

Next, we shall give characterizations of infinite matrices mapping from $\ell_\infty(X, p)$ into $\ell(q)$. To do this, we need the following results.

Lemma 4.4 *Let (f_k) be a sequence of continuous linear functionals on X . Then $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for every $x = (x_k) \in \ell_\infty(X)$ if and only if $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$*

Proof. If $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$, then for each $x = (x_k) \in \ell_\infty(X)$, $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\| \leq \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$, so that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges.

Conversely, assume that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for every $x = (x_k) \in \ell_\infty(X)$. Let T be a functional on $\ell_{infty/ty}(X)$ by $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ for $x = (x_k) \in \ell_{infty/ty}(X)$. Clearly, T is linear. For each $n \in N$, let $s_n = \sum_{k=1}^n f_k \circ p_k$. Then s_n is in the dual space of $\ell_\infty(X)$ since $\ell_\infty(X)$ is a K-space. It is clear that $s_n(x) \rightarrow Tx$ as $n \rightarrow \infty$ for all $x \in \ell_\infty(X)$. It follows by Banach-Steinhaus theorem that T is in the dual space of $\ell_\infty(X)$. Hence, there is a positive real number α such that

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x_k) \right| \leq \alpha \quad (4.4)$$

for all $x = (x_k) \in \ell_\infty(X)$ with $\|x\| \leq 1$.

Let $x_k \in X$ be such that $\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$. Then the sequence $x = (x_k) \in \ell_\infty(X)$ with $\|x\| \leq 1$, we can choose a scalar sequence (t_k) with $|t_k| = 1$ such that $f_k(t_k x_k) = |f_k(x_k)|$ for all $k \in N$. Clearly, $(t_k x_k) \in \ell_\infty(X)$ and $\|(t_k x_k)\| \leq 1$. It follows by (4.4)

$$\sum_{k=1}^n |f_k(x_k)| = \left| \sum_{k=1}^n f_k(t_k x_k) \right| \leq \alpha \quad (4.5)$$

for all sequence $x = (x_k)$ with $\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$.

It follows from (4.5) that $\sum_{k=1}^n \|f_k\| \leq \alpha$ for all $n \in N$, hence $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \leq \alpha$. This complete the proof. $\square$

Theorem 4.5 *Let $q = (q_k)$ be a sequence of positive real numbers and $A = (f_k^n)$ an infinite matrix. Then $A \in (\ell_\infty(X), \ell(q))$ if and only if*

(1) $\sum_{k=1}^m \|f_k^n\| < \infty$ for every $n \in N$, and

(2) $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0$ where $\alpha_m = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m^{-1/q_n} \left| \sum_{k=1}^m f_k^n(x_k) \right|^{q_n} : x_k \in X, \|x_k\| \leq 1 \right\}$.

Proof. Assume that $A : \ell_\infty(X) \rightarrow \ell(q)$. Then we have $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for all $n \in N$ and all $x = (x_k) \in \ell_\infty(X)$. By Lemma 4.4, the conditions (1) is obtained. Now we shall show that (2) holds. Let $\varepsilon > 0$ be given. Since $\ell_\infty(X)$ and $\ell(q)$ are FK-spaces, we have, by Zeller's theorem, that $A : \ell_\infty(X) \rightarrow \ell(q)$ is continuous. Then there exists $m_0 \in N$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right|^{q_n} \leq \varepsilon \quad (4.6)$$

for all $x = (x_k) \in \ell_\infty(X)$, $\|x\| = \sup_k \|x_k\| \leq \frac{1}{m_0}$.

Let $x_k \in X$ be such that $\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$. Let $m \in N$, $m \geq m_0$. Then the sequence $y = (m^{-1} x_k) \in \ell_\infty(X)$ and $\|y\| \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{m_0}$. By (4.6), we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^{-q_n} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right|^{q_n} \leq \varepsilon$$

This implies $|\alpha_m| \leq \varepsilon$, so $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0$.

Conversely, assume that the conditions (1) and (2) hold. Let $x = (x_k) \in \ell_\infty(X)$ with $\|x\| \leq 1$. Then $\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$. The condition (1) implies, by Lemma 4.4, that for each $n \in N$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges, hence $Ax \in W(X)$. By (2), there is $m_0 \in N$ such that

$$\left(\frac{1}{m_0} \sum_{n=1}^M \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right|^{q_n} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_0^{-q_n} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right|^{q_n} \leq 1$$

where $M = \sup_k p_k$.

Hence $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right|^{q_n} \leq m_0^M$, so $Ax \in \ell(q)$. This implies that $Ax \in \ell(q)$ for all $x \in \ell_\infty(X)$. Therefore $A \in (\ell_\infty(X), \ell(q))$ $\square$

Theorem 4.8 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell_\infty(X, p), \ell(q))$ if and only if

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/p_k} \|f_k^n\| < \infty$ for every $m, n \in N$, and

(2) For each $m \in N$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_i^{(m)} = 0$

where $\alpha_i^{(m)} = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} i^{-1/q_n} \left| \sum_{k=1}^{\infty} m^{1/p_k} f_k^n(x_k) \right|^{q_n} : x_k \in X, \|x_k\| \leq 1 \right\}$

Proof. Since $\ell_\infty(X, p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$, we have by Proposition 3.1(i) that

$$A \in (\ell_\infty(X, p), \ell(q)) \iff A \in (\ell_\infty(X)_{(m^{-1/p_k})}, \ell(q)) \text{ for every } m \in N.$$

It follows by Proposition 3.1(iv) that for each $m \in N$,

$$A \in (\ell_\infty(X)_{(m^{-1/p_k})}, \ell(q)) \iff (m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell_\infty(X), \ell(q)).$$

It follows by Theorem 4.5 that

$$A \in (\ell_\infty(X, p), \ell(q)) \iff \text{the conditions (1) and (2) are satisfied.}$$

□

Theorem 4.7 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell_\infty(X, p), \ell(q))$ if and only if

$$(1) \text{ For each } m, n \in N, \sum_{k=1}^{\infty} m^{1/p_k} \|f_k^n\| < \infty.$$

$$(2) \text{ For each } m \in N, \sum_{n=1}^{\infty} m^{q_n/p_k} |f_k^n(x)|^{q_n} < \infty \text{ for every } k \in N.$$

$$(3) \text{ For each } m \in N, \lim_{i \rightarrow \infty} \sup_K \alpha(i, m, K) = 0,$$

where the supremum is taken over all finite subset K of N , and

$$\alpha(i, m, K) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} i^{-q_n} \left| \sum_{k \in K} m^{1/p_k} f_k^n(x_k) \right|^{q_n} : x_k \in X \text{ and } \|x_k\| \leq 1 \text{ for all } k \in K \right\}.$$

Proof. By Proposition 3.2(ii), we have $\ell_\infty(X, p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$. It follows by Proposition 3.1(i) and (iv) that

$$A \in (\ell_\infty(X, p), \ell(q)) \iff (m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell_\infty(X), \ell(q)) \text{ for every } m \in N.$$

It follows by Theorem 4.2 that

$$A \in (\ell_\infty(X, p), \ell(q)) \iff (1), (2), \text{ and } (3) \text{ are satisfied.}$$

□

Acknowledgements

The author would like to thank the Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

REFERENCES

- [1]. K.-G. Grosse-Erdmann, *The structure of the sequence spaces of Maddox*, *Canad. J. Math.* **44** (1992), 298-307.
- [2]. K.-G. Grosse-Erdmann, *Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox*, *J. of Math. Anal. Appl.* **180** (1993), 223-238.
- [3]. I.J. Maddox, *Spaces of strongly summable sequences*, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **18** (1967), 345-355.
- [4]. I.J. Maddox, *Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices*, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **64** (1968), 335-343.
- [5]. H. Nakano, *Modulated sequence spaces*, *Proc. Japan. Acad.* **27** (1951), 508-512.
- [6]. S. Simons, *The spaces $l(p_n)$ and $m(p_n)$* , *Proc. London. Math. Soc.* **15** (1965), 422-436.
- [7]. C.X. Wu and L. Liu, *Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces*, *SEA. Bull. Math.* **17**,1 (1993), 83-96.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
 Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.
 Email : Senti005@chiangmai.ac.th

ผลงานวิจัย 5

ชื่อเรื่อง On Matrix Transformations Concerning the Nakano
Sequence Spaces

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้ส่งไปเพื่อตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติ ชื่อ
Acta. Math. Hungar.

On Matrix Transformations Concerning the Nakano Vector-Valued Sequence Space

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this paper, we give the matrix characterizations from Nakano vector-valued sequence space $\ell(X, p)$ and $F_r(X, p)$ into E_r and we also obtain the matrix characterizations from $\ell(X, p)$ and $F_r(X, p)$ into the bounded sequence space ℓ_∞ as corollaries, where $p = (p_k)$ is a bounded sequences of positive real numbers such that $p_k > 1$ for all $k \in N$ and $r \geq 0$.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A45.

1. INTRODUCTION

Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space, $r \geq 0$ and $p = (p_k)$ a bounded sequence of positive real numbers. We write $x = (x_k)$ with x_k in X for all $k \in N$. The X -valued sequence spaces $c_0(X, p)$, $c(X, p)$, $\ell_\infty(X, p)$, $\ell(X, p)$, $E_r(X, p)$ and $F_r(X, p)$ are defined as

$$c_0(X, p) = \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|^{p_k} = 0\},$$

$$c(X, p) = \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\|^{p_k} = 0 \text{ for some } a \in X\},$$

$$\ell_\infty(X, p) = \{x = (x_k) : \sup_k \|x_k\|^{p_k} < \infty\},$$

$$\ell(X, p) = \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} < \infty\},$$

$$E_r(X, p) = \{x = (x_k) : \sup_k \frac{\|x_k\|^{p_k}}{k^r} < \infty\},$$

$$F_r(X, p) = \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} k^r \|x_k\|^{p_k} < \infty\}.$$

Typeset by $\text{\AA}A\text{\AA}S\text{-T}\text{\AA}X$

When $X = K$, the scalar field of X , the corresponding spaces are written as $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$, $\ell(p)$, $E_r(p)$ and $F_r(p)$, respectively. The spaces $c_0(p)$, $c(p)$ and $\ell_\infty(p)$ are known as the sequence spaces of Maddox. These spaces were first introduced and studied by Simons [6], Maddox [3, 4]. The space $\ell(p)$ was first defined by Nakano [5] and it is known as the Nakano sequence space and the space $\ell_\infty(X, p)$ is known as the Nakano vector-valued sequence space. When $p_k = 1$ for all $k \in N$, the spaces $E_r(p)$ and $F_r(p)$ are written as E_r and F_r , respectively. These two sequence spaces were first introduced by Cooke [1]. Grosse-Erdmann [2] has given characterisations of infinite matrices between scalar-valued sequence spaces of Maddox. Wu and Liu [7] gave necessary and sufficient conditions for infinite matrices mapping from $c_0(X, p)$, $\ell_\infty(X, p)$ into $c_0(q)$ and $\ell_\infty(q)$.

In this paper we give characterisation of infinite matrices mapping from $\ell(X, p)$ and $F_r(X, p)$ into E_r and by application of these results we can also characterise those infinite matrices mapping from the spaces $\ell(X, p)$ and $F_r(X, p)$ into ℓ_{∞, p_2} when $p_k > 1$ for all $k \in N$.

2. Notation and Definitions

Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space, the space of all sequences in X is denoted by $W(X)$ and $\Phi(X)$ is denoted for the space of all finite sequences in X . When X is K , the scalar field of X , the corresponding spaces are written as w and Φ .

A sequence space in X is a linear subspace of $W(X)$. Let E be an X -valued sequence space. For $x \in E$ and $k \in N$, we write x_k stands for the k^{th} term of x . For $k \in N$ denote by e_k the sequence $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ with 1 in the k^{th} position and by e the sequence $(1, 1, 1, \dots)$. For $x \in X$ and $k \in N$, let $e^k(x)$ be the sequence $(0, 0, \dots, 0, x, 0, \dots)$ with x in the k^{th} position and let $e(x)$ be the sequence $(x, x, x, \dots)$. We call a sequence space E normal if $(t_k x_k) \in E$ for all $x = (x_k) \in E$ and $t_k \in K$ with $|t_k| = 1$ for all $t_k \in N$. For a fixed scalar sequence $\mu = (\mu_k)$ the sequence space E_μ is defined as

$$E_\mu = \{x \in W(X) : (\mu_k x_k) \in E\}.$$

Let $A = (f_k^n)$ with f_k^n in X' , the topological dual of X . Suppose that E is a space of X -valued sequences and F a space of scalar-valued sequences. Then A is said to map E into F , written by $A : E \rightarrow F$ if for each $x = (x_k) \in E$, $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for each $n \in N$, and the sequence $Ax = (A_n(x)) \in F$. Let (E, F) denote for the set of all infinite matrices mapping from E into F .

Suppose that the X -valued sequence space E is endowed with some linear topology τ . Then E is called a K -space if for each $k \in N$ the k^{th} coordinate mapping $p_k : E \rightarrow X$, defined by $p_k(x) = x_k$, is continuous on E . If, in addition, (E, τ) is an Fréchet (Banach, LF-, LB-) space, then E is called an FK - (BK -, LFK -, LBK -) space. Now, suppose that E contains $\Phi(X)$. Then E is said to have property AB if the set $\{\sum_{k=1}^n e^k(x_k) : n \in N\}$ is bounded in E for every $x = (x_k) \in E$. It is said to have property AK if $\sum_{k=1}^n e^k(x_k) \rightarrow x$ in E as $n \rightarrow \infty$ for every $x = (x_k) \in E$. It has property AD if $\Phi(X)$ is dense in E .

The space $\ell(X, p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} \right)^{1/M}$, where $M = \max \{1, \sup_k p_k\}$.

In each of the space $\ell_{\infty}(X, p)$ and $c_0(X, p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k\|^{p_k/M}$, where $M = \max \{1, \sup_k p_k\}$. It is known that $c_0(X, p)$ is an FK-space with AK under the paranorm g defined as above and $\ell_{\infty}(X, p)$ is a complete LBK-space with AB. In $c(X, p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k - a\|^{p_k/M} + \|a\|$ where a is the unique element in X with $x - e(a) \in c_0(X, p)$. Then g is a paranorm on $c(X, p)$ and $c(X, p)$ is an FK-space under this paranorm g .

3. Main Results

We first give a characterisation of an infinite matrix mapping from $\ell(X, p)$ into E_r when $p_k > 1$ for all $k \in N$.

Theorem 3.1 Let $p = (p_k)$ be bounded sequences of positive real numbers with $p_k > 1$, $r \geq 0$ and let $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ for all $k \in N$. For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (\ell(X, p), E_r)$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} n^{-rq_k} m_0^{-(q_k-1)} < \infty$.

Proof. Assume that $A \in (\ell(X, p), E_r)$. For each $k \in N$, we have $\sup_n n^{-r} |f_k^n(x)| < \infty$ for all $x \in X$ since $e^{(k)}(x) \in \ell(X, p)$ for all $x \in X$. It follows by the uniform bounded principle that there is an $M_k > 1$ such that

$$\sup_n n^{-r} \|f_k^n\| \leq M_k. \quad (3.1)$$

Suppose that

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} n^{-rq_k} m^{-(q_k-1)} = \infty \quad \text{for every } m \in N \quad (3.2)$$

For $n \in N$, we have by (3.1) that

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_j} m_0^{-(q_j-1)} &= \sum_{j=1}^{k_0} \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_j} m_0^{-(q_j-1)} + \sum_{j>k_0} \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_j} m_0^{-(q_j-1)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_0} M_j^{q_j} m_0^{-(q_j-1)} + \sum_{j>k_0} \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_j} m_0^{-(q_j-1)}. \end{aligned}$$

This implies by (3.2) that

$$\sup_n \sum_{j>k} \|f_j^n\|^{q_j} n^{-rq_j} m^{-(q_j-1)} = \infty \quad \text{for all } k, m \in N \quad (3.3)$$

By (3.2) and (3.3) we can choose $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$, $m_1 < m_2 < \dots$, $m_i > 2^i$ and $n_i \rightarrow \infty$ such that for all $i \geq 1$

$$\sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} \|f_j^{n_i}\|^{q_j} n_i^{-r q_j} m_i^{-(q_j-1)} > i$$

And we choose $x_j \in X$ with $\|x_j\| = 1$ such that for all $i \geq 1$

$$a_i = \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} n_i^{-r q_j} m_i^{-(q_j-1)} > i$$

and put $y = (y_j)$ where $y_j = m_i^{-(q_j-1)} n_i^{-r q_j / p_j} |f_j^{n_i}(x_j)|^{(q_j-1)} a_i^{-1} x_j$ if $k_{i-1} < j \leq k_i$.

Thus

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^{p_j} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} a_i^{-p_j} m_i^{-p_j(q_j-1)} \|f_j^{n_i}(x_j)\|^{p_j(q_j-1)} n_i^{-r q_j} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} a_i^{-p_j} m_i^{-q_j} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} n_i^{-r q_j} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{-1} m_i^{-1} \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} n_i^{-r q_j} m_i^{-(q_j-1)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1. \end{aligned}$$

Hence $y = (y_j) \in \ell(X, p)$. Since $\ell(X, p)$ is normal, by using the same proof as in [7], Theorem 1.3 we obtain that

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k^n(y_k)|}{n^r} < \infty \quad (3.3)$$

Since $1 + q_j/p_j = q_j$, for all $j \in N$, we have that for each $i \in N$,

$$n_i^{-r} \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} |f_j^{n_i}(y_j)| = \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} n_i^{-r(1+q_j/p_j)} m_i^{-(q_j-1)} a_i^{-1} = \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} n_i^{-r q_j} m_i^{-(q_j-1)} a_i^{-1} = 1$$

Thus $n_i^{-r} \sum_{j=1}^{\infty} |f_j^{n_i}(y_j)| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} n_i^{-r} |f_j^{n_i}(y_j)| = \infty$ which contradicts to (3.4), hence $A: \ell(X, p) \rightarrow E_r$.

Conversely, assume that the condition holds. Then there are $m_0 \in N$ and $K > 1$ such that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} n^{-r q_k} m_0^{-(q_k-1)} < K \text{ for all } n \in N. \quad (3.5)$$

Let $x = (x_k) \in \ell(X, p)$. Note that for $a, b > 0$, we have

$$ab \leq a^{p_k} + b^{q_k}. \quad (3.6)$$

It follows by (3.5) and (3.6) that for $n \in N$,

$$\begin{aligned} n^{-r} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right| &= n^{-r} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(m_0^{-1/p_k} m_0^{1/p_k} x_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (n^{-r} m_0^{-1/p_k} \|f_k^n\|) (\|m_0^{1/p_k} x_k\|) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} n^{-r q_k} m_0^{-q_k/p_k} \|f_k^n\|^{q_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \|m_0^{1/p_k} x_k\|^{p_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} n^{-r q_k} m_0^{-(q_k-1)} \|f_k^n\|^{q_k} + m_0 \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} \\ &\leq K + m_0 \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k}. \end{aligned}$$

Hence $n^{-r} \sup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right| < \infty$, so that $Ax \in E_r$. This completes the proof. $\square$

Theorem 3.2 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k > 1$ for all $k \in N$, $r \geq 0$, $s \geq 0$ and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (F_r(X, p), E_s)$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} (k^{-r q_k/p_k} \|f_k^n\|^{q_k} n^{-s q_k} m_0^{-(q_k-1)}) < \infty.$$

Proof. Since $F_r(X, p) = \ell(X, p)_{(k^{-r/p_k})}$, it is easy to show that,

$$A \in (F_r(X, p), E_r) \iff (k^{-r/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), E_r)$$

By Theorem 3.1 we have

$$(k^{-r/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), E_s) \iff \text{there is } m_0 \in N \text{ such that } \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} (k^{-r q_k/p_k} \|f_k^n\|^{q_k} n^{-s q_k} m_0^{-(q_k-1)}) < \infty.$$

Thus the theorem is proved. $\square$

Since $E_0 = \ell_{\infty}$, the following two results are obtained directly by Theorem 3.1 and Theorem 3.2, respectively.

Corollary 3.3 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers with $p_k > 1$ and let $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ for all $k \in N$. For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (\ell(X, p), \ell_{\infty})$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} m_0^{-(q_k-1)} < \infty$.

Corollary 3.4 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers with $p_k > 1$ and let $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ for all $k \in N$. For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (F_r(X, p), \ell_\infty)$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} (k^{-r q_k / p_k} \|f_k^n\|^{q_k} m_0^{-(q_k-1)}) < \infty$.

Acknowledgements

The author would like to thank the Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

REFERENCES

- [1]. R.G. Cooke, *Infinite Matrices and Sequence Spaces*, London : Macmillan, 1950.
- [2]. K.-G. Grosse-Erdmann, *Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox*, *J. of Math. Anal. Appl.* 180 (1993), 223-238.
- [3]. I.J. Maddox, *Spaces of strongly summable sequences*, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 18 (1967), 345-355.
- [4]. I.J. Maddox, *Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices*, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 64 (1968), 335-340.
- [5]. H. Nakano, *Modular sequence spaces*, *Proc. Japan. Acad.* 27 (1951), 508-512.
- [6]. S. Simons, *The spaces $\ell(p_n)$ and $m(p_n)$* , *Proc. London. Math. Soc.* 18 (1965), 422-436.
- [7]. C.X. Wu and L. Liu, *Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces*, *SEA. Bull. Math.* 17,1 (1993), 83-96.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.
Email : Scott@50@chiangmai.ac.th

ผลงานวิจัย 6

ชื่อเรื่อง On Matrix Transformations Related to Nakano Vector -
Valued Sequence Spaces

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้ส่งไปเพื่อตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติ ชื่อ
Bull. Math. Soc. no. 1998
(Bulletin of Calcutta Mathematical Society) ในประเทศอินเดีย

On Matrix Transformations Related to Nakano Vector-Valued Sequence Space

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this paper, we give necessary and sufficient conditions for infinite matrices mapping from Nakano vector-valued sequence space $\ell(X, p)$ into the sequence spaces ℓ_∞ and $\ell_\infty(q)$ and we also give the matrix characterizations from $M_0(X, p)$ into the space $\ell_\infty(q)$ where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A45.

1. INTRODUCTION

Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space and $p = (p_k)$ a bounded sequence of positive real numbers. We write $x = (x_k)$ with x_k in X for all $k \in N$. The X -valued sequence spaces $c_0(X, p)$, $c(X, p)$, $\ell_\infty(X, p)$, $\ell(X, p)$, $\ell_\infty(X, p)$, and $M_0(X, p)$ are defined as

$$\begin{aligned}c_0(X, p) &= \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|^{p_k} = 0\}, \\c(X, p) &= \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\|^{p_k} = 0 \text{ for some } a \in X\}, \\\ell_\infty(X, p) &= \{x = (x_k) : \sup_k \|x_k\|^{p_k} < \infty\}, \\\ell(X, p) &= \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} < \infty\} \\\ell_\infty(X, p) &= \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta_k x_k\|^{q_k} = 0 \text{ for each } (\delta_k) \in c_0\} \\M_0(X, p) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell(X)_{(n^{-1/p_k})}\end{aligned}$$

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{A}\mathcal{S}}\text{-T}_{\mathcal{E}}\mathcal{X}$

When $X = K$, the scalar field of X , the corresponding spaces are written as $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$, $\ell(p)$, $\underline{\ell}_\infty(p)$, and $M_0(p)$, respectively. Each of the first three spaces are known as the sequence spaces of Maddox. These spaces were first introduced and studied by Simons (1965), Maddox (1967, 1968). The space $\ell(p)$ was first defined by Nakano (1951) and it is known as the Nakano sequence space and the space $\ell_\infty(X, p)$ is known as the Nakano vector-valued sequence space. The spaces $\underline{\ell}_\infty(p)$ and $M_0(p)$ were first introduced by Grosse-Erdmann (1992) and he has investigated the structure of the spaces $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$ and $\underline{\ell}_\infty(p)$. In [1], he also showed that $\underline{\ell}_\infty(p) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \ell_{\infty(p_n/p_k)}$. Grosse-Erdmann (1993) gave the matrix characterizations between scalar-valued sequence spaces of Maddox. Wu and Liu (1993) deal with the problem of characterizations those infinite matrices mapping from $c_0(X, p)$, $\ell_\infty(X, p)$ into $c_0(q)$ and $\ell_\infty(q)$ where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers. S. Suantai (1999) gave the matrix characterizations from $\ell(X, p)$ into the vector-valued sequence spaces $c_0(Y, q)$, $c(Y)$, and $\ell_s(Y)$ where $q = (q_k)$ is a sequence of positive real numbers, Y a Banach space and $s \geq 1$.

2. Notation and Definitions

Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space, the space of all sequences in X is denoted by $W(X)$ and $\Phi(X)$ is denoted for the space of all finite sequences in X . When X is K , the scalar field of X , the corresponding spaces are written as w and ϕ .

A sequence space in X is a linear subspace of $W(X)$. Let E be an X -valued sequence space. For $x \in E$ and $k \in N$, we write x_k stands for the k^{th} term of x . For $k \in N$ denote by e_k the sequence $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ with 1 in the k^{th} position and by e the sequence $(1, 1, 1, \dots)$. For $x \in X$ and $k \in N$, let $e^k(x)$ be the sequence $(0, 0, \dots, 0, x, 0, \dots)$ with x in the k^{th} position and let $c(x)$ be the sequence $(x, x, x, \dots)$. For a fixed scalar sequence $\mu = (\mu_k)$ the sequence space E_μ is defined as

$$E_\mu = \{x \in W(X) : (\mu_k x_k) \in E\}.$$

Let $A = (f_k^n)$ with f_k^n in X' , the topological dual of X . Suppose that E is a space of X -valued sequences and F a space of scalar-valued sequences. Then A is said to map E into F , written by $A : E \rightarrow F$ if for each $x = (x_k) \in E$, $A_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k^n(x_k)$ converges for each $n \in N$, and the sequence $Ax = (A_n(x)) \in F$. Let (E, F) denote for the set of all infinite matrices mapping from E into F .

Suppose that the X -valued sequence space E is endowed with some linear topology τ . Then E is called a K -space if for each $k \in N$ the k^{th} coordinate mapping $p_k : E \rightarrow X$, defined by $p_k(x) = x_k$, is continuous on E . If, in addition, (E, τ) is an Fréchet (Banach, LF-, LB-) space, then E is called an FK -, BFK -, LFK -, LBK -space. Now, suppose that E contains $\Phi(X)$. Then E is said to have property AB if the set $\{\sum_{k=1}^n e^k(x_k) : n \in N\}$ is bounded in E for every $x = (x_k) \in E$. It is said to have property AK if $\sum_{k=1}^n e^k(x_k) \rightarrow x$ in E as $n \rightarrow \infty$ for every $x = (x_k) \in E$. It has property AD if $\Phi(X)$ is dense in E .

The space $\ell(X, p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} \right)^{1/M}$, where $M = \max \{1, \sup_k p_k\}$; it is even a BK-space if $p_k \geq 1$ for all $k \in N$, with a norm given by

$$\|x\| = \inf \{ \rho > 0 : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k/\rho\|^{p_k} \leq 1 \}$$

In each of the space $\ell_{\infty}(X, p)$ and $c_0(X, p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k\|^{p_k/M}$, where $M = \max \{1, \sup_k p_k\}$. It is known that $c_0(X, p)$ is an FK-space with AK under the paranorm g defined as above and $\ell_{\infty}(X, p)$ is a complete LBK-space with AB. In $c(X, p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k - a\|^{p_k/M} + \|a\|$ where a is the unique element in X with $x - c(a) \in c_0(X, p)$. Then g is a paranorm on $c(X, p)$ and $c(X, p)$ is an FK-space under this paranorm g .

3. Main Results

We begin with giving the matrix characterizations from $\ell(X, p)$ into ℓ_{∞} .

Theorem 3.1 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers with $p_k \leq 1$ for all $k \in N$ and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X, p), \ell_{\infty})$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that $\sup_{n,k} m_0^{-1/p_k} \|f_k^n\| < \infty$.

Proof. Assume that $A \in (\ell(X, p), \ell_{\infty})$. In $\ell(X, p)$, we consider it as a paranormed space with the paranorm g defined as above and since $p_k \leq 1$ for all $k \in N$, we have $M = \max \{1, \sup_k p_k\} = 1$. Now, we write $\|\cdot\|$ stands for the paranorm g . By Zeller's theorem, $A: \ell(X, p) \rightarrow \ell_{\infty}$ is continuous. Then there is $m_0 \in N$ such that

$$\sup_n \left| \sum_{k=1}^m f_k^n(x_k) \right| \leq 1 \quad \text{for all } x \in \ell(X, p) \text{ with } \|x\| \leq \frac{1}{m_0} \quad (3.1)$$

Let $n, k \in N$ be fixed and let $x_k \in X$ be such that $\|x_k\| \leq 1$. Then $e^{(k)}(m_0^{-1/p_k} x_k) \in \ell(X, p)$ and $\|e^{(k)}(m_0^{-1/p_k} x_k)\| \leq \frac{1}{m_0}$. By (3.1), we have

$$m_0^{-1/p_k} |f_k^n(x_k)| \leq \sup_{x \in \ell(X, p)} |f_k^n(m_0^{-1/p_k} x_k)| = \|Ae^{(k)}(m_0^{-1/p_k} x_k)\| \leq 1.$$

This implies that $\sup_{n,k} m_0^{-1/p_k} \|f_k^n\| < \infty$.

Conversely, assume that the condition holds. Let $x = (x_k) \in \ell(X, p)$. By assumption, there is a $C > 0$ such that

$$m_0^{-1/p_k} \|f_k^n\| < C \quad \text{for all } n, k \in N. \quad (3.2)$$

Since $\|m_0^{1/p_k} x_k\| \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$, there is a $k_0 \in N$ such that $\|m_0^{1/p_k} x_k\| < 1$ for all $k \geq k_0$. Since $0 < p_k \leq 1$ for all $k \in N$, we have

$$\|m_0^{1/p_k} x_k\| \leq \|m_0^{1/p_k} x_k\|^{p_k} \quad \text{for all } k \geq k_0. \quad (3.3)$$

It follows by (3.2) and (3.3) that

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|m_0^{1/p_k} x_k\| &= \sum_{k=1}^{k_0} \|m_0^{1/p_k} x_k\| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \|m_0^{1/p_k} x_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} \|m_0^{1/p_k} x_k\| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \|m_0^{1/p_k} x_k\|^{p_k} \\ &= K_1 + m_0 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} \\ &\leq K_1 + m_0 \|x\|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

where $K_1 = \sum_{k=1}^{k_0} \|m_0^{1/p_k} x_k\|$.

For $n \in N$, by (3.2) and (3.4) we have

$$\begin{aligned} |A_n x| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n (m_0^{-1/p_k} (m_0^{1/p_k} x_k)) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m_0^{-1/p_k} \|f_k^n\| \cdot \|m_0^{1/p_k} x_k\| \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} \|m_0^{1/p_k} x_k\| \\ &\leq C(K_1 + m_0 \|x\|). \end{aligned}$$

where $K_1 = \sum_{k=1}^{k_0} \|m_0^{1/p_k} x_k\|$.

This implies that $\sup_n |A_n x| < \infty$, so that $Ax \in \ell_{\infty}$. This completes the proof. $\square$

When $p_k = 1$ for all $k \in N$, we obtain the following result directly from Theorem 3.1.

Corollary 3.2 For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (\ell(X), \ell_{\infty})$ if and only if $\sup_{n, k} \|f_k^n\| < \infty$.

Theorem 3.3 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of real numbers with $p_k \leq 1$ for all $k \in N$. Then for an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}(q))$ if and only if for each $m \in N$, there is $r_m \in N$ such that $\sup_{n, k} r_m^{-1/p_k} m^{1/q_k} \|f_k^n\| < \infty$.

Proof. Since $\ell_{\infty}(q) = \cap_{m=1}^{\infty} \ell_{\infty}(m^{1/q_k})$, it follows that

$$A \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}(q)) \iff A \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}(m^{1/q_k})) \quad \text{for all } m \in N.$$

For each $m \in N$, we can easily show that

$$A \in (\ell(X, p), \ell_{\infty(m^{1/p_k})}) \iff (m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}).$$

By Theorem 3.1 we obtain that for each $m \in N$,

$$(m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}) \iff \text{there is } r_m \in N \text{ such that } \sup_{n,k} r_m^{-1/p_k} m^{1/p_k} \|f_k^n\| < \infty.$$

This completes the proof. $\square$

Theorem 3.4 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (M_0(X, p), \ell_{\infty}(q))$ if and only if for each r and $s \in N$, $\sup_{n,k} s^{1/p_k} r^{1/p_k} \|f_k^n\| < \infty$.

Proof. Since $M_0(X, p) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \ell(X)_{(n^{-1/p_k})}$, we have

$$A \in (M_0(X, p), \ell_{\infty}(q)) \iff A \in (\ell(X)_{(r^{-1/p_k})}, \ell_{\infty}(q)) \text{ for all } r \in N$$

and since $\ell_{\infty}(q) = \bigcap_{s=1}^{\infty} \ell_{\infty}(s^{1/p_k})$, it follows that for $r \in N$,

$$A \in (\ell(X)_{(r^{-1/p_k})}, \ell_{\infty}(q)) \iff A \in (\ell(X)_{(r^{-1/p_k})}, \ell_{\infty}(s^{1/p_k})) \text{ for all } s \in N.$$

For $r, s \in N$, we can easily show that

$$A \in (\ell(X)_{(r^{-1/p_k})}, \ell_{\infty}(s^{1/p_k})) \iff (s^{1/p_k} r^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X), \ell_{\infty}).$$

For $r, s \in N$, we obtain by Corollary 3.2

$$(s^{1/p_k} r^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X), \ell_{\infty}) \iff \sup_{n,k} s^{1/p_k} r^{1/p_k} \|f_k^n\| < \infty.$$

Thus the theorem is proved. $\square$

Acknowledgements

The author would like to thank the Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

REFERENCES

- K.-G. Grosse-Erdmann (1992), The structure of the sequence spaces of Maddox, *Canad. J. Math.* 44, 296.
- K.-G. Grosse-Erdmann (1993), Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox, *J. of Math. Anal. Appl.* 180, 223.
- I.J. Maddox (1967), Spaces of strongly summable sequences, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 18, 345.
- I.J. Maddox (1968), *Normed sequence spaces generated by infinite matrices*, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 64, 335.
- H. Nakano (1951), *Modular sequence spaces*, *Proc. Japan. Acad.* 27, 508.

- S. Simons (1965), *The spaces $l(p_n)$ and $m(p_n)$* , Proc. London. Math. Soc. 18, 472.
S. Suantai (1999), *Matrix transformations between some vector-valued sequence spaces*, to appear in SFA, Bull. Math.
C.X. Wu and L. Liu (1993), *Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces*, SFA, Bull. Math. 17,1, 83.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.
Email : Senti005@chiangmai.ac.th

ผลงานวิจัย 7

ชื่อเรื่อง Matrix Transformations on Nakano Vector - Valued
Sequence Spaces

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้ส่งไปเพื่อตีพิมพ์ (submitted) ในวารสารนานาชาติ
ของประเทศ อาร์เจนตินา

Matrix Transformations on Nakano Vector-Valued Sequence Space

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this paper, we give the matrix characterizations from Nakano vector-valued sequence space $\ell(X, p)$ into ℓ_∞ , $\ell_\infty(q)$, bs and cs where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers such that $p_k > 1$ for all $k \in N$.

[1991] AMS Mathematics Subject Classification: 46A45.

1. INTRODUCTION

Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space and $p = (p_k)$ a bounded sequence of positive real numbers. We write $x = (x_k)$ with x_k in X for all $k \in N$. The X -valued sequence spaces $c_0(X, p)$, $c(X, p)$, $\ell_\infty(X, p)$, $\ell(X, p)$, and $\ell_\infty(X, p)$ are defined as

$$\begin{aligned}c_0(X, p) &= \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|^{p_k} = 0\}, \\c(X, p) &= \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\|^{p_k} = 0 \text{ for some } a \in X\}, \\ \ell_\infty(X, p) &= \{x = (x_k) : \sup_k \|x_k\|^{p_k} < \infty\}, \\ \ell(X, p) &= \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} < \infty\} \\ \ell_\infty(X, p) &= \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|\delta_k x_k\|^{q_k} = 0 \text{ for each } (\delta_k) \in c_0\}\end{aligned}$$

When $X = K$, the scalar field of X , the corresponding spaces are written as $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$, $\ell(p)$, and $\ell_\infty(p)$, respectively. The spaces $c_0(p)$, $c(p)$ and $\ell_\infty(p)$ are known as the sequence spaces of Maddox. These spaces were first introduced and studied by Simons [6], Maddox [3, 4]. The space $\ell(p)$ was first defined by Nakano [5] and it is known as the Nakano sequence space and the space $\ell(X, p)$ is known as

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{A}\mathcal{S}}\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$

the Nakano vector-valued sequence space. The spaces $\ell_\infty(p)$ was first introduced by Grosse-Erdmann [1] and he has investigated the structure of the spaces $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$ and $\ell_{\infty 0}(p)$. In [1], he also showed that $\ell_\infty(p) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \ell_{\infty(p_k/r_k)}$. Grosse-Erdmann [2] has given characterizations of infinite matrices between scalar-valued sequence spaces of Maddox. Wu and Liu [7] gave necessary and sufficient conditions for infinite matrices mapping from $c_0(X, p)$, $\ell_\infty(X, p)$ into $c_0(q)$ and $\ell_\infty(q)$.

2. Notation and Definitions

Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space, the space of all sequences in X is denoted by $W(X)$ and $\Phi(X)$ is denoted for the space of all finite sequences in X . When X is K , the scalar field of X , the corresponding spaces are written as w and ϕ .

A sequence space in X is a linear subspace of $W(X)$. Let E be an X -valued sequence space. For $x \in E$ and $k \in N$, we write x_k stands for the k th term of x . For $k \in N$ denote by e_k the sequence $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ with 1 in the k th position and by e the sequence $(1, 1, 1, \dots)$. For $x \in X$ and $k \in N$, let $e^k(x)$ be the sequence $(0, 0, \dots, 0, x, 0, \dots)$ with x in the k th position and let $c(x)$ be the sequence $(x, x, x, \dots)$. We call a sequence space E normal if $(t_k x_k) \in E$ for all $x = (x_k) \in E$ and $t_k \in K$ with $|t_k| = 1$ for all $t_k \in N$. For a fixed scalar sequence $\mu = (\mu_k)$ the sequence space E_μ is defined as

$$E_\mu = \{x \in W(X) : (\mu_k x_k) \in E\}.$$

Let $A = (f_k^n)$ with f_k^n in X' , the topological dual of X . Suppose that E is a space of X -valued sequences and F a space of scalar-valued sequences. Then A is said to map E into F , written by $A : E \rightarrow F$ if for each $x = (x_k) \in E$, $A_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k^n(x_k)$ converges for each $n \in N$, and the sequence $Ax = (A_n(x)) \in F$. Let (E, F) denote for the set of all infinite matrices mapping from E into F .

Suppose that the X -valued sequence space E is endowed with some linear topology τ . Then E is called a K -space if for each $k \in N$ the k th coordinate mapping $p_k : E \rightarrow X$, defined by $p_k(x) = x_k$, is continuous on E . If, in addition, (E, τ) is an Fréchet (Banach, LF-, LB-) space, then E is called an FK- (BK-, LFK-, LBK-) space. Now, suppose that E contains $\Phi(X)$. Then E is said to have property AB if the set $\{\sum_{k=1}^n e^k(x_k) : n \in N\}$ is bounded in E for every $x = (x_k) \in E$. It is said to have property AK if $\sum_{k=1}^n e^k(x_k) \rightarrow x$ in E as $n \rightarrow \infty$ for every $x = (x_k) \in E$. It has property AD if $\Phi(X)$ is dense in E .

The space $\ell(X, p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} \right)^{1/M}$, where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$.

In each of the space $\ell_\infty(X, p)$ and $c_0(X, p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k\|^{p_k/M}$, where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$. It is known that $c_0(X, p)$ is an FK-space with AK under the paranorm g defined as above and $\ell_\infty(X, p)$ is a complete LBK-space with AB. In $c(X, p)$ we consider the function

$g(x) = \sup_k \|x_k - a\|^{p_k/M} + \|a\|$ where a is the unique element in X with $x - c(a) \in c_0(X, p)$. Then g is a paranorm on $c(X, p)$ and $c(X, p)$ is an FK-space under this paranorm g .

The sequence spaces cs and bs are also mentioned in this paper where

$$cs = \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ converges.}\}, \text{ with } \|x\| = \sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k \right|,$$

$$bs = \{x = (x_k) : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| < \infty\}, \text{ with } \|x\| = \sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k \right|$$

These two spaces are both BK-spaces, cs has the AK property and it is a closed subspace of bs .

3. Main Results

We first give a characterization of an infinite matrix mapping from $\ell(X, p)$ into ℓ_{∞} when $p_k > 1$ for all $k \in N$.

Theorem 3.1 Let $p = (p_k)$ be bounded sequences of positive real numbers with $p_k > 1$ and let $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ for all $k \in N$. For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (\ell(X, p), \ell_{\infty})$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} m_0^{-(q_k-1)} < \infty$.

Proof. Assume that $A \in (\ell(X, p), \ell_{\infty})$. For each $k \in N$, we have $\sup_n |f_k^n(x)| < \infty$ for all $x \in X$ since $c^{(k)}(x) \in \ell(X, p)$ for all $x \in X$. It follows by the uniform bounded principle that there is an $M_k > 1$ such that $\sup_n \|f_k^n\| \leq M_k$. Suppose that

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} m^{-(q_k-1)} = \infty \text{ for every } m \in N \quad (3.1)$$

First, we show that

$$\sup_n \sum_{j>k} \|f_j^n\|^{q_j} m^{-(q_j-1)} = \infty \text{ for all } k, m \in N \quad (3.2)$$

For this, if not, then there are $k_0, m_0 \in N$ and $K > 1$ such that

$$\sup_n \sum_{j>k_0} \|f_j^n\|^{q_j} m_0^{-(q_j-1)} < K$$

For $n \in N$, we have

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j^n\|^{q_j} m_0^{-(q_j-1)} &= \sum_{j=1}^{k_0} \|f_j^n\|^{q_j} m_0^{-(q_j-1)} + \sum_{j>k_0} \|f_j^n\|^{q_j} m_0^{-(q_j-1)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{k_0} M_j^{q_j} m_0^{-(q_j-1)} + K. \end{aligned}$$

This implies that $\sup_n \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j^n\|^{q_j} m_0^{-(q_j-1)} < \infty$, which contradicts (3.1), so (3.2) holds.

By (3.1) and (3.2) we can choose $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots$, $m_1 < m_2 < \dots$, $m_i > 2^i$ and $n_i \rightarrow \infty$, such that for all $i \geq 1$

$$\sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} \|f_j^{n_i}\|^{q_j} m_i^{-(q_j-1)} > i$$

And we choose $x_j \in X$ with $\|x_j\| = 1$ such that for all $i \geq 1$

$$a_i = \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} m_i^{-(q_j-1)} > i$$

and put $y = (y_j)$ where $y_j = m_i^{-(q_j-1)} |f_j^{n_i}(x_j)|^{(q_j-1)} a_i^{-1} x_j$ if $k_{i-1} < j \leq k_i$.

Thus

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^{p_j} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} a_i^{-p_j} m_i^{-p_j(q_j-1)} |f_j^{n_i}(x_j)|^{p_j(q_j-1)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} a_i^{-p_j} m_i^{-q_j} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{-1} m_i^{-1} \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} m_i^{-(q_j-1)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1. \end{aligned}$$

Hence $y = (y_j) \in \ell(X, p)$. Since $\ell(X, p)$ is normal, it follows by [7], Theorem 1.3

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |f_k^n(y_k)| < \infty \quad (3.3)$$

But we have for each $i \in N$,

$$\sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} |f_j^{n_i}(y_j)| = \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} |f_j^{n_i}(x_j)|^{q_j} m_i^{-(q_j-1)} a_i^{-1} = 1$$

Thus $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j^{n_i}(y_j)| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k_{i-1} < j \leq k_i} |f_j^{n_i}(y_j)| = \infty$ which contradicts to (3.3), hence $A: \ell(X, p) \rightarrow \ell_{\infty}$.

Conversely, assume that the condition holds. Then there are $m_0 \in N$ and $K > 1$ such that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|^{q_k} m_0^{-(q_k-1)} < K \text{ for all } n \in N. \quad (3.4)$$

Let $x = (x_k) \in \ell(X, p)$. Note that for $a, b \geq 0$, we have

$$ab \leq a^{2^k} + b^{2^k}. \quad (3.5)$$

It follows by (3.4) and (3.5) that for $n \in N$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(m_0^{-1/p_k}, m_0^{1/p_k} x_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m_0^{-q_k/p_k} \|f_k^n\|^{q_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \|m_0^{1/p_k} x_k\|^{p_k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} m_0^{-(q_k-1)} \|f_k^n\|^{q_k} + m_0 \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} \\ &\leq K + m_0 \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k}. \end{aligned}$$

Hence $\sup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k) \right| < \infty$, so that $Ax \in \ell_{\infty}$. This completes the proof. $\square$

Theorem 3.2 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers such that $p_k > 1$ for all $k \in N$ and let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}(q))$ if and only if for each r and $s \in N$, $\sup_{n, k} s^{1/q_k} r^{-1/p_k} \|f_k^n\| < \infty$.

Proof. Since $\ell_{\infty}(p) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \ell_{\infty}(n^{1/p_k})$, it follows that,

$$A \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}(q)) \iff A \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}(r^{1/q_k})) \text{ for all } r \in N$$

It is easily to show that for $r \in N$,

$$A \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}(r^{1/q_k})) \iff (r^{1/q_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}).$$

For $r \in N$, we obtain by Theorem 3.1

$$(r^{1/q_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}) \iff \text{there is } m_r \in N \text{ such that } \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} r^{q_k/q_k} \|f_k^n\|^{q_k} m_r^{-(q_k-1)} < \infty.$$

Thus the theorem is proved. $\square$

Theorem 3.3 Let $p = (p_k)$ be bounded sequences of positive real numbers with $p_k > 1$ and let $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ for all $k \in N$. For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (\ell(X, p), bs)$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^n f_k^i \right\|^{q_k} m_0^{-(q_k-1)} < \infty$.

Proof. For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, we can easily show that

$$A \in (\ell(X, p), bs) \iff \left(\sum_{i=1}^n f_k^i \right)_{n,k} \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}).$$

This implies by Theorem 3.1 that $A \in (\ell(X, p), bs)$ if and only if there is $m_0 \in N$ such that

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^n f_k^i \right\|^{q_k} m_0^{-(q_k-1)} < \infty.$$

□

Theorem 3.4 Let $p = (p_k)$ be bounded sequences of positive real numbers with $p_k > 1$ and let $\frac{1}{p_k} + \frac{1}{q_k} = 1$ for all $k \in N$. For an infinite matrix $A = (f_k^n)$, $A \in (\ell(X, p), cs)$ if and only if

(1) there is $m_0 \in N$ such that $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^n f_k^i \right\|^{q_k} m_0^{-(q_k-1)} < \infty.$

(2) For each $k \in N$ and $x \in X$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_k^n(x)$ converges.

Proof. The necessity is obtained by Theorem 3.1 and by the fact that $e^{(k)}(x) \in \ell(X, p)$ for every $k \in N$ and $x \in X$.

Now, suppose that (1) and (2) hold. By Theorem 3.3, we have $A : \ell(X, p) \rightarrow bs$. Let $x = (x_k) \in \ell(X, p)$. Since $\ell(X, p)$ has the AK property, we have $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{(k)}(x_k)$ in $\ell(X, p)$. By Zeller's theorem, $A : \ell(X, p) \rightarrow bs$ is continuous. It implies that $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A e^{(k)}(x_k)$. By (2), $A e^{(k)}(x_k) \in cs$ for all $k \in N$. Since cs is a closed subspace of bs , it implies that $Ax \in cs$. Hence the proof is now complete. □

Acknowledgements

The author would like to thank the Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

REFERENCES

- [1]. K.-G. Grosse-Erdmann, The structure of the sequence spaces of Maddox, *Canad. J. Math.* 44 (1992), 298-307.
- [2]. K.-G. Grosse-Erdmann, Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox, *J. of Math. Anal. Appl.* 180 (1993), 223-236.
- [3]. L.J. Maddox, Spaces of strongly summable sequences, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 18 (1967), 345-355.
- [4]. L.J. Maddox, Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 64 (1968), 335-340.
- [5]. H. Nakano, Modular sequence spaces, *Proc. Japan. Acad.* 27 (1951), 508-512.
- [6]. S. Simons, The spaces $\ell(p_k)$ and $m(p_k)$, *Proc. London. Math. Soc.* 18 (1968), 422-436.
- [7]. C.X. Wu and L. Liu, Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces, *SEA. Bull. Math.* 17,1 (1993), 83-96.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand
Email: Sont005@chiangmai.ac.th

ผลงานวิจัย 8

ชื่อเรื่อง Matrix Transformations Between Some Vector - Valued
Sequence Spaces

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนไธ
Suthep Suantai

ผลงานนี้ได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์ (accepted) ในวารสารนานาชาติ ชื่อ
SEA. Bull. Math. (Southeast Asian Bulletin of Mathematics)

On Matrix Transformations between Some Vector-Valued Sequence Spaces

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this paper, we give necessary and sufficient conditions for infinite matrices mapping from the Nakano vector-valued sequence space $\ell(X, p)$ into any BK-space and by using this result we obtain the matrix characterizations from $\ell(X, p)$ into the sequence spaces $\ell_\infty(Y)$, $c_0(Y, q)$, $c(Y)$, $\ell_s(Y)$, $E_r(Y)$, and $F_r(Y)$ where $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ are bounded sequences of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$, $r \geq 0$, and $s \geq 1$.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A45.

1. INTRODUCTION

Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space and $p = (p_k)$ a bounded sequence of positive real numbers. We write $x = (x_k)$ with x_k in X for all $k \in N$. The X -valued sequence spaces $c_0(X, p)$, $c(X, p)$, $\ell_\infty(X, p)$, $\ell(X, p)$, $E_r(X, p)$ and $F_r(X, p)$ are defined as

$$c_0(X, p) = \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|^{p_k} = 0\},$$

$$c(X, p) = \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\|^{p_k} = 0 \text{ for some } a \in X\},$$

$$\ell_\infty(X, p) = \{x = (x_k) : \sup_k \|x_k\|^{p_k} < \infty\},$$

$$\ell(X, p) = \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} < \infty\},$$

$$E_r(X, p) = \{x = (x_k) : \sup_k \frac{\|x_k\|^{p_k}}{n^r} < \infty\},$$

$$F_r(X, p) = \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} k^r \|x_k\|^{p_k} < \infty\}.$$

When $X = K$, the scalar field of X the corresponding spaces are written as $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_\infty(p)$, $\ell(p)$, $E_r(p)$ and $F_r(p)$, respectively and the first three spaces are known as the sequence spaces of Maddox.

Typeset by $\mathcal{AAS-TX}$

These spaces were first introduced and studied by Simons [8], Maddox [4, 5]. The space $\ell(p)$ was first introduced by Nakano [6]. When $p_k = 1$ for all $k \in N$, the space $E_r(p)$ and $F_r(p)$ are written as E_r and F_r , respectively. These two spaces were first defined by Cooke [1]. The structure of sequence spaces $c_0(p)$, $c(p)$, and $\ell_\infty(p)$ have been investigated by Grosse-Erdmann [2] and in [3] he has given characterisations of matrix transformations between the scalar-valued sequence spaces of Maddox. Wu and Liu [9] deal with the problem of characterisations of infinite matrices mapping from $c_0(X, p)$ and $\ell_\infty(X, p)$ into $c_0(q)$ and $\ell_\infty(q)$.

2. Notation and Definitions

Let $(X, \|\cdot\|)$ and $(Y, \|\cdot\|)$ be Banach spaces, the space of all continuous linear operators from X into Y is denoted by $\mathcal{L}(X, Y)$. Let $W(X)$ and $\Phi(X)$ denote for the space of all sequences in X and the space of all finite sequences in X . When $X = K$, the scalar field of X , the corresponding spaces are written as W and Φ , respectively.

A sequence spaces in X is a linear subspace of $W(X)$. Let E be any X -valued sequence space. For $x \in E$ and $k \in N$, we write x_k stands for the k^{th} term of X . For $x \in X$ and $k \in N$, let $e^k(x)$ be the sequence $(0, 0, \dots, 0, x, 0, \dots)$ with x in the k^{th} position and let $e(x)$ be the sequence $(x, x, x, \dots)$. For a fixed scalar sequence $\mu = (\mu_k)$ the sequence space E_μ is defined as

$$E_\mu = \{x \in W(X) : (\mu_k x_k) \in E\}.$$

Let $A = (T_k^n)$ with T_k^n in $\mathcal{L}(X, Y)$. Suppose that E is an X -valued sequence space and F an Y -valued sequence space. Then A is said to map E into F , written by $A : E \rightarrow F$ if for each $x = (x_k) \in E$, $A_n(x) = \sum_{k=1}^n T_k^n(x_k)$ converges for each $n \in N$, and the sequence $Ax = (A_n(x)) \in F$. Let (E, F) denote for the set of all infinite matrices mapping from E into F . If $u = (u_k)$ and $v = (v_k)$ are scalar sequences, let

$${}_u(E, F)_v = \{A = (f_k^n) : (u_n v_k T_k^n)_{n,k} \in (E, F)\}$$

If $u_k \neq 0$ for all $k \in N$, we write $u^{-1} = (\frac{1}{u_k})$.

Suppose that the X -valued sequence space E is endowed with some linear topology τ . Then E is called a K -space if for each $k \in N$ the k^{th} coordinate mapping $p_k : E \rightarrow X$, defined by $p_k(x) = x_k$, is continuous on E . If, in addition, (E, τ) is an Fréchet (Banach, LF-, LB-) space, then E is called an FK- (BK-, LFK-, LBK-) space. Now, suppose that E contains $\Phi(X)$. Then E is said to have property AB if the set $\{\sum_{k=1}^n e^k(x_k) : n \in N\}$ is bounded in E for every $x = (x_k) \in E$. It is said to have property AK if $\sum_{k=1}^n e^k(x_k) \rightarrow x$ in E as $n \rightarrow \infty$ for every $x = (x_k) \in E$. It has property AD if $\Phi(X)$ is dense in E .

The space $\ell(p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k}\right)^{1/M}$, where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$ (see [6]). The space $c_0(p)$ is an FK-space with AK, $c(p)$ is an FK-space and $\ell_\infty(p)$

is a complete LBK-space with AB (see [2, 6]). It is known that the space $\ell(X, p)$ is an FK-space with AK under the paranorm $g(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_k^p \right)^{1/M}$, where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$. In each of the space $\ell_{\infty}(X, p)$ and $c_0(X, p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k\|_k^{p_k/M}$, where $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$. It is known that $c_0(X, p)$ is an FK-space with AK under the paranorm g defined as above and $\ell_{\infty}(X, p)$ is a complete LBK-space with AB. In $c(X, p)$ we consider the function $g(x) = \sup_k \|x_k - a\|_k^{p_k/M} + \|a\|$ where a is the unique element in X with $x - e(a) \in c_0(X, p)$. Then g is a paranorm on $c(X, p)$ and $c(X, p)$ is an FK-space under this paranorm.

3. Some Auxillary Results

In this section we give some useful results that can be used to reduce our problems into some simpler forms.

Proposition 3.1 Let E and $E_n (n \in N)$ be X -valued sequence spaces, and F and $F_n (n \in N)$ Y -valued sequence spaces, and let u and v be sequences of real numbers with $u_k \neq 0, v_k \neq 0$ for all $k \in N$. Then we have

- (i) $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, F) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n, F)$
- (ii) $(E, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E, F_n)$
- (iii) $(E_u, F_v) = {}_u(E, F)_{v^{-1}}$.

Proof. Assertions (i), (ii) and (iii) are immediately obtained directly by the definitions.

Proposition 3.2 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers and $r \geq 0$. Then

- (i) $F_r(X, p) = \ell(X, p)_{(n^r)}$.
- (ii) $c_0(X, p) = \bigcap_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{1/p_k})}$.

Proof. Assertion (i) is obviously obtained by the definition.

To show (ii), let $x \in c_0(X, p)$. Then $\|x_k\|_k^{p_k} \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$. For each $n \in N$, let $\delta_k = \|x_k\|_k^{p_k/n}$ for all $k \in N$. We have that $\delta_k \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$; hence $\|x_k\|_k^{1/p_k} = \delta_k^{1/p_k} \rightarrow 0$ as $k \rightarrow \infty$ (because $p \in \ell_{\infty}$), so we have $x \in c_0(X)_{(n^{1/p_k})}$. Conversely, assume that $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(n^{1/p_k})}$. Then $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|_k^{1/p_k} = 0$ for every $n \in N$. Then for $n \in N$ we have $\|x_k\|_k^{p_k} \leq \frac{1}{n}$ for large k , hence $x \in c_0(X, p)$. $\square$

4. Main Results

We begin with giving the matrix characterisations mapping from $\ell(X, p)$ into a BK-space where $p_k \leq 1$ for all $k \in N$.

Theorem 4.1 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$ and let E be a Y -valued sequence space which is a BK -space. Then for an infinite matrix $A = (T_k^n)$, $A \in (\ell(X, p), E)$ if and only if

- (1) For each $k \in N$, $(T_k^n(x))_{n=1}^\infty \in E$ for all $x \in X$ and
- (2) There exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| \leq 1$$

Proof. Suppose that $A \in (\ell(X, p), E)$. Since $e^k(x) \in \ell(X, p)$ for all $x \in X$ and all $k \in N$, we have $Ae^k(x) \in E$, so (1) is obtained. Now, we shall show that the condition (2) is satisfied. By Zeller's theorem, we have that $A : \ell(X, p) \rightarrow E$ is continuous. Then there exists $m_0 \in N$ such that

$$x = (x_k) \in \ell(X, p), \quad \|x\| \leq \frac{1}{m_0} \Rightarrow \|Ax\| \leq 1. \quad (4.1)$$

Let $x \in X$ with $\|x\| \leq 1$ and $k \in N$. We have $m_0^{-1/p_k} e^k(x) \in \ell(X, p)$ and $\|m_0^{-1/p_k} e^k(x)\| = \frac{1}{m_0}$. By (4.1) we have $\|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| \leq 1$. This implies that

$$\sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| \leq 1.$$

Hence (2) holds.

Conversely, assume that the conditions (1) and (2) hold. By (2), there is $m_0 \in N$ such that

$$\sup_k \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| \leq 1 \quad (4.2)$$

for all $x \in X$ with $\|x\| \leq 1$.

This implies by (4.2) that

$$\sup_k \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| \leq \|x\| \quad (4.3)$$

for all $x \in X$.

Let $x = (x_k) \in \ell(X, p)$. For each $k \in N$, we have by (4.3) that

$$\begin{aligned} \|Ae^k(x_k)\| &= \|A(m_0^{1/p_k}(m_0^{-1/p_k} e^k(x_k)))\| \\ &= m_0^{1/p_k} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x_k))\| \\ &\leq m_0^{1/p_k} \|x_k\|. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Since $(m_0^{1/p_k} x_k) \in \ell(X, p)$, so $(m_0^{1/p_k} x_k) \in c_0(X, p) \subseteq c_0(X)$, hence there is a $k_0 \in N$ such that $m_0 \|x_k\| < 1$ for all $k > k_0$. Since $0 < p_k \leq 1$ for all $k \in N$, we have

$$m_0^{1/p_k} \|x_k\| \leq (m_0^{1/p_k} \|x_k\|)^{p_k} = m_0 \|x_k\|^{p_k} \quad (4.5)$$

for all $k > k_0$.

It follows by (4.4) and (4.5) that

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|Ae^k(x_k)\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m_0^{1/p_k} \|x_k\| \\ &= \sum_{k=1}^{k_0} m_0^{1/p_k} \|x_k\| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} m_0^{1/p_k} \|x_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} m_0^{1/p_k} \|x_k\| + m_0 \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Hence $\sum_{k=1}^{\infty} Ae^k(x_k)$ converges absolutely in E . Since E is Banach, $\sum_{k=1}^{\infty} Ae^k(x_k)$ converges in E . Let $y = (y_k) \in E$ be the sum of $\sum_{k=1}^{\infty} Ae^k(x_k)$. Since E is a K-space, we have that for each $m \in N$, p_m is continuous, so that

$$y_m = p_m(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_m(Ae^k(x_k)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n T_k^m(x_k)$$

This implies that Ax exists and $(Ax)_m = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^m(x_k) = y_m$, hence $Ax \in E$.

This completes the proof. $\square$

When $p_k = 1$ for all $k \in N$, the following result are obtained directly from Theorem 4.1

Theorem 4.2 Let E be a Y -valued sequence space which is a BK-space and $A = (T_k^n)$ an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X), E)$ if and only if

- (1) For each $k \in N$, $(T_k^n(x))_{n=1}^{\infty} \in E$ for all $x \in X$ and
- (2) $\sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ae^k(x)\| < \infty$. $\square$

Theorem 4.3 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$ and let $A = (T_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X, p), \ell_{\infty}(Y))$ if and only if

- (1) For each $k \in N$, $\sup_n \|T_k^n\| < \infty$ and
- (2) There exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_{n,k} m_0^{-1/p_k} \|T_k^n\| \leq 1$$

Proof. By Theorem 4.1, to prove this theorem we only show that the conditions (1) and (2) are equivalent to the conditions (1') and (2'), respectively, where

- (1') For each $k \in N$, $Ae^k(x) \in \ell_{\infty}(Y)$ for all $x \in X$ and

(2') There exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| \leq 1.$$

The conditions (1) and (1') are equivalent by the uniform bounded principle.

If (2) holds, for $k, n \in N$ and $x \in X$ with $\|x\| \leq 1$, we have $m_0^{-1/p_k} \|T_k^n x\| \leq m_0^{-1/p_k} \|T_k^n\| \cdot \|x\| \leq m_0^{-1/p_k} \|T_k^n\| \leq 1$, which implies

$$\sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| = \sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_n m_0^{-1/p_k} \|T_k^n x\| \leq 1,$$

so (2') is obtained.

Now, suppose that (2') holds. Then there exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_n m_0^{-1/p_k} \|T_k^n x\| = \|A(m_0^{-1/p_k} e^k(x))\| \leq 1 \quad (4.6)$$

for all $k \in N$ and all $x \in N$ with $\|x\| \leq 1$.

It follows by (4.6) that for each $n, k \in N$, $m_0^{-1/p_k} \|T_k^n\| \leq 1$, so (2) is obtained. $\square$

By using the same proof as in Theorem 4.3 we obtain :

Theorem 4.4 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$ and let $A = (T_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X, p), c_0(Y))$ if and only if

- (1) For each $k \in N$, $T_k^n(x) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ for all $x \in X$ and
- (2) There exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_{n,k} m_0^{-1/p_k} \|T_k^n\| \leq 1$$

Theorem 4.5 Let $p = (p_k)$ and $q = (q_k)$ be bounded sequences of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$ and let $A = (T_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X, p), c_0(Y, q))$ if and only if

- (1) For each $k \in N$ and $m \in N$, $m^{1/p_k} T_k^n(x) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ for all $x \in X$ and
- (2) For each $m \in N$, there exists $r_m \in N$ such that

$$\sup_{n,k} r_m^{-1/p_k} m^{1/p_k} \|T_k^n\| \leq 1$$

Proof. By Proposition 3.1 (ii) and 3.2 (ii), we have

$$A \in (\ell(X, p), c_0(Y, q)) \iff A \in (\ell(X, p), c_0(Y)_{(m^{1/r_m})}) \text{ for all } m \in N.$$

It follows by Proposition 3.1 (iii) that for each $m \in N$,

$$A \in (\ell(X, p), c_0(Y)_{(m^{1/r_m})}) \iff (m^{1/q_k} T_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), c_0(Y)).$$

By Theorem 4.4, we obtain that

$$(m^{1/q_n} T_k^n)_{n,k} \in (\ell(X, p), c_0(Y)) \iff (1) \text{ and } (2) \text{ are satisfied.}$$

□

By applying Theorem 4.1 and using the same proof as in Theorem 4.3 we obtain :

Theorem 4.6 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$ and let $A = (T_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X, p), c(Y))$ if and only if

- (1) For each $k \in N$, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_k^n(x)$ exists for all $x \in X$ and
- (2) There exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_{n,k} m_0^{-1/p_k} \|T_k^n\| \leq 1$$

By applying Theorem 4.1 we also have the following result.

Theorem 4.7 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$, $s \geq 1$ and let $A = (T_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X, p), \ell_s(Y))$ if and only if

- (1) For each $k \in N$, $(T_k^n(x))_{n=1}^\infty \in \ell_s(Y)$ for all $x \in X$ and
- (2) There exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_k \sup_{\|x\| \leq 1} \sum_{n=1}^\infty m_0^{s/p_k} \|T_k^n x\|^s \leq 1.$$

Since $E_r(Y) = \ell_\infty(Y)_{(k^r)}$, the following result is obtained by Proposition 3.1 (iii) and Theorem 4.3.

Theorem 4.8 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$, $r \geq 0$ and let $A = (T_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X, p), E_r(Y))$ if and only if

- (1) For each $k \in N$, $\sup_n \|n^{-r} T_k^n\| < \infty$ and
- (2) There exists $m_0 \in N$ such that

$$\sup_{n,k} m_0^{-1/p_k} n^{-r} \|T_k^n\| \leq 1$$

Since $F_r(Y) = \ell(Y)_{(k^r)}$, by applying Proposition 3.1 (iii) and Theorem 4.1 we obtain :

Theorem 4.9 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers such that $p_k \leq 1$ for all $k \in N$, $r \geq 0$ and let $A = (T_k^n)$ be an infinite matrix. Then $A \in (\ell(X, p), F_r(Y))$ if and only if

- (1) For each $k \in N$, $(n^r T_k^n(x))_{n=1}^\infty \in \ell(Y)$ for all $x \in X$ and

(2) There exists $m_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$\sup_k \sup_{1 \leq l \leq k} \sum_{n=1}^{\infty} m_0^{-1/p_k} n^r \|T_k^n x\| \leq 1.$$

Acknowledgements

The author would like to thank Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

REFERENCES

- [1]. R.G. Cooke, *Infinite Matrices and Sequence Spaces*, London : Macmillan, 1960.
- [2]. K.-G. Grosse-Erdmann, *The structure of the sequence spaces of Maddox*, *Canad. J. Math.* **44** (1992), 298-307.
- [3]. K.-G. Grosse-Erdmann, *Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox*, *J. of Math. Anal. Appl.* **180** (1993), 223-238.
- [4]. I.J. Maddox, *Spaces of strongly summable sequences*, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **18** (1967), 345-355.
- [5]. I.J. Maddox, *Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices*, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **64** (1968), 335-340.
- [6]. I.J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne, 1970.
- [7]. H. Nakano, *Modular sequence spaces*, *Proc. Japan. Acad.* **27** (1951), 508-512.
- [8]. S. Simons, *The spaces $l(p_n)$ and $m(p_n)$* , *Proc. London. Math. Soc.* **15** (1965), 422-436.
- [9]. C.X. Wu and L. Liu, *Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces*, *SEA. Bull. Math.* **17**,1 (1993), 83-90.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.
Email : Senti005@chiangmai.ac.th

ผลงานวิจัย 9

ชื่อเรื่อง Matrix Transformations of Some Vector - Valued Sequence Spaces

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้
Suthep Suantai

ผลงานนี้นำไปเสนอในที่ประชุมนานาชาติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง "Function Spaces V" ที่มหาวิทยาลัย Adam Mickeywicz ประเทศโปแลนด์ ระหว่างวันที่ 25 สิงหาคม - 3 กันยายน 2541

Matrix Transformations of Some Vector-Valued Sequence Spaces

SUTHEP SUANTAI

ABSTRACT. In this paper, we give the matrix characterizations from vector-valued sequence spaces $\ell_{\infty}(X, p)$, and $\ell_0(X, p)$ into the Orlicz sequence space ℓ_M where $p = (p_k)$ is a bounded sequences of positive real numbers.

(1991) AMS Mathematics Subject Classification: 46A45.

1. INTRODUCTION

Let $(X, \|\cdot\|)$ be a real Banach space and $p = (p_k)$ a bounded sequence of positive real numbers. We write $x = (x_k)$ with $x_k \in X$ for all $k \in N$. The X -valued sequence spaces $c_0(X, p)$, $c(X, p)$, $\ell_{\infty}(X, p)$, $\ell(X, p)$, and $\ell_0(X, p)$ are defined as

$$c_0(X, p) = \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|^{p_k} = 0\},$$

$$c(X, p) = \{x = (x_k) : \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - a\|^{p_k} = 0 \text{ for some } a \in X\},$$

$$\ell_{\infty}(X, p) = \{x = (x_k) : \sup_k \|x_k\|^{p_k} < \infty\},$$

$$\ell(X, p) = \{x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

$$\ell_0(X, p) = \{x = (x_k) : \sup_k \left\| \frac{x_k}{\delta_k} \right\|^{p_k} < \infty \text{ for some } (\delta_k) \in c_0 \text{ with } \delta_k \neq 0 \text{ for all } k \in N\}$$

When $X = R$, the corresponding spaces are written as $c_0(p)$, $c(p)$, $\ell_{\infty}(p)$, $\ell(p)$, and $\ell_0(p)$ respectively. Each of the first four spaces are known as the sequence spaces of Maddox. These spaces were first introduced and studied by Simons [7], Maddox [4, 5], and Nakano [6]. In [2] the structure of the spaces $c_0(p)$, $c(p)$, and $\ell_{\infty}(p)$ have been investigated.

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{A}}\mathcal{S}\text{-}\mathcal{T}_{\mathcal{X}}$

Let $M : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ be convex, even, continuous and $M(u) = 0 \iff u = 0$. For a given real sequence $x = (x_n)$, define

$$\varrho_M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} M(x_n),$$

$$\ell_M = \{x = (x_k) : \varrho_M(\lambda x) < \infty \text{ for some } \lambda > 0\}, \text{ and}$$

$$\|x\| = \inf\{\lambda > 0 : \varrho_M\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1\} \text{ for } x \in \ell_M.$$

The sequence space $(\ell_M, \|\cdot\|)$ is known as the Orlicz sequence space and it is a BK-space.

In this paper we consider the problem of characterizing those matrices that map an X -valued sequence spaces $\ell_\infty(X, p)$ and $\ell_0(X, p)$ into the Orlicz sequence spaces. Wu and Liu [8] deal with the problem of characterization those infinite matrices mapping from $c_0(X, p)$, $c(X, p)$, $\ell_\infty(X, p)$ and $\ell(X, p)$ into the scalar-sequence spaces of Maddox with some conditions on the sequences (p_k) and (q_k) . Grosse-Erdmann [3] has given characterizations of matrix transformations between the scalar-valued sequence spaces of Maddox. Their characterizations are derived from functional analytic principles. Our approach here is different. We use a method of reduction introduced by Grosse-Erdmann [3]. In [2] it is pointed out that $c_0(p)$ is an echelon space of order 0 and that $\ell_\infty(p)$ is a co-echelon space of order ∞ . In this paper we also show that $\ell_0(X, p)$ and $\ell_\infty(X, p)$ is a co-echelon space of order ∞ . Therefore these spaces are made up of simpler spaces. We will use certain auxiliary results (Section 3) to reduce our problem to the characterisations of matrix mapping between much simpler spaces.

2. Notation and Definitions

2.1 Let $(X, \|\cdot\|)$ be a real Banach space, the space of all sequences in X is denoted by $W(X)$ and $\Phi(X)$ is denoted for the space of all finite sequences in X . When $X = \mathbb{R}$, the corresponding spaces are written as w and Φ .

A sequence space in X is a linear subspace of $W(X)$. Let E be any X -valued sequence space. For $x \in E$ and $k \in \mathbb{N}$, we write x_k stands for the k^{th} term of x . For $k \in \mathbb{N}$ denote by e_k the sequence $(0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ with 1 in the k^{th} position and by e the sequence $(1, 1, 1, \dots)$. For $x \in X$ and $k \in \mathbb{N}$, let $e^k(x)$ be the sequence $(0, 0, \dots, 0, x, 0, \dots)$ with x in the k^{th} position and let $e(x)$ be the sequence $(x, x, x, \dots)$. For a fixed scalar sequence $\mu = (\mu_k)$ the sequence space E_μ is defined as

$$E_\mu = \{x \in W(X) : (\mu_k x_k) \in E\}.$$

The sequence space E is called *normal* if $x \in E$ and $y \in W(X)$ with $\|y_k\| \leq \|x_k\|$ for all $k \in \mathbb{N}$ implies that $y \in E$.

2.2 Let $A = (f_k^n)$ with f_k^n in X' , the topological dual of X . Suppose that E is a space of X -valued sequences and F a space of scalar-valued sequences. Then A is said to map E into F , written by $A : E \rightarrow F$ if for each $x = (x_k) \in E$, $A_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ converges for each $n \in \mathbb{N}$, and the sequence

$Ax = (A_n(x)) \in F$. Let (E, F) denote for the set of all infinite matrices mapping from E into F . If $u = (u_k)$ and $v = (v_k)$ are scalar sequences, let

$${}_u(E, F)_v = \{A = (f_{nk}^n) : (u_n v_k f_{nk}^n)_{n,k} \in (E, F)\}$$

If $u_k \neq 0$ for all $k \in N$, we write $u^{-1} = (\frac{1}{u_k})$.

2.3 Suppose that the X -valued sequence space E is endowed with some linear topology τ . Then E is called a K -space if for each $n \in N$ the n^{th} coordinate mapping $p_n : E \rightarrow X$, defined by $p_n(x) = x_n$, is continuous on E . If, in addition, (E, τ) is an Fréchet (Banach, LF-, LB-) space, then E is called an FK- (BK-, LFK-, LBK-) space. Now, suppose that E contains $\Phi(X)$. Then E is said to have property AB if the set $\{\sum_{k=1}^n e^k(x_k) : n \in N\}$ is bounded in E for every $x = (x_k) \in E$. It is said to have property AK if $\sum_{k=1}^n e^k(x_k) \rightarrow x$ in E as $n \rightarrow \infty$ for every $x = (x_k) \in E$. It has property AD if $\Phi(X)$ is dense in E .

3. Some Auxiliary Results

In this section we give various useful results that can be used to reduce our problems into some simpler forms.

Proposition 3.1 Let E and $E_n (n \in N)$ be X -valued sequence spaces, and F and $F_n (n \in N)$ scalar sequence spaces, and let u and v be sequences of real numbers with $u_k \neq 0, v_k \neq 0$ for all $k \in N$. Then we have

- (i) $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n, F) = \cap_{n=1}^{\infty} (E_n, F)$
- (ii) $(E, \cap_{n=1}^{\infty} F_n) = \cap_{n=1}^{\infty} (E, F_n)$
- (iii) $(E_1 + E_2, F) = (E_1, F) \cap (E_2, F)$
- (iv) $(E, F_1) = (E, F_2) \cap (\Phi(X), F_1)$ if E is an FK-space with AD, F_2 is an FK-space and F_1 is a closed subspace of F_2 .
- (v) $(E_u, F_v) = {}_u(E, F)_{u^{-1}v}$.

Proof. Assertions (i), (ii), (iii), and (v) are immediate. To show (iv), assume that E is an FK-space with AD, F_2 is an FK-space and F_1 is a closed subspace of F_2 . Clearly, $(E, F_1) \subseteq (E, F_2) \cap (\Phi(X), F_1)$ is always the case. Now, assume that $A = (f_{nk}^n) \in (E, F_2) \cap (\Phi(X), F_1)$ and $x \in E$. By Zeller's theorem, $A : E \rightarrow F_2$ is continuous. Since E has AD, there is a sequence $(y^{(n)})$ with $y^{(n)} \in \Phi(X)$ for all $n \in N$ such that $y^{(n)} \rightarrow x$ in E as $n \rightarrow \infty$. By the continuity of A , we have $Ay^{(n)} \rightarrow Ax$ in F_2 as $n \rightarrow \infty$. Since $Ay^{(n)} \in F_1$ for all $n \in N$ and F_1 is a closed subspace of F_2 , we obtain that $Ax \in F_1$. Hence $A \in (E, F_1)$, so that $(E, F_2) \cap (\Phi(X), F_1) \subseteq (E, F_1)$. This complete the proof. $\square$

Proposition 3.2 Let $p = (p_k)$ be a bounded sequences of positive real numbers. Then

- (i) $\mathcal{C}_0(X, p) = \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_0(X)_{(n^{-1}/p_k)}$. Hence $\mathcal{C}_0(X, p)$ is an echelon space of order 0.

(ii) $\ell_\infty(X, p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$. Hence $\ell_\infty(X, p)$ is a co-echelon space of order ∞ .

Proof. (i) Let $x = (x_k) \in \ell_0(X, p)$. Then there is a sequence $(\delta_k) \in c_0$ with $\delta_k \neq 0$ for all $k \in N$ such that $\sup_k \left\| \frac{x_k}{\delta_k} \right\|^{p_k} < \infty$. Hence there exists $\alpha > 0$ such that $\|x_k\| \leq \alpha^{1/p_k} |\delta_k|$ for all $k \in N$. Choose $n_0 \in N$ with $n_0 > \alpha$. Then $\|x_k\| n_0^{-1/p_k} \leq \left(\frac{\alpha}{n_0} \right)^{1/p_k} |\delta_k| < |\delta_k|$ which implies that $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| n_0^{-1/p_k} = 0$, hence $x = (x_k) \in c_0(X)_{(n^{-1/p_k})} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$. On the other hand, suppose that $x = (x_k) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$. Then $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| n^{-1/p_k} = 0$ for some $n \in N$. Let $\delta = (\delta_k)$ be the sequence defined by

$$\delta_k = \begin{cases} \|x_k\| n^{-1/p_k} & \text{if } \|x_k\| \neq 0 \\ \frac{1}{k} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Clearly $(\delta_k) \in c_0$ and $\left\| \frac{x_k}{\delta_k} \right\|^{p_k} \leq n$ for all $k \in N$, hence $\sup_k \left\| \frac{x_k}{\delta_k} \right\|^{p_k} \leq n$, so $x = (x_k) \in \ell_0(X, p)$.

Now we show (ii). If $x \in \ell_\infty(X, p)$, then there is some $n \in N$ with $\|x_k\|^{p_k} \leq n$ for all $k \in N$. Hence $\|x_k\| n^{-1/p_k} \leq 1$ for all $k \in N$, so that $x \in \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$. On the other hand, if $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_\infty(X)_{(n^{-1/p_k})}$, then there are some $n \in N$ and $M > 1$ such that $\|x_k\| n^{-1/p_k} \leq M$ for every $k \in N$. Then we have $\|x_k\|^{p_k} \leq n M^{p_k} \leq n M^\alpha$ for all $k \in N$, where $\alpha = \sup_k p_k$. Hence $x \in \ell_\infty(X, p)$. $\square$

3. Main Results

We now turn to our main objective. We begin with giving characterisations of matrix transformations from $\ell_\infty(X)$ and $c_0(X)$ into ℓ_M . To do this we need a lemma.

Lemma 4.1 Let $E \in \{\ell_\infty(X), c_0(X)\}$ and (f_k) a sequence of continuous linear functionals on X . Then $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for every $x = (x_k) \in E$ if and only if $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$.

Proof. If $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$, then for each $x = (x_k) \in E$, $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \|x_k\| \leq \|x\| \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| < \infty$, so that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges.

Conversely, assume that $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for every $x = (x_k) \in E$. Define $T : E \rightarrow R$ by $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$. Clearly, T is linear. For each $n \in N$, let $s_n = \sum_{k=1}^n f_k \circ p_k$. Then $s_n \in E'$ since E is a K -space. It is clear that $s_n(x) \rightarrow Tx$ as $n \rightarrow \infty$ for all $x \in E$. It follows by Banach-Steinhaus theorem that $T \in E'$. Hence there is a positive real number α such that

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k) \right| \leq \alpha \quad (4.1)$$

for all $x = (x_k) \in E$ with $\|x\| \leq 1$.

For each $x = (x_k) \in E$ with $\|x\| \leq 1$, we can choose a real sequence (t_k) with $|t_k| = 1$ for all $k \in N$ such that $f_k(t_k x_k) = |f_k(x_k)|$ for all $k \in N$. Clearly, $(t_k x_k) \in E$ and $\|(t_k x_k)\| \leq 1$. It follows by (4.1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x_k)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t_k x_k) \right| \leq \alpha \quad (4.2)$$

for all $x = (x_k) \in E$ with $\|x\| \leq 1$.

It implies by (4.2) that

$$\sum_{k=1}^n |f_k(x_k)| \leq \alpha \quad (4.3)$$

for all $n \in N$ and all $x_k \in X$ with $\|x_k\| \leq 1$.

It follows from (4.3) that $\sum_{k=1}^n \|f_k\| \leq \alpha$ for all $n \in N$, hence $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\| \leq \alpha$. This complete the proof. $\square$

Theorem 4.2 Let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix and $E \in \{\ell_{\infty}(X), c_0(X)\}$. Then $A \in (E, \ell_M)$ if and only if

- (1) $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\| < \infty$ for every $n \in N$, and
- (2) There exists $K > 0$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\right) \leq 1$ for every $(x_k) \in E$ with $\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$.

Proof. Assume that $A \in (E, \ell_{\infty})$. Then $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for all $x = (x_k) \in E$. Hence (1) holds by Lemma 4.1. Since E and ℓ_{∞} are BK-spaces, by Zeller's theorem, A is continuous. It follows that there exists $K > 0$ such that

$$\|Ax\| \leq K \quad (4.4)$$

for every $x = (x_k) \in E$ with $\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$.

Then we have $\|A(\frac{1}{K}x)\| \leq 1$ for all $x = (x_k) \in E$ with $\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$. By [1, Theorem 1.38(1)], we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\right) \leq 1$$

for every $x = (x_k) \in E$ with $\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$. Hence (2) holds.

Conversely, assume that (1) and (2) hold. By Lemma 4.1, we have $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k)$ converges for every $x = (x_k) \in E$. Let $K > 0$ be such that $\sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\right) \leq 1$ for every $x = (x_k) \in E$ with $\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$. Then for $x = (x_k) \in E$ and $x \neq 0$, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{K\|x\|} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n\left(\frac{x_k}{\|x\|}\right)\right) \leq 1$$

which implies that $Ax \in \ell_M$, hence we have $A \in (E, \ell_M)$. $\square$

Corollary 4.3 Let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix. If $(\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|)_{n=1}^{\infty} \in \ell_M$, then $A \in (\ell_{\infty}(X), \ell_M)$.

Proof. Assume that $(\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|)_{n=1}^{\infty} \in \ell_M$. Then there exists $\lambda > 0$ and $\alpha > 1$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} M(\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|) \leq \alpha$. Let $x = (x_k) \in \ell_{\infty}(X)$ and $\|x\| \leq 1$. Then $\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$, so $|f_k^n(x_k)| \leq \|f_k^n\|$ for all $n, k \in N$. Putting $K = \frac{\alpha}{\lambda}$. Since M is convex, even, and increasing on $[0, \infty)$, it follows that

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{\lambda}{\alpha} \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\right|\right) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\lambda \left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)\right|\right) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\lambda \sum_{k=1}^{\infty} |f_k^n(x_k)|\right) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} M\left(\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k^n\|\right) \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

It follows by Theorem 4.2 that $A \in (\ell_{\infty}(X), \ell_M)$. □

Theorem 4.4 Let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix and let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers. Then $A \in (\ell_{\infty}(X, p), \ell_M)$ if and only if

- (1) $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/p_k} \|f_k^n\| < \infty$ for all $m, n \in N$, and
 (2) There exists $K > 0$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{\infty} m^{1/p_k} f_k^n(x_k)\right) \leq 1$$

for every sequence (x_k) with $\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$.

Proof. By Proposition 3.2(ii), we have $\ell_{\infty}(X, p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \ell_{\infty}(X)_{(n^{-1/p_k})}$. It implies by Proposition 3.1(i) that

$$A \in (\ell_{\infty}(X, p), \ell_M) \iff A \in (\ell_{\infty}(X)_{(m^{-1/p_k})}, \ell_M) \text{ for all } m \in N$$

By Proposition 3.1(v), we have

$$A \in (\ell_{\infty}(X)_{(m^{-1/p_k})}, \ell_M) \iff (m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell_{\infty}(X), \ell_M)$$

We have by Theorem 4.2 that

$$(m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell_{\infty}(X), \ell_M) \iff \text{the conditions (1) and (2) hold.}$$

Hence the theorem is proved. $\square$

Theorem 4.5 Let $A = (f_k^n)$ be an infinite matrix and let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive real numbers. Then $A \in (c_0(X, p), \ell_M)$ if and only if

- (1) $\sum_{k=1}^{\infty} m^{1/p_k} \|f_k^n\| < \infty$ for all $m, n \in N$, and
 (2) There exists $K > 0$ such that

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{\infty} m^{1/p_k} f_k^n(x_k)\right) \leq 1$$

for every sequence $(x_k) \in c_0(X)$ with $\|x_k\| \leq 1$ for all $k \in N$.

Proof. Since $c_0(X, p) = \bigcup_{n=1}^{\infty} c_0(X)_{(m^{-1/p_k})}$, we have by Proposition 3.1(i) that

$$A \in (c_0(X, p), \ell_M) \iff A \in (c_0(X)_{(m^{-1/p_k})}, \ell_M) \text{ for all } m \in N$$

By Proposition 3.1(v), we have

$$A \in (c_0(X)_{(m^{-1/p_k})}, \ell_M) \iff (m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (c_0(X), \ell_M)$$

It follows by Theorem 4.2 that

$$(m^{1/p_k} f_k^n)_{n,k} \in (\ell_{\infty}(X), \ell_M) \iff \text{the conditions (1) and (2) hold.}$$

Hence we have the theorem. $\square$

Acknowledgements

The author would like to thank the Thailand Research Fund for the financial support during the preparation of this paper.

REFERENCES

- [1]. S. Chen, *Geometry of Orlicz spaces*, the Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, Warszawa, 1996.
- [2]. K.-G. Grosse-Erdmann, The structure of the sequence spaces of Maddox, *Canad. J. Math.* 44 (1992), 298-307.
- [3]. K.-G. Grosse-Erdmann, Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox, *J. of Math. Anal. Appl.* 180 (1993), 223-238.
- [4]. I.J. Maddox, Spaces of strongly summable sequences, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* 18 (1967), 345-355.
- [5]. I.J. Maddox, Paranormal sequence spaces generated by infinite matrices, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 64 (1968), 335-340.
- [6]. H. Nakano, *Modulated sequence spaces*, *Proc. Japan. Acad.* 27 (1951), 508-512.
- [7]. S. Simons, The spaces $\ell(p_n)$ and $m(p_n)$, *Proc. London. Math. Soc.* 18 (1965), 422-436.
- [8]. C.X. Wu and L. Liu, Matrix transformations on some vector-valued sequence spaces, *SEA. Bull. Math.* 17,1 (1993), 83-96.

Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, Thailand.
Email : Somt005@chiangmai.ac.th

ผลงานวิจัย 10

ชื่อเรื่อง Superposition Operators on the Sequence Space

ชื่อผู้เขียน ผศ. ดร. สุเทพ สวนใต้

Suthep Suantai

ผลงานนี้ได้นำเสนอในที่ประชุมนานาชาติทางคณิตศาสตร์ ที่จัดขึ้นที่ โรงแรม
TAWANA RAMADA กรุงเทพฯ โดยภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ระหว่างวันที่ 8 - 10 ธันวาคม 2540

ผลงานนี้ ตีพิมพ์ใน Proceedings ของการประชุม หน้า 172 - 175

Superposition Operators on the Sequence Space $\ell(p)$

Suthep Suantai

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand.

ABSTRACT

In this paper, we give a characterization of superposition operator acting from a sequence space of maddox $\ell(p)$ into the sequence space ℓ_1 .

INTRODUCTION

Let $\mathbb{R}$ be the set of all real numbers, $\mathbb{N}$ the set of all natural numbers and S the set of all real sequences. For $n \in \mathbb{N}$, we denote the n th term of sequence x by x_n and write $x = (x_n)$.

Let $\ell_1 = \{x \in S \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty\}$ equipped with the norm $\|\cdot\|_{\ell_1}$ defined by

$$\|x\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \text{ for every } x \in \ell_1$$

Let $p = (p_k)$ be a bounded sequence of positive numbers. The sequence space of Maddox $\ell(p)$ is defined as

$$\ell(p) = \{x \in S \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty\}.$$

This space was introduced by Maddox [2] and it is a paranormed sequence space with the paranorm $\|\cdot\|$ defined as

$$\|(x_k)\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}} \text{ where } M = \max \left(1, \sup_k p_k \right).$$

For $r > 0$, let

$E_r = \{x \in S \mid \sup_k \frac{|x_k|}{k^r} < \infty\}$ equipped with the norm $\|\cdot\|_{E_r}$ defined by

$$\|x\|_{E_r} = \sup_k \frac{|x_k|}{k^r} \text{ for every } x \in E_r.$$

$F_r = \{x \in S \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^r |x_k| < \infty\}$ equipped with the norm $\|\cdot\|_{F_r}$ defined by

$$\|x\|_{F_r} = \sum_{k=1}^{\infty} k^r |x_k| \text{ for every } x \in F_r.$$

Let $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $P_f: S \rightarrow S$ be defined as

$$P_f(x) = (f(k, x_k)) \text{ for every } x \in S.$$

The operator P_f is called a *superposition operator*. The superposition operator P_f is said to act from a sequence space X into a sequence space Y if $P_f(x) \in Y$ for all $x \in X$. Characterization of P_f on Orlicz sequence spaces was given by J. Robert and I.V.

Shragin [3], [4]. Chew Tuan Seng [1] has given a characterization of P_f on w_0 . S. Suantai [5] has given a characterization of P_f on the sequence spaces E_r and F_r . In this note, we use the same techniques as in [5] to characterize P_f on the sequence space $\ell(p)$.

MATERIALS AND METHODS

The main purpose of this paper is the following theorem

Theorem 1. Let $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be such that for each $k \in \mathbb{N}$, $f(k, \cdot)$ is bounded on every bounded subset of $\mathbb{R}$. A superposition operator acts from $\ell(p)$ into ℓ_1 if and only if there are $\alpha > 0$, $\beta > 0$ and a sequence $(c_k) \in \ell_1$ such that for each $k \in \mathbb{N}$, $|f(k, t)| \leq c_k + \alpha|t|^{p_k}$ whenever $|t|^{p_k} \leq \beta$.

Proof For the proof of sufficiency suppose that there are $\alpha > 0$, $\beta > 0$ and a sequence $(c_k) \in \ell_1$ such that for each $k \in \mathbb{N}$, $|f(k, t)| \leq c_k + \alpha|t|^{p_k}$ whenever $|t|^{p_k} \leq \beta$. Let $x = (x_k) \in \ell(p)$. Since $x_k \rightarrow 0$, there is an $i \in \mathbb{N}$ such that $|x_k|^{p_k} \leq \beta$ for all $k \geq i$. Then $|f(k, x_k)| \leq c_k + \alpha|x_k|^{p_k}$ for all $k \geq i$. Hence

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(k, x_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} c_k + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} < \infty. \text{ Therefore } P_f(x) = (f(k, x_k)) \in \ell_1.$$

Suppose, conversely, that p_f acts from $\ell(p)$ into ℓ_1 . For each $\alpha, \beta > 0$ and for each $k \in \mathbb{N}$, we define

$$A(k, \alpha, \beta) = \{ t \in \mathbb{R} \mid |t|^{p_k} \leq \min\left\{\beta, \frac{|f(k, x)|}{\alpha}\right\} \} \text{ and} \\ B(k, \alpha, \beta) = \sup \{ |f(k, t)| \mid t \in A(k, \alpha, \beta) \}.$$

Then we have

$$|f(k, t)| \leq B(k, \alpha, \beta) + \alpha|t|^{p_k} \text{ whenever } |t|^{p_k} \leq \beta. \quad (1)$$

We shall show that there are some $\alpha, \beta > 0$ such that $(B(k, \alpha, \beta)) \in \ell_1$. To prove this

suppose that $(B(k, \alpha, \beta)) \notin \ell_1$ for all $\alpha, \beta > 0$. Then $\sum_{k=1}^{\infty} B(k, 2^i, \frac{1}{2^i}) = \infty$ for all $i \in \mathbb{N}$.

Then there exists a sequence of integers (n_j) with

$n_0 = 0 < n_1 < n_2 < \dots < n_j < \dots$ such that n_j is the least positive integer so that

$$\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k, \alpha) > 1. \text{ For each } j \in \mathbb{N}, \text{ we can choose } \varepsilon_j > 0 \text{ such that}$$

$$\sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k, \alpha) - (n_j - n_{j-1})\varepsilon_j > 1 \quad (2)$$

For each $j \in \mathbb{N}$ and for all $k \in \mathbb{N}$ with $n_{j-1} + 1 \leq k < n_j$, there exists $x_k \in A(k, 2^j, \frac{1}{2^j})$ such that

$$|f(k, x_k)| \geq B(k, 2^j, \frac{1}{2^j}) - \varepsilon_j \quad (3)$$

Since $x_k \in A(k, 2^j, \frac{1}{2^j})$, we get that

$$|x_k|^{p_k} \leq \frac{1}{2^j} \text{ and } |f(k, x_k)| \leq \frac{|f(k, x_k)|}{2^j} \quad (4)$$

Since $\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j} B(k, 2^j, \frac{1}{2^j}) \leq 1$ and $|f(k, x_k)| \leq B(k, 2^j, \frac{1}{2^j})$, it follows from (4) that

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} |x_k|^{p_k} &\leq \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} |f(k, x_k)| + \frac{1}{2^j} \\ &\leq \frac{1}{2^j} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k, 2^j, \frac{1}{2^j}) + \frac{1}{2^j} \\ &\leq \frac{1}{2^{j-1}}. \end{aligned}$$

Then $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} |x_k|^{p_k} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j-1}} = 2$, so that $(x_k) \in \ell(p)$. By assumption, we have that $P_f(x) = (f(k, x_k)) \in \ell_1$. But we have from (2) and (3) that for each $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} |f(k, x_k)| &> \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k, 2^j, \frac{1}{2^j}) - \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} \varepsilon_j \\ &= \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} B(k, 2^j, \frac{1}{2^j}) - (n_j - n_{j-1})\varepsilon_j \\ &< 1. \end{aligned}$$

Hence $\sum_{k=1}^{\infty} |f(k, x_k)| = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} |f(k, x_k)| = \infty$ which is a contradiction because

$(f(k, x_k)) \in \ell_1$. Thus there are $\alpha, \beta > 0$ such that $(B(k, \alpha, \beta)) \in \ell_1$. Putting $c_k = B(k, \alpha, \beta)$ for all $k \in \mathbb{N}$, so $(c_k) \in \ell_1$ and we have from (1) that for each $k \in \mathbb{N}$, $|f(k, t)| \leq c_k + \alpha |t|^{p_k}$ whenever $|t|^{p_k} \leq \beta$.

If $f(k, \cdot)$ is continuous for every $k \in \mathbb{N}$, the following result is obtained directly from Theorem 1.

Corollary 2 Let $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be such that for each $k \in \mathbb{N}$, $f(k, \cdot)$ is continuous on $\mathbb{R}$. A superposition operator P_f acts from $\ell(p)$ into ℓ_1 if and only if there are $\alpha > 0$, $\beta > 0$ and a sequence $(c_k) \in \ell_1$ such that for each $k \in \mathbb{N}$,

$$|f(k, t)| \leq c_k + \alpha |t|^{p_k} \text{ whenever } |t|^{p_k} \leq \beta.$$

Example 3 Let $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by

$$f(k, t) = \sqrt{t} \left(\frac{2^k}{k^3} + 3t^{2p_k} \sin kt \right)$$

Let $\alpha = 3$ and $\beta = 1$. Then for $t \in \mathbb{R}$, $|t|^{p_k} \leq \beta = 1$, we have $|f(k, t)| \leq c_k + \alpha |t|^{p_k}$

where $c_k = \frac{2}{k^3}$ for all $k \in \mathbb{N}$. It follows from Corollary 2 that the superposition operator P_f acts from $\ell(p)$ into ℓ_1 .

Example 4. Let $p = (p_k)$ be a sequence with $p_k = \frac{1}{k}$ for all $k \in \mathbb{N}$ and let $f: \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

be defined by $f(k, t) = t^{\frac{1}{k^2}}$. Let $\alpha, \beta > 0$ and $(c_k) \in \ell_1$. Choose $k_0 \in \mathbb{N}$ be such that $c_{k_0} + \alpha \frac{1}{2^{k_0}} < \frac{1}{2}$ and $\frac{1}{2^{k_0}} \leq \beta$. Let $t = \frac{1}{2^{k_0^2}}$.

Then we have

$$|f(k, t)| = \frac{1}{2} > c_{k_0} + \alpha \frac{1}{2^{k_0}} = c_{k_0} + \alpha |t|^{p_{k_0}}.$$

It follows from Corollary 2 that P_f does not act from $\ell(p)$ into ℓ_1 .

RESULTS AND DISCUSSION

We give the main results of this paper in Theorem 1 and Corollary 2. In Theorem 1 necessary and sufficient conditions for superposition operators acting from $\ell(p)$ into ℓ_1 are given when $f(k, \cdot)$ satisfies the condition that it is bounded for every bounded subset of $\mathbb{R}$, but in Corollary 2 such conditions are given when $f(k, \cdot)$ is continuous on $\mathbb{R}$ for each $k \in \mathbb{N}$. The last two examples give us the functions $f(k, t)$ for which for each $k \in \mathbb{N}$, $f(k, \cdot)$ is continuous and P_f acts from $\ell(p)$ into ℓ_1 in Example 3, but does not act from $\ell(p)$ into ℓ_1 in Example 4.

For solid sequence spaces, we can use the same technics as in Theorem 1 to characterize superposition operators acting from those spaces into ℓ_1 .

REFERENCES

1. Chew Tuan Seng, (1990). *Superposition operators on w_0 and W_0* , Comment. Math. (2) 29 149 - 153.
2. Maddox I. J., (1967). *Spaces of strongly summable sequences*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 18, 345-355.

3. Robert J., (1964). *Continuité d'un opérateur nonlinéar sur certains espaces de suites*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser A 259, 1287 -1290.
4. Shragin I. V., (1976). *Condition for imbedding of classes and their consequences*, (Russian) Mat. Zametki (5) 20, 681 -692.
5. Saantai S., (1997). *Boundedness of superposition operators on E - and F -*, to be appear in Comment. Math. 37.

ภาคผนวก

1. สัญญารับทุนอุดหนุนการวิจัย ทุนริเริ่มโดยผู้อำนวยการ สกว.
2. เอกสารหมายเลข 1 โครงการ "การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์"
3. เอกสารหมายเลข 2 รายชื่อผู้ทำโครงการ
4. เอกสารหมายเลข 3 การจ่ายเงิน
5. เอกสารแสดงการตอบรับ (accepted) ให้ตีพิมพ์ผลงานในวารสารนานาชาติต่างๆ
6. หนังสือแสดงการเป็นวิทยากรรับเชิญ (Invited Speaker) ในการประชุมนานาชาติ

สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
ฝ่ายสนับสนุนการวิจัยเชิงวิชาการ
ทุนวิจัยริเริ่มโดยผู้อำนวยการ สกว.

สัญญารับทุนอุดหนุนการวิจัย

โครงการ "การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์"

สัญญาทำขึ้น ณ สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) ตั้งอยู่ชั้น 19 อาคาร
มหานครกิมซิม 539/2 ถนนศรีอยุธยา แขวงถนนพญาไท เขตราชเทวี กรุงเทพมหานคร เมื่อวันที่ 1
เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 2540 ระหว่าง สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย โดย นายวิจารย์ พานิช ซึ่งต่อ
ไปในสัญญานี้เรียกว่า "ผู้ให้ทุน" ฝ่ายหนึ่ง กับ นายสุเทพ สอนใต้ อยู่ที่ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะ
วิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ถ.หัวแก้ว อ.เมือง จ.เชียงใหม่ ซึ่งต่อไปในสัญญานี้เรียกว่า "ผู้รับทุน" อีก
ฝ่ายหนึ่ง ทุนสัญญาได้ตกลงกันต่อไปนี้

ข้อ 1. ผู้ให้ทุนตกลงให้ทุนอุดหนุนโครงการวิจัยเรื่อง "การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิลำดับค่าเวก
เตอร์" ตามเอกสารแนบหมายเลข 1 ในวงเงิน 199,900 บาท (หนึ่งแสนเก้าหมื่นเก้าพันเก้าร้อยบาทถ้วน)

ข้อ 2. ผู้รับทุนจะดำเนินการวิจัยตามวิธีการที่เสนอไว้ให้ครบถ้วนสมบูรณ์ ตามเอกสารแนบ
หมายเลข 1 หากเกิดอุปสรรคไม่สามารถดำเนินการวิจัยได้ด้วยประการใดก็ดี ผู้รับทุนจะรีบรายงานให้ผู้ให้ทุน
ทราบทันที เพื่อพิจารณาหาทางแก้ไขหรือดำเนินการตามที่สมควรต่อไป

ข้อ 3. ผู้ให้ทุนจะจ่ายเงินให้กับผู้รับทุนตามกำหนดเวลาและเงื่อนไขในเอกสารแนบหมายเลข 3
ผู้รับทุนจะควบคุมการใช้เงินทุนให้เป็นไปอย่างประหยัด และตามหลักเกณฑ์ที่ผู้ให้ทุน
กำหนด ตลอดจนเตรียมหลักฐานบัญชีการจ่ายเงิน เพื่อให้ผู้ให้ทุนตรวจสอบได้เมื่อสิ้นสุดสัญญา หรือตามผู้ให้
ทุนเห็นสมควร

ข้อ 4. ผู้รับทุนยินยอมให้ผู้ให้ทุน หรือผู้ที่ผู้ให้ทุนมอบหมาย เข้าในสถานที่ทำการของผู้รับทุน
หรือสถานที่ที่ผู้รับทุนทำการวิจัยอยู่ เพื่อประโยชน์ในการติดตามและประเมินโครงการได้

ข้อ 5. ผู้รับทุนจะนำส่งผลงาน ซึ่งมีรูปแบบและเนื้อหาตามในเอกสารแนบหมายเลข 4 หรือตาม
เกณฑ์ที่ผู้ให้ทุนกำหนด ภายในเวลาดังนี้

5.1 รายงานความก้าวหน้าฉบับที่ 1 และรายงานการเงิน ภายใน 6 เดือนหลังจากลงนาม
ในสัญญา

5.2 รายงานความก้าวหน้าฉบับที่ 2 และรายงานการเงิน ภายใน 12 เดือนหลังจากลง
นามในสัญญา

5.3 รายงานฉบับสมบูรณ์และรายงานการเงิน ภายใน 18 เดือนหลังจากลงนามในสัญญา

5.4 การเสนอผลงานด้วยวาจา (oral presentation) ตามวันเวลาที่ผู้ให้ทุนจะกำหนด
ในรายงานฉบับสมบูรณ์ให้มีบทคัดย่อ (abstract) ทั้งภาษาไทยและภาษาอังกฤษ และ
นอกจากฉบับพิมพ์เป็นเล่มแล้วให้ส่งเป็น diskette ด้วย



ข้อ 6. การระงับงานชั่วคราวและการยกเลิกสัญญา

6.1 ผู้ให้ทุนมีสิทธิระงับงานทั้งหมดหรือแต่บางส่วน หรือยกเลิกสัญญาได้ ถ้าผู้ให้ทุนเห็นว่าผู้รับทุนมิได้ปฏิบัติตามด้วยความชำนาญ หรือด้วยความเอาใจใส่ในวิชาชีพเท่าที่พึงคาดหมายได้จากนักวิจัยในระดับเดียวกัน หรือมิได้ปฏิบัติตามข้อสัญญาและเงื่อนไขที่กำหนดในสัญญานี้ หรือเมื่อผู้ให้ทุนเห็นว่าควรจะยุติการดำเนินการในโครงการ ในกรณีเช่นนี้ ผู้ให้ทุนจะมีหนังสือแจ้งให้ผู้รับทุนทราบ และการระงับงานหรือการยกเลิกสัญญาดังกล่าว จะมีผลในเวลาไม่ช้ากว่า 60 วัน นับจากวันที่ผู้รับทุนได้รับหนังสือบอกกล่าวนั้น

6.2 ผู้รับทุนมีสิทธิบอกเลิกสัญญาได้ ถ้าผู้ให้ทุนมิได้ปฏิบัติตามหน้าที่ความรับผิดชอบตามที่ระบุไว้ในสัญญานี้ ในกรณีเช่นนี้ ผู้รับทุนจะต้องมีหนังสือถึงผู้ให้ทุน ระบุรายละเอียดถึงสาเหตุและเหตุผลในการขอเลิกสัญญา ถ้าผู้ให้ทุนมิได้ดำเนินการแก้ไขให้เป็นที่น่าพอใจภายในระยะเวลา 30 วัน นับแต่วันที่ได้รับหนังสือบอกกล่าวนั้น ผู้รับทุนมีสิทธิบอกเลิกสัญญา

6.3 เมื่อมีการบอกเลิกสัญญาดำเนินข้อ 6.1 หรือ 6.2 ผู้ให้ทุนจะจ่ายเงินให้แก่ผู้รับทุนตามสัดส่วนที่เป็นธรรมและเหมาะสมเฉพาะตามที่กำหนดในเอกสารแนบหมายเลข 3 และผู้รับทุนจะต้องคืนเครื่องมือเครื่องใช้และวัสดุอุปกรณ์ทั้งหลายที่ผู้รับทุนได้จัดซื้อด้วยทุนทรัพย์ของผู้ให้ทุน ให้แก่ผู้ให้ทุนทั้งหมด

ข้อ 7. ผู้รับทุนยอมรับว่ามีได้เป็นตัวแทนหรือกระทำการแทนผู้ให้ทุนแต่อย่างใดในการปฏิบัติงานตามสัญญานี้ และผู้รับทุนจะป้องกันมิให้ผู้ให้ทุนต้องรับผิดชอบในบรรดาสิทธิเรียกร้องค่าเสียหาย ค่าใช้จ่าย หรือวาทะรวมตลอดถึงการเรียกร้องโดยบุคคลที่สามอันเกิดจากความผิดพลาดหรือการละเว้นไม่กระทำการของผู้รับทุน หรือของลูกจ้างของผู้รับทุน

ข้อ 8. ผู้รับทุนจะต้องรับผิดชอบการละเมิดบทบัญญัติแห่งกฎหมาย หรือสิทธิใด ๆ ในสิทธิบัตรหรือลิขสิทธิ์ของบุคคลที่สาม ซึ่งผู้รับทุนนำมาใช้ในการปฏิบัติงานตามสัญญานี้

ข้อ 9. ในการเผยแพร่ข้อมูล ข่าวสารอันเกี่ยวกับผลงานของโครงการ ในสิ่งพิมพ์ใดหรือสื่อใด ในแต่ละครั้ง ผู้รับทุนต้องระบุข้อความว่า "ได้รับทุนอุดหนุนจาก สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย" หรือ แจ้งข้อความดังกล่าวด้วยทุกครั้ง

สัญญานี้ทำขึ้น 2 ฉบับ มีข้อความตรงกัน คู่สัญญาได้อ่านและเข้าใจข้อความในสัญญานี้โดยตลอดแล้ว จึงได้ลงลายมือชื่อไว้เป็นสำคัญต่อหน้าพยานแต่ละฝ่าย และต่างเก็บไว้ฝ่ายละฉบับ

ลงชื่อ ผู้ให้ทุน
(นายวิจารณ์ พานิช)

ผู้อำนวยการสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

ลงชื่อ ผู้รับทุน
(นายสุเทพ ลานใต้)

ลงชื่อ พยานฝ่ายรับทุน
(นายอมร วาสนาจิตร)

ลงชื่อ พยานฝ่ายให้ทุน
(นายวุฒิพงศ์ เตชะดำรงสิน)

สัญญาเลขที่ DIG 8/02/2540

โครงการ “การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์”

Title: Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces

สรุปข้อเสนอโครงการ

ผู้เสนอโครงการ

ดร. สุเทพ สอนใต้ (Mr. Suthep Suantai)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

ถ.หัวมกั่ว อ.เมือง จ.เชียงใหม่ 50200

โทรศัพท์: 053-221699 ต่อ 3327

ที่บ้าน 053-804254 หรือ 01-9523530

e-mail: scmt005@chiangmai.ac.th

หน่วยงานที่ร่วมมือ

:

-

ระยะเวลาดำเนินการ

:

18 เดือน

งบประมาณที่เสนอ

:

199,900 บาท

ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

การแปลงเมทริกซ์ (matrix transformations) ของปริภูมิลำดับ (sequence spaces) นับเป็นปัญหาที่สำคัญ ปัญหาหนึ่งที่มีการทำวิจัยกันมากในสาขาของ Sequence Spaces การศึกษาปัญหาดังกล่าว เป็นการศึกษาหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอให้กับเมทริกซ์อนันต์ ที่ส่ง (map) จากปริภูมิลำดับหนึ่งไปยังปริภูมิลำดับหนึ่ง ในกรณีที่ปริภูมิลำดับที่นิยามโดยทฤษฎีบทใหญ่สนใจศึกษาเป็นปริภูมิลำดับที่เกิดมาจากการประยุกต์ในสาขาวิชาอื่นๆ ซึ่งเป็นปริภูมิลำดับของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน แต่เนื่องจากปัญหาต่างๆ ในยุคปัจจุบันมีความซับซ้อนมากขึ้นในการแก้ปัญหาโดยวิธีใดๆ จึงไม่สามารถใช้ได้เช่นเดียวกับปัญหาของการศึกษาการแปลงเมทริกซ์ ในปัจจุบันปริภูมิลำดับที่ศึกษากันส่วนใหญ่ได้ขยายจากปริภูมิลำดับของจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อนไปเป็นปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ (vector-valued sequence spaces) และ เมทริกซ์อนันต์ที่ศึกษานั้นก็ขยายจากเมทริกซ์ของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนไปเป็นเมทริกซ์อนันต์ของตัวดำเนินการ (operator) เพื่อความสะดวกในการกล่าวถึงที่มาและปัญหาตลอดจนวัตถุประสงค์ของงานวิจัยนี้เราจะให้สัญลักษณ์และนิยามบางอย่างที่จำเป็นดังต่อไปนี้

ให้ X และ Y เป็นปริภูมิลำดับของจำนวนจริงหรือของจำนวนเชิงซ้อน และ $A = (a_{nk})$ เป็นเมทริกซ์ของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน และให้ $x = (x_n) \in X$ ถ้า $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ทุก n

$n \in \mathbb{N}$ แล้ว จะกล่าวว่า Ax หาค่าได้ และจะให้ $Ax = (\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k)_{n=1}^{\infty}$ จะกล่าวว่า A ส่ง (map) X ไปยัง Y ซึ่งเขียนแทนด้วย $A: X \rightarrow Y$ ถ้า Ax หาค่าได้ และ $Ax \in Y$ ทุกๆ $x \in X$

ให้ E เป็นปริภูมิบานาค (Banach space) และให้ X เป็นปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ใน E (E -valued sequence spaces) และ Y เป็นปริภูมิลำดับของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน สำหรับเมทริกซ์อนันต์

$A = (f_k^n)$ เมื่อ $f_k^n \in E'$ (the continuous dual of E) และ ถ้า $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^n(x_k)$ ลู่เข้าทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ จะกล่าวว่า



Ax หาค่าได้ และจะให้ $Ax = (\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_k))_{n=1}^{\infty}$ จะกล่าวว่า A ส่ง X ไปยัง Y ถ้า Ax หาค่าได้ และ

$Ax \in Y$ ทุกๆ $x \in X$

ให้ $p = (p_k)$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก Bult และ Caker ได้นิยามปริภูมิลำดับของจำนวนจริง $\mathcal{L}(p, s)$ ดังนี้

$$\mathcal{L}(p, s) = \{(x_k) \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

และ ได้หาลักษณะของเมทริกซ์อินฟินต์ A ซึ่ง $A : \mathcal{L}(p, s) \rightarrow C$ และ $A : \mathcal{L}(p, s) \rightarrow \mathcal{L}_\infty$ เมื่อ $\mathcal{L}_\infty$ และ C เป็นปริภูมิลำดับที่มีขอบเขตและลำดับสู่ชานักคณิตศาสตร์หลายคนได้ศึกษาการแปลงเมทริกซ์ระหว่างปริภูมิลำดับของจำนวนจริง $c_0(p)$, $\mathcal{L}(p)$ และ $\mathcal{L}_\infty(p)$

ในปี ค.ศ. 1993 C.X. Wu และ L. Liu นักคณิตศาสตร์ชาวจีนได้นิยามปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $c_0(E, p)$, $\mathcal{L}(E, p)$ และ $\mathcal{L}_\infty(E, p)$ ดังต่อไปนี้

$$c_0(E, p) = \{(x_n) \mid \|x\|^{p_k} \rightarrow 0\}$$

$$\mathcal{L}(E, p) = \{(x) \mid \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

$$\mathcal{L}_\infty(E, p) = \{(x) \mid \sup_k \|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

และได้ให้ลักษณะของเมทริกซ์อินฟินต์ A ซึ่ง $A : X \rightarrow Y$ ในกรณีที่ $X = c_0(E, p)$, $\mathcal{L}(E, p)$ และ $\mathcal{L}_\infty(E, p)$ และ $Y = c_0$, $c_0(q)$, $\mathcal{L}_\infty(q)$ ซึ่งงานของ C.X. Wu และ L. Liu เป็นงานที่กลุ่มงานที่นักคณิตศาสตร์หลายคนได้ทำไว้

ในปี ค.ศ. 1995 Mursaleen นักคณิตศาสตร์ชาวอินเดียได้ศึกษาการแปลงเมทริกซ์จากปริภูมิ $\mathcal{L}(p, s)$ ไปยังปริภูมิ $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_\infty$ เมื่อ

$$\mathcal{L} = \{x \in \mathcal{L}_m \mid \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m x_{k+m} = L\}$$

และ

$$\mathcal{L}_m = \{x \mid \sup_{m, n} \left| \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m x_{k+n} \right| < \infty\}$$

ดังนั้นนิยามปริภูมิลำดับ $\mathcal{L}(E, p, s)$, $\mathcal{L}_\infty(E, p, s)$ และ $c_0(E, p, s)$ เมื่อ $s \geq 0$ ดังนี้

$$\mathcal{L}(E, p, s) = \{(x_k) \mid \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} \|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

$$\mathcal{L}_\infty(E, p, s) = \{(x_k) \mid \sup_k k^{-s} \|x_k\|^{p_k} < \infty\}$$

$$c_0(E, p, s) = \{(x_k) \mid \frac{\|x_k\|^{p_k}}{k^s} \rightarrow 0\}$$

ปริภูมิทั้งสามเป็นปริภูมิที่กลุ่มปริภูมิที่ C.X. Wu และ L. Liu นิยามไว้ ดังนั้นการศึกษาลักษณะของ

เมทริกซ์อินฟินต์ A ซึ่ง $A : X \rightarrow Y$ เมื่อ $X = \mathcal{L}(E, p, s)$, $\mathcal{L}_\infty(E, p, s)$ และ $Y = \mathcal{L}_\infty$, C , c_0 , $\mathcal{L}_\infty(q)$, $c_0(q)$

$\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_\infty$ จะเป็นงานวิจัยที่กลุ่มงานวิจัยที่นักคณิตศาสตร์หลายคนได้ทำไว้ในอดีต เช่นงานวิจัยของ C.X. Wu และ L. Liu (1993) และ งานของ Mursaleen (1995)

วัตถุประสงค์

1. หาลักษณะของเมทริกซ์อินฟินต์ A ซึ่ง $A : X \rightarrow Y$ เมื่อ $X = \mathcal{L}(E, p, s)$ และ $\mathcal{L}_\infty(E, p, s)$ และ $Y = c_0$, $\mathcal{L}_\infty$, C , $c_0(q)$, $\mathcal{L}_\infty(q)$, $C(q)$ เมื่อ $q = (q_k) \in c_0$



2. ศึกษาลักษณะของเมทริกซ์อันดับ A ซึ่ง $A : X \rightarrow Y$ เมื่อ $X = \mathcal{L}(E, p, s)$ และ $\mathcal{L}_\infty(E, p, s)$ และ $Y = \mathcal{B}_s, \mathcal{B}_v$ และ $\mathcal{C}_s$

3. ศึกษาลักษณะของเมทริกซ์อันดับ A ซึ่ง $A : X \rightarrow Y$ เมื่อ $X = \mathcal{L}(E, p, s)$ และ $\mathcal{L}_\infty(E, p, s)$ และ $Y = \mathcal{I}$ และ $\mathcal{I}_\infty$

4. ศึกษาลักษณะของเมทริกซ์อันดับ A ซึ่ง $A : \mathcal{L}(E, p, s) \rightarrow \mathcal{L}(p, s)$ และ $A : \mathcal{L}_\infty(E, p, s) \rightarrow \mathcal{L}_\infty(p, s)$

5. ศึกษาลักษณะของเมทริกซ์อันดับ A ซึ่ง $A : \mathcal{C}_0(E, p, s) \rightarrow \mathcal{C}_0$ และ $A : \mathcal{C}_0(E, p, s) \rightarrow \mathcal{L}_\infty(q)$ เมื่อ $q = (q_k)$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก

ระเบียบวิธีวิจัย

1. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการแปลงของปริภูมิลำดับ จากเอกสารที่เกี่ยวข้อง

2. ศึกษาผลงานวิจัยเกี่ยวกับทฤษฎีการแปลงเมทริกซ์ระหว่างปริภูมิลำดับ $\mathcal{C}_0(p), \mathcal{L}(p), \mathcal{L}_\infty(p)$

จากเอกสารที่เกี่ยวข้อง

3. ศึกษางานวิจัยของ Bolut และ Cakar [2] ที่เกี่ยวกับการแปลงเมทริกซ์ของปริภูมิลำดับ $\mathcal{L}(p, s)$ ไปยัง $\mathcal{L}_\infty$ และ $\mathcal{C}$

4. ศึกษาคุณสมบัติต่างๆของปริภูมิ $\mathcal{I}$ และ $\mathcal{I}_\infty$ จากเอกสารที่เกี่ยวข้องเพื่อลดจนศึกษา ลักษณะของเมทริกซ์ A ที่ส่ง $\mathcal{L}(p, s)$ ไปยัง $\mathcal{I}$ และ $\mathcal{I}_\infty$

5. ศึกษาคุณสมบัติต่างๆเกี่ยวกับปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ $\mathcal{C}_0(E, p), \mathcal{L}(E, p)$ และ $\mathcal{L}_\infty(E, p)$ จากเอกสารที่เกี่ยวข้อง และศึกษาการแปลงเมทริกซ์จากปริภูมิ เหล่านี้ไปยังปริภูมิ ลำดับ $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_0(q), \mathcal{L}_\infty, \mathcal{L}_\infty(q)$

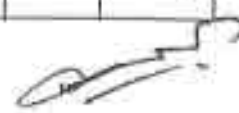
6. เดินทางไปค้นคว้าหาเอกสารที่เกี่ยวข้องเพิ่มเติมถึงห้องสมุดคณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ทุกๆเดือน และเดินทางไปห้องสมุดภาควิชาคณิตศาสตร์ ของ International University of Singapore ซึ่งเป็นแหล่งที่มีวารสารเกี่ยวกับเรื่องที่ทำวิจัยเป็นจำนวนมาก เพื่อค้นหาเอกสารและพบกับ Professor Dr. Lee Peng Yee เพื่อแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและ แนวทาง การทำวิจัย

7. โดยการศึกษาความรู้พื้นฐานที่ได้จากการศึกษาตามระเบียบวิธีตามข้อ 1 - 6 และประสบการณ์ที่ได้จากการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นและปรึกษากับนักวิจัยชาวต่างประเทศที่มีการเชื่อมโยงการทำวิจัยกับอยู่หาแนวทางในการคิดค้นทฤษฎีใหม่ๆที่เกี่ยวกับการหาลักษณะของเมทริกซ์อันดับที่ส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ไปยังปริภูมิลำดับของจำนวนจริงตามวัตถุประสงค์ที่ไว้ในข้อ 1 - 5



แผนการดำเนินงานวิจัยตลอดโครงการในแต่ละช่วง 5 เดือน

กิจกรรมและขั้นตอนดำเนินงาน	ช่วง 6 เดือนแรกของการวิจัย					
	1	2	3	4	5	6
1. ศึกษาความรู้พื้นฐานจากเอกสาร [4] - [7]	↔					
2. ศึกษาในเรื่องการแปลงเมทริกซ์ ระหว่างปริภูมิลำดับ $\mathcal{L}(p)$, $\mathcal{L}_0(p)$ และ $c_0(p)$ จาก [3] [8] [9]	↔					
3. ศึกษาพื้นฐานของการแปลงเมทริกซ์จาก $\mathcal{L}(p,s)$ ไปยัง $\mathcal{L}_\infty$, c จากเอกสาร [2]		↔				
4. ศึกษาคุณสมบัติของปริภูมิ $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_\infty$ และ การแปลงเมทริกซ์จาก $\mathcal{L}(p,s)$ ไปยัง $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_\infty$ จากเอกสาร [10]			↔			
5. ศึกษาการแปลงเมทริกซ์ของปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ จากเอกสาร [12] และอื่นๆ				↔		
6. เดินทางไปหาเอกสารที่เกี่ยวข้อง					↔	
7. ศึกษาคุณสมบัติต่างๆของปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ที่สนใจคือ $\mathcal{L}(E,p,s)$, $\mathcal{L}_\infty(E,p,s)$, $c_0(E,p,s)$					↔	
8. รายงานความคืบหน้าของโครงการ						↔



กิจกรรมและขั้นตอนดำเนินงาน	ช่วง 6 เดือนที่สองของการวิจัย					
	1	2	3	4	5	6
9. สร้างทฤษฎีสำหรับหาเงื่อนไขและพหุลักษณะของเมทริกซ์อันดับที่สี่ระหว่างปริภูมิลำดับที่กำหนดตามวัตถุประสงค์ 4.1	←	→				
10. สร้างทฤษฎีสำหรับหาเงื่อนไขและพหุลักษณะของเมทริกซ์อันดับที่สี่ระหว่างปริภูมิลำดับที่กำหนดตามวัตถุประสงค์ 4.2			←	→		
11. สร้างทฤษฎีสำหรับหาเงื่อนไขและพหุลักษณะของเมทริกซ์อันดับที่สี่ระหว่างปริภูมิลำดับที่กำหนดตามวัตถุประสงค์ 4.3					←	→
12. ส่งผลงานบางส่วนตีพิมพ์						←
13. รายงานความคืบหน้าของโครงการ						←

กิจกรรมและขั้นตอนดำเนินงาน	ช่วง 6 เดือนสุดท้ายของการวิจัย					
	1	2	3	4	5	6
14. สร้างทฤษฎีสำหรับหาเงื่อนไขและพหุลักษณะของเมทริกซ์อันดับที่สี่ระหว่างปริภูมิลำดับที่กำหนดตามวัตถุประสงค์ 4.4	←	→				
15. สร้างทฤษฎีสำหรับหาเงื่อนไขและพหุลักษณะของเมทริกซ์อันดับที่สี่ระหว่างปริภูมิลำดับที่กำหนดตามวัตถุประสงค์ 4.5			←	→		
16. รายงานผลก้าวหน้างานวิจัย						←
17. ตีพิมพ์ผลงานวิจัย						←
18. รายงานผลการวิจัยฉบับสมบูรณ์						←



ผลประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ความรู้และทฤษฎีบทใหม่ๆ ที่เกี่ยวกับการแปลงเมทริกซ์ของปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ไปยังปริภูมิลำดับของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน
2. ได้ทฤษฎีบทที่เป็นองค์ความรู้ใหม่ในการศึกษาสมบัติที่สำคัญต่างๆ ของปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ เพื่อเป็นเครื่องมือที่จะศึกษาวิจัยในระดับต่อไป
3. ได้แนวคิดในการหาลักษณะของเมทริกซ์อนันต์ซึ่งส่งจากปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์ที่เราศึกษาเพื่อเป็นแนวทางของผู้ที่สนใจในการนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

ชื่อหัวข้อเรื่องและชื่อวารสารวิชาการระดับนานาชาติ ที่คาดว่าจะได้รับการตีพิมพ์

เรื่อง " Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces "

วารสาร " Comment . Math. Univ. Carolinae" หรือ " Journal of Mathematical Analysis and Applications" หรือ "Bulletin of The Calcutta Mathematical Society "



สัญญาเลขที่ DIG 8/02/2540

โครงการ "การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์"

Title: Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces

รายชื่อผู้ทำงานในโครงการ

1. นายสุเทพ สานใจ (Mr. Suthep Suantai)

หัวหน้าโครงการ



สัญญาเลขที่ DIG 8/02/2540

โครงการ "การแปลงเมทริกซ์แบบปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์"

Title: Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces

การจ่ายเงิน

งบประมาณรวม	ในวงเงิน 199,900.00 บาท (หนึ่งแสนเก้าหมื่นเก้าพันเก้าร้อยบาทถ้วน)
งวดที่ 1	จำนวน 70,300.00 บาท (เจ็ดหมื่นสามร้อยบาทถ้วน) จ่ายภายใน 30 วัน หลังจากวันลงนามในสัญญา
งวดที่ 2	จำนวน 74,300.00 บาท (เจ็ดหมื่นสี่พันสามร้อยบาทถ้วน) จ่ายภายใน 30 วัน หลังจากผู้ให้ทุนเห็นชอบกับรายงานความก้าวหน้า 6 เดือน และรายงานการเงินแล้ว
งวดที่ 3	จำนวน 7300.00 บาท (เจ็ดพันสามร้อยบาทถ้วน) จ่ายภายใน 30 วัน หลังจากผู้ให้ทุนเห็นชอบกับรายงานความก้าวหน้า 12 เดือน และรายงานการเงินแล้ว
งวดที่ 4	จำนวน 48,000.00 บาท (สี่หมื่นแปดพันบาทถ้วน) เป็นค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ 6 เดือนสุดท้าย จ่ายเมื่อผู้ให้ทุนเห็นชอบกับ รายงานฉบับสุดท้าย และรายงานการเงินฉบับสุดท้ายแล้ว



สัญญาเลขที่ DIG 8/02/2540

โครงการ “การแปลงเมทริกซ์บนปริภูมิลำดับค่าเวกเตอร์”

Title: Matrix Transformations on Some Vector-Valued Sequence Spaces

การจ่ายเงิน

ชื่อบัญชีโครงการ	MTSP
เลขที่บัญชี	521-1-38422-9
ธนาคาร	กรุงไทย สาขา ถ. สุขเทพ
ผู้มีอำนาจสั่งจ่าย	1. นายสุเทพ สวนได้
	2. นางสาวกมล กัทธวี
	3. นางนิภา สุชาติสกุลศรี
	4.

เงื่อนไขการสั่งจ่าย คือ ลงนามไม่น้อยกว่าสองในสาม โดยหนึ่งในสองต้องเป็นนายสุเทพ สวนได้

ลงนาม

(นายสุเทพ สวนได้)

ผู้รับทุน

Southeast Asian Bulletin of Mathematics

Editorial Office : Professor K.P. Shum
Department of Mathematics
The Chinese University of Hong Kong
Shatin, N.T., Hong Kong.
Tel: (852) 2609 7988

E-mail address: KPShum@math.cuhk.edu.hk

Fax: (852) 2603 5154

Ref no: 2617

Professor Suthep Suantai
Dept. of Math.
Faculty of Science,
Chiang Mai University
Chiang Mai, Thailand
(50200)

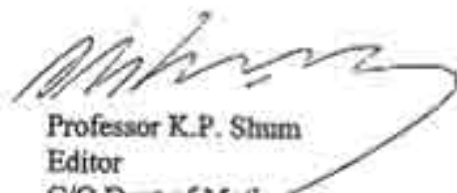
Southeast Asian
Bulletin of
Mathematics
Springer-Verlag

27th November, 1998

Dear Professor Suantai:

I am pleased to inform you that your paper "Matrix transformations between some vector-valued sequence spaces" had been recommended to publish in our journal for publication. Please revise your paper according to the referee report. Please sent it to us with the diskette and sign your fax/e-mail address in the copyright form and sent it to us as well.

Yours sincerely,



Professor K.P. Shum
Editor
C/O Dept of Math.,
Chinese University of Hong Kong,
Hong Kong, Shatin, N.T.

Referee's report on
 Matrix transformations between some vector-valued sequence spaces
 By Suthep Suantai

The paper provides an interesting extension of Zeller theory to the vector-valued sequence spaces. The main result is Theorem 4.1, and the proof is correct. There are two typing errors in the proof. In the line after eq (4.1) $\| \dots \| = 1/m_0$ should read $\| \dots \| \neq 1/m_0$. Also in the line after eq (4.4) $m_0 \|x_k\| < 1$ should read $m_0^{1/p_k} \|x_k\| < 1$. Other theorems are consequences of Theorem 4.1. The author should check other typing errors. For example, p.2 line 3 defined should read *defined*; line 21 denote for the set should read *denote the set*; and line 23 $A=(f_k^n)$ should read $A=(T_k^n)$.

Page 3 line 5 $g(x)=\sup \dots + \|a\|$ is not a paranorm. A paranorm must satisfy $\|0\|=0$ whereas $g(a)=0$ and not necessarily $g(0)$.

I recommend the paper for publication in the Bulletin.



BULLETIN OF THE
CALCUTTA MATHEMATICAL SOCIETY
AE 374, SECTOR 1, SALT LAKE CITY, CALCUTTA-700 064 (INDIA)

To

Dr. Suthep Suantai
Dept. of Mathematics
Chiang Mai University
Thailand

Reference : Paper No.....122/92....

Date 09-07-1998

Title of the paper...Scalar Multiplicativity Factors
for near Quasi-Norms

Name of the author/s.....Suthep Suantai.....

Dear Sir/Madam,

☐ Received with thanks the above mentioned paper No.....
Further information will follow in due course. Please quote your above paper
No. in future communication.

☐ Please send first copy. The paper will be processed only after the
receipt of the first copy.

☐ Please send the duplicate copy of the paper and the diagrams (duly
traced by a draughtsman) in Chinese ink if they are not already sent. Please
note that author is charged the cost of printing the paper, if accepted, at the
rate of Rs. 50 or \$ 15 per printed page. The author is also charged for cost of
preparing the blocks of his or her paper.

☐ The above paper is with the referees. You will be informed of the
position as soon as the comments of the referee will be received.

☐ The above paper has been formally accepted for reading in a general
meeting of the society and will appear in the Bulletin only if it is approved in
the said meeting.

☒ The above paper has been formally accepted for publication and will
appear in the Bulletin in due course. *Referee's comments enclosed*

☐ The above paper has not been recommended by our referee for
publication in our Bulletin. It is returned with the referee's comments.

☐ The paper in the present form has not been recommended by the
referee for publication in the Bulletin. The paper is returned with the referee's
comments by separate post. The referee's comments is sent to you. If you
agree with the comments, please modify the above paper in the light of referee's
comments and send the modified paper with a copy of the previous version of
your papers in duplicate for further consideration.

Thank you for your interest in our Bulletin.

Yours faithfully,

S. K. Chakrabarty
EDITORIAL SECRETARY

TELEX : 021-5380 81D IN
FAX : (0091) 33-376230



PHONE : 37-8882
GRAM : CALMATHSOC

CALCUTTA MATHEMATICAL SOCIETY

AF-374, SECTOR I, SALT LAKE CITY, CALCUTTA-700064, INDIA

To

Dr. Suthep Suantai
Department of Mathematics
Faculty of Science
Chiang Mai University
Chiang Mai 50200, Thailand

Invoice No. CMS/1/90/98/483
Date 17. 7. 1998

DESCRIPTION	(U. S. A.) \$	¢
Page charges for the paper entitled as 'Scalar Multiplicativity Factors for near Quasi-Norms' - 12 pages Likely to appear in the Bulletin, Vol. 290 No. 4 (1998)	360	00
Air-Mail for 50 reprints Delivery and Registered Postage	12	00
Bank Charge	3	00
* Less Commission @ 10%		
TOTAL	375	00
(U. S. A.) Dollar	Three hundred and seventyfive only	Cent nil only

M. R. Adhikari
Secretary

Calcutta Mathematical Society

* B. - Bank charges to be included if payment is made in any Bank outside Calcutta.

* Allowed to the Book-sellers only for a complete Volume.

Mode of Payment : by D/D or A/c. Payee cheque drawn in favour of Calcutta Mathematical Society.



Southeast Asian Mathematical Society

awards this

Certificate of Appreciation

to

SUTHEP SUANTAI

in grateful recognition for services rendered as

Invited Speaker

during the

**International Mathematics Conference in honor of
Professor Lee Peng Yee on his 60th Birthday**

*held at Ateneo de Manila University
on December 16 – 17, 1998*

Polly Wee Sy
POLLY WEE SY
President, SEAMS

รายงานการเงิน

งวดที่ 1. ได้รับจาก สก. จำนวน 70,300 บาท ได้เบิกใช้ในการดำเนินการวิจัยตามกิจกรรมที่เสนอไปจำนวน 70,048.50 บาท โดยจำแนกตามหมวดต่าง ๆ ดังนี้

รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
ก. หมวดค่าตอบแทน	
1. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน มิถุนายน 22540	9,000
2. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน กรกฎาคม 22540	9,000
3. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน สิงหาคม 22540	9,000
4. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน กันยายน 22540	9,000
5. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน ตุลาคม 22540	9,000
6. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน พฤศจิกายน 22540	9,000
7. ค่าพิมพ์บทความ 3 บทความ	2,000
รวม	56,000
ข. หมวดค่าวัสดุ	
1. ค่าถ่ายเอกสาร - เข้าเล่ม 2 เล่ม (ใบเสร็จเลขที่ 0016 จรัสธุรกิจ 12/6/40)	137
2. กระดาษ A4 10 รีม และ ถ่ายเอกสารเข้าเล่ม 6 เล่ม (ใบเสร็จเลขที่ 0163 จรัสธุรกิจ 25/6/40)	2,700
3. ค่าถ่ายเอกสาร - เข้าเล่ม 1 เล่ม (ใบเสร็จเลขที่ 0571 ปุณีกิจ 3/7/40)	310
4. ถ่ายเอกสาร - เข้าเล่ม 5 เล่ม และ กระดาษปรู๊ฟงานสี 2 รีม (ใบเสร็จเลขที่ 0164 จรัสธุรกิจ 20/8/40)	2,200
5. กระดาษปรู๊ฟงานสี 2 รีม ค่าถ่ายเอกสาร - เข้าเล่ม 7 เล่ม (ใบเสร็จเลขที่ 0531 จรัสธุรกิจ 30/8/40)	2,000

6. ค่าถ่ายเอกสาร ค่าพิมพ์ (ใบเสร็จเลขที่ 7422 จรัสธุรกิจ 10/11/40)	380
7. ค่าถ่ายเอกสาร (ใบเสร็จเลขที่ 0697 1/12/40 จรัสธุรกิจ)	60
8. ค่าถ่ายเอกสารลงแผ่นใส (ใบเสร็จเลขที่ 0927 6/12/40 จรัสธุรกิจ)	200
9. ค่าหนังสือ 3 รายการตามใบเสร็จเลขที่ 02-03870 ของ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย 8/12/40	1,580.50
10. ค่าตอบแทนจาก Uncover (ใบเสร็จเลขที่ 485404 25/12/40)	1,500
11. ค่าทำรายงานผลความก้าวหน้า 6 เดือนแรก	500
รวม	11,567.50
ค. หมวดค่าใช้จ่าย	
1. ค่าเครื่องบินกรุงเทพ - เชียงใหม่ และภาษีสนามบิน	1,680
2. ค่าไปรษณีย์ภัณฑ์ลงทะเบียนระหว่างประเทศ	801
รวม	2,481
รวมรายจ่าย	70,048.50
สรุปเงินคงเหลือจากงวดที่ 1 จำนวน 70,300 - 70,048.50	251.50

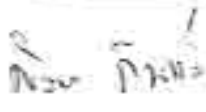
เงินงวดที่ 2. ได้รับจาก สก. จำนวน 74,300 บาท ได้เบิกใช้ในการดำเนินการวิจัยตามกิจกรรมที่เสนอไป โดยจำแนกตามหมวดต่าง ๆ ดังนี้

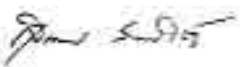
รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
ก. หมวดค่าตอบแทน	
1. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน ธันวาคม 2540	9,000
2. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน มกราคม 2541	9,000
3. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน กุมภาพันธ์ 2541	9,000
4. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน มีนาคม 2541	9,000
5. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน เมษายน 2541	9,000
6. ค่าตอบแทนหัวหน้าโครงการ ประจำเดือน พฤษภาคม 2541	9,000
7. ค่าพิมพ์บทความ 1 บทความ ด้วย AMS-TEX	1,000
8. ค่าตอบแทนคนทำบัญชี	3,000
รวม	58,000
ข. หมวดค่าวัสดุ	
1. ค่าถ่ายเอกสาร และเข้าปก (หนังสือ 6 เล่ม)	2,380
2. กระดาษ A4 10 รีม	1,200
3. กระดาษปรู๊ปรายงานสี 2 รีม	400
4. ค่าถ่ายเอกสารลงแผ่นใส	500
5. ค่าซื้อบทความ จาก Uncover	513
6. ค่าหนังสือ INTERNET VISUAL	295
7. ค่าหมึกพิมพ์ INKJET ค่า Diskette 4 กล่อง	1,930
9. ค่าถ่ายเอกสาร และเข้าเล่ม (หนังสือ 5 เล่ม)	1,850
9. ค่าทำรายงานผลความก้าวหน้า 6 เดือนแรก	2,000
รวม	11,068

รวมรายจ่ายของงวดที่ 2	69,068
เงินคงเหลือของงวดที่ 2 74,300 - 69,068	5,232
เงินคงเหลือที่ยกมาจากงวดที่ 1	251.50
รวมเงินคงเหลือจากงวดที่ 1 และ งวดที่ 2	5,483.50

งวดที่ 3. เงินงวดที่ 3 ที่ได้รับจาก สกว. จำนวน 7,300 บาท ได้เบิกไปใช้
ดังรายการต่อไปนี้

รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
ก. หมวดค่าตอบแทน	
- ค่าพิมพ์ผลงานวิจัย 6 เรื่อง	1,800
- ค่าพิมพ์รายงานฉบับสมบูรณ์	1,500
ข. หมวดค่าใช้จ่าย	
- ค่าถ่ายเอกสาร รายงานฉบับสมบูรณ์ จำนวน 20 เล่ม และ ค่าเย็บเล่ม และเข้าปก	1,600
- ค่าส่ง papers ไปตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ (ค่าไปรษณีย์ ค่าธรรมเนียม ค่าส่ง)	1,102
- ค่าพิมพ์ผลงาน และ ค่า Reprints ผลงาน จำนวน 50 ชุด ที่ถูกเรียกเก็บจากวารสาร Bull. Cal. Math. Soc.	15,909.25
รวมรายจ่ายงวดที่ 3	21,911.25
รายรับ	
1. เงินจากงวดที่ 3	7,300
2. เงินเหลือจากงวด 1 และ 2	5,483.50
3. ดอกเบี้ยเงินฝากจากบัญชี	2,409.99
รวมรับ	15,193.45
สรุป ได้จ่ายเงินเกินงบประมาณที่ได้รับจำนวน 21,911.25 - 15,193.45	6,717.80

ลงชื่อ  ฝ่ายบัญชี
(นาง สรณมล กันทวี)

ลงชื่อ  หัวหน้าโครงการ
(ผศ ดร.สุเทพ สวานใต้)



THIS BOOK SHOULD BE PRODUCED FOR DEPOSIT OR WITHDRAWAL
PLEASE NOTIFY US OF ANY CHANGE OF ADDRESS OR LOSS OF PASSBOOK

คำเตือน

ต้องนำสมุดคู่มือฝากเงินนี้มาทุกครั้งที่มีการฝากหรือถอน
ไปรณังธนาคาร เมื่อสมุดคู่มือฝากสูญหายหรือเปลี่ยนที่อยู่ใหม่

521-1-38422-9

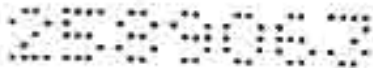
สำนักงาน **กรุงเทพ**
Office

บัญชีเลขที่ 521-1-38422-9
Account No.

ชื่อบัญชี
Account Name

HTSP โดย นายสุเทพ ส่วนได้

หมายเลข S/A



ลายมือชื่อผู้มีอำนาจลงนาม
Authorized Signature

จำนวน 2/0828.800,000

รหัส 02-101

วันที่ DATE	รหัส REF NO	รหัส CODE	ถอน WITHDRAWAL	ฝาก DEPOSIT	ยอด BALANCE	ยอด ยอด ยอด ยอด
*****						57,500
24.04.40	521	8/F			*****0.00	61501
24.04.40	521	CCA		*****1,000.00	*****1,000.00	34105
28.05.40	813	TTS		*****70,300.00	*****71,300.00	61001
22.06.40	521	IMP		*****258.60	*****71,558.60	800000
07.07.40	521	MCA	*****15,000.00		*****56,558.60	33506
07.07.40	521	MCAE		*****15,000.00	*****71,558.60	33506
08.07.40	521	MCA	*****12,000.00		*****59,558.60	34105
21.08.40	521	MCA	*****12,000.00		*****47,558.60	33002
27.10.40	521	MCA	*****12,000.00		*****35,558.60	33002
20.12.40	521	IMP		*****1,210.42	*****36,769.02	800000
30.12.40	521	MCA	*****34,300.00		*****2,469.02	34105
04.02.41	813	TTS		*****74,300.00	*****76,769.02	61005
06.03.41	521	MCA	*****18,000.00		*****58,769.02	33506
09.04.41	521	MCA	*****18,000.00		*****40,769.02	33503
06.05.41	521	MCA	*****18,000.00		*****22,769.02	33503
20.06.41	521	IMP		*****940.97	*****23,709.99	800000
21.07.41	521	MCA	*****10,000.00		*****13,709.99	33503
24.07.41	813	TTS		*****7,300.00	*****21,009.99	31705
24.07.41	813	TTSR	*****7,300.00		*****13,709.99	31705
24.07.41	813	TTS		*****7,300.00	*****21,009.99	80205

คำอธิบาย "รหัส" โปรดดูด้านหลังใบ
FOR INTERPRETATION OF "CODE" ABOVE, PLEASE SEE REVERSE COVER.

ថ្ងៃ ខែ ឆ្នាំ D M Y	កូដ DEP NO	កូដ CODE	លេខ WITHDRAWAL	លេខ DEPOSIT	លេខ BALANCE	លេខ STAFF NO.
*****						ប្រតិបត្តិការ
02.10.41	521	MCA	*****10,000.00		*****11,009.98	34204
16.10.41	521	MCA	*****10,000.00		*****1,009.98	30705
						1
						2
						3
						4
						5
						6
						7
						8
						9
						10
						11
						12
						13
						14
						15
						16
						17
						18
						19
						20
						21

កម្រិតប្រាក់ "កម្រិត" ត្រូវបានកំណត់ដោយ
 FOR INTERPRETATION OF "CODE" ABOVE, PLEASE SEE INDEX BACK COVER

