทนำ	16
วิธีการทดลอง	19
ผลการทดลอง	20
บทวิจารณ์	25
หนังสืออ้างอิง	27
ผลงานที่ได้รับ	28
ภาคผนวก	39
รายงานการเงิน	40

กิตติกรรมประกาศ

ผู้ดำเนินการวิจัยขอขอบคุณสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย ที่ให้การสนับสนุนเงินทุนสำหรับการดำเนินการวิจัยตลอดโครงการนี้ และต้องขอขอบคุณ ศาสตราจารย์ วิรุฬห์ สายคณิต และ กองทุนคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ได้ให้การสนับสนุนการเดินทางไปเสนอผลงานที่ประเทศโปแลนด์ ตลอดจนต้องขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์ และ สำนักบริการคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ให้บริการคอมพิวเตอร์ และ ความสะดวกสบายในการใช้บริการอินเทอร์เน็ต และ บริการอื่น ๆ ที่จำเป็นในการดำเนินการวิจัย จนทำให้โครงการดำเนินการลุล่วงไปด้วยดี

ผลงานวิจัยที่ 1

ชื่อเรื่อง แฟคเตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์สำหรับเนียร์ควอไซ-นอร์ม

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เนียร์ควอไซ-นอร์ม q ได้ถูกนิยามบนปริภูมิเวกเตอร์จริงหรือเวกเตอร์เชิงซ้อน เราใช้นิยามของการมีขอบเขตเช่นเดียวกับในปริภูมิเวกเตอร์เชิงทอพอโลยี เพื่อศึกษาเซตที่มีขอบเขตในปริภูมิเนียร์ควอไซ-นอร์ม และ เราศึกษาแฟคเตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์สำหรับเนียร์ควอไซ-นอร์ม q นั่นคือ ค่าคงที่ $\lambda > 0$ ที่ $q(\lambda x) \leq \lambda \|\alpha\| q(x)$ สำหรับบาง $r > 0$ และ ทุกสเกลาร์ α และ ทุกๆ $x \in X$ เงื่อนไขที่จำเป็น และ เพียงพอสำหรับ เนียร์ควอไซ-นอร์ม ที่มีแฟคเตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์ได้ถูกศึกษา นอกจากนั้นเราได้แสดงด้วยว่าภายใต้เงื่อนไขใดที่เนียร์ควอไซ-นอร์มธรรมชาติบนปริภูมิลำดับของแมคดอกซ์ $\ell_\infty(p)$ และ $\ell(p)$ มีแฟคเตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์

คำหลัก เนียร์ควอไซ-นอร์ม แฟคเตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์

ผลงานวิจัยที่ 2

ชื่อเรื่อง แฟคเตอร์ผลคูณสำหรับ พี-เซมินอร์ม

บทคัดย่อ ให้ p เป็นพี-เซมินอร์มนบนพีชคณิต A เราศึกษาแฟคเตอร์ผลคูณ และ แฟคเตอร์กำลังสองสำหรับ p นั่นคือ ค่าคงที่ $\mu > 0$ และ $\lambda > 0$ ซึ่ง $S(xy) \leq \mu S(x)S(y)$ และ $S(x^2) \leq \lambda S(x)^2$ สำหรับทุกๆ $x, y \in A$ เราได้ให้ ลักษณะของแฟคเตอร์เหล่านี้ในเทอมของเคอร์เนลของ p และเรายังแสดงด้วยว่า พี-นอร์มนบนพีชคณิตที่มีมิติจำกัด มีแฟคเตอร์ผลคูณเสมอ หลังจากนั้นเราได้แสดงว่า ภายใต้เงื่อนไขใดที่ p มีแฟคเตอร์ผลคูณถ้ามันมีแฟคเตอร์กำลังสอง ในท้ายสุดเราได้ แสดงว่า ถ้า A เป็นพีชคณิตสลับที่ แล้ว แฟคเตอร์กำลังสอง เป็นแฟคเตอร์ผลคูณ

คำหลัก แฟคเตอร์ผลคูณ พี-เซมินอร์ม

ผลงานวิจัยที่ 3

ชื่อเรื่อง การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิ ลำดับค่าเวกเตอร์

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $c_0(X, p), c(X, p), \ell_\infty(X, p)$ และ $\ell(X, p)$ ไปยัง ปริภูมิลำดับของสเกลาร์ของ แมคดอกซ์ $c_0(q), c(q)$ และ $\ell_\infty(q)$ เมื่อ $p = (p_k)$ และ $q = (q_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก

คำหลัก การแปลงเมทริกซ์ ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์

ผลงานวิจัยที่ 4

ชื่อเรื่อง การแปลงเมทริกซ์จากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ของแมตคอกซ์ไปยัง
ปริภูมิลำดับนาคาโน

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวก
เตอร์ของแมตคอกซ์ $c_0(X, p), c(X, p)$ และ $\ell_\infty(X, p)$ ไปยัง ปริภูมิลำดับนาคาโน
 $\ell(q)$ เมื่อ $p = (p_k)$ และ $q = (q_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก

คำหลัก การแปลงเมทริกซ์ ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ของแมตคอกซ์
ปริภูมิลำดับนาคาโน

ผลงานวิจัยที่ 5

ชื่อเรื่อง การแปลงเมทริกซ์ที่เกี่ยวกับปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาโน

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่า
เวกเตอร์ของนาคาโน $\ell(X, p)$ และ $F_r(X, p)$ ไปยัง E_r และเรายังได้ลักษณะของ
เมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจาก $\ell(X, p)$ และ $F_r(X, p)$ ไปยัง ปริภูมิลำดับที่มีขอบเขต ℓ_∞
เมื่อ $p = (p_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก ซึ่ง $p_k > 1$ ทุกๆ $k \in \mathbb{N}$
และ $r \geq 0$

คำหลัก การแปลงเมทริกซ์ ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ของนาคาโน

ผลงานวิจัยที่ 6

ชื่อเรื่อง การแปลงเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาโน
 บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับเมทริกซ์อนันต์
 ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาโน $\ell(X, p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ ℓ_∞ และ
 $\ell_\infty(q)$ และเรายังคงให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจาก $M_0(X, p)$ ไปยัง
 ปริภูมิลำดับ $\ell_\infty(q)$ เมื่อ $p = (p_k)$ และ $q = (q_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของ
 จำนวนจริงบวก ซึ่ง $p_k \leq 1$ ทุกๆ $k \in \mathbb{N}$.

คำหลัก การแปลงเมทริกซ์ ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาโน

ผลงานวิจัยที่ 7

ชื่อเรื่อง การแปลงเมทริกซ์บน ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาโน
 บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับ
 ค่าเวกเตอร์นาคาโน $\ell(X, p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ ℓ_∞ , $\ell_\infty(q)$, bs และ cs
 เมื่อ $p = (p_k)$ และ $q = (q_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก ซึ่ง
 $p_k > 1$ ทุกๆ $k \in \mathbb{N}$

คำหลัก การแปลงเมทริกซ์ ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาโน

ผลงานวิจัยที่ 8

ชื่อเรื่อง การแปลงเมทริกซ์ระหว่างปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์นาคาใน $\ell(X, p)$ ไปยังปริภูมิ BK ใดๆ และ โดยการให้ผลดังกล่าว เราได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจาก $\ell(X, p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ $\ell_\infty(Y)$, $c_0(Y, q)$, $c(Y)$, $\ell_s(Y)$, $E_r(Y)$, และ $F_r(Y)$ เมื่อ $p = (p_k)$ และ $q = (q_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก ซึ่ง $p_k \leq 1$ ทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ $r \geq 0$ และ $s \geq 1$

คำหลัก การแปลงเมทริกซ์ ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์

ผลงานวิจัยที่ 9

ชื่อเรื่อง การแปลงเมทริกซ์ของบางปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $\ell_\infty(X, p)$ และ $c_0(X, p)$ ไปยังปริภูมิลำดับฮอริลลิช ℓ_∞ เมื่อ $p = (p_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก

คำหลัก การแปลงเมทริกซ์ ปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์

ผลงานวิจัยที่ 10

ชื่อเรื่อง ตัวดำเนินการซูเปอร์โพสิชันบนปริภูมิลำดับ $\ell(p)$

บทคัดย่อ ในงานวิจัยนี้ เราได้ให้ลักษณะของตัวดำเนินการซูเปอร์โพสิชันที่กระทำจากปริภูมิลำดับของแมตริกซ์ $\ell(p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ ℓ_1

คำหลัก ตัวดำเนินการซูเปอร์โพสิชัน ปริภูมิลำดับ

ABSTRACT

Research output no. 1

Title : Scalar Multiplicativity Factors for Near Quasi-Norms

Abstract : In this note a near quasi-norm q is defined on a real or complex vector space X . We use the notion of boundedness as in a general topological vector space to study boundedness of sets in a near quasi-normed space and we study scalar multiplicative factors for q , i.e., constant $\lambda > 0$ for which $q(\lambda x) \leq \lambda |\alpha|^r q(x)$ for some $r > 0$ and for all scalars α and all $x \in X$. The necessary and sufficient conditions for a near quasi-norm q to have multiplicative factors are given. We further show that under what conditions the natural near quasi-norm on the sequence spaces of Maddox $\ell_\infty(p)$ and $\ell(p)$ have scalar multiplicative factors.

Keywords : Near quasi-norms, Scalar Multiplicative factors

Research output no. 2

Title : Multiplicativity Factors for p-Seminorms

Abstract : Let S be a p -seminorm on an algebra A . In this paper we study multiplicativity and quadrativity factors for S , i.e., constants $\mu > 0$ and $\lambda > 0$ for which $S(xy) \leq \mu S(x)S(y)$ and $S(x^2) \leq \lambda S(x)^2$ for all $x, y \in A$. We begin with characterizing these factors in terms of the kernel of S and we also show that p -norms on finite dimensional algebras always have multiplicative factors. We then provide under what conditions does S have multiplicative factors if it has quadrative factors. Finally, we show that if A is commutative then quadrativity factors imply multiplicativity factors.

Keywords : Multiplicative factors, p -seminorms

Research output no. 3

Title : Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces

Abstract : In this paper, we give the matrix characterizations from vector-valued sequence spaces of Maddox $c_0(X, p), c(X, p), \ell_\infty(X, p)$ and $\ell(X, p)$ into scalar-valued sequence spaces of Maddox $c_0(q), c(q)$ and $\ell_\infty(q)$ where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers.

Keywords : Matrix Transformations, Vector-Valued sequence spaces

Research output no. 4

Title : Matrix Transformations from Vector-Valued Sequence Spaces of Maddox into the Nakano Sequence Space

Abstract : In this paper, we give the matrix characterizations from vector-valued sequence spaces of Maddox $c_0(X, p)$, $c(X, p)$ and $\ell_\infty(X, p)$ into the Nakano sequence space $\ell(q)$ where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers.

Keywords : Matrix Transformations, Vector-valued sequence spaces of Maddox, Nakano sequence space.

Research output no. 5.

Title : On Matrix Transformations Concerning the Nakano Vector-Valued Sequence Space

Abstract : In this paper, we give the matrix characterizations from Nakano vector-valued sequence spaces $\ell(X, p)$ and $F_r(X, p)$ into E_r and we obtain the matrix characterizations from $\ell(X, p)$ and $F_r(X, p)$ into the bounded sequence space ℓ_∞ as corollaries, where $p = (p_k)$ is a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k > 1$ for all $k \in \mathbb{N}$ and $r \geq 0$.

Keywords : Matrix Transformations, Nakano vector-valued sequence space.

Research output no. 6

Title : On Matrix Transformations Related to Nakano Vector-Valued Sequence Space

Abstract : In this paper, we give necessary and sufficient conditions for infinite matrices mapping from Nakano vector-valued sequence spaces $\ell(X, p)$ into the sequence spaces ℓ_∞ and $\ell_\infty(q)$ and we also give the matrix characterizations from $M_0(X, p)$ into the space $\ell_\infty(q)$ where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in \mathbb{N}$.

Keywords : Matrix Transformations, Nakao vector-valued sequence space.

Research output no. 7

Title : Matrix Transformations on Nakano Vector-Valued Sequence Space

Abstract : In this paper, we give the matrix characterizations from Nakano vector-valued sequence space $\ell(X, p)$ into ℓ_∞ , $\ell_\infty(q)$, bs and cs where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers such that $p_k > 1$ for all $k \in \mathbb{N}$.

Keywords : Matrix Transformations, Nakao vector-valued sequence space.

Research output no. 8

Title : Matrix Transformations Between Some Vector-Valued Sequence Space

Abstract : In this paper, we give necessary and sufficient conditions for infinite matrices mapping from Nakano vector-valued sequence spaces $\ell(X, p)$ into any BK-space and by using this results we obtain the matrix characterizations from $\ell(X, p)$ into the sequence spaces $\ell_\infty(Y)$, $c_0(Y, q)$, $c(Y)$, $\ell_s(Y)$, $E_r(Y)$, and $F_r(Y)$ where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$, and $s \geq 1$.

Keywords : Matrix Transformations, Vector-valued sequence spaces.

Research output no. 9

Title : Matrix Transformations of Some Vector-Valued Sequence Spaces

Abstract : In this paper, we give the matrix characterizations from vector-valued sequence spaces $\ell_\infty(X, p)$ and $\underline{c}_0(X, p)$ into the Orlicz sequence space ℓ_M where $p = (p_k)$ is a bounded sequences of positive real numbers.

Keywords : Matrix Transformations, Vector-valued sequence spaces .

Research output no. 10

Title : Superposition Operators on the Sequence Space $\ell(p)$

Abstract : In this paper, we give a characterization of superposition operator acting from a sequence space of Maddox $\ell(p)$ into the sequence space ℓ_1 .

Keywords : Superposition operators, Sequence space.

บทนำ

การแปลงเมทริกซ์ (matrix transformations) ของปริภูมิลำดับ (sequence spaces) นับเป็นปัญหาที่สำคัญปัญหาหนึ่งที่มีการทำวิจัยกันมากในสาขาของ Sequence Spaces การศึกษาปัญหาดังกล่าวเป็นการศึกษาหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอให้กับเมทริกซ์อนันต์ที่ส่ง (map) จากปริภูมิลำดับหนึ่งไปยังปริภูมิลำดับหนึ่ง ในอดีตปริภูมิลำดับที่นักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่สนใจศึกษานั้นเป็นปริภูมิลำดับที่เกิดมาจากการประยุกต์ในสาขาวิชาอื่นๆ ซึ่งเป็นปริภูมิลำดับของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน แต่เนื่องด้วยปัญหาต่างๆ ในยุคปัจจุบันมีความซับซ้อนมากขึ้น การแก้ปัญหาโดยวิธีเก่าๆ จึงไม่สามารถใช้ได้เช่นเดียวกันกับปัญหาของการศึกษาการแปลงเมทริกซ์ ในปัจจุบันปริภูมิลำดับที่ศึกษากันส่วนใหญ่ ก็ได้ขยายจากปริภูมิลำดับของจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อนไปเป็นปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ (vector-valued sequence spaces) และเมทริกซ์อนันต์ที่ศึกษานั้นก็ขยายจากเมทริกซ์ของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนไปเป็นเมทริกซ์อนันต์ของตัวดำเนินการ (operator) เพื่อความสะดวกในการกล่าวถึงที่มาและปัญหา ตลอดจนวัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้ เราจะให้สัญลักษณ์และนิยามบางอย่างที่จำเป็นดังต่อไปนี้

ให้ X และ Y เป็นปริภูมิลำดับของจำนวนจริงหรือของจำนวนเชิงซ้อน และ $A = (a_{nk})$ เป็นเมทริกซ์ ของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน และให้ $x = (x_k) \in X$ ถ้า $\sum_{k=1}^n a_{nk} x_k$ เป็นอนุกรมลู่เข้าทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ แล้ว จะกล่าวว่า Ax หาค่าได้ และ จะให้ $Ax = (\sum_{k=1}^n a_{nk} x_k)_{n=1}^\infty$ จะกล่าวว่า A ส่ง (map) X ไปยัง Y ซึ่งเขียนแทนด้วย $A: X \rightarrow Y$ ถ้า Ax หาค่าได้ และ $Ax \in Y$ ทุกๆ $x \in X$

ให้ E เป็นปริภูมิบานาค (Banach space) และให้ X เป็นปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ใน E (E -valued sequence spaces) และ Y เป็นปริภูมิลำดับของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน สำหรับเมทริกซ์อนันต์ $A = (f_k^n)$ เมื่อ $f_k^n \in E'$ (the continuous dual of E) และ ถ้า $\sum_{k=1}^n f_k^n(x_k)$ ลู่เข้าทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะกล่าวว่า Ax หาค่าได้ และจะให้ $Ax = (\sum_{k=1}^n f_k^n(x_k))_{n=1}^\infty$ เรากล่าวว่า A ส่ง X ไปยัง Y ถ้า Ax หาค่าได้ และ $Ax \in Y$ ทุกๆ $x \in X$

ให้ $p = (p_k)$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก Bulut และ Caker [2] ได้นิยามปริภูมิลำดับของจำนวนจริง $\ell(p, s)$ ดังนี้

$$\ell(p, s) = \{(x_k) \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} |x_k|^{p_k} < \infty\}$$

และได้หาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A: \ell(p, s) \rightarrow c$ และ $A: \ell(p, s) \rightarrow \ell_{\infty}$ เมื่อ ℓ_{∞} และ c เป็นปริภูมิลำดับที่มีขอบเขตและลำดับคู่เข้า นักคณิตศาสตร์หลายคนได้ศึกษาการแปลงเมทริกซ์ระหว่างปริภูมิลำดับของจำนวนจริง $c_0(p)$, $\ell(p)$ และ $\ell_{\infty}(p)$

ในปี ค.ศ. 1993 C.X. Wu และ L. Liu [16] นักคณิตศาสตร์ชาวจีนได้นิยามปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $c_0(E, p)$, $\ell(E, p)$ และ $\ell_{\infty}(E, p)$ ดังต่อไปนี้

$$c_0(E, p) = \{(x_n) \mid \|x\|^{p_k} \rightarrow 0\}$$

$$\ell(E, p) = \{(x) \mid \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

$$\ell_{\infty}(E, p) = \{(x) \mid \sup_k \|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

และได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ซึ่ง $A: X \rightarrow Y$ ในกรณีที่ $X = c_0(E, p)$, $\ell(E, p)$ และ $\ell_{\infty}(E, p)$ และ $Y = c_0$, $c_0(q)$, $\ell_{\infty}(q)$ ซึ่งงานของ C.X. Wu และ L. Liu เป็นงานที่คลุมงานที่นักคณิตศาสตร์หลายคนได้ทำไว้

ในปี ค.ศ. 1995 Mursaleen [10] นักคณิตศาสตร์ชาวอินเดียได้ศึกษาการแปลงเมทริกซ์จากปริภูมิ $\ell(p, s)$ ไปยังปริภูมิ f , f_{∞} เมื่อ

$$f = \{x \in \ell_{\infty} \mid \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m x_{k+n} = L, \text{ uniformly in } n\}$$

และ

$$f_{\infty} = \{x \mid \sup_{m,n} \left| \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m x_{k+n} \right| < \infty\}$$

ถ้าเรานิยามปริภูมิลำดับ $\ell(E, p, s)$, $\ell_{\infty}(E, p, s)$ และ $c_0(E, p, s)$ เมื่อ $s \geq 0$ ดังนี้

$$\ell(E, p, s) = \{(x_k) \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

$$\ell_{\infty}(E, p, s) = \{(x_k) \mid \sup_k k^{-s} \|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

$$c_0(E, p, s) = \{(x_k) \mid \frac{\|x_k\|^{p_k}}{k^s} \rightarrow 0\}$$

ปริภูมิทั้งสามเป็นปริภูมิที่คลุมปริภูมิที่ C.X. Wu และ L. Liu นิยามไว้ ดังนั้นการศึกษาลักษณะของเมทริกซ์อันดับ A ซึ่ง $A: X \rightarrow Y$ เมื่อ $X = \ell(E, p, s)$, $\ell_\infty(E, p, s)$ และ $Y = \ell_\infty$, c , c_0 , $\ell_\infty(q)$, $c_0(q)$ f , f_∞ จะเป็นงานวิจัยที่คลุมงานวิจัยที่นักคณิตศาสตร์หลายคนทำไว้ในอดีต เช่นงานวิจัยของ C.X. Wu และ L. Liu (1993) และ งานของ Mursaleen (1995)

วัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้คือ

1. หาลักษณะของเมทริกซ์อันดับ A ซึ่ง $A: X \rightarrow Y$ เมื่อ $X = \ell(E, p, s)$ และ $\ell_\infty(E, p, s)$ และ $Y = c_0$, ℓ_∞ , c , $c_0(q)$, $\ell_\infty(q)$, $c(q)$ เมื่อ $q = (q_k) \in c_0$
2. หาลักษณะของเมทริกซ์อันดับ A ซึ่ง $A: X \rightarrow Y$ เมื่อ $X = \ell(E, p, s)$ และ $\ell_\infty(E, p, s)$ และ $Y = bs$, bv และ cs
3. หาลักษณะของเมทริกซ์อันดับ A ซึ่ง $A: X \rightarrow Y$ เมื่อ $X = \ell(E, p, s)$ และ $\ell_\infty(E, p, s)$ และ $Y = f$ และ f_∞
4. หาลักษณะของเมทริกซ์อันดับ A ซึ่ง $A: \ell(E, p, s) \rightarrow \ell(p, s)$ และ $A: \ell_\infty(E, p, s) \rightarrow \ell_\infty(p, s)$
5. หาลักษณะของเมทริกซ์อันดับ A ซึ่ง $A: c_0(E, p, s) \rightarrow c_0$ และ $A: c_0(E, p, s) \rightarrow \ell_\infty(q)$ เมื่อ $q = (q_k)$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก

วิธีการทดลอง

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการแปลงเมทริกซ์ ของปริภูมิลำดับจากเอกสารหมายเลข [1 - 16]
2. ศึกษาสมบัติต่างๆ ของปริภูมิลำดับของแมดดอกซ์ (Maddox sequence spaces) จากเอกสารหมายเลข [5]
3. ศึกษาผลงานวิจัยเกี่ยวกับการแปลงเมทริกซ์ระหว่างปริภูมิลำดับ $c(p)$, $c_0(p)$, $\ell(p)$ และ $\ell_\infty(p)$ จากเอกสารหมายเลข [6]
4. ศึกษางานวิจัยของ Bulut และ Caker ในเอกสารหมายเลข [5] ที่เกี่ยวข้องกับ การแปลงเมทริกซ์ ของปริภูมิลำดับ $\ell(p, s)$ ไปยัง ℓ_∞ และ c .
5. ศึกษาคุณสมบัติพื้นฐาน และ สมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $c_0(E, p)$, $c(E, p)$, $\ell_\infty(E, p)$ และ $\ell(E, p)$ และการแปลงเมทริกซ์ ของ ปริภูมิลำดับจากปริภูมิลำดับเหล่านี้ไปยังปริภูมิลำดับ c_0 , $c_0(q)$, ℓ_∞ , $\ell_\infty(q)$ จากเอกสารหมายเลข [16]
6. โดยการอาศัยความรู้ที่ได้จากการศึกษาตามระเบียบข้อ 1 - 5 เป็นแนวทางในการ คิดค้นทฤษฎีใหม่ ๆ เกี่ยวกับการหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับที่ กำหนดให้ไปยังปริภูมิลำดับที่เราสนใจ เพื่อให้ได้ตามวัตถุประสงค์ที่ได้กำหนดไว้

ผลการทดลอง

1. จากการศึกษาสมบัติต่างๆ ของปริภูมิลำดับ $c_0(p)$ $c(p)$ $\ell_\infty(p)$ และ $\ell(p)$ ในเอกสาร [5, 8] ทำให้ได้แนวคิดในการสร้างองค์ความรู้ใหม่ ซึ่งให้ชื่อว่า near quasi-norms จากนั้นได้ศึกษาการมีโครงสร้างเป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงทอพอโลยี (Topological vector space) ของปริภูมิ near quasi-norms และ ศึกษาการมีขอบเขตของเซตในปริภูมิ near quasi-norms ทั้งสองแบบ คือ ในเชิงของเมตริก และ ในเชิงของเวกเตอร์เชิงทอพอโลยี จะเห็นได้ว่า ปริภูมิ near quasi-norms นั้นไม่จำเป็นต้องเป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงทอพอโลยี ดังนั้นจึงเกิดคำถามว่า เมื่อใดปริภูมิ near quasi-norms เป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงทอพอโลยี จากความพยายามที่จะตอบคำถามนี้ ได้เกิดแนวคิดในการนิยาม แฟคเตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar multiplicative factors) สำหรับ near quasi-norms ใด ๆ บนปริภูมิเวกเตอร์ และจากนั้นก็ได้ออกศึกษานาเงื่อนไขในการมีแฟคเตอร์ผลคูณเชิงสเกลาร์ ทั้งในกรณีทั่วไป และ ในกรณีเฉพาะเช่น ในปริภูมิลำดับ $\ell_\infty(p)$ และ $\ell(p)$ เป็นต้น

ผลงานวิจัยที่ได้เกี่ยวกับเรื่องดังกล่าวนี้ให้ชื่อว่า

"Scalar Multiplicativity Factors for Near Quasi-Norms"

ซึ่งได้รับการตีพิมพ์ลงในวารสารนานาชาติชื่อ

"Bull. Cal. Math. Soc. Vol 290 no. 4, 1998."

วารสารดังกล่าวนี้เป็นวารสารนานาชาติที่มีชื่อเสียงในประเทศอินเดีย สามารถค้นได้จากอินเทอร์เน็ต

หมายเหตุ ขณะนี้กำลังขอ reprints ของผลงานวิจัยนี้ จำนวน 50 ฉบับ จากวารสารดังกล่าว ซึ่งคาดว่าจะได้รับก่อนเดือน มิถุนายน 2542

2. จากการศึกษาปริภูมิลำดับ $\ell(p)$ เมื่อ $p = (p_k)$ $0 < p \leq 1$ ทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ เราพบว่า เมื่อ $p_k = p_{k+1}$ ทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า ปริภูมิ $\ell(p)$ เป็นปริภูมิ p -seminorm สังเกตได้ว่า ทุก ๆ ปริภูมิ p -seminorm เป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงทอพอโลยี จากการศึกษาผลงานของ Grosse - Erdmann ในเอกสาร [5] ทำให้ได้

แนวคิดในการศึกษา พีชคณิตเชิงทอพอโลยี (Topological algebra) โดยการหา
เงื่อนไขของการมีแฟกเตอร์การคูณ (Multiplicative factors) สำหรับ p -seminorm
ที่นิยามบน พีชคณิตใด ๆ จากการศึกษาเรื่องดังกล่าวนี้ ทำให้ได้ทฤษฎีใหม่ ๆ ต่าง ๆ
อีกมากมาย และ ผู้ทำวิจัยได้รวบรวมไว้ในผลงานชื่อ

"Multiplicativity Factors for p -Seminorms"

และได้นำเอาผลงานดังกล่าวไปเสนอในที่ประชุมนานาชาติทางคณิตศาสตร์ ที่จัดขึ้นที่
มหาวิทยาลัย Ateneo de Manila ประเทศฟิลิปปินส์ ระหว่างวันที่ 16 - 17 ธันวาคม
2541 ในการประชุมครั้งนี้ผู้ทำวิจัยได้รับเกียรติเป็น Invited Speaker ของการประชุม
ในครั้งนี้ด้วย และผลงานดังกล่าวนี้จะตีพิมพ์ลงใน Proceedings ของการประชุมครั้งนี้
โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฟิลิปปินส์เป็นผู้ดำเนินการ

3. จากการศึกษาความรู้พื้นฐานต่างๆ ในเรื่องเกี่ยวกับการแปลงเมทริกซ์ของปริภูมิ
ลำดับ จากเอกสาร [5] และ [16] ผู้ทำวิจัยได้คิดค้นทฤษฎีใหม่ ๆ ที่สามารถให้
ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ของแมคดอกซ์ $c_0(X, p)$
 $c(X, p)$ และ $\ell_\infty(X, p)$ ไปยัง ปริภูมิลำดับ $c_0(q)$ $c(q)$
และ $\ell_\infty(q)$ เมื่อ $p = (p_k)$
 $q = (q_k)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตของจำนวนจริงบวก ทฤษฎีที่ได้เป็นองค์ความรู้ใหม่
และ ผู้ทำวิจัยได้เขียนผลงานดังกล่าวโดยให้ชื่อผลงานนี้ว่า

"Matrix Transformations on Some Vector - Valued Sequence Spaces"

ผลงานวิจัยนี้ได้ส่งไปเพื่อลงตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติที่มีชื่อ
เสียงในประเทศโปแลนด์ คือวารสาร "Comment. Math."

ส่วนหนึ่งของผลงานวิจัยนี้เป็นงานที่คลุมผลงานของนักคณิตศาสตร์ หลายคน
และมีทฤษฎีใหม่เป็นองค์ความรู้ใหม่อีกมากมาย

4. จากผลการทดลองข้อ 3 และจากความรู้พื้นฐานในการศึกษาปริภูมิลำดับ Nakano
 $\ell(q)$ ผู้ทำวิจัยได้คิดค้นทฤษฎีใหม่ ๆ เกี่ยวกับการให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A

ใน X' ที่ A ส่งจากปริภูมิลำดับ $c_0(X, p)$ $c(X, p)$ และ $\ell_\infty(X, p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ $\ell(q)$ ทฤษฎีต่าง ๆ เกี่ยวกับเรื่องนี้ ผู้ทำวิจัยได้เขียนไว้ในผลงานวิจัยชื่อ "Matrix Transformations from Vector-Valued Sequence Spaces of Maddox into the Nakano Sequence space"

ผลงานเรื่องนี้ ผู้ทำวิจัยได้ส่งไปลงตีพิมพ์ (submitted) ในวารสาร "Journal of London Mathematical Society" ซึ่งขณะนี้กำลังรอผลการพิจารณาจาก referee อยู่

5. จากการศึกษาปริภูมิลำดับ Nakano $\ell(X, p)$ เราพบว่า $\ell(X, p)$ เป็นปริภูมิ FK-space โดยอาศัยทฤษฎีของ Zeller เราสามารถหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ใน X' (the dual space of X) ที่ A ส่งจาก $\ell(X, p)$ และ $F_r(X, p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ E , เมื่อ $p_k > 1$ ทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ และ $r \geq 0$
รายละเอียดของผลงานวิจัยเรื่องนี้ ผู้ทำวิจัยได้เขียนไว้ในเรื่อง

"On Matrix Transformations Concerning the Nakano Vector-Valued Sequence Space"

ผู้ทำวิจัยได้ส่งผลงานนี้เพื่อลงตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติ ชื่อ "Acta Math. Hungar." ซึ่งเป็นวารสารที่มีชื่อเสียงระดับนานาชาติของประเทศฮังการี

6. โดยการประยุกต์ทฤษฎีของ Zeller และสมบัติต่างๆ ของปริภูมิลำดับ $\ell(X, p)$ ℓ_∞ และ $\ell_\infty(q)$ เมื่อ $p_k > 1$ ทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ ทำให้ได้ทฤษฎีใหม่ๆ เกี่ยวกับการให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ใน X' ที่ส่งจากปริภูมิลำดับ $\ell(X, p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ ℓ_∞ และ $\ell_\infty(q)$ รายละเอียดเกี่ยวกับทฤษฎีต่างๆ เหล่านี้ ผู้ทำวิจัยได้รวบรวมเขียนไว้ในผลงานชื่อ

"On Matrix Transformations Related to Nakano Vector-Valued Sequence Spaces"

ผลงานนี้ ผู้ทำวิจัยได้ส่งเพื่อลงตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติชื่อ
 "Bulletin of Calcutta Mathematical Society"

7. ในผลการทดลองข้อ 6 เราได้ทฤษฎีต่าง ๆ เกี่ยวกับการหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ที่ A ส่งจากปริภูมิลำดับ $\ell(X, p)$ ไปยัง ℓ_∞ และ $\ell_\infty(q)$ ในกรณีที่ $p_k > 1$ ทุกๆ $k \in \mathbb{N}$

สำหรับในกรณีที่ $p_k \leq 1$ ทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ ผู้ทำวิจัยได้คิดค้นทฤษฎีใหม่ ๆ เพื่อให้ลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ที่ A ส่งจากปริภูมิลำดับ Nakano $\ell(X, p)$ ไปยัง ℓ_∞ และ $\ell_\infty(q)$ ผลงานวิจัยนี้มีชื่อว่า

"Matrix Transformations on Nakano Vector-Valued Sequence Spaces"
 ซึ่งได้ส่งไปลงตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติของประเทศอาร์เจนตินา

8. จากการศึกษาคิดค้นวิจัยตามผลการทดลองข้อ 7. ทำให้เกิดแนวคิดในการขยายผลของการวิจัยให้กว้างขวางขึ้น (general) โดยการศึกษาการแปลงเมทริกซ์ระหว่างปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ เมทริกซ์อนันต์ที่สนใจนั้นเป็นเมทริกซ์อนันต์ใน $L(X, Y)$ (ปริภูมิของตัวดำเนินการเชิงเส้นที่มีขอบเขตทั้งหมดจาก X ไปยัง Y)

ผลของการทดลองในข้อนี้ ทำให้ได้ทฤษฎีใหม่ๆ อีกมากมายที่ให้เงื่อนไขที่จำเป็น และ เพียงพอสำหรับเมทริกซ์อนันต์ A ที่ A ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $\ell(X, p)$ ไปยังปริภูมิ BK ใดๆ ในปริภูมิขนาด Y เมื่อ $p_k \leq 1$ ทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ จากผลของทฤษฎีที่ได้ ทำให้เราสามารถนำไปประยุกต์หาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ A ที่ A ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $\ell(X, p)$ ไปยังปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $\ell_\infty(Y)$, $c_0(Y)$, $c(Y)$, $E_r(Y)$ และ $F_r(Y)$ เมื่อ $p_k \leq 1$ ทุกๆ $k \in \mathbb{N}$

รายละเอียดของงานวิจัยนี้ ผู้ทำวิจัยได้เขียนรวบรวมไว้ในผลงานชื่อ
 "Matrix Transformations Between Some Vector-Valued Sequence Spaces"

ซึ่งผลงานเรื่องดังกล่าวนี้ได้รับการตอบรับ (accepted) ให้ตีพิมพ์ลงในวารสารนานาชาติชื่อ "SEA. Bull. Math. (Southeast Asian Bulletin of Mathematics)" ขณะนี้กำลังรอ reprints จากวารสารดังกล่าวอยู่

9. เนื่องจากปริภูมิลำดับของ ออริลซ์ (Orlicz sequence space) ℓ_M เป็นปริภูมิที่เป็นที่นิยมศึกษากันมาก เพราะว่าเป็นกรณีทั่วไปของปริภูมิที่เรารู้จัก เช่น ปริภูมิ ℓ_p เป็นต้น ดังนั้น ผู้ทำวิจัยจึงทดลองศึกษาการแปลงเมทริกซ์จากปริภูมิ $\ell_\infty(X, p)$ และ $c_0(X, p)$ ไปยังปริภูมิลำดับของออริลซ์ ℓ_M และได้ผลงานวิจัยในเรื่องนี้ โดยให้ชื่องานวิจัยนี้ว่า

"Matrix Transformations of Some Vector-Valued Sequence Spaces"
ผู้ทำวิจัยได้นำผลงานนี้ไปเสนอในที่ประชุมนานาชาติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง Function Spaces V ซึ่งจัดขึ้นเป็นครั้งที่ 5 ที่มหาวิทยาลัย Adam Mickiewicz ประเทศโปแลนด์ ระหว่างวันที่ 25 สิงหาคม - 3 กันยายน 2541

10. นอกจากผลงานวิจัยที่เกี่ยวกับเรื่องของการแปลงเมทริกซ์ของปริภูมิลำดับแล้ว ผู้ทำวิจัยยังเกิดแนวคิดในเรื่องที่เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการซูเปอร์โพสิชัน (superposition operators) บนปริภูมิลำดับที่กำลังสนใจศึกษา คือ ปริภูมิลำดับของแมคคอกซ์ $\ell(p)$ ผู้ทำวิจัยได้ค้นพบทฤษฎีใหม่อีกมากมายเกี่ยวกับตัวดำเนินการซูเปอร์โพสิชันที่ส่งจากปริภูมิลำดับ $\ell(p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ ℓ_1 และ ศึกษาการมีขอบเขต (boundedness) การมีขอบเขตเฉพาะที่ (Locally boundedness) ของตัวดำเนินการซูเปอร์โพสิชันเหล่านั้น ผลงานดังกล่าวนี้ชื่อ

"Superposition Operators on the Sequence Space $\ell(p)$ "
ผลงานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้นำไปเสนอในที่ประชุมนานาชาติทางคณิตศาสตร์ ที่จัดที่ โรงแรม TAWANA RAMADA กรุงเทพมหานคร โดยภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เป็นผู้จัดการประชุม ระหว่างวันที่ 8 - 10 ธันวาคม 2540
ผลงานดังกล่าวนี้ได้ตีพิมพ์ลงใน Proceedings ของการประชุม หน้า 172 - 175

บทวิจารณ์

ก่อนอื่นผู้ทำวิจัยต้องขอขอบคุณ สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) ที่ได้ให้โอกาสผู้ทำวิจัยได้รับการสนับสนุนทุนวิจัยในครั้งนี้ นับว่าเป็นความคล่องตัวในการดำเนินงานของ สกว. เป็นอย่างมากในการให้ทุนสนับสนุนการวิจัยประเภทต่างๆ ตัวอย่างเช่น ทุนวิจัยที่ผู้ทำวิจัยได้รับนี้ เป็นทุนที่ให้โดยความริเริ่มของผู้อำนวยการ สกว. ทุนดังกล่าวนี้ไม่ได้เข้าลักษณะทุนใดเลยที่ทาง สกว. กำหนดไว้ เพราะเดิมนั้นผู้ทำวิจัยได้สมัครขอรับทุนองค์ความรู้ใหม่ ซึ่งมีระยะเวลา 3 ปี แต่เพราะว่าทาง referees ได้ประเมินว่าโครงการของข้าพเจ้านั้นไม่เหมาะที่จะเป็นทุนองค์ความรู้ใหม่ โดยประเมินว่าผลงานที่ได้นั้นไม่มีองค์ความรู้ใหม่ และมีโอกาสตีพิมพ์ได้ไม่ถึง 60 % แต่อย่างไรก็ตามผู้ทำวิจัยต้องขอขอบคุณทาง สกว. อีกครั้งหนึ่งที่ไม่ได้ตัด การสนับสนุนลงอย่างสิ้นเชิง แต่เปิดโอกาสให้ข้าพเจ้าได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยโดยเป็นทุนโดยความริเริ่มจากท่านผู้อำนวยการ สกว. โดยทาง สกว. ได้ขอให้ข้าพเจ้าปรับโครงการใหม่โดยให้งบประมาณได้ไม่เกิน 200,000 บาท (สองแสนบาท) ข้าพเจ้าได้ปรับโครงการในแง่ของงบประมาณ และเวลาจากเดิม 3 ปี เหลือ 1 ปี ครึ่ง โดยทำวิจัยคนเดียว แต่โดยความเป็นจริงแล้ว โครงการดังกล่าวเป็นโครงการใหญ่สามารถให้ผลงานตีพิมพ์ได้มากกว่า 10 papers และ สามารถสร้างเป็นหัวข้อวิทยานิพนธ์สำหรับนักศึกษาปริญญาโท และ เอก ได้มากมาย จากความจริงที่ได้ มีนักศึกษาระดับปริญญาโทที่ได้จบการศึกษาไปแล้ว จำนวน 5 คน ที่ได้ หัวข้อวิทยานิพนธ์จากแนวคิดในโครงการวิจัยนี้ และ ผู้ทำวิจัยได้กำหนดให้ หัวข้อ "Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces" เป็นหัวข้อวิทยานิพนธ์สำหรับปริญญาเอก 1 คน ซึ่งขณะนี้กำลังดำเนินการค้นคว้าทำวิจัยอยู่ ซึ่งคาดว่าจะจบการศึกษาในปี 2542 - 2543

จากผลงานวิจัยที่ได้จะเห็นว่า ภายในระยะเวลา 1 ปี ครึ่ง นั้น ผู้ทำวิจัยได้ผลงานวิจัย 10 papers โดยมีผลงานที่ได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (accepted) ลงในวารสารนานาชาติแล้วจำนวน 2 papers ขณะนี้กำลังรอ reprints ของงานวิจัย 2 เรื่องดังกล่าว และได้ submitted ผลงานวิจัยเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติอีกจำนวน 5 papers ซึ่งกำลังรอผลการพิจารณาจาก referees ของวารสารต่างๆ

สำหรับผลงานที่เหลืออีก 3 papers นั้น ผู้ทำวิจัยได้นำไปเสนอในที่ประชุมนานาชาติทางคณิตศาสตร์อีก 3 ผลงาน ในจำนวนนี้เป็นการเสนอผลงานในต่างประเทศจำนวน 2 ครั้ง คือที่ประเทศโปแลนด์ และ ประเทศฟิลิปปินส์ สำหรับการไปเสนอผลงานทั้ง 2 ครั้งนั้น ผู้ทำวิจัยได้รับเชิญเป็น Invited Speaker ของการประชุมในครั้งนั้นด้วย แต่เนื่องจากทุนที่ได้รับมีจำนวนน้อยไม่เพียงพอในการเดินทางไปต่างประเทศ ผู้ทำวิจัยต้องขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์ และ กองทุนคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ และ ศาสตราจารย์วิรุฬห์ สายคณิต ที่ได้สนับสนุนค่าใช้จ่ายในการเดินทางไปเสนอผลงานในต่างประเทศ มา ณ โอกาสนี้

ตามที่ได้กล่าวแล้วว่า โครงการดังกล่าวตามความจริงแล้วควรใช้เวลามากกว่า 1 ปี ครึ่ง ดังนั้นจึงยังคงมีปัญหที่น่าสนใจอีกมากมายเกี่ยวกับเรื่องนี้ ที่สามารถคิดค้น วิจัยเป็นองค์ความรู้ใหม่ได้อีกมากมาย

ปัญหาที่ผู้ทำวิจัยยังคงเปิดไว้สำหรับผู้สนใจมีเช่น ปัญหาในการหาลักษณะของเมตริกซอนันต์ A ที่ A ส่งจากปริภูมิลำดับ $c_0(X, p)$ $c(X, p)$ $\ell_\infty(X, p)$ และ $\ell(X, p)$ ไปยังปริภูมิลำดับ ℓ และ ℓ_∞ ปัญหานี้สามารถได้ผลงานวิจัยอีกอย่างน้อย 3 - 4 papers นอกจากนี้แล้วยังมีปัญหายังเปิดให้สามารถทำการวิจัยได้ในตนเองเดียวกันนี้อีกมากมายเมื่อเราศึกษาปริภูมิลำดับใหม่ ๆ

หนังสืออ้างอิง

- [1] สาวิทย์ ไชยรัตน์ "การแปลงเมทริกซ์ของปริภูมิลำดับ" วิทยานิพนธ์ชั้นปริญญาโทบัณฑิต
วิทยาลัย มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ 2538
- [2] Bulut, E., and Caker, O., "The sequence space $\ell(p,s)$ and related matrix
transformations", Comm. Fac.Sci. Univ Ankara (A₁), 28 (1979), 34 -39
- [3] Chandrasekhara Rao., Pacific. J. Math. 31(1969), 171 - 174
- [4] Cook, G., "Infinite Matrices and Sequence Spaces" London, Mcmilland 1950
- [5] Grosse-Erdmann, R.G., "The structure of the sequence spaces of Maddox", Cand.J.
Math. 44(1992), 298 - 307
- [6] Grosse-Erdmann, R.G., "Matrix Transformations between the sequence spaces of
Maddox", J. of Math. Anal. Appl. 180 (1993), 233 - 238.
- [7] Kreyzig, E., "Introductory Functional Analysis with Applications", New York, John
Wiley & Sons, 1978
- [8] Maddox, I.J., "Element of Functional Analysis", Cambridge, Cambridge University
Press, 1978
- [9] Maddox, I.J., "Spaces of strongly summable sequences" "Quart. J. Math. Oxford Ser.
(2) 18 (1967), 345 - 355.
- [10] Mursaleen, "Infinite Matrices and Almost Convergent Sequence", SEA Bull. Math.
Vol. 19 No.1 (1995) 45-48
- [11] Nakano, H., "Modulared sequence spaces", Proc. Japan. Acad. 27(1951),
508 - 512
- [12] Ruckle, W., "Sequence Spaces", Boston, Pitman, 1980
- [13] Sirajudeen, S.M., "Indian. J. Pure. Appl. Math (9) 12 (1981)
- [14] Sirajudeen, S.M., and Somasundaram, D., Indian. J. Pure. Appl. Math (2) 14(1983)
- [15] Wilansky, A., "Summability through Functional Analysis" Lehigh University,
North - Holland
- [16] Wu, C.X., and Liu, L., "Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence
Spaces", SEA. Bull. Math. Vol.17, No.1 (1993), 83-96

ผลงานวิจัยที่ได้ (Output)

ตามผลการทดลองข้อ 1 - 9 เราได้ผลงานวิจัยดังต่อไปนี้

1. Scalar Multiplicativity Factors for Near Quasi-norms
2. Multiplicativity Factors for p - Seminorms
3. Matrix Transformations on Some Vector - Valued Sequence Spaces
4. Matrix Transformations from Vector - Valued Sequence Spaces of Maddox into the Nakano Sequence Space
5. On Matrix Transformations Concerning the Nakano Sequence Spaces
6. On Matrix Transformations Related to Nakano Vector - Valued Sequence Spaces
7. Matrix Transformations on Nakano Sequence Spaces
8. Matrix Transformations Between Some Vector - Valued Sequence Spaces
9. Matrix Transformations of Some Vector - Valued Sequence Spaces
10. Superposition Operators on the Sequence Space

ผลงานวิจัย 1

ชื่อเรื่อง Scalar Multiplicativity Factors for Near Quasi-norms

ชื่อผู้เขียน ศศ. ดร. สุเทพ สุวนไต๋
Suthep Suantai

ได้รับการตีพิมพ์ (accepted) ในวารสารนานาชาติ ชื่อ

Bull. Math. Soc. no. 1998

(Bulletin of Calcutta Mathematical Society ในประเทศอินเดีย

หมายเหตุ กำรังขอ Reprints จำนวน 50 ฉบับ จากวารสารดังกล่าว

Scalar Multiplicativity Factors for Near Quasi-Norms

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this note a near quasi-norm q is defined on a real or complex vector space X . We use the notion of boundedness as in a general topological vector space to study boundedness of acts in a near quasi-normed space and we study scalar multiplicative factors for q , i.e., constant $\lambda > 0$ for which $q(\alpha x) \leq \lambda |\alpha|^r q(x)$ for some $r > 0$ and for all scalars α and all $x \in X$. The necessary and sufficient conditions for a near quasi-norm q to have multiplicative factor are given. We further show that under what conditions the natural near quasi-norm on the sequence spaces of Maddox $\ell_\infty(p)$ and $\ell(p)$ have scalar multiplicative factors.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A16, 46A19, 46A45.

1. INTRODUCTION

Let X be a vector space over a field F where $F = \mathbb{R}$ or $F = \mathbb{C}$ and $p > 0$. As usual, we call a function $S : X \rightarrow \mathbb{R}$ a p -seminorm if for all $x, y \in X$ and $\alpha \in F$:

$$S(x) \geq 0$$

$$S(\alpha x) = |\alpha|^p S(x)$$

$$S(x + y) \leq S(x) + S(y)$$

If, in addition $S(x) \neq 0$ for all $x \neq 0$ then S is a p -norm. If S is a p -seminorm on X we call (X, S) a p -seminormed linear space (p -semi-NLS).

Typeset by $\text{\AA}M\text{\AA}S\text{\AA}T\text{\AA}X$

A quasi-norm on X is defined in [5], page 13, to be a function $q: X \rightarrow R$ satisfying

- (i) $q(0) = 0$
- (ii) $q(-x) = q(x)$ for all $x \in X$
- (iii) $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$ for all $x, y \in X$
- (iv) if $\alpha_k, \alpha \in F, |\alpha_k - \alpha| \rightarrow 0$ and $x_k, x \in X, q(x_k - x) \rightarrow 0$, then $q(\alpha_k x_k - \alpha x) \rightarrow 0$.

It follows from (i) - (iii) that $q(x) \geq 0$ for all $x \in X$. If the quasi-norm q satisfies $q(x) = 0$ if and only if $x = 0$, then it is said to be *total*.

If q is a quasi-norm on X , then $d(x, y) = q(x - y)$ defines a semi-metric on X which is a metric if and only if q is total. A quasi-normed space (QNLS) is a pair (X, q) where q is a quasi-norm on X . Note that a quasi-normed space is a topological space (TVS) under the metric topology induced by the quasi-norm.

We call a function $q: X \rightarrow R$ a *near quasi-norm* if q satisfies the conditions (i), (ii) and (iii) above. A *near quasi-norm space* (NQ-NLS) is a pair (X, q) where q is a near quasi-norm on X . Note that every seminormed spaces, QNLS-spaces and p -normed spaces are NQ-NLS-space. A near quasi-norm q is said to be *total* if $q(x) = 0$ implies $x = 0$. From (i) - (iii), we obtain that $q(x) \geq 0$ for all $x \in X$. If q is a near quasi-norm on X , the function $d: X \times X \rightarrow R$ defined by $d(x, y) = q(x - y)$ is a translation invariant semi-metric on X which is a metric if and only if q is total. We call d the semi-metric induced by q . We always assume that a near quasi-normed space carries the metric topology induced by d . We shall see in Section 2 that a near quasi-normed space is not necessarily a TVS and will see in Section 3 that under what conditions a near quasi-norm space is a TVS.

For a near quasi-normed space (X, q) a subset B of X is said to be *bounded* if $x_k \in B$ and $\alpha_k \in F, \alpha_k \rightarrow 0$, then $\alpha_k x_k \rightarrow 0$. If $B \subseteq B(x, r)$ (the open ball center at x and radius r) for some $x \in X$ and for some $r > 0$, then B is said to be *metrically bounded*. We show in Section 1 that in a near quasi-normed space, a bounded subset is metrically bounded, but the converse does not hold in general and we also see in Section 3 that under what conditions a metrically bounded subset is bounded.

Arens and Goldberg [1, 2] defined multiplicative factors for a seminorm on an algebra $\mathcal{A}$ as follows: For a seminorm S on an algebra $\mathcal{A}$, we call $\lambda > 0$ is a *multiplicative factor* for S if $S(xy) \leq \lambda S(x)S(y)$ for all $x, y \in \mathcal{A}$. It is easy to see that if S has a multiplicative factor, then $\mathcal{A}$ is a TVS. They also gave necessary and sufficient conditions for a seminorm S in term of its kernel to have multiplicative factors.

Let q be a near quasi-norm on a vector space X . Then q is said to have a *scalar multiplicative factor* for q if there are $\lambda > 0$ and $r > 0$ such that

$$q(\alpha x) \leq \lambda |\alpha|^r q(x) \quad (1.1)$$

for all $\alpha \in F, x \in X$.

We call λ in (1.1), an *r-scalar multiplicative factor* for q . If λ is an r -scalar multiplicative factor for q then so is μ if $\mu \geq \lambda$. Note that norms, seminorms and p -seminorms always have scalar multiplicative factors.

Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive numbers. Maddox [4] introduced the sequence spaces $\ell_\infty(p)$ and $\ell(p)$ as follows:

$$\ell_\infty(p) = \{(x_k): (x_k) \text{ is a real sequence such that } \sup_k |x_k|^{p_k} < \infty\},$$

$$\ell(p) = \{(x_k): (x_k) \text{ is a real sequence such that } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty\}$$

Grosso-Erdmann [3] studied some structures of these sequence spaces in [3]. Let $q_p: \ell_\infty(p) \rightarrow R$ and $q'_p: \ell(p) \rightarrow R$ be defined by

$$q_p((x_k)) = \sup_k |x_k|^{\frac{1}{M}} \text{ and } q'_p((x_k)) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}}$$

where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$. It is easy to see that q_p is near quasi-norm on $\ell_\infty(p)$. We shall show in Section 2 that there is a sequence $p = (p_k)$ such that the function $q_p: \ell_\infty(p) \rightarrow R$ is not a quasi-norm. Maddox [4] showed that q'_p is a quasi-norm on $\ell(p)$ and in Section 4 we show that under what conditions q_p and q'_p have scalar multiplicative factors.

2. Near Quasi-Normed Spaces

By using the same proof as in [5], Proposition 2, page 3, and Proposition 4, page 15, the following proposition is obtained:

Proposition 2.1 *Let (X, q) be a near quasi-norm space. Then*

- (1) *The map $(x, y) \mapsto x + y$ from $X \times X \rightarrow X$ is continuous.*
- (2) *The map $q: X \rightarrow R$ is continuous.*
- (3) *If $\mathcal{U}$ is a neighborhood base at 0 and $U \in \mathcal{U}$, then there exists $V \in \mathcal{U}$ such that $V + V \subseteq U$.*
- (4) *If $\mathcal{U}$ is (open) neighborhood base at 0 in X and $x_0 \in X$, then $x_0 + \mathcal{U} = \{x_0 + U: U \in \mathcal{U}\}$ is a (open) neighborhood base at x_0 .*

Example 2.2 Let $p = (\frac{1}{k})$ and consider the sequence space $\ell_\infty(p)$. We know that the map $q_p: \ell_\infty(p) \rightarrow R$, defined by $q_p((x_k)) = \sup_k |x_k|^{\frac{1}{k}}$ is a near quasi-norm on $\ell_\infty(p)$. For each $k \in N$, let $x^{(n)} = (1, 1, 1, \dots)$ and $t_n = \frac{1}{n}$ for all $n \in N$. Then $x^{(n)} \rightarrow (1, 1, 1, \dots)$ and $t_n \rightarrow 0$. But we see that

$$q_p(t_n x^{(n)}) = \sup_k \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{k}} = 1$$

for all $n \in N$. Then $t_n x^{(n)} \not\rightarrow 0$. This shows that the map $(t, x) \mapsto tx$ from $R \times X \rightarrow X$ is not continuous and q_p is not a quasi-norm on $\ell_\infty(p)$.

In a near quasi-normed space, by using the same argument as in [5], Theorem 9, page 18, we also have the same criterion for completeness as in a quasi-normed space.

Proposition 2.3 *A near quasi-normed space (X, q) is complete iff every absolutely convergent series in X is convergent.*

The following proposition gives some criteria for boundedness in near quasi-normed space.

Proposition 2.4 Let (X, q) be a near quasi-normed space and $B \in X$. The following are equivalent:

- (1) B is bounded,
- (2) for each neighborhood U of 0 in X , there exists a positive real number ϵ such that if $|t| \leq \epsilon$ implies $tB \subseteq U$,
- (3) for each neighborhood U of 0 in X , there exists a positive real number t_0 such that if $|t| \geq t_0$ implies $B \subseteq tU$.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Assume that B is bounded. Let U be a neighborhood of 0 in X . Suppose that (2) does not hold. Then there is a neighborhood U of 0 in X and a sequence of scalar (t_n) such that $t_n \rightarrow 0$ and $t_n B \not\subseteq U$, so that there is a sequence (x_n) in B such that $t_n x_n \notin U$. Hence $(t_n x_n)$ does not converge, so B is not bounded. $\square$

In the next proposition, we give a relation between boundedness and metrically boundedness in a near quasi-normed space.

Proposition 2.5 In a near quasi-normed space, a bounded subset is metrically bounded, but the converse does not hold in general.

Proof. Let X be a near quasi normed space and $B \subseteq X$ a bounded set. By Proposition 2.4(3), there exists $n \in N$ such that $B \subseteq nB(0, 1)$. Since $nB(0, 1) \subseteq B(0, n)$, we have $B \subseteq B(0, n)$. Hence B is metrically bounded.

Now, consider the sequence space $\ell_\infty(p)$ where $p = (\frac{1}{n})$. We know that $(\ell_\infty(p), q_p)$ is a near quasi-normed space. Let $B = \{\frac{1}{n}e : n \in N\}$ where $e = (1, 1, 1, \dots)$. Since $q_p(\frac{1}{n}e) = \sup_k (\frac{1}{n})^{\frac{1}{p_k}} = 1$ for all $n \in N$, we have B is metrically bounded. For each $n \in N$, let $t_n = \frac{1}{n}$ and $x_n = \frac{1}{n}e \in B$, we see that $q_p(t_n x_n) = \sup_k (\frac{1}{n^2})^{\frac{1}{p_k}} = 1$. Hence $t_n x_n \not\rightarrow 0$, so that B is not bounded. The proof is now complete. $\square$

In a general TVS, we have that every convergent sequence is bounded, but it is not true in a near quasi-normed space. For example, the sequence (x_n) in $(\ell_\infty(p), q_p)$, where $p = (\frac{1}{n})$ and $x_n = (1, 1, 1, \dots)$ for all $n \in N$, is convergent, but not bounded because $q_p(\frac{1}{n}x_n) = 1$ for all $n \in N$.

We now turn to the question that when the concepts of boundedness and metrically boundedness are equivalent, and we obtain the following theorem.

Theorem 2.6 In a near quasi-normed space (X, q) , if q has a scalar multiplicative factor, then $B \subseteq X$ is bounded if and only if B is metrically bounded.

Proof. Let $\lambda > 0$ and $r > 0$ be such that

$$q(\alpha x) \leq \lambda |\alpha|^r q(x) \text{ for all } \alpha \in F \text{ and } x \in X. \quad (2.1)$$

By proposition 2.4, if B is bounded, then B is metrically bounded.

Conversely, assume that B is metrically bounded. Let $x_k \in B$ and $t_k \in F$, $t_k \rightarrow 0$. Then there exists $K > 0$ such $q(x) \leq K$ for all $x \in B$. By (2.1), we have

$$q(t_k x_k) \leq \lambda |t_k|^r q(x_k) \leq \lambda K |t_k|^r.$$

Consequently, $q(t_k x_k) \rightarrow 0$, so B is bounded. $\square$

Since every convergent sequence in a near quasi-normed space is metrically bounded, we immediately obtain from Theorem 2.5:

Corollary 2.7 Let (X, q) be a near quasi-normed space. If q has a scalar multiplicative factor, then every convergent sequence in (X, q) is bounded.

3. Scalar Multiplicative Factors and Kernels

We begin with the following proposition:

Proposition 3.1 Let (X, q) be a near quasi-normed space. If q has a scalar multiplicative factor, then q is a quasi-norm.

Proof. Suppose that q has a scalar multiplicative factor. Then there are $\lambda > 0$ and $r > 0$ such that

$$q(\alpha x) \leq \lambda |\alpha|^r q(x) \text{ for all } \alpha \in F \text{ and } x \in X \quad (3.1)$$

Let $t_k, t \in F$, $t_k \rightarrow t$ and $x_k, x \in X$, $q(x_k - x) \rightarrow 0$. By the triangle inequality of q and (3.1), we have

$$q(t_k x_k - tx) \leq \lambda |t_k|^r q(x_k - x) + \lambda |t_k - t|^r q(x) \quad (3.2)$$

It follows from (3.2) that $q(t_k x_k - tx) \rightarrow 0$, so q satisfies (iv). Hence q is a quasi-norm on X .

If q is a near quasi-norm on X , the kernel of q , denoted by $\text{Ker } q$, is the set of all $x \in X$ such that $q(x) = 0$. If q is trivial, i.e., $q \equiv 0$, then every $\lambda > 0$ is an r -scalar multiplicative factor for q for all $r > 0$. For a near quasi-norm q and for $r > 0$, define

$$\lambda_{\text{inf}}^{(r)} \equiv \sup_{\substack{x \notin \text{Ker } q \\ \alpha \in F, \alpha \neq 0}} \frac{q(\alpha x)}{|\alpha|^r q(x)}$$

We show in the next theorem that having scalar multiplicative factors of quasi-norms are concerned with the kernel of q and $\lambda_{\text{inf}}^{(r)}$.

Theorem 3.2 Let (X, q) be a non-trivial near quasi-normed space, and $r > 0$. Then

- (1) q has r -scalar multiplicative factors if and only if $\text{Ker } q$ is a closed subspace of X and $1 \leq \lambda_{\text{inf}}^{(r)} < \infty$.

(2) If q has r -scalar multiplicative factors, then $\lambda_{inf}^{(r)}$ is the best(least) r -scalar multiplicative factor for q .

Proof. (1) Suppose that λ is an r -scalar multiplicative factor for q . Then

$$q(\alpha x) \leq \lambda |\alpha|^r q(x) \quad (3.3)$$

for all $x \in X$ and $\alpha \in F$. It follows from (3.3) that $\lambda_{inf}^{(r)} \leq \lambda$, so $\lambda_{inf}^{(r)} < \infty$. Since q is non-trivial, there exists $x \in X$ such that $q(x) \neq 0$. Since $\lambda_{inf}^{(r)} \geq \frac{q(1x)}{1^r q(x)}$, we obtain that $\lambda_{inf}^{(r)} \geq 1$. Since $\text{Ker } q = q^{-1}(\{0\})$ and q is continuous, we have $\text{Ker } q$ is closed. Now, we show that $\text{Ker } q$ is a subspace of X . To show this let $x, y \in \text{Ker } q$ and $\alpha \in F$. By the triangle inequality of q and (3.4), we have $q(x+y) \leq q(x) + q(y) = 0 + 0 = 0$ and $q(\alpha x) \leq \lambda |\alpha|^r q(x) = 0$. Hence $x+y$ and $\alpha x \in \text{Ker } q$, so that $\text{Ker } q$ is a subspace of X .

Conversely, assume that $\text{Ker } q$ is a closed subspace of X and $1 \leq \lambda_{inf}^{(r)} < \infty$. We shall show that

$$q(\alpha x) \leq \lambda_{inf}^{(r)} |\alpha|^r q(x) \quad (3.4)$$

for all $x \in X$ and $\alpha \in F$.

If $x \in \text{Ker } q$ and $\alpha \in F$, we have $\alpha x \in \text{Ker } q$ because $\text{Ker } q$ is a subspace of X , hence $0 = q(\alpha x) = \lambda_{inf}^{(r)} |\alpha|^r q(x)$. Let $x \notin \text{Ker } q$. If $\alpha = 0$, then $0 = q(\alpha x) = \lambda_{inf}^{(r)} |\alpha|^r q(x)$. If $\alpha \neq 0$, then $\frac{q(\alpha x)}{|\alpha|^r q(x)} \leq \lambda_{inf}^{(r)}$, so that $q(\alpha x) \leq \lambda_{inf}^{(r)} |\alpha|^r q(x)$, so (3.4) is obtained, that is, $\lambda_{inf}^{(r)}$ is an r -scalar multiplicative factor for q . The proof is now complete.

(2) Assume that q has r -scalar multiplicative factors. By (1), we have $\lambda_{inf}^{(r)} < \infty$. If $\lambda > 0$ is an r -scalar multiplicative factor for q , we have

$$q(\alpha x) \leq \lambda |\alpha|^r q(x) \quad (3.5)$$

for all $x \in X$ and $\alpha \in F$.

We obtain from (3.5) that $\lambda_{inf}^{(r)} = \sup_{\substack{x \notin \text{Ker } q \\ \alpha \in F, \alpha \neq 0}} \frac{q(\alpha x)}{|\alpha|^r q(x)} \leq \lambda$, so (2) is obtained. $\square$

We show in next proposition that there always exists a proper near quasi-norm on every finite dimensional vector space having r -scalar multiplicative factors for all r with $0 < r \leq 1$.

Proposition 3.3 Let X be a finite dimensional vector space and $0 < r \leq 1$. Then there is a proper near quasi-norm q on X having r -scalar multiplicative factors.

Proof. Suppose that $\dim X = n$ and let $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ be a basis for X . For each $i = 1, 2, \dots, n$, define $q_i : X \rightarrow R$ as follows: For $x \in X$, there exists a unique scalars $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ such that $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, let $q_i(x) = |\alpha_i|^r$. It is easy to see that q_i is a near quasi-norm on X and $q_i(\alpha x) = |\alpha|^r q_i(x)$, so that q_i has scalar multiplicative factors. By the definition of q_i we have $\text{Ker } q_i = \{ \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j x_j : \alpha_j \in F, j \neq i, \text{ so } \text{Ker } q \neq \{0\} \text{ and } \text{Ker } q \neq X, \text{ hence } q_i \text{ is proper. This complete the proof. } \square$

4. Scalar Multiplicative Factors on $\ell_{\infty}(p)$ and $\ell(p)$.

We start with the following theorem.

Theorem 4.1 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers. Then q_p has scalar multiplicative factors if and only if $p_k = p_{k+1}$ for all $k \in N$.

Proof. If $r = p_k = p_{k+1}$ for all $k \in N$, then for $x = (x_k) \in \ell_{\infty}(p)$ and $\alpha \in F$, we have $q_p(\alpha x) = |\alpha|^r q_p(x)$, so that q_p has scalar multiplicative factors.

Suppose, conversely, that q_p has scalar multiplicative factors. By Theorem 2.1 (a), there exists $r > 0$ such that

$$\lambda_{inf}^{(r)} = \sup_{\substack{x \notin \text{Ker } q_p \\ \alpha \in F, \alpha \neq 0}} \frac{q_p(\alpha x)}{|\alpha|^r q_p(x)} < \infty. \quad (4.1)$$

Let $a = \sup_k p_k$, $b = \inf_k p_k$ and $\epsilon = (1, 1, \dots)$. If $r < \frac{a}{M}$, then for $\alpha \in F$, $|\alpha| \geq 1$, we have

$$\frac{q_p(\alpha \epsilon)}{|\alpha|^r q_p(\epsilon)} = \sup_k |\alpha|^{\frac{a}{M} - r} = |\alpha|^{\frac{a}{M} - r}.$$

So $\lambda_{inf}^{(r)} = \sup_{\substack{x \notin \text{Ker } q_p \\ \alpha \in F, \alpha \neq 0}} \frac{q_p(\alpha x)}{|\alpha|^r q_p(x)} \geq \sup_{|\alpha| \geq 1} |\alpha|^{\frac{a}{M} - r} = \infty$ which contradicts to (4.1). Hence $r \geq \frac{a}{M}$.

If $r > \frac{a}{M}$, then for $\alpha \in F$, $|\alpha| \leq 1$, we have

$$\frac{q_p(\alpha \epsilon)}{|\alpha|^r q_p(\epsilon)} = \sup_k |\alpha|^{\frac{b}{M} - r} = |\alpha|^{\frac{b}{M} - r}.$$

Hence, we get

$$\lambda_{inf}^{(r)} = \sup_{\substack{x \notin \text{Ker } q_p \\ \alpha \in F, \alpha \neq 0}} \frac{q_p(\alpha x)}{|\alpha|^r q_p(x)} \geq \sup_{|\alpha| \leq 1} |\alpha|^{\frac{b}{M} - r} = \infty.$$

which is a contradiction. Thus, we get $r = \frac{a}{M}$. Then for $\alpha \in F$, $|\alpha| \leq 1$, we have

$$\frac{q_p(\alpha \epsilon)}{|\alpha|^r q_p(\epsilon)} = \sup_k |\alpha|^{\frac{a}{M} - r} = |\alpha|^{\frac{a}{M} - r},$$

so if $b < a$, we get

$$\lambda_{inf}^{(r)} \geq \sup_{|\alpha| \leq 1} |\alpha|^{\frac{b}{M} - r} = \infty$$

which again contradicts to (4.1), hence $b = a$, that is $p_k = p_{k+1}$ for all $k \in N$. This complete the proof of the theorem. $\square$

Theorem 4.20 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers. Then q'_p has scalar multiplicative factors if and only if $p_k = p_{k+1}$ for all $k \in N$.

Proof. If $r = p_k = p_{k+1}$ for all $k \in N$, then for $x = (x_k) \in l(p)$ and $\alpha \in F$, we have

$$q'_p(\alpha x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^r |x_k|^r \right)^{\frac{1}{r}} = |\alpha|^{\frac{r}{r}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^r \right)^{\frac{1}{r}} = |\alpha|^{\frac{r}{r}} q'_p(x).$$

It follows that q'_p has scalar multiplicative factors.

Suppose, conversely, that q'_p has scalar multiplicative factors. By Theorem 2.1 (a), there is $r > 0$ such that

$$\lambda_{inf}^{(r)} = \sup_{\substack{x \notin \text{Ker } q'_p \\ x \in F, \|x\| \leq 1}} \frac{q'_p(\alpha x)}{|\alpha|^r q'_p(x)} < \infty. \quad (4.2)$$

Let $a = \sup_k p_k$, $b = \inf_k p_k$ and $e^{(k)}$ be the sequence whose k^{th} position is 1 and 0 otherwise. If $r < \frac{a}{M}$,

then we have $\sup_{\substack{x \notin \text{Ker } q'_p \\ x \in F, \|x\| \leq 1}} \frac{q'_p(\alpha x)}{|\alpha|^r q'_p(x)} \geq \sup_{\substack{k \in N \\ x \in F, \|x\| \geq 1}} \frac{q'_p(\alpha e^{(k)})}{|\alpha|^r q'_p(e^{(k)})} = \sup_{\substack{k \in N \\ x \in F, \|x\| \geq 1}} |\alpha|^{\frac{r}{r}} = \sup_{|\alpha| \geq 1} |\alpha|^{\frac{r}{r}} = \infty$, which

contradicts to (4.2). Hence $r \geq \frac{a}{M}$. If $r > \frac{a}{M}$, then we have $\sup_{\substack{x \notin \text{Ker } q'_p \\ x \in F, \|x\| \leq 1}} \frac{q'_p(\alpha x)}{|\alpha|^r q'_p(x)} \geq \sup_{\substack{k \in N \\ x \in F, 0 < \|x\| \leq 1}} \frac{q'_p(\alpha e^{(k)})}{|\alpha|^r q'_p(e^{(k)})} =$

$\sup_{\substack{k \in N \\ \|x\| \leq 1}} |\alpha|^{\frac{r}{r}} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\alpha|^{\frac{r}{r}} = \infty$, which also contradicts to (4.2). Thus, we have $r = \frac{a}{M}$. If $b < a$, then

$\sup_{\substack{x \notin \text{Ker } q'_p \\ x \in F, \|x\| \leq 1}} \frac{q'_p(\alpha x)}{|\alpha|^r q'_p(x)} \geq \sup_{\substack{k \in N \\ x \in F, 0 < \|x\| \leq 1}} \frac{q'_p(\alpha e^{(k)})}{|\alpha|^r q'_p(e^{(k)})} \geq \sup_{\|x\| \leq 1} |\alpha|^{\frac{r}{r}} = \infty$, which is a contradiction, so that $b = a$,

hence $p_k = p_{k+1}$ for all $k \in N$. The proof is now complete. $\square$

ACKNOWLEDGEMENTS

The author would like to thank Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

REFERENCES

- [1]. R. Arima, and M. Goldberg, Multiplicativity factors for seminorms, *J. Math. Anal. Appl.* 148 (1990), 469-481.
- [2]. R. Arima, and M. Goldberg, A class of seminorms on function algebras, *J. Math. Anal. Appl.* 162 (1991), 592-609.
- [3]. K.-G. Grosse-Erdmann, The structure of the sequence spaces of Maddox, *Canad. J. Math.* 44 (1992), 295-307.
- [4]. I. J. Maddox, *Elements of functional analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne, 1970.
- [5]. G. Swartz, *An introduction to functional analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, Hong Kong, 1992.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.

ผลงานวิจัย 2

ชื่อเรื่อง Multiplicativity Factors for p -Seminorms

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวานใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้นำไปเสนอในที่ประชุมนานาชาติทางคณิตศาสตร์ เพื่อเป็น
เกียรติในวันครบวันเกิด 60 ปี ของ Professor Lee Peng Yee
ซึ่งจัดขึ้นที่ มหาวิทยาลัย Ateneo de Manila ประเทศฟิลิปปินส์
ระหว่างวันที่ 16 - 17 ธันวาคม 2541

ผลงานนี้จะตีพิมพ์ใน Proceedings ของการประชุม ซึ่งจัดพิมพ์โดยสมาคม
คณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย

Note that a quasi-normed space is a topological space (TVS) under the metric topology induced by the quasi-norm.

We call a function $q: X \rightarrow R$ a *near quasi-norm* if q satisfies the conditions (i), (ii) and (iii) above. A *near quasi-norm space* (NQ-NLS) is a pair (X, q) where q is a near quasi-norm on X . Note that every seminormed spaces, QNLS-spaces and p -normed spaces are NQ-NLS-space. A near quasi-norm q is said to be *total* if $q(x) = 0$ implies $x = 0$. From (i) - (iii), we obtain that $q(x) \geq 0$ for all $x \in X$. If q is a near quasi-norm on X , the function $d: X \times X \rightarrow R$ defined by $d(x, y) = q(x - y)$ is a translation invariant semi-metric on X which is a metric if and only if q is total. We call d the semi-metric induced by q . We always assume that a near quasi-normed space carries the metric topology induced by d .

Let q be a near quasi-norm on a vector space X . Then q is said to have a *scalar multiplicative factor* for q if there are $\lambda > 0$ and $r > 0$ such that

$$q(\alpha x) \leq \lambda |\alpha|^r q(x) \quad (1.1)$$

for all $\alpha \in F, x \in X$.

S. Suantai [6] gave an example showing that a near quasi-normed space is not necessarily a TVS, but if it has a scalar multiplicative factor, then it is shown in [6] that it is a TVS. It is obvious that every p -seminorm on an algebra is a near quasi-norm having a scalar multiplicative factor, so it is a TVS.

For $p > 0$, we call a function $S: X \rightarrow R$ a *p-seminorm* if for all $x, y \in X$ and $\alpha \in F$:

$$S(x) \geq 0$$

$$S(\alpha x) = |\alpha|^p S(x)$$

$$S(x + y) \leq S(x) + S(y)$$

If, in addition $S(x) \neq 0$ for all $x \neq 0$ then S is a *p-norm*. If S is a p -seminorm on X we call (X, S) a *p-seminormed linear space* (*p-semi-NLS*).

If S is a p -seminorm then S is necessarily positive i.e., $S(x) \geq 0$ for all $x \in A$. It is obvious that for a p -seminorm S the kernel of S , denoted by $\text{Ker } S$, is a vector subspace of A . We call a p -seminorm S *proper* if S does not vanish identically and $S(x) = 0$ for some $x \neq 0$. Let S be a p -seminorm on A . Then S is said to be *submultiplicative* (or simply, *multiplicative*) if

$$S(xy) \leq S(x)S(y) \text{ for all } x, y \in A;$$

and *subquadratic* (or simply, *quadratic*) if

$$S(x^2) \leq S(x)^2 \text{ for all } x \in A.$$

R. Arens and M. Goldberg [1,2] studied multiplicativity factors for a seminorm on any algebra.

Example 1.1 Let $B(H)$ be the algebra of bounded linear operators on a Hilbert space H over C . For $p \in R$, $0 < p \leq 1$, let $r_p : B(H) \rightarrow R$ be defined by

$$r_p(A) = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} |\langle Ax, x \rangle|^p.$$

It is easy to see that r_p is a p -norm on $B(H)$. If $p = 1$, then r_1 is known as the *numerical radius* of A and it is well-known that r_1 is a nonmultiplicative norm on $B(H)$. (see [5], [6]) Since $r_p(A) = (r_1(A))^p$ for all $A \in B(H)$, we obtain that r_p is also a nonmultiplicative p -norm on $B(H)$.

For a positive constant $\mu > 0$, then obviously $S_\mu \equiv \mu S$ is p -seminorm too. We call μ a *multiplicative factor* or simply an *M-factor* for S if S_μ is multiplicative. Similarly, if $S_\lambda \equiv \lambda S$ is quadrative on A for $\lambda > 0$, we call λ a *quadratic factor* or *Q-factor* for S . It is obvious from the definitions that $\mu > 0$ is an M-factor for S iff $S(xy) \leq \mu S(x)S(y)$ for all $x, y \in A$ and $\lambda > 0$ is a Q-factor for S iff $S(x^2) \leq \lambda S(x)^2$ for all $x \in A$.

It is obvious that if a p -seminorm S has M-factors, then it has Q-factors, but the converse is often false as we will see in the following example :

Example 1.2 Let $C_{n \times n}$ be the algebra of $n \times n$ complex matrices. For $p \in N$ with $0 < p \leq 1$, define $r_p : C_{n \times n} \rightarrow R$ by

$$r_p(A) = \sup_{\substack{x \in C^n \\ \|x\|=1}} |\langle Ax, x \rangle|^p,$$

where $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$ if $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in C^n$. It is easy to see that r_p is a p -norm on $C_{n \times n}$. It is known in [5] that r_1 is a quadrative, nonmultiplicative norm on $C_{n \times n}$. Since $r_p(A) = (r_1(A))^p$ for all $A \in C_{n \times n}$, we have that r_p is also a quadrative, nonmultiplicative p -norm on $C_{n \times n}$.

The purpose of this paper is to discuss M- and Q-factors for p -norms and proper p -seminorm on arbitrary algebras. We begin in Section 2, by studying the multiplicativity of a p -seminorm S in term of kernel of S and we show that p -norms on finite dimensional algebras always have M-factors. In section 3 we provide conditions for which p -seminorms have Q-factors and we give that under what conditions does a p -seminorm S have M-factors if it has Q-factors.

2. Multiplicativity Factors and Kernels

The following theorem give necessary and sufficient conditions for a p -seminorm S to have M-factors.

Theorem 2.1 Let S be a p -seminorm on an algebra A . Then

(1) S has M -factors if and only if $\text{Ker } S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$ and

$$\mu_{\inf} \equiv \sup\{S(xy) : x, y \in \mathcal{A}, S(x) = 1, S(y) = 1\} < \infty. \quad (2.1)$$

(2) If S has M -factors and $\mu_{\inf} > 0$, then $\mu_{\inf}$ is the best(least) M -factor for S .

(3) If S has M -factors and $\mu_{\inf} = 0$, then μ is an M -factor if and only if $\mu > 0$.

Proof. (1) If $\mu > 0$ is an M -factor for S , we have $S(xy) \leq \mu S(x)S(y) = 0$ for all $x \in \mathcal{A}$ and $y \in \text{Ker } S$. Consequently, $S(xy) = 0$, i.e., $xy \in \text{Ker } S$. Similarly, we have $yx \in \text{Ker } S$. Thus $\text{Ker } S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$. Since $S(xy) \leq \mu S(x)S(y)$ for all $x, y \in \mathcal{A}$, we have $S(xy) \leq \mu$ for all $x, y \in \mathcal{A}$ such that $S(x) = 1$ and $S(y) = 1$. Hence $\sup\{S(xy) : x, y \in \mathcal{A}, S(x) = 1, S(y) = 1\} < \infty$.

Conversely, suppose that $\text{Ker } S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$ and $\mu_{\inf} < \infty$. If $S \equiv 0$, it is obvious that every $\mu > 0$ is an M -factor for S , so S has M -factors. Now, suppose that $S \not\equiv 0$. Let $\mu > 0$ and $\mu \geq \mu_{\inf}$. Then

$$S(xy) \leq \mu \text{ for all } x, y \in \mathcal{A}, S(x) = 1, S(y) = 1. \quad (2.2)$$

Let $x, y \in \mathcal{A}$. If x or $y \in \text{Ker } S$, then $xy \in \text{Ker } S$ since $\text{Ker } S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$, hence

$$0 = S(xy) = \mu S(x)S(y). \quad (2.3)$$

If $x, y \notin \text{Ker } S$, then $S(u) = S(v) = 1$ where $u = \frac{x}{(S(x))^{\frac{1}{\mu}}}$ and $v = \frac{y}{(S(y))^{\frac{1}{\mu}}}$. By (2.2), $S(uv) \leq \mu$. But since $S(uv) = \frac{S(xy)}{S(x)S(y)}$, we get that $\frac{S(xy)}{S(x)S(y)} \leq \mu$. Thus, we have

$$S(xy) \leq \mu S(x)S(y) \text{ for all } x, y \notin \text{Ker } S. \quad (2.4)$$

By (2.3) and (2.4) we obtain

$$S(xy) \leq \mu S(x)S(y) \text{ for all } x, y \in \mathcal{A}.$$

Hence μ is an M -factor for S , so S has M -factors.

(2) If S has M -factors and $\mu_{\inf} > 0$, by using the same proof as in the sufficient part of (i) we obtain that $\mu_{\inf}$ is an M -factor for S and it is clear from the definition of $\mu_{\inf}$ that if $\mu > 0$ is an M -factor for S , then $\mu_{\inf} \leq \mu$, so that $\mu_{\inf}$ is the least M -factor for S .

(3) If S has M -factors and $\mu_{\inf} = 0$, then

$$S(xy) = 0 \text{ for all } x, y \in \mathcal{A}, S(x) = 1, S(y) = 1. \quad (2.5)$$

If x or $y \in \text{Ker } S$, then $S(xy) = 0$ since $\text{Ker } S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$ (by (1)). If $x, y \notin \text{Ker } S$, then $S(\frac{x}{S(x)^{\frac{1}{\mu}}}) = 1 = S(\frac{y}{S(y)^{\frac{1}{\mu}}})$, it follows from (2.5) that $S(xy) = 0$. Therefore $S(xy) = 0$ for all $x, y \in \mathcal{A}$, so that if $\mu > 0$, we have $S(xy) = 0 \leq \mu S(x)S(y)$ for all $x, y \in \mathcal{A}$. Hence $\mu > 0$ is always an M -factor for S , so we obtain (3). $\square$

The next theorem shows that p -norms on finite dimensional algebras always have M -factors. To show this, we need a lemma.

Lemma 2.2 *Let S be a p -norm on a vector space X . If $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ is linearly independent set of vectors in X , then there is a number $c > 0$ such that for every choice of scalars $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ we have*

$$S\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \geq c \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p. \quad (2.6)$$

Proof. We first note that if S is a p -seminorm which does not vanish identically, then $0 < p \leq 1$. To see this, let $x \in X$, $S(x) \neq 0$, we have by (ii) and (iii) that $2^p S(x) = S(2x) \leq 2S(x)$, so $2^p \leq 2$, hence $0 < p \leq 1$.

For $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$, we write $s = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p$. If $s = 0$, then all α_i are zero, so that (2.6) holds for any c . If $s \neq 0$, then (2.6) is equivalent to the inequality which we obtain from (2.6) by dividing by s and writing $\beta_i = \frac{\alpha_i}{s^{1/p}}$, that is

$$S\left(\sum_{i=1}^n \beta_i x_i\right) \geq c, \text{ where } \sum_{i=1}^n |\beta_i|^p = 1 \quad (2.7)$$

It suffices to prove the existence of a $c > 0$ such that (2.7) holds for every n -tuple of scalars $\beta_1, \dots, \beta_n$ with $\sum_{i=1}^n |\beta_i|^p = 1$.

Suppose that this is false. Then there exists a sequence (y_m) of vectors

$$y_m = \sum_{i=1}^n \beta_i^{(m)} x_i \text{ where } \sum_{i=1}^n |\beta_i^{(m)}|^p = 1$$

so that $S(y_m) \rightarrow 0$ as $m \rightarrow \infty$. Since $\sum_{i=1}^n |\beta_i^{(m)}|^p = 1$, we have $|\beta_i^{(m)}| \leq 1$. Hence for each fixed i , the sequence $(\beta_i^{(m)})$ is bounded. By the Bolzano-Weierstrass theorem, $(\beta_i^{(m)})$ has a convergent subsequence. Let β_1 denote the limit of that subsequence, and let $(y_{1,m})$ denote the corresponding subsequence of (y_m) . By the same argument, $(y_{1,m})$ has a subsequence $(y_{2,m})$ for which the corresponding subsequence of scalars $(\beta_2^{(m)})$ converges; let β_2 denote the limit. Continuing in this way, after n steps we obtain a subsequence $(y_{n,m}) = (y_{n,1}, y_{n,2}, \dots)$ of (y_m) whose terms are of the form

$$y_{n,m} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(m)} x_i,$$

where $\sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(m)}|^p = 1$ and $\alpha_i^{(m)} \rightarrow \beta_i$ as $m \rightarrow \infty$ for all $i = 1, 2, \dots, n$.

Let $y = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$. Then $y_{n,m} \rightarrow y$ as $m \rightarrow \infty$. Since $\sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(m)}|^p = 1$ and $\alpha_i^{(m)} \rightarrow \beta_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), we thus have $\sum_{i=1}^n |\beta_i|^p = 1$, so that not all β_i can be zero. Since $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ is linearly independent, we have $y \neq 0$. By the continuity of p -norm, $\|y_{n,m}\| \rightarrow \|y\|$ as $m \rightarrow \infty$, we must have $\|y_{n,m}\| \rightarrow 0$. Hence $\|y\| = 0$, so that $y = 0$. This contradicts $y \neq 0$, and the lemma is proved. $\square$

Theorem 2.3 Every p -norm on finite dimensional algebra always has M -factors.

Proof. Let S be a p -norm on a finite dimensional algebra $\mathcal{A}$. Let $\{x_1, \dots, x_n\}$ be a basis for $\mathcal{A}$. By Lemma 2.2, there is a number $c > 0$ such that

$$S\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \geq c \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \quad (2.8)$$

for all scalars $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Let $x, y \in \mathcal{A}$. Then we can write $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ and $y = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$ for some $\alpha_i, \beta_i \in F$ ($i = 1, 2, \dots, n$), so $xy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j x_i x_j$. By (2.8), we have

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \leq \frac{1}{c} S(x) \quad \text{and} \quad \sum_{j=1}^n |\beta_j|^p \leq \frac{1}{c} S(y) \quad (2.9)$$

By the properties of the p -norm S and (2.9), we have

$$\begin{aligned} S(xy) &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_i|^p |\beta_j|^p S(x_i x_j) \\ &\leq M \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_i|^p |\beta_j|^p, \quad \text{where } M = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} S(x_i x_j) \\ &= M \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \right) \left(\sum_{j=1}^n |\beta_j|^p \right) \\ &\leq \mu S(x) S(y), \quad \text{where } \mu = \frac{M}{c^2}. \end{aligned}$$

Hence μ is an M -factor for S , so the theorem is proved. $\square$

By Theorem 2.1(1) we have that if a p -seminorm S on an algebra $\mathcal{A}$ has M -factors, then $\text{Ker } S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$. The following theorem shows that this condition is a sufficient condition for a p -seminorm S on a finite dimensional algebra to have M -factors.

Theorem 2.4 Let S be a p -seminorm on a finite dimensional algebra $\mathcal{A}$. Then S has M -factors if and only if $\text{Ker } S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$.

Proof. By Theorem 2.1(1), if S has M -factors, then $\text{Ker } S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$.

Conversely, suppose $K = \text{Ker } S$ is a two-sided ideal in $\mathcal{A}$. Consider the quotient algebra $\mathcal{A}/K$, and define

$$N(x + K) = S(x) \quad \text{for all } x \in \mathcal{A}.$$

Clearly, N is a p -seminorm on $\mathcal{A}/K$. If $N(x + K) = 0$, then $S(x) = 0$, so that $x \in \text{Ker } S = K$, hence $x + K = K$ which is zero in $\mathcal{A}/K$, we thus have N is a p -norm on $\mathcal{A}/K$. Thus N has M -factors by Theorem 2.3, and S has the same M -factors on $\mathcal{A}$. This complete the proof. $\square$

For $0 < p \leq 1$, the following theorems and corollaries give the existence of a p -seminorm on a finite dimensional algebra with certain kernel. To do this, we begin with the following lemma.

Lemma 2.5 *Let $\mathcal{A}$ be a finite dimensional vector space and $0 < p \leq 1$. Then there is a p -norm S defined on $\mathcal{A}$.*

Furthermore, if S' is a p -norm on $\mathcal{A}$, then S' is equivalent to S (i.e., there are $a, b > 0$ such that $aS'(x) \leq S(x) \leq bS'(x)$ for all $x \in \mathcal{A}$).

Proof. Let $\{x_1, \dots, x_n\}$ be a basis for $\mathcal{A}$. For each $x \in \mathcal{A}$, there exists unique $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ such that x can be written in the form $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, let $S(x) = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p$. It is obvious that S satisfies (i) and (ii) and $S(x) = 0 \iff x = 0$. To show S satisfies (iii), let $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ and $y = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$, where $\alpha_i, \beta_i \in F$ ($i = 1, \dots, n$). Since $|\alpha_i + \beta_i|^p \leq |\alpha_i|^p + |\beta_i|^p$ for all $i = 1, \dots, n$, we have

$$\begin{aligned} S(x+y) &= \sum_{i=1}^n |\alpha_i + \beta_i|^p \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p + \sum_{i=1}^n |\beta_i|^p \\ &= S(x) + S(y). \end{aligned}$$

Hence S satisfies (iii). Thus S is a p -norm on $\mathcal{A}$.

Now, suppose that S' is any p -norm on $\mathcal{A}$ and let $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ where $\alpha_i \in F$ ($i = 1, \dots, n$). By triangle inequality of S , we have

$$\begin{aligned} S'(x) &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p S'(x_i) \\ &\leq M \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \\ &= MS(x), \text{ where } M = \sup_{1 \leq i \leq n} S'(x_i). \end{aligned} \quad (2.10)$$

By applying Lemma 2.2 with S' , there is $c > 0$ such that

$$S'(x) = S'\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \geq c \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p = cS(x) \quad (2.11)$$

It follows from (2.10) and (2.11) that

$$aS'(x) \leq S(x) \leq bS'(x) \text{ for all } x \in \mathcal{A}$$

where $a = \frac{1}{M}$ and $b = \frac{1}{c}$. Hence S' and S are equivalent. $\square$

Theorem 2.6 *Let $\mathcal{A}$ be an algebra and let K a two-sided ideal in $\mathcal{A}$ such that $\mathcal{A}/K$ is finite dimensional. Then for $0 < p \leq 1$, there is a p -seminorm S on $\mathcal{A}$ with kernel K , having M -factors.*

Proof. Let $p \in R$, $0 < p \leq 1$ and let S' be a p -norm on A/K defined as in Lemma 2.5. Let

$$S(x) = S'(x + K) \text{ for all } x \in A$$

It is clear that S is a p -seminorm on A whose kernel is K . By Theorem 2.3, S' has M -factors on A/K . Thus S has the same factors on A , and the theorem is proved. $\square$

By Theorem 2.6 we obtain :

Corollary 2.7 *Let A be a finite dimensional algebra and K a two-sided ideal in A . Then for $0 < p \leq 1$, there is a p -seminorm S on A with kernel K , having M -factors.*

If A is commutative and $x \in A$, $x \neq 0$ is not invertible, we have

$$\langle x \rangle \equiv \{xa : a \in A\}$$

is a two-sided proper ideal in A . By applying Corollary 2.7 with $K = \langle x \rangle$ we obtain :

Corollary 2.8 *If A is a commutative finite dimensional algebra and $x \in A$, $x \neq 0$ is not invertible, then there is a proper p -seminorm S on A with $S(x) = 0$, having M -factors.*

For a simple algebra, we obtain the following theorem :

Theorem 2.9 *Let A be an algebra and $0 < p \leq 1$. If A is simple, then there are no multiplicative proper p -seminorms on A .*

Proof. Let S be a multiplicative p -seminorm on A . By Theorem 2.1 (1), $K = \text{Ker } S$ is a two-sided ideal in A . Since A is simple, $K = \{0\}$ or $K = A$. In the first case S is a p -norm, and in the second $S = 0$. This complete the proof. $\square$

Since $F_{n \times n}$, the algebra of $n \times n$ matrices over F , is simple (e.g. [4], Theorem 10 p.414), we immediately obtain from Theorem 2.9 :

Corollary 2.10 *There are no multiplicative proper p -seminorm on $F_{n \times n}$.*

3. Quadraticity Factors and Kernel

By using the same proof as in Theorem 1.2, [2] with some modifications we can easily prove the following result :

Theorem 3.1 *Let S be a p -seminorm on an algebra A . Then S has Q -factors if and only if $\text{Ker } S$ is closed under squaring (i.e., $x^2 \in \text{Ker } S$ for all $x \in \text{Ker } S$) and*

$$\lambda_{in f} \equiv \sup \{ S(x^2) : x \in A, S(x) \leq 1 \} < \infty. \quad (3.1)$$

Proof. Suppose that $\lambda > 0$ is a Q-factor for S . Then

$$S(x^2) \leq \lambda S(x)^2 \text{ for all } x \in \mathcal{A} \quad (3.2)$$

If $x \in \text{Ker } S$, we obtain from (3.2) that $S(x^2) \leq \lambda S(x)^2 = 0$, so that $S(x^2) = 0$. It follows from (3.2) that $S(x^2) \leq \lambda$ if $S(x) \leq 1$, so $\lambda_{inf} \leq \lambda$, hence (3.1) is satisfied.

Suppose, conversely, that $\text{Ker } S$ is closed under squaring and (3.1) holds. If $x \in \text{Ker } S$, by assumption, we have $x^2 \in \text{Ker } S$, so $S(x^2) = \lambda_{inf} S(x)^2 = 0$. If $x \notin \text{Ker } S$, then $S(\frac{x}{S(x)^{\frac{1}{2}}}) = 1$, so we obtain from (3.1) that $\frac{S(x^2)}{S(x)^2} = S((\frac{x}{S(x)^{\frac{1}{2}}})^2) \leq \lambda_{inf}$, hence $S(x^2) \leq \lambda_{inf} S(x)^2$. Thus λ_{inf} is a Q-factor for S . This complete the proof. $\square$

Theorem 3.1 gives that under what conditions the p-seminorm S on an algebra $\mathcal{A}$ has Q-factors. We further give another necessary and sufficient conditions for a p-seminorm S to have Q-factors in next theorem. We first need a lemma:

Lemma 3.2 Let S be a quadratic p-seminorm on an algebra $\mathcal{A}$. Then

$$S(xy + yx) \leq 2^{3-p} S(x)S(y) \text{ for all } x, y \in \mathcal{A}.$$

Proof. Since $2xy + 2yx = (x+y)^2 - (x-y)^2$, we have $2^p S(xy + yx) \leq S((x+y)^2 + S(x-y)^2) \leq 2(S(x) + S(y))^2$, so if $S(x) \leq 1$ and $S(y) \leq 1$, we have

$$S(xy + yx) \leq 2^{3-p}. \quad (3.3)$$

Now, let $x, y \in \mathcal{A}$ be arbitrary. Then for $\epsilon > 0$, we have $S(x') \leq 1$ and $S(y') \leq 1$ where $x' = \frac{x}{(S(x) + \epsilon)^{\frac{1}{2}}}$

and $y' = \frac{y}{(S(y) + \epsilon)^{\frac{1}{2}}}$. So by (3.3), we have

$$\frac{1}{(S(x) + \epsilon)(S(y) + \epsilon)} S(xy + yx) = S(x'y' + y'x') \leq 2^{3-p}.$$

Thus $S(xy + yx) \leq 2^{3-p}(S(x) + \epsilon)(S(y) + \epsilon)$ for every $\epsilon > 0$. Since $\epsilon > 0$ is arbitrary, we have

$$S(xy + yx) \leq 2^{3-p} S(x)S(y).$$

so we have the lemma. $\square$

For an algebra $\mathcal{A}$, we recall now the Jordan product in $\mathcal{A}$, defined by

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx) \text{ for all } x, y \in \mathcal{A}.$$

Let $\mathcal{A}^+$ be the algebra obtained by replacing the product in $\mathcal{A}$ by the Jordan product. We call $\mathcal{A}^+$, the special Jordan algebra associated with $\mathcal{A}$.

As usual, we call a set $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{A}$ a Jordan ideal in $\mathcal{A}$ if $xy + yx \in \mathcal{J}$ for all $x \in \mathcal{A}$ and $y \in \mathcal{J}$.

The next theorem gives necessary and sufficient conditions for a p-seminorm S to have Q-factors.

Theorem 3.3 Let S be a p -seminorm on an algebra $\mathcal{A}$. Then S has Q -factors if and only if $\text{Ker } S$ is a Jordan ideal in $\mathcal{A}$ and (3.1) holds.

Proof. Let λ be a Q -factor for S . Then (3.1) holds by Theorem 3.1. We now show that $\text{Ker } S$ is a Jordan ideal. Since λS is quadrative, by Lemma 3.2 we have

$$\lambda S(xy + yx) \leq 2^{2-p} \lambda^2 S(x)S(y) \text{ for all } x, y \in \mathcal{A} \quad (3.4)$$

It follows from (3.4) that

$$S(xy + yx) = 0 \text{ for all } x \in \text{Ker } S, \text{ and } y \in \mathcal{A};$$

that is, $xy + yx \in \text{Ker } S$, so $\text{Ker } S$ is a Jordan ideal.

Suppose, conversely, that $\text{Ker } S$ is a Jordan ideal in $\mathcal{A}$ and $\lambda_{\text{inf}} < \infty$. If $x \in \text{Ker } S$, then $2x^2 = x^2 + x^2 = xx + xx \in \text{Ker } S$ because $\text{Ker } S$ is a Jordan ideal, so that $S(x^2) = 0$, hence $x^2 \in \text{Ker } S$. Thus $\text{Ker } S$ is closed under squaring. So, by Theorem 3.1, S has Q -factors. The proof is now complete. $\square$

Using the same argument as in Corollary 2.1 in [3], we obtain :

Theorem 3.4 There are no quadrative proper p -seminorm on a simple finite dimensional algebra.

Example 3.5 Let $C_{n \times n}$ be the algebra of $n \times n$ matrices over C . By Theorem 10 in [4], p. 414, $C_{n \times n}$ is simple, so it follows from Theorem 3.4 that there are no quadrative proper p -seminorm on $C_{n \times n}$.

For a finite dimensional algebra we have the following result :

Theorem 3.6 Let S be a p -seminorm on a finite dimensional algebra $\mathcal{A}$. Then S has Q -factors if and only if $\text{Ker } S$ is a Jordan ideal in $\mathcal{A}$.

Proof. If S has Q -factors then $\text{Ker } S$ is a Jordan ideal in $\mathcal{A}$ by Theorem 3.1.

Conversely, let $\text{Ker } S$ be a Jordan ideal in $\mathcal{A}$. Since $\text{Ker } S$ is a subspace of $\mathcal{A}$, we have $\mathcal{A}/\text{Ker } S$ is a quotient algebra. Since $\mathcal{A}$ is finite, so is $\mathcal{A}/\text{Ker } S$. Consider the quotient algebra $\mathcal{A}^+/\text{Ker } S$. Define $S' : \mathcal{A}^+/\text{Ker } S \rightarrow R$ by

$$S'(x + \text{Ker } S) = S(x) \text{ for all } x \in \mathcal{A}.$$

Clearly S' is a p -norm on $\mathcal{A}^+/\text{Ker } S$. As $\mathcal{A}/\text{Ker } S$ is finite dimensional, so is $\mathcal{A}^+/\text{Ker } S$ having the identical linear structure. By Theorem 2.3, S' has Q -factors. Let $\lambda > 0$ be a Q -factor for S' . Then for $x \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} S(x^2) &= S\left(\frac{1}{2}(xx + xx)\right) = S(x \circ x) \\ &= S'((x + \text{Ker } S)(x + \text{Ker } S)) \\ &\leq \lambda S'(x + \text{Ker } S)S'(x + \text{Ker } S) \\ &= \lambda S(x)^2. \end{aligned}$$

So λ is a Q-factor for S on $\mathcal{A}$. □

We know that if a p -seminorm S has M-factors then it has Q-factors, but the converse is not general true. The next theorem shows that these two kinds of factors are equivalent in a commutative algebra.

Theorem 3.7 *Let $\mathcal{A}$ be a commutative algebra and S be a p -seminorm on $\mathcal{A}$. Then S has M-factors if and only if S has Q-factors.*

Proof. We need only to show that if S is Q-factors, then S has M-factors.

Suppose that S has Q-factors. Then there is a $\lambda > 0$ such that λS is quadrative. Then by Lemma 3.2, we have

$$S(xy + yx) \leq 2^{3-p} \lambda S(x) S(y) \text{ for all } x, y \in \mathcal{A} \quad (3.5)$$

Since $\mathcal{A}$ is commutative, we obtain from (3.5) that

$$S(xy) \leq 2^{3-2p} \lambda S(x) S(y) \text{ for all } x, y \in \mathcal{A}$$

Hence $2^{3-2p} \lambda$ is an M-factor for S . This complete the proof. □

Acknowledgements

The author would like to thank Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

REFERENCES

- [1]. R. Arnes, and M. Goldberg, *A class of seminorms on function algebras*, J. Math. Anal. Appl. 163 (1991), 592-600.
- [2]. R. Arnes, and M. Goldberg, *Multiplicativity factors for seminorms. II*, J. Math. Anal. Appl. 170 (1992), 401-413.
- [3]. G. Birkhoff, and S. MacLane, *A Survey of Modern Algebra*, 4th ed., Macmillan, New York, 1977.
- [4]. M. Goldberg, and E. Tadmor, *On the numerical radius and its applications*, Linear Algebra Appl. 43 (1982), 263-284.
- [5]. P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Van Nostran, New York, 1967.
- [6]. S. Suantai, *Scalar multiplicativity factors for near quasi-norms*, Bull. Cal. Math. Soc. 90 (1998), -.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.

ผลงานวิจัย 3

ชื่อเรื่อง Matrix Transformations on Some Vector - Valued Sequence Spaces

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้ส่งไปเพื่อตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติ ชื่อ
Comment. Math. 1998

(ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE

Series I : COMMENTATIONES MATHEMATICAE XXXVII (1998)

Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this paper, we give the matrix characterizations from vector-valued sequence spaces of Maddox $c_0(X, p)$, $c(X, p)$, $\ell_\infty(X, p)$, and $\ell(X, p)$ into scalar-valued sequence spaces of Maddox $c_0(q)$, $c(q)$, and $\ell_\infty(q)$ where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A45.

1. INTRODUCTION

Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space and $p = (p_k)$ a bounded sequence of positive real numbers. We write $x = (x_k)$ with x_k in X for all $k \in \mathbb{N}$. The X -valued sequence spaces of Maddox are defined as

$$\begin{aligned}c_0(X, p) &= \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|^{p_k} = 0\}, \\c(X, p) &= \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\|^{p_k} = 0 \text{ for some } a \in X\}, \\ \ell_\infty(X, p) &= \{x = (x_k) : \sup_k \|x_k\|^{p_k} < \infty\}, \\ \ell(X, p) &= \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} < \infty\}\end{aligned}$$

When $X = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, the corresponding spaces are written as $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$ and $\ell(p)$ respectively and each of them is called a *sequence space of Maddox*. These spaces were first introduced and studied by Simons [6], Maddox [3, 4], and Nakano [5]. In [1] the structure of the spaces $c_0(p)$, $c(p)$, and $\ell_\infty(p)$ have been investigated.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{A}}\mathcal{S}\text{-}\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$

In this paper we consider the problem of characterizing those matrices that map an X -valued sequence spaces of Maddox into scalar-valued sequence spaces of Maddox. Grosse-Erdmann [2] has given characterizations of matrix transformations between the scalar-valued sequence spaces of Maddox. Wu and Liu [8] deal with some of this problem with some conditions on the sequences (p_k) and (q_k) . Their characterizations are derived from functional analytic principles. Our approach here is different. We use a method of reduction introduced by Grosse-Erdmann [2]. In [1] it is pointed out that $c_0(p)$ is an echelon space of order 0 and that $\ell_\infty(p)$ is a co-echelon space of order ∞ . In this paper we also show that $c_0(X, p)$ is an echelon space of order 0 and $\ell_\infty(X, p)$ is a co-echelon space of order ∞ . Therefore these spaces are made up of simpler spaces. We will use certain auxiliary results (Section 3) to reduce our problem to the characterisations of matrix mapping between much simpler spaces.

2. Notation and Definitions

2.1 Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space, the space of all sequences in X is denoted by $W(X)$ and $\Phi(X)$ is denoted for the space of all finite sequences in X . When $X = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, the corresponding spaces are written as w and ϕ .

A sequence spaces in X is a linear subspace of $W(X)$. Let E be any X -valued sequence space. For $x \in E$ and $k \in N$, we write x_k stands for the k^{th} term of x . For $k \in N$ denote by e_k the sequence $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ with 1 in the k^{th} position and by e the sequence $(1, 1, 1, \dots)$. For $x \in X$ and $k \in N$, let $e^k(x)$ be the sequence $(0, 0, \dots, 0, x, 0, \dots)$ with x in the k^{th} position and let $e(x)$ be the sequence $(x, x, x, \dots)$. For a fixed scalar sequence $\mu = (\mu_k)$ the sequence space E_μ is defined as

$$E_\mu = \{x \in W(X) : (\mu_k x_k) \in E\}.$$

The sequence space E is called *normal* if $x \in E$ and $y \in W(X)$ with $\|y_k\| \leq \|x_k\|$ for all $k \in N$ implies that $y \in E$.

2.2 Let $A = (f_k^n)$ with f_k^n in X' , the topological dual of X . Suppose that E is a space of X -valued sequences and F a space of scalar-valued sequences. Then A is said to map E into F , written by $A : E \rightarrow F$ if for each $x = (x_k) \in E$, $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for each $n \in N$, and the sequence $Ax = (A_n(x)) \in F$. Let (E, F) denote for the set of all infinite matrices mapping from E into F . If $u = (u_k)$ and $v = (v_k)$ are scalar sequences, let

$${}_u(E, F)_v = \{A = (f_k^n) : (u_n v_k f_k^n)_{n,k} \in (E, F)\}$$

If $u_k \neq 0$ for all $k \in N$, we write $u^{-1} = (\frac{1}{u_k})$. In this paper we are concerned with finding conditions on a matrix $A = (f_k^n)$ that characterise its membership to certain classes (E, F) .

2.3 Suppose that the X -valued sequence space E is endowed with some linear topology τ . Then E is called a K -space if for each $n \in N$ the n^{th} coordinate mapping $p_n : E \rightarrow X$, defined by $p_n(x) = x_n$, is

continuous on E . If, in addition, (E, τ) is an Fréchet (Banach, LF-, LB-) space, then E is called an FK- (BK-, LFK-, LBK-) space. Now, suppose that E contains $\Phi(X)$. Then E is said to have property AB if the set $\{\sum_{k=1}^n e^k(x_k) : n \in N\}$ is bounded in E for every $x = (x_k) \in E$. It is said to have property AK if $\sum_{k=1}^n e^k(x_k) \rightarrow x$ in E as $n \rightarrow \infty$ for every $x = (x_k) \in E$. It has property AD if $\Phi(X)$ is dense in E .

The space $\ell(p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k}\right)^{1/M}$, where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$. The space $c_0(p)$ is an FK-space with AK, $c(p)$ is an FK-space and $\ell_{\infty}(p)$ is a complete LBK-space with AB (see [1]). It is the same as above the space $\ell(X, p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_k^{p_k}\right)^{1/M}$, where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$. In each of the space $\ell_{\infty}(X, p)$ and $c_0(X, p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k\|_k^{p_k/M}$, where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$. It is known that $c_0(X, p)$ is an FK-space with AK under the paranorm g defined as above and $\ell_{\infty}(X, p)$ is a complete LBK-space with AB. In $c(X, p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k - a\|_k^{p_k/M} + \|a\|$ where a is the unique element in X with $x - c(a) \in c_0(X, p)$. Then g is a paranorm on $c(X, p)$ and $c(X, p)$ is an FK-space under this paranorm g .

3. Some Auxiliary Results

In this section we give various useful results that can be used to reduce our problems into some simpler forms.

Proposition 3.1 Let E and $E_n (n \in N)$ be X -valued sequence spaces, and F and $F_n (n \in N)$ scalar sequence spaces, and let u and v be sequences of real numbers with $u_k \neq 0, v_k \neq 0$ for all $k \in N$. Then we have

- (i) $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, F\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n, F)$
- (ii) $(E, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E, F_n)$
- (iii) $(E_1 + E_2, F) = (E_1, F) \cap (E_2, F)$
- (iv) $(E, F_1 \oplus F_2) = (E, F_1) \oplus (E, F_2)$ if the following two conditions hold
 - (1). E, F_1 , and F_2 are FK-spaces and E has AK and
 - (2). If (x_n) is a sequence in X with $x_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ implies $e^k(x_n) \rightarrow (0, 0, 0, \dots)$ as $n \rightarrow \infty$ in E for all $k \in N$.
- (v) $(E, c(q)) = (E, c_0(q)) \oplus (E, \langle c \rangle)$ if E is normal containing $\Phi(X)$, where $q = (q_k)$ is a bounded sequence of positive real numbers.
- (vi) $(E, F_1) = (E, F_2) \cap (\Phi(X), F_1)$ if E is an FK-space with AD, F_2 is an FK-space and F_1 is a closed subspace of F_2 .
- (vii) $(E_u, F_v) = {}_v(E, F)_{u-1}$.

Proof. Assertions (i), (ii), (iii), and (vii) are immediate.

To show (iv), suppose that the conditions (1) and (2) hold. It is clear that $(E, F_1) + (E, F_2) \subseteq (E, F_1 + F_2)$. Moreover, if $A \in (E, F_1) \cap (E, F_2)$, then $A \in (E, F_1 \cap F_2) = (E, 0)$, which implies that $A = 0$ because E contains Φ . Hence $(E, F_1) + (E, F_2)$ is a direct sum. Now we will show that $(E, F_1 \oplus F_2) \subseteq (E, F_1) + (E, F_2)$. Let $A = (f_k^n) \in (E, F_1 \oplus F_2)$. For $x \in X$ and $k \in N$, we have $(f_k^n(x))_{n=1}^\infty = A e^k(x) \in F_1 \oplus F_2$, so that there are unique sequences $(b_k^n(x))_{n=1}^\infty \in F_1$ and $(c_k^n(x))_{n=1}^\infty \in F_2$ with

$$(f_k^n(x))_{n=1}^\infty = (b_k^n(x))_{n=1}^\infty + (c_k^n(x))_{n=1}^\infty \quad (3.1)$$

For each $n, k \in N$, let g_k^n and h_k^n be functionals on X defined by

$$g_k^n(x) = b_k^n(x) \text{ and } h_k^n(x) = c_k^n(x) \text{ for all } x \in X$$

Clearly, g_k^n and h_k^n are linear and by (3.1)

$$f_k^n = g_k^n + h_k^n \text{ for all } n, k \in N. \quad (3.2)$$

Note that $F_1 \oplus F_2$ is an FK-space in its direct sum topology. By Zeller's theorem, $A : E \rightarrow F_1 \oplus F_2$ is continuous. For each $k \in N$, let $T_k : X \rightarrow E$ be defined by $T_k x = e^k(x)$. It follows from the condition (2) that T_k is continuous for all $k \in N$. Since the projection P_i of $F_1 \oplus F_2$ onto F_i ($i = 1, 2$) are continuous and $g_k^n = p_n \circ P_1 \circ A \circ T_k$, and $h_k^n = p_n \circ P_2 \circ A \circ T_k$ for all $n, k \in N$, we have g_k^n and h_k^n are continuous, so $g_k^n, h_k^n \in X'$ for all $n, k \in N$. Let $B = (g_k^n)$ and $C = (h_k^n)$. By (3.2) we have $A = B + C$ and it is clear that $B \in (\Phi(X), F_1)$ and $C \in (\Phi(X), F_2)$. We will show that $B \in (E, F_1)$ and $C \in (E, F_2)$. To do this, let $z = (x_k) \in E$. By the continuity of the matrix $A : E \rightarrow F_1 \oplus F_2$ and the AK property for E we find that $A \left(\sum_{k=1}^n e^k(x_k) \right) \rightarrow Ax$ as $n \rightarrow \infty$. Since the projection P_i of $F_1 \oplus F_2$ onto F_i ($i = 1, 2$) are continuous, we have

$$B \left(\sum_{k=1}^n e^k(x_k) \right) = P_1 \left(A \left(\sum_{k=1}^n e^k(x_k) \right) \right) \rightarrow P_1(Ax) \in F_1 \text{ and}$$

$$C \left(\sum_{k=1}^n e^k(x_k) \right) = P_2 \left(A \left(\sum_{k=1}^n e^k(x_k) \right) \right) \rightarrow P_2(Ax) \in F_2$$

Hence $B \in (E, F_1)$ and $C \in (E, F_2)$. Therefore, we have $A \in (E, F_1) \oplus (E, F_2)$, as desired.

To show (v), suppose E is normal containing $\Phi(X)$. Since $c(q) = c_0(q) \oplus \langle e \rangle$, using the same proof as in (iv) we have $(E, c_0(q)) + (E, \langle e \rangle) \subseteq (E, c_0(q) \oplus \langle e \rangle) = (E, c(q))$ and $(E, c_0(q)) + (E, \langle e \rangle)$ is a direct sum. If $A = (f_k^n) \in (E, c(q)) = (E, c_0(q) \oplus \langle e \rangle)$, the same as in (iv) we can write $A = B + C$ with $B = (g_k^n) \in (\Phi(X), c_0(q))$ and $C = (h_k^n) \in (\Phi(X), \langle e \rangle)$. Let $x \in E$. Then for $\alpha = (\alpha_k) \in \ell_\infty$, we have

$$\|\alpha_k x_k\| = |\alpha_k| \|x_k\| \leq \|M x_k\|, \text{ where } M = \sup_k |\alpha_k|.$$

By the normality of E implies that $(\alpha_k x_k) \in E$, it follows that $(f_k^n(x_k))_{n,k} \in (\ell_\infty, c_0(q) \oplus \langle e \rangle)$. Since ℓ_∞ is normal, it follows from [2, Proposition 3.1 (vi)] that $(g_k^n(x_k))_{n,k} \in (\ell_\infty, c_0(q))$ and $(h_k^n(x_k))_{n,k} \in (\ell_\infty, \langle e \rangle)$.

$\epsilon > 0$). This implies that $Bx \in c_0(q)$ and $Cx \in \langle \epsilon \rangle$, so we have $B \in (E, c_0(q))$ and $C \in (E, \langle \epsilon \rangle)$, hence $A \in (E, c_0(q)) \oplus (E, \langle \epsilon \rangle)$, so we obtain (v).

It remains to show (vi). Assume that E is an FK-space with AD, F_2 is an FK-space and F_1 is a closed subspace of F_2 . Clearly, $(E, F_1) \subseteq (E, F_2) \cap (\Phi(X), F_1)$ is always the case. Now, assume that $A = (f_k^n) \in (E, F_2) \cap (\Phi(X), F_1)$ and $x \in E$. By Zeller theorem, $A: E \rightarrow F_2$ is continuous. Since E has AD, there is a sequence $(y^{(n)})$ with $y^{(n)} \in \Phi(X)$ for all $n \in N$ such that $y^{(n)} \rightarrow x$ in E as $n \rightarrow \infty$. By the continuity of A , we have $Ay^{(n)} \rightarrow Ax$ in F_2 as $n \rightarrow \infty$. Since $Ay^{(n)} \in F_1$ for all $n \in N$ and F_1 is a closed subspace of F_2 , we obtain that $Ax \in F_1$. Hence $A \in (E, F_1)$, so that $(E, F_2) \cap (\Phi(X), F_1) \subseteq (E, F_1)$. This completes the proof. $\square$

Proposition 3.2 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequences of positive real numbers. Then

- (i) $c(X, p) = c_0(X, p) + \{e(x) : x \in X\}$.
- (ii) $c_0(X, p) = \bigcap_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{-1/p_k})}$. Hence $c_0(X, p)$ is an echelon space of order 0.
- (iii) $\ell_{\infty}(X, p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{\infty}(X)_{(n^{-1/p_k})}$. Hence $\ell_{\infty}(X, p)$ is a co-echelon space of order ∞ .

Proof. Assertion (i) is immediate. To show (ii), let $x \in c_0(X, p)$. Then $\|x_k\|^{p_k} \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$. For each $n \in N$, let $\delta_k = \|x_k\|^{p_k} n$ for all $k \in N$. We have that $\delta_k \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$; hence $\|x_k\| n^{1/p_k} = \delta_k^{1/p_k} \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$ (because $p \in \ell_{\infty}$), so we have $x \in c_0(X)_{(n^{-1/p_k})}$. Conversely, assume that $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{-1/p_k})}$. Then $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| n^{1/p_k} = 0$ for every $n \in N$. Then for $n \in N$ we have $\|x_k\|^{p_k} \leq \frac{1}{n}$ for large k , hence $x \in c_0(X, p)$.

It remains to show (iii). If $x \in \ell_{\infty}(X, p)$, then there is some $n \in N$ with $\|x_k\|^{p_k} \leq n$ for all $k \in N$. Hence $\|x_k\| n^{-1/p_k} \leq 1$ for all $k \in N$, so that $x \in \ell_{\infty}(X)_{(n^{-1/p_k})}$. On the other hand, if $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{\infty}(X)_{(n^{-1/p_k})}$, then there are some $n \in N$ and $M > 1$ such that $\|x_k\| n^{-1/p_k} \leq M$ for every $k \in N$. Then we have $\|x_k\|^{p_k} \leq n M^{p_k} \leq n M^{\alpha}$ for all $k \in N$, where $\alpha = \sup_k p_k$. Hence $x \in \ell_{\infty}(X, p)$. $\square$

4. Main Results

We now turn to our main objective, the characterisations of matrix transformations from the vector-valued sequence spaces of Maddox $c_0(X, p)$, $c(X, p)$, $\ell_{\infty}(X, p)$, and $\ell(X, p)$ into scalar sequence spaces $c_0(q)$, $c(q)$, and $\ell_{\infty}(q)$. Some results generalize some in [2, 6, 7, 8]. We begin with the following theorem which generalizes [8, Theorem 2.1].

Theorem 4.1 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and $A = (f_k^n)$ an infinite matrix. Then $A \in (c_0(X, p), c_0(q))$ if and only if

- (1) $m^{1/q_k} f_k^n \xrightarrow{w} 0$ as $n \rightarrow \infty$ for every $m, k \in N$ and
- (2) $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/q_k} \|f_k^n\| r^{-1/p_k} \rightarrow 0$ as $n, r \rightarrow \infty$ for every fixed $m \in N$.

Proof. By Proposition 3.2 (ii) we have $c_0(q) = \bigcap_{m=1}^{\infty} c_0(m^{-1/p_k})$. It follows from Proposition 3.1 (ii) and (vii) that $A \in (c_0(X, p), c_0(q))$ if and only if $(m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (c_0(X, p), c_0)$ for all $m \in N$. By [8, Theorem 2.4], we have $(m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (c_0(X, p), c_0)$ if and only if (1) and (2) hold. $\square$

The next theorem gives a characterization of infinite matrix A such that $A \in (c_0(X, p), c(q))$. To do this we need a lemma.

Lemma 4.2 *Let (f_k) be a sequence of continuous linear functional on X . Then $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in c_0(X, p)$ if and only if $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| M^{-1/p_k} < \infty$ for some $M \in N$.*

Proof. Suppose that $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| M^{-1/p_k} < \infty$ for some $M \in N$. Let $x = (x_k) \in c_0(X, p)$. Then there is a positive integer K such that $\|x_k\|^{p_k} < \frac{1}{M}$ for all $k \geq K$, hence $\|x_k\| < M^{-1/p_k}$ for all $k \geq K$. Then we have

$$\sum_{k=K}^{\infty} |f_k(x_k)| \leq \sum_{k=K}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\| \leq \sum_{k=K}^{\infty} \|f_k\| M^{-1/p_k} < \infty.$$

It follows that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges.

On the other hand, assume that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x \in c_0(X, p)$. For each $x = (x_k) \in c_0(X, p)$, choose scalar sequence (t_k) with $|t_k| = 1$ such that $f_k(t_k x_k) = |f_k(x_k)|$ for all $k \in N$. Since $(t_k x_k) \in c_0(X, p)$, by our assumption, we have $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t_k x_k)$ converges, so that

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| < \infty \text{ for all } x \in c_0(X, p). \quad (4.1)$$

Now, suppose that $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| m^{-1/p_k} = \infty$ for all $m \in N$. Choose $m_1, k_1 \in N$ such that

$$\sum_{k \leq k_1} \|f_k\| m_1^{-1/p_k} > 1,$$

and choose $m_2 > m_1$ and $k_2 > k_1$ such that

$$\sum_{k_1 < k \leq k_2} \|f_k\| m_2^{-1/p_k} > 2.$$

Proceeding in this way, we can choose $m_1 < m_2 < \dots$, and $0 = k_1 < k_2 < \dots$ such that

$$\sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} \|f_k\| m_i^{-1/p_k} > i.$$

Take x_k in X with $\|x_k\| = 1$ for all k , $k_{i-1} < k \leq k_i$ such that

$$\sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} |f_k(x_k)| m_i^{-1/p_k} > i \quad \text{for all } i \in N$$

Put $y = (y_k)$, $y_k = m_i^{-1/p_k} x_k$ for $k_{i-1} < k \leq k_i$, then $y \in c_0(X, p)$, and we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y_k)| \geq \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} |f_k(x_k)| m_i^{-1/p_k} > i \quad \text{for all } i \in N.$$

Hence we have $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y_k)| = \infty$ which contradicts with (4.1). This complete the proof. $\square$

Theorem 4.3 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (c_0(X, p), c(q))$ if and only if there is a sequence (f_k) with $f_k \in X'$ for all $k \in N$ such that

- (1) $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| M^{-1/p_k} < \infty$ for some $M \in N$,
- (2) $m^{1/q_n} \cdot (f_k^n - f_k) \xrightarrow{w^*} 0$ as $n \rightarrow \infty$ for every $m, k \in N$ and
- (3) $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/q_n} \cdot \|f_k^n - f_k\| r^{-1/p_k} \rightarrow 0$ as $n, r \rightarrow \infty$ for each fixed $m \in N$.

Proof. If $A \in (c_0(X, p), c(q))$, we have $A \in (c_0(X, p), c_0(q) \oplus \langle e \rangle)$ since $c(q) = c_0(q) \oplus \langle e \rangle$. It follows from Proposition 3.1(v) that $A = B + C$, where $B \in (c_0(X, p), c_0(q))$ and $C \in (c_0(X, p), \langle e \rangle)$. Let $C = (g_k^n)$. Since $\Phi(X) \subseteq c_0(X, p)$, we have $(g_k^n(x))_{n=1}^{\infty} \in \langle e \rangle$ for all $x \in X$ and $k \in N$, which implies that $g_k^n = g_k^{n+1}$ for all $n, k \in N$. For each $k \in N$, let $f_k = g_k^1$. Then we have $(f_k^n - f_k)_{n,k} \in (c_0(X, p), c_0(q))$. Hence (2) and (3) hold by Theorem 4.1. Since $C = (f_k)_{n,k} \in (c_0(X, p), \langle e \rangle)$, we have $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in c_0(X, p)$, hence (1) is obtained by Lemma 4.2.

Conversely, assume that there is a sequence (f_k) with $f_k \in X'$ for all $k \in N$ such that the conditions (1), (2), and (3) hold. Let $B = (f_k^n - f_k)_{n,k}$ and $C = (f_k)_{n,k}$. It is obvious that $A = B + C$. By the conditions (2) and (3), we obtain by Theorem 4.1 that $B \in (c_0(X, p), c_0(q))$. The condition (1) implies by Lemma 4.2 that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in c_0(X, p)$. This implies $C \in (c_0(X, p), \langle e \rangle)$. Hence we have by Proposition 3.1(v) that $A \in (c_0(X, p), c(q))$. This completes the proof. $\square$

Theorem 4.4 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and $A = (f_k^n)$ an infinite matrix. Then $A \in (\ell_{\infty}(X, p), c_0(q))$ if and only if

- (1) $m^{1/q_n} \cdot f_k^n \xrightarrow{w^*} 0$ as $n \rightarrow \infty$ for every k and $m \in N$ and
- (2) for each $m, M \in N$, $\sum_{j>k} \|f_j^n\| m^{1/q_n} M^{1/p_j} \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$ uniformly on $n \in N$.

Proof. Since $c_0(q) = \bigcap_{m=1}^{\infty} c_{0(m^{1/q_k})}$, we have by Proposition 3.1(ii) and (vii) that

$$\begin{aligned} A \in (\ell_{\infty}(X, p), c_0(q)) &\iff A \in (\ell_{\infty}(X, p), c_{0(m^{1/q_k})}) \text{ for all } m \in N, \\ &\iff (m^{1/q_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell_{\infty}(X, p), c_0) \text{ for all } m \in N, \\ &\iff \text{the conditions (1) and (2) hold (by [8, Theorem 2.9].)} \end{aligned}$$

□

Note that Theorem 4.4 generalizes the result in [8, Theorem 2.8].

We now give a characterization of an infinite matrix A such that $A \in (\ell_{\infty}(X, p), c(q))$ by using the previous auxiliary results and Theorem 4.4. However, in order to get this, we need the following lemma.

Lemma 4.5 *Let $p = (p_k)$ be bounded sequence of positive real numbers and (f_k) a sequence with $f_k \in X'$ for all $k \in N$. Then $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in \ell_{\infty}(X, p)$ if and only if $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| n^{1/p_k} < \infty$ for all $n \in N$.*

Proof. If $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| n^{1/p_k} < \infty$ for all $n \in N$, then we have that for each $x = (x_k) \in \ell_{\infty}(X, p)$, there is $m \in N$ such that $\|x_k\| \leq m^{1/p_k}$ for all $k \in N$, hence $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| m^{1/p_k} < \infty$, which implies $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges.

Conversely, assume that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in \ell_{\infty}(X, p)$. We first note that, by using the same proof as in Lemma 4.2, we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| < \infty \text{ for all } x = (x_k) \in \ell_{\infty}(X, p). \quad (4.2)$$

Now, suppose that $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| n^{1/p_k} = \infty$ for some $n \in N$. Then we can choose a sequence (k_i) of positive integer with $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$ such that

$$\sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} \|f_k\| n^{1/p_k} > i \text{ for all } i \in N.$$

Taking x_k in X with $\|x_k\| = 1$ such that for all $i \in N$,

$$\sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} |f_k(x_k)| n^{1/p_k} > i.$$

Put $y = (y_k) = (n^{1/p_k} x_k)_{k=1}^\infty$. Clearly, $y \in \ell_\infty(X, p)$ and

$$\sum_{k=1}^\infty |f_k(y_k)| \geq \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} |f_k(x_k)| n^{1/p_k} > i \text{ for all } i \in N.$$

Hence $\sum_{k=1}^\infty |f_k(y_k)| = \infty$, which contradicts with (4.2). The proof is now complete. $\square$

Theorem 4.6 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell_\infty(X, p), c(q))$ if and only if there is a sequence (f_k) with $f_k \in X'$ for all $k \in N$ such that

- (1) $\sum_{k=1}^\infty \|f_k\| n^{1/p_k} < \infty$ for all $n \in N$,
- (2) $m^{1/q_n} (f_k^n - f_k) \xrightarrow{w} 0$ as $n \rightarrow \infty$ for every k and $m \in N$ and
- (3) for each $m, M \in N$, $\sum_{j>k} \|f_j^n - f_j\| m^{1/q_n} M^{1/p_j} \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$ uniformly on $n \in N$.

Proof. If $A \in (\ell_\infty(X, p), c(q))$, it follows that $\sum_{k=1}^\infty f_k(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in \ell_\infty(X, p)$, hence (1) holds by Lemma 4.5. Since $c(q) = c_0(q) \oplus \langle \epsilon \rangle$, we have by Proposition 3.1(v) that $A = B + C$ where $B \in (\ell_\infty(X, p), c_0(q))$ and $C \in (\ell_\infty(X, p), \langle \epsilon \rangle)$. Since $\Phi(X) \subseteq \ell_\infty(X, p)$, it implies that there is a sequence (f_k) with $f_k \in X'$ for all $k \in N$ such that $C = (f_k)_{n,k}$, so we have $(f_k^n - f_k)_{n,k} = B \in (\ell_\infty(X, p), c_0(q))$. Hence we obtain (2) and (3) by Theorem 4.4.

Conversely, assume that there is a sequence (f_k) with $f_k \in X'$ for all $k \in N$ such that the conditions (1), (2), and (3) hold. Let $B = (f_k^n - f_k)_{n,k}$ and $C = (f_k)_{n,k}$. The condition (1) implies that $C \in (\ell_\infty(X, p), \langle \epsilon \rangle)$ (by application of Lemma 4.5) and the conditions (2) and (3), by Theorem 4.4, implies that $B \in (\ell_\infty(X, p), c_0(q))$. By Proposition 3.1(v), we obtain that $A \in (\ell_\infty(X, p), c(q))$. This completes the proof. $\square$

Theorem 4.7 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (c(X, p), \ell_\infty(q))$ if and only if

- (1) $\sup_n \left(\sum_{k=1}^\infty \|f_k^n\| M^{-1/p_k} \right)^{q_n} < \infty$ for some $M \in N$ and
- (2) $\sup_n \|T_n\|^{q_n} < \infty$ where $T_n \in X'$ is defined by $T_n x = \sum_{k=1}^\infty f_k^n(x)$ for all $x \in X$.

Proof. Assume that $A \in (c(X, p), \ell_\infty(q))$. Since $c(X, p) = c_0(X, p) + E$ where $E = \{c(x) : x \in X\}$, we have by Proposition 3.1(iii) that $A \in (c_0(X, p), \ell_\infty(q))$ and $A \in (E, \ell_\infty(q))$. It follows from [8, Theorem 2.10] that the condition (1) holds. Since $A \in (E, \ell_\infty(q))$, we have $\sum_{k=1}^\infty f_k^n(x)$ converges for every $x \in X$ and $(\sum_{k=1}^\infty f_k^n(x))_{n=1}^\infty \in \ell_\infty(q)$. For each $n \in N$, let $T_n x = \sum_{k=1}^\infty f_k^n(x)$ for all $x \in X$. It follows by

Banach-Steinhaus theorem that $T_n \in X'$. Since $\sup_n |T_n(x)|^{q_n} = \sup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x) \right|^{q_n} < \infty$, by [8, Theorem 1.1] we have $\sup_n \|T_n\|^{q_n} < \infty$, so (2) is obtained.

Conversely, assume that the conditions (1) and (2) hold. It follows from [8, Theorem 2.10] that $A \in (c_0(X, p), \ell_{\infty}(q))$. We have by (2) that for each $x \in X$,

$$\sup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x) \right|^{q_n} = \sup_n |T_n x|^{q_n} \leq (1 + \|x\|)^{\alpha} \sup_n \|T_n\|^{q_n} < \infty$$

where $\alpha = \sup_n q_n$. This implies that $A \in (E, \ell_{\infty}(q))$ where $E = \{e(x) : x \in X\}$. By an application of Proposition 3.1(iii) we have $A \in (c(X, q), \ell_{\infty}(q))$. The proof is now complete. $\square$

Theorem 4.8 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (c(X, p), c_0(q))$ if and only if

- (1) $m^{1/q_n} f_k^n \xrightarrow{w} 0$ as $n \rightarrow \infty$ for every $m, k \in N$,
- (2) $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/q_n} \|f_k^n\| r^{-1/p_k} \rightarrow 0$ as $n, r \rightarrow \infty$ for every $m \in N$ and
- (3) $\left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x) \right|^{q_n} \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ for every $x \in X$.

Proof. Since $c(X, p) = c_0(X, p) + E$ where $E = \{e(x) : x \in X\}$, we have by Proposition 3.1 (iii), $A \in (c(X, p), c_0(q))$ if and only if $A \in (c_0(X, p), c_0(q))$ and $A \in (E, c_0(q))$. Clearly, $A \in (E, c_0(q))$ if and only if the condition (3) holds. By Theorem 4.1, we have $A \in (c_0(X, p), c_0(q))$ if and only if the conditions (1) and (2) hold. So, we have the theorem. $\square$

Theorem 4.9 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (c(X, p), c(q))$ if and only if there is a sequence (f_k) with $f_k \in X'$ for all $k \in N$ such that

- (1) $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\| M^{-1/p_k} < \infty$ for some $M \in N$,
- (2) $m^{1/q_n} (f_k^n - f_k) \xrightarrow{w} 0$ as $n \rightarrow \infty$ for every $m, k \in N$,
- (3) $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/q_n} \|f_k^n - f_k\| r^{-1/p_k} \rightarrow 0$ as $n, r \rightarrow \infty$ for every $m \in N$ and
- (4) $\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x) \right)_{n=1}^{\infty} \in c(q)$ for all $x \in X$.

Proof. Since $c(X, p) = c_0(X, p) + E$, where $E = \{e(x) : x \in X\}$, it follows from Proposition 3.1 (iii) that $A \in (c(X, p), c(q))$ if and only if $A \in (c_0(X, p), c(q))$ and $A \in (E, c(q))$. By Theorem 4.3, we have $A \in (c_0(X, p), c(q))$ if and only if the conditions (1) - (3) hold, and clearly, $A \in (E, c(q))$ if and only if (4) holds. Hence, the theorem is proved. $\square$

Theorem 4.10 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers with $p_k \leq 1$ for all $k \in N$, and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X, p), c_0(q))$ if and only if

- (1) $m^{1/q_n} f_k^n \xrightarrow{w} 0$ as $n \rightarrow \infty$ for every $m, k \in N$ and
- (2) there exists $M \in N$ such that $\|m^{1/q_n} f_k^n\|^{p_n} \leq M$ for all $m, n, k \in N$.

Proof. Since $c_0(q) = \bigcap_{n=1}^{\infty} c_{0(n^{1/q_n})}$, it follows from Proposition 3.1 (ii) and (vii) that $A \in (\ell(X, p), c_0(q))$ if and only if $(m^{1/q_n} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), c_0)$ for all $m \in N$. By [8, Theorem 2.6], we have $(m^{1/q_n} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), c_0)$ if and only if the conditions (1) and (2) hold. The proof is now complete. $\square$

Wu and Lin [8, Theorem 2.7] have given a characterization of an infinite matrix A such that $A \in (\ell(X, p), c_0)$ when $p_k > 1$ for all $k \in N$. By using application of Proposition 3.1 (ii) and (iii), we obtain the following result.

Theorem 4.11 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers with $p_k > 1$ for all $k \in N$, and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X, p), c_0(q))$ if and only if

- (1) $m^{1/q_n} f_k^n \xrightarrow{w} 0$ as $n \rightarrow \infty$ for all $m, k \in N$ and
- (2) for each $m \in N$, $\left(\sum_{k=1}^{\infty} (m^{1/q_n} \|f_k^n\|)^{p_n/(p_n-1)} r^{-1/(p_n-1)} \right) \rightarrow 0$ as $r \rightarrow \infty$ uniformly on $n \in N$.

Acknowledgements

The author would like to thank the Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

REFERENCES

- [1] K.-G. Grosse-Erdmann, The structure of the sequence spaces of Maddox, *Canad. J. Math.* **44** (1992), 228-307.
- [2] K.-G. Grosse-Erdmann, Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox, *J. of Math. Anal. Appl.* **160** (1993), 223-238.
- [3] L.J. Maddox, Spaces of strongly summable sequences, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **18** (1967), 345-355.
- [4] L.J. Maddox, Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **64** (1968), 335-340.
- [5] H. Nakano, *Modulated sequence spaces*, *Proc. Japan. Acad.* **27** (1951), 509-512.
- [6] S. Simons, The spaces $\ell(p_n)$ and $m(p_n)$, *Proc. London. Math. Soc.* **15** (1965), 422-436.
- [7] A. Wilansky, *Summability through functional analysis*, North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1984.
- [8] C.X. Wu and L. Lin, Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces, *SEA. Bull. Math.* **17**, 1 (1993), 83-96.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand
E-mail: Senti005@chiangmai.ac.th

ผลงานวิจัย 4

ชื่อเรื่อง Matrix Transformations from Vector - Valued Sequence
Spaces of Maddox into the Nakano Sequence Space

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้ส่งไปเพื่อตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติ ชื่อ
Journal of London Mathematical Society

Matrix Transformations from Vector-Valued Sequence Spaces of Maddox into the Nakano Sequence Space

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this paper, we give the matrix characterizations from vector-valued sequence spaces of Maddox $c_0(X, p)$, $c(X, p)$ and $\ell_{\infty}(X, p)$ into the Nakano sequence space $\ell(q)$ where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A45.

1. INTRODUCTION

Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space and $p = (p_k)$ a bounded sequence of positive real numbers. We write $x = (x_k)$ with x_k in X for all $k \in N$. The X -valued sequence spaces $c_0(X, p)$, $c(X, p)$, $\ell_{\infty}(X, p)$, $\ell(X, p)$, and $\underline{c}_0(X, p)$ are defined as

$$c_0(X, p) = \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|^{p_k} = 0\},$$

$$c(X, p) = \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\|^{p_k} = 0 \text{ for some } a \in X\},$$

$$\ell_{\infty}(X, p) = \{x = (x_k) : \sup_k \|x_k\|^{p_k} < \infty\},$$

$$\ell(X, p) = \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

$$\underline{c}_0(X, p) = \{x = (x_k) : \sup_k \left\| \frac{x_k}{\delta_k} \right\|^{p_k} < \infty \text{ for some } (\delta_k) \in c_0 \text{ with } \delta_k \neq 0 \text{ for all } k \in N\}$$

When $X = R$ or C the corresponding spaces are written as $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_{\infty}(p)$, $\ell(p)$, and $\underline{c}_0(p)$ respectively. Each of the first three spaces are known as the sequence spaces of Maddox. These spaces were first introduced and studied by Simons [6], Maddox [3, 4]. The space $\ell(p)$ was first defined by Nakano [5] and

Typeset by $\mathcal{A}_\mathcal{A}\mathcal{S}\mathcal{T}_\mathcal{E}\mathcal{X}$

it is known as the Nakano sequence space. In [1] the structure of the spaces $c_0(p)$, $c(p)$, and $\ell_\infty(p)$ have been investigated.

In this paper we consider the problem of characterizing those matrices that map from vector-valued sequence spaces of Maddox $c_0(X, p)$, $c(X, p)$ and $\ell_\infty(X, p)$ into the Nakano sequence space $\ell(q)$ where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers. By applying our main results, we also give a characterization of infinite matrix mapping from $c_0(X, p)$ into $\ell(q)$. Wu and Liu [7] deal with the problem of characterizing those infinite matrices mapping from $c_0(X, p)$ and $\ell_\infty(X, p)$ into $c_0(q)$ and $\ell_\infty(q)$. Grosse-Erdmann [2] has given characterizations of matrix transformations between the scalar-valued sequence spaces of Maddox. It is pointed out in [1] that $c_0(p)$ is an echelon space of order 0 and that $\ell_\infty(p)$ is a co-echelon space of order ∞ . In this paper we also show that $c_0(X, p)$ and $\ell_\infty(X, p)$ is a co-echelon space of order ∞ . Therefore these spaces are made up of simpler spaces. We will use certain auxiliary results (Section 3) to reduce our problem to the characterisations of matrix mapping between much simpler spaces.

2. Notation and Definitions

2.1 Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space, the space of all sequences in X is denoted by $W(X)$ and $\Phi(X)$ is denoted for the space of all finite sequences in X . When $X = R$ or C , the corresponding spaces are written as w and ϕ .

A sequence space in X is a linear subspace of $W(X)$. Let E be an X -valued sequence space. For $x \in E$ and $k \in N$, we write x_k stands for the k^{th} term of x . For $k \in N$ denote by e_k the sequence $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ with 1 in the k^{th} position and by e the sequence $(1, 1, 1, \dots)$. For $x \in X$ and $k \in N$, let $e^k(x)$ be the sequence $(0, 0, \dots, 0, x, 0, \dots)$ with x in the k^{th} position and let $c(x)$ be the sequence $(x, x, x, \dots)$. For a fixed scalar sequence $\mu = (\mu_k)$ the sequence space E_μ is defined as

$$E_\mu = \{x \in W(X) : (\mu_k x_k) \in E\}.$$

2.2 Let $A = (f_k^n)$ with f_k^n in X' , the topological dual of X . Suppose that E is a space of X -valued sequences and F a space of scalar-valued sequences. Then A is said to map E into F , written by $A : E \rightarrow F$ if for each $x = (x_k) \in E$, $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for each $n \in N$, and the sequence $Ax = (A_n(x)) \in F$. Let (E, F) denote for the set of all infinite matrices mapping from E into F . If $u = (u_k)$ and $v = (v_k)$ are scalar sequences, let

$${}_u(E, F)_v = \{A = (f_k^n) : (u_n v_k f_k^n)_{n,k} \in (E, F)\}$$

If $u_k \neq 0$ for all $k \in N$, we write $u^{-1} = (\frac{1}{u_k})$.

2.3 Suppose that the X -valued sequence space E is endowed with some linear topology τ . Then E is called a K -space if for each $k \in N$ the k^{th} coordinate mapping $p_k : E \rightarrow X$, defined by $p_k(x) = x_k$, is

continuous on E . If, in addition, (E, τ) is an Fréchet (Banach, LF-, LB-) space, then E is called an FK- (BK-, LFK-, LBK-) space. Now, suppose that E contains $\Phi(X)$. Then E is said to have property AB if the set $\{\sum_{k=1}^n e^k(x_k) : n \in N\}$ is bounded in E for every $x = (x_k) \in E$. It is said to have property AK if $\sum_{k=1}^n e^k(x_k) \rightarrow x$ in E as $n \rightarrow \infty$ for every $x = (x_k) \in E$. It has property AD if $\Phi(X)$ is dense in E .

The space $\ell(p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k}\right)^{1/M}$, where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$. In each of the space $\ell_{\infty}(X, p)$ and $c_0(X, p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k\|^{p_k/M}$, where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$. It is known that $c_0(X, p)$ is an FK-space with AK under the paranorm g defined as above and $\ell_{\infty}(X, p)$ is a complete LBK-space with AB. In $c(X, p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k - a\|^{p_k/M} + \|a\|$ where a is the unique element in X with $x - e(a) \in c_0(X, p)$. Then g is a paranorm on $c(X, p)$ and $c(X, p)$ is an FK-space under this paranorm g .

3. Some Auxiliary Results

We begin with the following useful results that will be used to reduce our problems into some simpler forms.

Proposition 3.1 Let E and $E_n (n \in N)$ be X -valued sequence spaces, and F and $F_n (n \in N)$ scalar sequence spaces, and let u and v be scalar sequences with $u_k \neq 0, v_k \neq 0$ for all $k \in N$. Then we have

- (i) $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, F\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n, F)$
- (ii) $(E, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E, F_n)$
- (iii) $(E_1 + E_2, F) = (E_1, F) \cap (E_2, F)$
- (iv) $(E_n, F_n) = {}_v(E, F)_{u^{-1}}$.

Proof. All assertions are immediately obtained by the definition. □

Proposition 3.2 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequences of positive real numbers. Then

- (i) $c(X, p) = c_0(X, p) + \{e(x) : x \in X\}$
- (ii) $c_0(X, p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{-1/p_k})}$. Hence $c_0(X, p)$ is an echelon space of order 0.
- (iii) $\ell_{\infty}(X, p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{\infty}(X)_{(n^{-1/p_k})}$. Hence $\ell_{\infty}(X, p)$ is a co-echelon space of order ∞ .

Proof. It is easy to see that assertion (i) holds. To show (ii), let $x = (x_k) \in c_0(X, p)$. Then there is a sequence $(\delta_k) \in c_0$ with $\delta_k \neq 0$ for all $k \in N$ such that $\sup_k \left\| \frac{x_k}{\delta_k} \right\|^{p_k} < \infty$. Hence there exists $\alpha > 0$ such that $\|x_k\| \leq \alpha^{1/p_k} |\delta_k|$ for all $k \in N$. Choose $n_0 \in N$ with $n_0 > \alpha$. Then $\|x_k\| n_0^{-1/p_k} \leq \left(\frac{\alpha}{n_0}\right)^{1/p_k} |\delta_k| < |\delta_k|$ which implies that $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| n_0^{-1/p_k} = 0$, hence $x = (x_k) \in c_0(X)_{(n^{-1/p_k})} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{-1/p_k})}$. On the

other hand, suppose that $x = (x_k) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{-1/p_k})}$. Then $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| n^{-1/p_k} = 0$ for some $n \in N$. Let $\delta = (\delta_k)$ be the sequence defined by

$$\delta_k = \begin{cases} \|x_k\| n^{-1/p_k} & \text{if } \|x_k\| \neq 0 \\ \frac{1}{k} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Clearly $(\delta_k) \in c_0$ and $\|\frac{x_k}{\delta_k}\|^{p_k} \leq n$ for all $k \in N$, hence $\sup_k \|\frac{x_k}{\delta_k}\|^{p_k} \leq n$, so $x = (x_k) \in c_0(X, p)$.

Now we show (iii). If $x \in \ell_{\infty}(X, p)$, then there is some $n \in N$ with $\|x_k\|^{p_k} \leq n$ for all $k \in N$. Hence $\|x_k\| n^{-1/p_k} \leq 1$ for all $k \in N$, so that $x \in \ell_{\infty}(X)_{(n^{-1/p_k})}$. On the other hand, if $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{\infty}(X)_{(n^{-1/p_k})}$, then there are some $n \in N$ and $K > 1$ such that $\|x_k\| n^{-1/p_k} \leq K$ for every $k \in N$. Then we have $\|x_k\|^{p_k} \leq n K^{p_k} \leq n K^M$ for all $k \in N$, where $M = \sup_k p_k$. Hence $x \in \ell_{\infty}(X, p)$ $\square$

Proposition 3.3 Let $E \subseteq W(X)$ be an FK-space with AK property and F an FK-space of scalar sequences. Then for an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (E, F)$ if and only if

- (1) For each $n \in N$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in E$,
- (2) For each $k \in N$, $(f_k^n(x))_{n=1}^{\infty} \in F$, and
- (3) $A: \Phi(X) \rightarrow F$ is continuous when $\Phi(X)$ is considered as a subspace of E .

Proof. Assume that $A \in (E, F)$. Then we have that for $x = (x_k) \in E$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for all $n \in N$, so (1) holds. Since $e^{(k)}(x) \in E$ for all $k \in N$ and all $x \in X$, we obtain that for each $n \in N$, $(f_k^n(x))_{n=1}^{\infty} = A e^{(k)}(x) \in F$, hence (2) holds. Since E and F are FK-spaces, by Zeller's theorem, $A: E \rightarrow F$ is continuous, so that (3) is obtained.

Conversely, assume that the conditions holds. By (1), we have $Ax = (\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k))_{n=1}^{\infty} \in W(X)$ for all $x \in E$. It follows from (2) that $A e^{(k)}(x) \in F$ for all $k \in N$ and all $x \in X$, which implies that $A: \Phi(X) \rightarrow F$. By (3), we have $A: \Phi(X) \rightarrow F$ is continuous. Let $x = (x_k) \in E$. Since E has the AK property, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{(k)}(x_k)$ in E . Then $(\sum_{k=1}^n e^{(k)}(x_k))_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in E . By the continuity and linearity of A , we have $(\sum_{k=1}^n A e^{(k)}(x_k))_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in F . Since F is complete, we have $(\sum_{k=1}^n A e^{(k)}(x_k))_{n=1}^{\infty}$ converges in F . Since F is a K-space, it implies that $(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k))_{n=1}^{\infty} \in F$, so that $Ax \in F$. This show that $A: E \rightarrow F$. $\square$

4. Main Results

We now turn to our main objective. We begin with giving characterisations of matrix transformations from $c_0(X, p)$ into $\ell(q)$. To do this we need a lemma.

Lemma 4.1 Let (f_k) be a sequence of continuous linear functional on X . Then $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in c_0(X, p)$ if and only if $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| M^{-1/p_k} < \infty$ for some $M \in N$.

Proof. Suppose that $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| M^{-1/p_k} < \infty$ for some $M \in N$. Let $x = (x_k) \in c_0(X, p)$. Then there is a positive integer K such that $\|x_k\|^{p_k} < \frac{1}{M}$ for all $k \geq K$, hence $\|x_k\| < M^{-1/p_k}$ for all $k \geq K$. Then we have

$$\sum_{k=K}^{\infty} |f_k(x_k)| \leq \sum_{k=K}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\| \leq \sum_{k=K}^{\infty} \|f_k\| M^{-1/p_k} < \infty.$$

It follows that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges.

On the other hand, assume that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x \in c_0(X, p)$. For each $x = (x_k) \in c_0(X, p)$, choose scalar sequence (t_k) with $|t_k| = 1$ such that $f_k(t_k x_k) = |f_k(x_k)|$ for all $k \in N$. Since $(t_k x_k) \in c_0(X, p)$, by our assumption, we have $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t_k x_k)$ converges, so that

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| < \infty \text{ for all } x \in c_0(X, p). \quad (4.1)$$

Now, suppose that $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| m^{-1/p_k} = \infty$ for all $m \in N$. Choose $m_1, k_1 \in N$ such that

$$\sum_{k \leq k_1} \|f_k\| m_1^{-1/p_k} > 1,$$

and choose $m_2 > m_1$ and $k_2 > k_1$ such that

$$\sum_{k_1 < k \leq k_2} \|f_k\| m_2^{-1/p_k} > 2.$$

Proceeding in this way, we can choose $m_1 < m_2 < \dots$, and $0 = k_1 < k_2 < \dots$ such that

$$\sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} \|f_k\| m_i^{-1/p_k} > i.$$

Take x_k in X with $\|x_k\| = 1$ for all k , $k_{i-1} < k \leq k_i$ such that

$$\sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} |f_k(x_k)| m_i^{-1/p_k} > i \text{ for all } i \in N$$

Put $y = (y_k)$, $y_k = m_i^{-1/p_k} x_k$ for $k_{i-1} < k \leq k_i$, then $y \in c_0(X, p)$, and we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y_k)| \geq \sum_{k_{i-1} < k \leq k_i} |f_k(x_k)| m_i^{-1/p_k} > i \text{ for all } i \in N.$$

Hence we have $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(y_k)| = \infty$ which contradicts with (4.1). This complete the proof. $\square$

Theorem 4.2 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (c_0(X, p), \ell(q))$ if and only if

(1) For each $n \in N$, there exists $m_n \in N$ such that $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\| m_n^{-1/p_k} < \infty$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} |f_k^n(x)|^{q_n} < \infty$ for every $k \in N$.

(3) $\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_K \alpha(m, K) = 0$, where the supremum is taken over all finite subset K of N and

$$\alpha(m, K) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k \in K} m^{-1/p_k} f_k^n(x_k) \right|^{q_n} : x_k \in X \text{ and } \|x_k\| \leq 1 \text{ for all } k \in K \right\}.$$

Proof. Assume that $A : c_0(X, p) \rightarrow \ell(q)$. By Proposition 3.3 and Lemma 4.1, the conditions (1) and (2) are obtained. Now we shall show that (3) holds. Let $\varepsilon > 0$ be given. Since $c_0(X, p)$ and $\ell(q)$ are FK-spaces and $c_0(X, p)$ has the AK property, we have by Proposition 3.3 that $A : \Phi(X) \rightarrow \ell(q)$ is continuous when $\Phi(X)$ is considered as a subspace of $c_0(X, p)$. Then there exists $m_0 \in N$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right|^{q_n} \leq \varepsilon \quad (4.2)$$

for all $x = (x_k) \in \Phi(X)$, $\|x\| = \sup_k \|x_k\|^{p_k/M} \leq (\frac{1}{m_0})^{1/M}$ where $M = \sup_k p_k$. Let $K \subset N$ be finite and for $k \in K$, let $x_k \in X$ be such that $\|x_k\| \leq 1$. Let $m \in N$, $m \geq m_0$. Let y be the sequence defined by $y_k = m^{-1/p_k} x_k$ if $k \in K$ and 0 otherwise. Then $y \in \Phi(X)$ and $\|y\| = \sup_k \|m^{-1/p_k} x_k\|^{p_k/M} \leq (\frac{1}{m})^{1/M} \leq (\frac{1}{m_0})^{1/M}$, so by (4.2), $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k \in K} m^{-1/p_k} f_k^n(x_k) \right|^{q_n} \leq \varepsilon$. This implies $\sup_K \alpha(m, K) \leq \varepsilon$, hence (3) holds.

Conversely, assume that the conditions (1), (2) and (3) hold. The condition (1) implies, by Lemma 4.1, that for each $n \in N$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in c_0(X, p)$. By (2), we have $((f_k^n(x)))_{n=1}^{\infty} \in \ell(q)$ for all $k \in N$. Thus $A : \Phi(X) \rightarrow \ell(q)$. We shall show that $A : \Phi(X) \rightarrow \ell(q)$ is continuous when $\Phi(X)$ is considered as a subspace of $c_0(X, p)$. Let $\varepsilon > 0$ be given. By (3), there is $m_0 \in N$ such that

$$\sup_K \alpha(m, K) \leq \varepsilon \text{ for all } m \geq m_0 \quad (4.3)$$

Choose $\delta = \left(\frac{1}{m_0}\right)^{1/M}$ where $M = \sup_k p_k$. Let $x = (x_k) \in \Phi(X)$ with $\|x\| = \sup_k |x_k|^{p_k/M} \leq \delta$. Then $m_0^{1/p_k} \|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$. Let $K = \{k \in N : x_k \neq 0\}$. It follows by (4.3) that

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k \in K} f_k^n(x_k) \right| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k \in K} m_0^{-1/p_k} f_k^n(m_0^{1/p_k} x_k) \right| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Hence, we have $A : \Phi(X) \rightarrow \ell(q)$ is continuous. By Proposition 3.3, we obtain that $A : c_0(X, p) \rightarrow \ell(q)$. This completes the proof. $\square$

Theorem 4.3 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (c(X, p), \ell(q))$ if and only if

(1) For each $n \in N$, there exists $m_n \in N$ such that $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\| m_n^{-1/p_k} < \infty$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} |f_k^n(x)|^{q_n} < \infty$ for every $k \in N$.

(3) $\lim_{m \rightarrow \infty} \sup_K \alpha(m, K) = 0$, where the supremum is taken over all finite subset K of N and

$$\alpha(m, K) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k \in K} m^{-1/p_k} f_k^n(x_k) \right|^{q_n} : x_k \in X \text{ and } \|x_k\| \leq 1 \text{ for all } k \in K \right\}.$$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x) \right|^{q_n} < \infty$ for all $x \in X$.

Proof. Let $E = \{c(x) : x \in X\}$. Since $c(X, p) = c_0(X, p) + E$ (Proposition 3.2(i)), it implies by Proposition 3.1(iii) that

$$A : c(X, p) \rightarrow \ell(q) \iff A : c_0(X, p) \rightarrow \ell(q) \text{ and } A : E \rightarrow \ell(q)$$

It is easy to see that

$$A : E \rightarrow \ell(q) \iff \text{the condition (4) is satisfied.}$$

By Theorem 4.2, we have

$$A : c_0(X, p) \rightarrow \ell(q) \iff \text{the conditions (1), (2) and (3) are satisfied.}$$

Hence we have

$$A : c(X, p) \rightarrow \ell(q) \iff \text{the conditions (1), (2), (3) and (4) are satisfied.}$$

$\square$