เพราะเหตุว่า กำลังขยาย $= \frac{\text{ระยะภาพ}}{\text{ระยะวัตถุ}}$

$= \frac{\text{ความเร็วภาพ}}{\text{ความเร็ววัตถุ}}$

ดังนั้นความเร็วภาพ $_1$ = กำลังขยาย $\times$ ความเร็ววัตถุ

$= 2V_0$

กรณีหลัง ความเร็วภาพ $_2$ = กำลังขยาย $_2$ $\times$ ความเร็ววัตถุ

$= \frac{2}{3}V_0$

$\therefore$ ความเร็วสัมพัทธ์ของภาพปลาทั้งสอง $= \frac{2}{3}V_0 + 2V_0$

ในการทำโจทย์ข้อนี้นักเรียนต้องรู้การหักเหของแสงที่ผิวโค้ง ซึ่งไม่มีในหลักสูตร และนักเรียนต้องรู้จักการใช้สูตร กำลังขยาย = ระยะภาพ / ระยะวัตถุ แต่อาจจะนึกไม่ถึงว่า

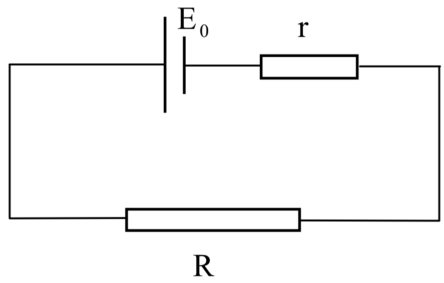
กำลังขยาย = ความเร็วของภาพ / ความเร็วของวัตถุ ด้วย

จึงเป็นโจทย์ที่ใช้ทฤษฎีง่ายๆ ที่คาดหวังนักเรียนเข้าใจการแทนค่า ภาพหัวตั้ง ระยะวัตถุ ผิวโค้งเว้า ผิวโค้งนูน ภาพจริง ภาพเสมือน ภาพหัวตั้ง และภาพหัวกลับ เป็นอย่างดี นักเรียนจึงจะทำได้หมด

โจทย์ข้อนี้มีการหักเหหลายขั้นตอน เช่นนี้ทำให้สามารถจำแนกความสามารถเด็กนักเรียนได้

ปฏิบัติ

แหล่งกำเนิดไฟฟ้ากระแสตรงที่มีแรงเคลื่อน E_0 มีความต้านทานภายใน r ถูกนำมาต่อกับความต้านทานภายนอก R_L ดังรูปที่ 5.13



รูปที่ 5.13

1. จงเขียนกราฟกำลังที่เป็นประโยชน์ของวงจรนี้เป็นฟังก์ชันของกระแส
2. จงหาความต้านทานภายในของเซลล์ไฟฟ้า
3. จงเขียนกราฟ
   ก. กำลังทั้งหมดของวงจรเป็นฟังก์ชันของ R_L
   ข. กำลังที่เป็นประโยชน์เป็นฟังก์ชันของ R_L
   ค. ประสิทธิภาพของวงจรเป็นฟังก์ชันของ R_L

1. ถ้า I คือกระแสในวงจร

จากกฎของโอห์ม

$$E_0 = Ir + IR_L \qquad (1)$$

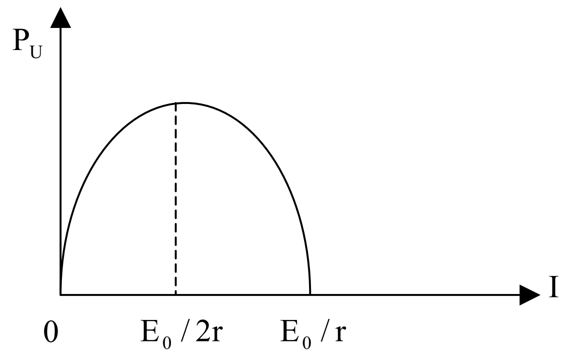
$$\therefore \quad \frac{E_0}{r + R_L} = I$$

ถ้า P_T คือกำลังทั้งหมดของวงจร = $E_0 I$

และ P_U คือกำลังที่เป็นประโยชน์ของวงจร = กำลังทั้งหมด – กำลังที่เสียไป

เราจะได้ $\quad P_U = E_0 I - I^2 r$

ดังนั้นกราฟของ P_U กับ I จึงเป็นโค้งพาราโบลาคว่ำที่มีจุดสูงสุด $P_{U\max} = \frac{E_0{}^2}{4r}$ ซึ่งจะเกิด เมื่อ $I = \frac{E_0}{2r}$



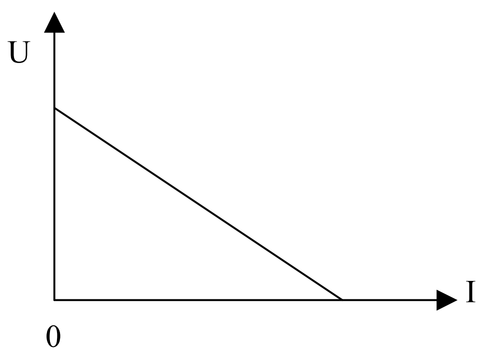
รูปที่ 5.14

2. ถ้า U คือศักย์ไฟฟ้าคร่อม R_L

เราได้ $U = IR_L$

หรือ $U = E_0 - Ir$

$\because$ E_0, r คงที่ ดังนั้น ถ้าเราเปลี่ยน R_L I ก็จะเปลี่ยน ให้นักเรียนวัดศักย์ไฟฟ้าคร่อม R_L เมื่อ I มีค่าต่างๆกัน การเขียนกราฟ U เป็นฟังก์ชันของ I จะทำให้เราได้กราฟเส้นตรงที่มีความชัน $= -r$ และจุดตัดบนแกน U ให้ค่า $U = E_0$

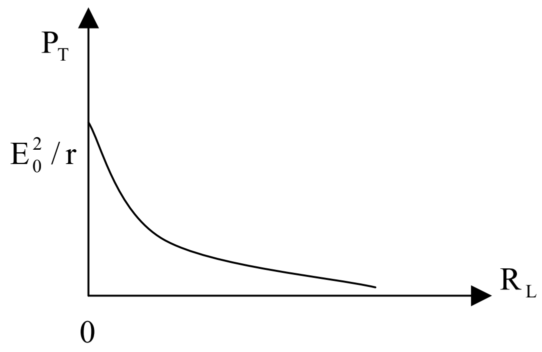


รูปที่ 5.15

3. ก. เพราะเหตุว่า กำลังทั้งหมด = กำลังที่เป็นประโยชน์ + กำลังที่เสียไป

$$P_T = I^2(R_L + r) = \frac{E_0^{\ 2}}{R_L + r}$$

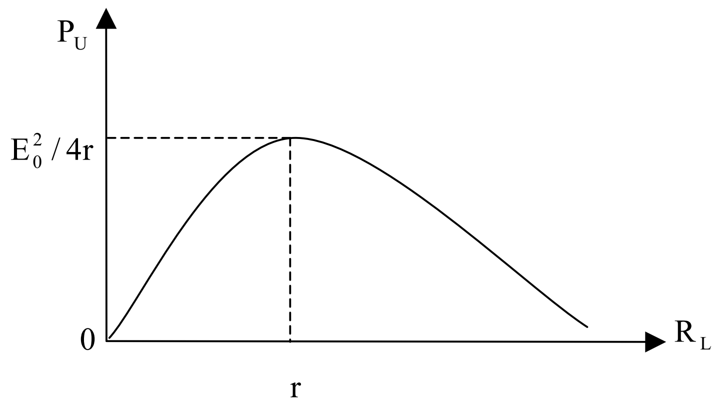
ดังนั้นกราฟของกำลังทั้งหมด P_T เป็นฟังก์ชันของ R_L



รูปที่ 5.16

ข. กำลังที่เป็นประโยชน์ $P_U = I^2 R_L$

$$= \frac{E_0{}^2 R_L}{(R_L + r)^2}$$



รูปที่ 5.17

เมื่อ $R_L \to \infty$, $P_U = 0$

ค่ามากที่สุดของ P_U เกิดเมื่อ $R_L = r$

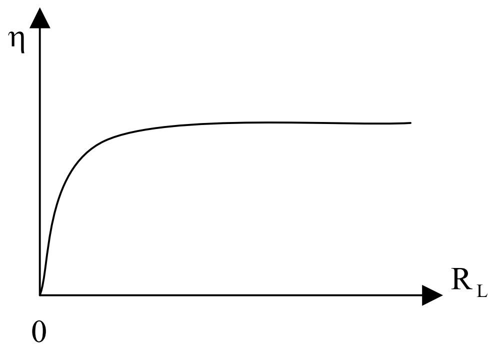
และ ณ ที่นั่น $P_U = \dfrac{E_0{}^2}{4R_L}$

ค. ประสิทธิภาพของวงจร $\eta = \dfrac{\text{กำลังที่เป็นประโยชน์}}{\text{กำลังที่ให้เข้าไป}}$

$$= \frac{P_U}{P_T}$$

$$= \frac{E_0{}^2 R_L}{(R_L + r)^2} \frac{(R_L + r)}{E_0{}^2}$$

$$= \frac{R_L}{R_L + r}$$



รูปที่ 5.18

เมื่อ $R_L \to \infty$, $\eta \to 1$

$R_L \to 0$, $\eta \to 0$

กราฟจึงเป็นดังรูปทั้งสาม

ในการทดลอง และคำนวณเรื่องนี้ นักเรียนต้องรู้ คำจำกัดความของกำลังทั้งหมด กำลังที่เป็นประโยชน์ และประสิทธิ์ภาพของวงจร ซึ่งความหมายของคำเหล่านี้มีในหลักสูตร ดังนั้นนักเรียนจึงควรสามารถทำได้หมด โจทย์นี้คงจำแนกเด็กเก่ง เด็กอ่อนไม่ได้ เพราะข้อสอบที่ออกง่าย

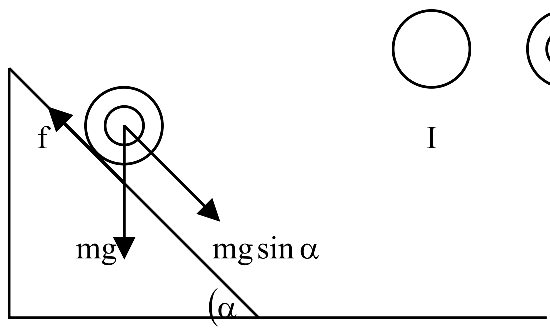
โจทย์ฟิสิกส์โอลิมปิกครั้งที่ 6
พ.ศ. 2515
ประเทศโรมาเนีย

ทฤษฎี

ปัญหาข้อที่ 1

ทรงกระบอก 3 อัน มีมวล, ความสูง และรัศมีขอบนอกเท่ากัน ทรงกระบอกแรกเป็นทรงกระบอกตันที่มีความหนาแน่นสม่ำเสมอ ทรงกระบอกที่สองเป็นทรงกระบอกกลวงที่มีความหนา ส่วนทรงกระบอกสุดท้ายเป็นทรงกระบอกกลวงที่มีความหนาเท่ากับความหนาของผนังกระบอกสอง แต่มีของเหลวบรรจุอยู่ภายในจนเต็ม และของเหลวมีความหนาแน่นเท่าความหนาแน่นของผนังทรงกระบอกที่สาม

จงเปรียบเทียบความเร่งเชิงเส้นและความเร่งเชิงมุมของทรงกระบอกทั้งสามเมื่อถูกปล่อยจากยอดของพื้นเอียงที่ทำมุม α กับแนวระดับ ให้สัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างผิวทรงกระบอกกับพื้นเอียงเท่ากับ μ นอกจากนี้ให้วิเคราะห์กรณีที่ทรงกระบอกกลิ้งลงมาโดยไม่ไถล และไถลลงมาอย่างเดียวโดยที่ไม่กลิ้ง กำหนดให้อัตราส่วนระหว่างความหนาแน่นของทรงกระบอกแรกกับทรงกระบอกที่สองเป็น n



รูปที่ 6.1

โจทย์ข้อนี้เป็นโจทย์กลศาสตร์การเคลื่อนที่เชิงเส้น และเชิงมุมของวัตถุที่มีมวลเท่ากัน และขนาดเท่ากันแต่มีรายละเอียดของโครงสร้างต่างกัน ซึ่งนักเรียนจะพบว่ากรณีที่วัตถุกลิ้งลงมาโดยไม่มีการไถล ถึงแม้วัตถุทั้งสามจะมีมวลเท่ากันแต่การมีโมเมนต์ความเฉื่อยต่างกัน จะทำให้วัตถุมีความเร่งลงตามพื้นเอียงต่างกัน แต่ในกรณีที่วัตถุไถลลงมาโดยที่ไม่มีการกลิ้ง ความเร่งเชิงเส้นของวัตถุทั้งสามจะเท่ากัน

เราจะเริ่มวิเคราะห์ปัญหานี้ จากการหาเงื่อนไขที่จะบอกเราว่าวัตถุจะไถลลงตามพื้นเอียง เมื่อแรงเสียดทาน $f \le \mu mg\cos\alpha$

พิจารณาการเคลื่อนที่เชิงเส้นของทรงกระบอกบนพื้นเอียง โดยการแตกแรงทั้งหมดที่กระทำต่อทรงกระบอกที่อยู่บนพื้นเอียง จากนั้นจึงประยุกต์กฎของนิวตัน จาก $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ เราจะได้

$$mg\sin\alpha - f = ma \tag{1}$$

สมการที่บรรยายการกลิ้งของวัตถุบนพื้นเอียง คือสมการทอร์คของแรงเสียดทานที่กระทำต่อทรงกระบอกแล้วทำให้มันกลิ้งลงตามพื้นเอียง

$$\left|\vec{R} \times \vec{f}\right| = I\frac{d\omega}{dt} = I\ddot{\theta}$$

$$Rf = I\ddot{\theta} \tag{2}$$

เมื่อ R คือรัศมีของทรงกระบอก I คือโมเมนต์ความเฉื่อย และ $\ddot{\theta}$ คือความเร่งเชิงมุมซึ่งมีความสัมพันธ์กับความเร่งเชิงเส้น a ดังนี้คือ $a = R\ddot{\theta}$ จากสมการ (2) เราจะได้

$$a = \frac{R^2 f}{I} = \frac{R^2 \mu mg\cos\alpha}{I} \tag{3}$$

หลังจากแทนค่าลงในสมการ (1) จะได้ความเร่งเชิงเส้น a ดังนี้

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}} \tag{4}$$

และเงื่อนไขที่ทรงกระบอกจะกลิ้งลงมาโดยไม่ไถลตามพื้นเอียง แรงเสียดทาน f จะต้องมีค่า

$$mg\sin\alpha \le f \le \mu mg\cos\alpha \tag{5}$$

ทรงกระบอกจะเริ่มไถลลงมาโดยที่ไม่กลิ้งเมื่อแรงเสียดทานมีค่ามากที่สุด นั่นคือ

$$f = \mu mg\cos\alpha$$

และจากสมการ (1) และสมการ (4) ทรงกระบอกจะกลิ้งลงมาโดยที่ไม่มีการไถล เมื่อ

$$\mu = \frac{1}{1 + \frac{I}{mR^2}}\tan\alpha \tag{6}$$

ต่อไปจะคำนวณโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอกแต่ละอัน ถ้า L เป็นความสูงของทรงกระบอกทั้งสาม R_1 เป็นรัศมีวงใน และ R_2 เป็นรัศมีวงนอก

โจทย์กำหนดความหนาแน่นของทรงกระบอก I เป็น ρ และของทรงกระบอก II เป็น $n\rho$

ให้ I_1 เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอก I

I_2 เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอก II

และ I_3 เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอก III

$$\because I_1 = \frac{1}{2}mR^2 \quad (7)$$

และ
$$I_2 = \frac{1}{2}(R_1{}^2 + R^2)$$

เมื่อ R_1 คือรัศมีภายในของทรงกระบอก II และ R คือรัศมีภายนอกของทรงกระบอก
เพราะมวลของทรงกระบอกทั้งสามเท่ากัน ดังนั้น

$$(\pi R^2 - \pi R_1{}^2)Ln\rho = m = \pi R^2 L\rho$$

ดังนั้น
$$\frac{R_1{}^2}{R^2} = \frac{n-1}{n} \quad (8)$$

นั่นคือโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอก II

$$I_2 = \frac{1}{2}mR^2\left(1 + \frac{R_1{}^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}mR^2\,\frac{2n-1}{n} \quad (9)$$

สำหรับทรงกระบอก III ที่กลวง และมีความหนาของทรงกระบอกเท่ากับ II และมีของเหลวอยู่ภายในเต็ม ซึ่งของเหลวนั้นมีความหนาแน่นเท่ากับความหนาแน่นของผนังทรงกระบอก III เพราะไม่มีแรงเสียดทานระหว่างของเหลวกับผนังทรงกระบอก

ดังนั้นเราจึงไม่ต้องพิจารณาโมเมนต์ความเฉื่อยของของเหลว

ให้ m_0 คือมวลของส่วนที่เป็นของแข็งของทรงกระบอก III
R_1 คือรัศมีภายในของทรงกระบอกนี้
และ R คือรัศมีภายนอกของทรงกระบอก

ดังนั้นโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอก III ส่วนของแข็งนี้ $= \frac{1}{2}m_0(R^2 + R_1{}^2)$

$\because$ ปริมาตรผนัง $= (\pi R^2 - \pi R_1{}^2)L$

ดังนั้น มวลของผนัง $=$ ความหนาแน่นของผนัง $\times\ \pi L(R^2 - R_1{}^2)$ (a)

และ มวลของๆเหลว $= \pi R_1{}^2$ (ความหนาแน่นของผนัง) L (b)

(a)+(b) $m =$ ความหนาแน่นของผนัง $\times\ \pi L[R_1{}^2 + R^2 - R_1{}^2]$

$$\frac{m}{\pi L R^2} = \text{ความหนาแน่นของผนัง}$$

ดังนั้น $m_0 = \pi L$ (ความหนาแน่นของผนัง) $(R^2 - R_1{}^2)$

$$= \pi L \times \frac{m}{\pi L R^2}(R^2 - R_1{}^2)$$

$$= m\left(1 - \frac{R_1{}^2}{R^2}\right)$$

นั่นคือโมเมนต์ความเฉื่อยของทรงกระบอก III

$$= \frac{1}{2}m\left(1 - \frac{R_1{}^2}{R^2}\right)(R^2 + R_1{}^2)$$

$$= \frac{mR^2}{2}\left[1 - \frac{R_1{}^4}{R^4}\right]$$

$$= \frac{mR^2}{2}\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right] \qquad \text{จากสมการ (8)}$$

$$= \frac{mR^2}{2}\left(\frac{2n-1}{n^2}\right)$$

ในการที่จะให้ทรงกระบอก I กลิ้งโดยไม่ไถล

$$I_1 = \frac{1}{2}mR^2$$

ดังนั้นจากสมการ (4)

$$a_1 = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{mR^2}{2mR^2}} = \frac{2}{3}g\sin\alpha$$

จากสมการการเคลื่อนที่เชิงเส้น

$$mg\sin\alpha - F = ma_1$$

แทนค่า

$$mg\sin\alpha - F = \frac{2}{3}mg\sin\alpha$$

$$F = \frac{1}{3}mg\sin\alpha$$

ถ้าทรงกระบอกจะกลิ้งโดยไม่ไถล

$$F \le \mu mg\cos\alpha$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{3}mg\sin\alpha \le \mu mg\cos\alpha$$

$$\tan\alpha \le 3\mu$$

เมื่อความเร่งเชิงเส้น $a_1 = \frac{2}{3}g\sin\alpha$

เราจะได้ ความเร่งเชิงมุม $= \frac{a_1}{R} = \frac{2}{3R}g\sin\alpha$

สำหรับทรงกระบอก II

$$\because I_2 = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{2n-1}{n}\right)$$

ดังนั้นจากสมการ (4)

$$a_2 = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{\frac{1}{2}mR^2\left(\frac{2n-1}{n}\right)}{mR^2}}$$

ความเร่งเชิงเส้นของทรงกระบอก II $= \frac{2ng\sin\alpha}{4n-1}$

และ ความเร่งเชิงมุม $$=\left(\frac{2n}{4n-1}\right)\frac{g}{R}\sin\alpha$$

เพราะสมการการเคลื่อนที่คือ

$$mg\sin\alpha - F = ma_2$$

ดังนั้น $$F = mg\sin\alpha - m\frac{2ng\sin\alpha}{4n-1}$$

$$=\left(\frac{2n-1}{4n-1}\right)mg\sin\alpha$$

$\therefore$ ทรงกระบอก II จะกลิ้งโดยไม่ไถล ถ้า

$$\left(\frac{2n-1}{4n-1}\right)mg\sin\alpha \le \mu mg\cos\alpha$$

หรือ $$\tan\alpha \le \frac{\mu(4n-1)}{(2n-1)}$$

และกรณีทรงกระบอก III

$$\because I_3 = \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{2n-1}{n^2}\right)$$

จากสมการ (4)

$$a_3 = \frac{g\sin\alpha}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{2n-1}{n^2}\right)}$$

$\therefore$ ความเร่งเชิงเส้น $$=\frac{2n^2 g\sin\alpha}{(2n^2+2n-1)}$$

และความเร่งเชิงมุม $$=\frac{2n^2 g\sin\alpha}{R(2n^2+2n-1)}$$

ในสมการการเคลื่อนที่

$$mg\sin\alpha - F = ma_3$$

เราจะได้ $$mg\sin\alpha - F = m\frac{2n^2 g\sin\alpha}{(2n^2+2n-1)}$$

$$F = mg\sin\alpha\left(\frac{2n-1}{2n^2+2n-1}\right)$$

โดยเหตุผลทำนองเดียวกันกับสองทรงกระบอกแรก

คือ $$mg\sin\alpha\left(\frac{2n-1}{2n^2+2n-1}\right) \le \mu mg\cos\alpha$$

$$\tan\alpha \le \frac{\mu(2n^2+2n-1)}{(2n-1)}$$

ในการพิจารณากรณีทรงกระบอกทั้ง 3 ไถลโดยไม่กลิ้งนั้น

ความเร่งเชิงเส้นของทรงกระบอกทั้ง 3 เท่ากัน คือ

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

และในการคำนวณหาความเร่งเชิงมุมในแต่ละกรณี จากสมการการเคลื่อนที่

$$I\ddot{\theta} = (\mu mg\cos\alpha)R$$

เพราะแรงเสียดทานจะมีค่ามากที่สุด $= \mu mg\cos\alpha$

$$\therefore \qquad \ddot{\theta} = \frac{\mu mgR\cos\alpha}{I}$$

นั่นคือ ความเร่งเชิงมุมของทรงกระบอก $I = \dfrac{\mu mgR\cos\alpha}{I_1} = \dfrac{2\mu\cos\alpha}{R}$

ความเร่งเชิงมุมของทรงกระบอก $II = \dfrac{\mu mgR\cos\alpha}{I_2} = \left(\dfrac{n}{2n-1}\right)\dfrac{2\mu\cos\alpha}{R}$

ความเร่งเชิงมุมของทรงกระบอก $III = \dfrac{\mu mgR\cos\alpha}{I_3} = \left(\dfrac{n^2}{2n-1}\right)\dfrac{2\mu\cos\alpha}{R}$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับวัตถุเกร็งมีในหลักสูตร

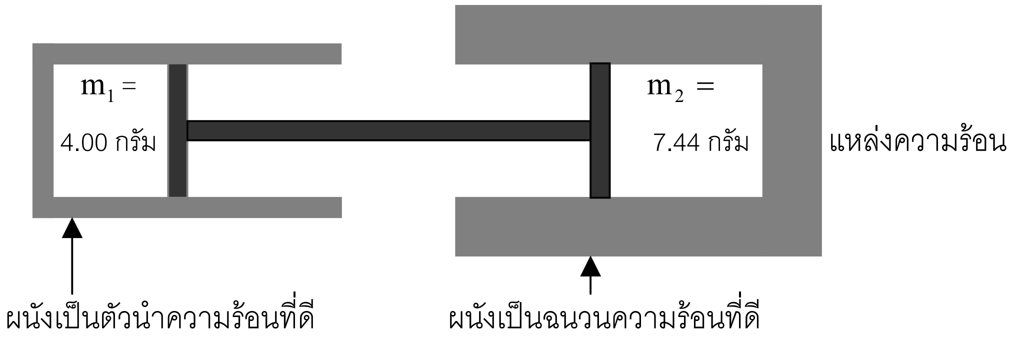
การคำนวณที่ต้องใช้ทฤษฎีนี้ ในหลักสูตรไม่ยุ่งยาก และซับซ้อนเช่นนี้ ในกรณีที่วัตถุตัน นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้โดยไม่ยาก แต่เมื่อวัตถุกลวง นักเรียนต้องคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อยใหม่ ซึ่งต้องใช้เวลา ถ้าจำไม่ได้ว่าเท่ากับ $\frac{1}{2}m(R^2 + R_1^{\,2})$ ความพลิกแพลงของโจทย์อยู่ที่ทรงกระบอก 3 ซึ่งมีของเหลวภายใน หากนักเรียนพิจารณาโมเมนต์ความเฉื่อยของของเหลวด้วยก็จะผิด

การตอบคำถามข้อนี้ต้องใช้เวลานานแต่ไม่ยาก และการแบ่งโจทย์ออกเป็น 3 ส่วน สำหรับทรงกระบอกแต่ละรูปแบบ ทำให้สามารถแยกความสามารถของนักเรียนได้

ปัญหาข้อที่ 2

รูปที่ 6.2 แสดงทรงกระบอกสองทรงกระบอกต่อเชื่อมกันด้วยลูกสูบเดียวกันโดยแกนของลูกสูบอยู่ในแนวนอน ถ้าพื้นที่หน้าตัดของแต่ละทรงกระบอกเท่ากับ1 เดซิเมตร ^{2} ทรงกระบอกทางด้านซ้ายบรรจุก๊าซมวล $m_1 = 4$ กรัม, ปริมาตร 22.4 เดซิเมตร ^{3} (ลิตร) ที่ความดัน 1 บรรยากาศ และ $0^\circ C$ และผนังของทรงกระบอกทำด้วยตัวนำความร้อนที่ดี ส่วนทรงกระบอกด้านขวามีก๊าซชนิดเดียวกันมวล $m_2 = 7.44$ กรัม, ปริมาตร 22.4 เดซิเมตร ^{3} (ลิตร) ที่ $0^\circ C$ ผนังของทรงกระบอกด้านขวานี้บุด้วยฉนวนความร้อนที่ดีและอยู่ในแหล่งความร้อนขนาดใหญ่ ทำให้มีอุณหภูมิ $0^\circ C$ ตลอดเวลาถ้าระบบอยู่ในสุญญากาศ หลังจากที่ปล่อยให้แกนลูกสูบเคลื่อนที่ ลูกสูบจะเคลื่อนที่จากหยุดนิ่งไปได้ ระยะทาง 5 เดซิเมตร ก่อนที่จะเข้าสู่ภาวะสมดุล จงหาปริมาณความร้อนที่ทรง

กระบอกทางด้านซ้ายจะได้รับ กำหนดให้ความร้อนจำเพาะของก๊าซที่ปริมาตรคงที่ $C_V = 0.75$ แคลอรี/กรัม-เคลวิน



รูปที่ 6.2

โจทย์ข้อนี้เกี่ยวกับพลศาสตร์ของความร้อน ในการทำโจทย์ข้อนี้นักเรียนต้องมีความรู้เรื่องสมดุลความร้อนและสมการสถานะของก๊าซ เมื่อเราปล่อยให้สูบเคลื่อนที่จากหยุดนิ่ง การที่แกนสูบจะเคลื่อนที่ได้เพราะความดันภายในทรงกระบอกทั้งสองไม่เท่ากัน ผลต่างของความดันทำให้ลูกสูบเคลื่อนที่ และงานที่เกิดขึ้นจะกระทำบนระบบจะทำให้ระบบร้อน ซึ่งเป็นสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หา

ดังนั้น จากที่กำหนดให้ ในตอนเริ่มต้น เราทราบว่าทรงกระบอกทั้งสองมีปริมาตร และมีอุณหภูมิเท่ากัน ดังนั้นจากสมการสถานะของก๊าซ $PV = nRT$ จะได้

ดังนั้น $\frac{P_1}{m_1} = \frac{P_2}{m_2}$ ในที่นี้

n คือจำนวนโมลของก๊าซ ซึ่งขึ้นกับน้ำหนักของก๊าซที่มี

P_1, P_2 คือความดันก๊าซในถังแรก และถังที่สองตามลำดับ

และ m_1, m_2 คือมวลของก๊าซในถังแรกและถังที่สองตามลำดับ

จากข้อมูลที่โจทย์กำหนด เราจะหาความดัน P_2 ในตอนเริ่มต้นในทรงกระบอกทางด้านขวา

$$P_2 = 7.44 \times \frac{1}{4} = 1.86 \text{ บรรยากาศ}$$

สรุปในตอนนี้ข้อมูลที่เราทราบมีดังนี้ คือ

สำหรับทรงกระบอกทางด้านซ้าย

P_{1i} = ความดันตอนเริ่มต้นของอากาศในทรงกระบอกด้านซ้าย=1 บรรยากาศ

P_{1f} = ความดันสุดท้ายของอากาศในทรงกระบอกด้านซ้าย = ?

V_{1i} = ปริมาตรของอากาศด้านซ้ายตอนเริ่ม=22.4 เดซิเมตร ^{3}

V_{1f} = ปริมาตรสุดท้ายของอากาศด้านซ้าย = ?

T_{1i} = อุณหภูมิเริ่มต้นของอากาศด้านซ้าย=273 K

T_{1f} = อุณหภูมิสุดท้ายของอากาศด้านซ้าย = ?

สำหรับทรงกระบอกทางด้านขวา

P_{2i} = ความดันตอนเริ่มต้นของอากาศในทรงกระบอกด้านขวา=1.86 บรรยากาศ

P_{2f} = ความดันสุดท้ายของทรงกระบอกด้านขวา = ?

V_{2i} = ปริมาตรของทรงกระบอกด้านซ้ายตอนเริ่ม=22.4 เดซิเมตร ^{3}

V_{2f} = ปริมาตรสุดท้ายของทรงกระบอกด้านขวา = 22.4+5 = 27.4 เดซิเมตร ^{3}

T_{2i} = อุณหภูมิเริ่มต้นของอากาศด้านขวา=273 K

T_{2f} = อุณหภูมิสุดท้ายของอากาศด้านขวา = ?

เพราะเหตุว่าทรงกระบอกทางด้านขวาถูกบุด้วยฉนวนความร้อนที่ดี การทำเช่นนี้จึงทำให้มันไม่มีการสูญเสียความร้อนภายในทรงกระบอกสูบให้กับภายนอก นั่นคือการขยายตัวของก๊าซในกระบอกทางด้านขวาเกิดขึ้นที่อุณหภูมิคงที่

เพราะว่า

$$P_{2i}V_{2i} = P_{2f}V_{2f}$$

จะได้ $$P_{2f} = 22.4 \times \frac{1.86}{27.4} = 1.52 \text{ บรรยากาศ}$$

ส่วนทางด้านซ้าย สมการสถานะของก๊าซคือ

$$\frac{P_{1i}V_{1i}}{T_{1i}} = \frac{P_{1f}V_{1f}}{T_{1f}}$$

และเมื่อระบบอยู่ในสมดุล $P_{2f} = P_{1f}$ ดังนั้น

$$\frac{1 \times 22.4}{273} = \frac{1.52 \times 17.4}{T_{1f}}$$

$$T_{1f} = 322\,\mathrm{K}$$

นั่นคือ $\Delta T = T_{1f} - T_{1i} = 322 - 273 = 49$ K แสดงว่าอุณหภูมิของก๊าซในทรงกระบอกซ้ายสูงขึ้น

การที่ทรงกระบอกทางขวาถูกบุด้วยฉนวนอย่างดีนั้น หมายความว่าไม่มีความร้อนไหลเข้า-ออก ในกระบอกสูบด้านซ้าย นั่นคือ $\Delta Q = 0$ จากกฎข้อที่หนึ่งของพลศาสตร์ความร้อน

$$\Delta Q_1 = 0 = \Delta U_1 + \Delta W_1$$

ในที่นี้ ΔU_1 คือพลังงานภายในของอากาศในกระบอกสูบทางซ้าย ส่วน ΔW_1 คืองานที่เกิดขึ้นจากการที่ลูกสูบทางด้านซ้ายขยายตัว จะเห็นได้ว่า

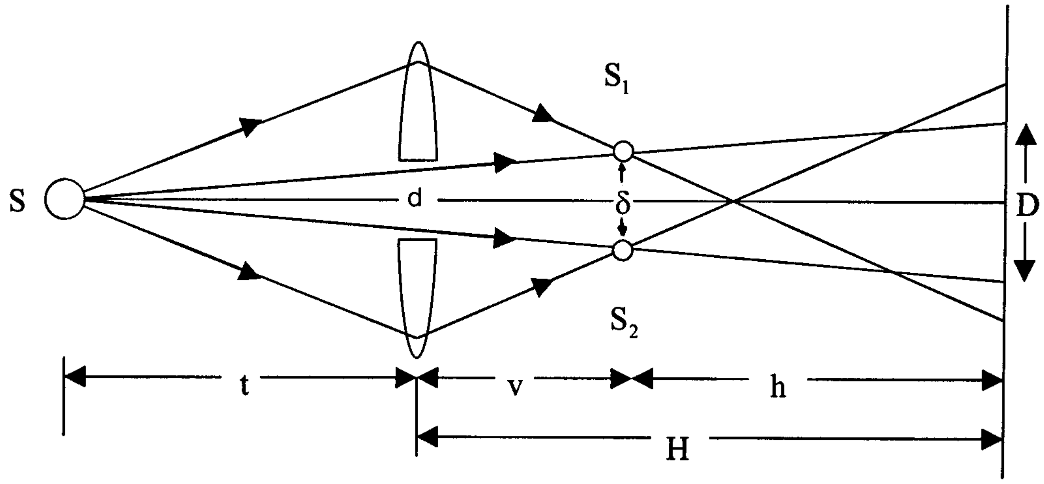
$$\begin{aligned}\Delta U_1 &= mc_V\Delta T\\ &= 4(0.75)(49.5)\\ &= 148 \text{ แคลอรี}\end{aligned}$$

ซึ่งความร้อนปริมาณนี้ ก๊าซในทรงกระบอกทางซ้ายได้รับจากแหล่งความร้อนทางด้านขวา

โจทย์ความร้อนข้อนี้ ใช้ความรู้ด้านพลศาสตร์ความร้อน นั่นหมายความว่านักเรียนต้องรู้กฎข้อหนึ่งของความร้อน รู้จักการหางาน หาพลังงานภายใน รวมทั้งต้องรู้กฎของก๊าซในสถานะการณ์ต่างๆ สิ่งเหล่านี้มีในหลักสูตร แต่โจทย์คำนวณในที่นี้ซับซ้อนกว่า เพราะเป็นการพิจารณาสองระบบควบคู่กันไป จึงเป็นโจทย์ที่ดี ที่สามารถจำแนกเด็กเก่ง เด็กอ่อนได้ เพราะสามารถเจาะลึกความเข้าใจในประเด็นต่างๆได้ดี

ปัญหาข้อที่ 3

เลนส์นูนมีความยาวโฟกัส f ถูกตัดกลางแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน(ดังรูปที่ 6.3) และถูกแยกห่างจากกันเป็นระยะทาง d ถ้าเรานำแหล่งกำเนิดแสงสีเดียวมาวางไว้ห่างจากเลนส์เป็นระยะทาง $t(t > f)$ แสงที่ผ่านเลนส์ทั้งสองส่วนจะแทรกสอดกันบนฉากซึ่งอยู่ห่างจากเลนส์เป็นระยะทาง H จงคำนวณหาจำนวนแถบของการแทรกสอดที่ปรากฏบนฉาก



รูปที่ 6.3

โจทย์ข้อนี้เป็นการประยุกต์แสงเชิงเรขาคณิตและแสงเชิงกายภาพในข้อเดียวกัน นั่นคือเราต้องใช้แสงเชิงเรขาคณิตในการคำนวณหาตำแหน่งของภาพ และแสงจากต้นกำเนิดแสงทั้ง 2 ต้นกำเนิดที่ได้ก็จะแทรกสอดต่อไป

ถ้าเราให้ h เป็นระยะทางที่วัดจากภาพ S_1 และ S_2 ของ S ไปยังฉาก จากสูตรของเลนส์นูนเราทราบว่า

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{u} \qquad (1)$$

ในที่นี้ f คือระยะโฟกัส, v คือระยะภาพ ส่วน u คือระยะวัตถุ $= t$

จากสมการ (1) เราจะได้

$$v = \frac{tf}{t-f} \qquad (2)$$

จากรูปที่ 6.3 ถ้าเราให้ δ เป็นระยะห่างระหว่าง S_1 และ S_2 จากอัตราส่วนของด้านของสามเหลี่ยมคล้าย เราจะได้

$$\frac{\delta}{d} = \frac{t+v}{t}$$

หลังจากที่แทนค่า v ในสมการ (2) ลงไป เราจะได้

$$\delta = \frac{dt}{t-f} \qquad (3)$$

จากรูป 6.3 แสงจากต้นกำเนิด S_1 และ S_2 เป็นแสงอาพันธ์ ดังนั้นจึงสามารถทำให้เกิดการแทรกสอดบนฉาก ซึ่งเราจะเห็นแถบการแทรกสอดปรากฏอยู่ในบริเวณที่กว้าง D จากรูปที่ 6.3 จะเห็นได้ว่า $h = H - v$ ดังนั้น ถ้าเราแทนค่า v จากสมการ (2) ลงไป จะได้

$$h = H - \frac{tf}{t-f} \qquad (4)$$

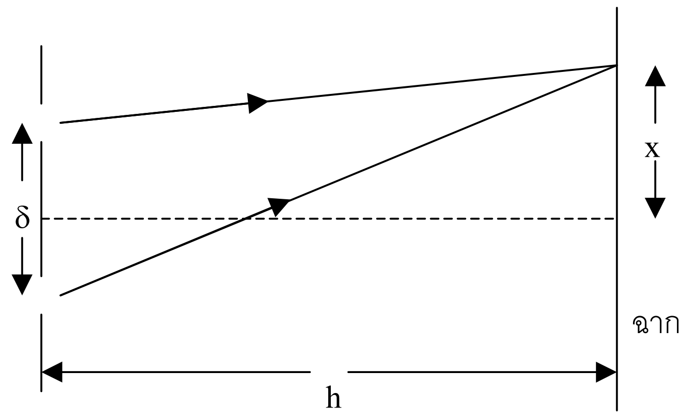
เงื่อนไขที่ทำให้เกิดการแทรกสอดเป็นแถบสว่างบนฉาก ก็คือผลต่างของระยะทางแสงเดินทางก่อนถึงตำแหน่งที่เกิดการแทรกสอดบนฉาก จะต้องมีค่าเท่ากับ $n\lambda, n = 0,1,2,...$

ดังนั้น สถานการณ์จึงคล้ายกับการทดลองของ Young ที่ใช้สลิตคู่ ซึ่งสลิตคู่นี้อยู่ห่างกัน δ ดังนั้น ถ้ามุมเบี่ยงเบน $= \alpha$ ซึ่งเป็นมุมเล็ก

เราได้ $\delta \sin\alpha = n\lambda$

หรือ $\delta\alpha = n\lambda$, $\sin\alpha = \alpha$

$$= \frac{x}{h}$$



รูปที่ 6.4

$$\therefore \frac{\delta\, x}{h} = n\lambda$$

$$\therefore \frac{\delta \Delta x}{h} = \lambda \Delta n \tag{5}$$

เมื่อ $\Delta n = 1$, Δn คือระยะระหว่างริ้ว

$$\therefore \Delta x = \frac{\lambda\, h}{\delta}$$

โดยการแทนค่า δ จากสมการ (3) จะได้

$$\Delta x = \lambda\, h \frac{t - f}{dt} \tag{6}$$

แทนค่า h จากสมการ (4) ลงไปในสมการ (6) จะได้

$$\Delta x = \lambda \frac{H(t - f) - tf}{dt}$$

เพราะฉะนั้นจำนวนริ้วของแถบสว่างที่ปรากฏบนฉากในบริเวณ D คือ $\frac{D}{\Delta x}$

จากรูปจะเห็นได้ว่า $\frac{D}{t + H} = \frac{d}{t}$

เพราะฉะนั้นเราจะเห็นจำนวนริ้วสว่างทั้งหมด $= \frac{d(t + H)}{t} \frac{dt}{\lambda[H(t - f) - tf]}$

$= \frac{d^2 (t + H)}{\lambda[H(t - f) - tf]}$ ริ้ว

โจทย์นี้ สังเคราะห์ปัญหาแสงเรขาคณิต กับแสงกายภาพในข้อเดียวกัน

ในขั้นแรก นักเรียนต้องหาตำแหน่งของภาพ S_1 และ S_2 โดยการใช้สูตรของเลนส์บาง ซึ่งมีในหลักสูตร ทำให้รู้ระยะทาง v และ h

การรู้ระยะห่างระหว่าง S_1 กับ S_2 ก็เสมือนกับการรู้ระยะห่างระหว่างสลิตคู่ในการทดลองของ Young ซึ่งก็มีในหลักสูตรเช่นกัน

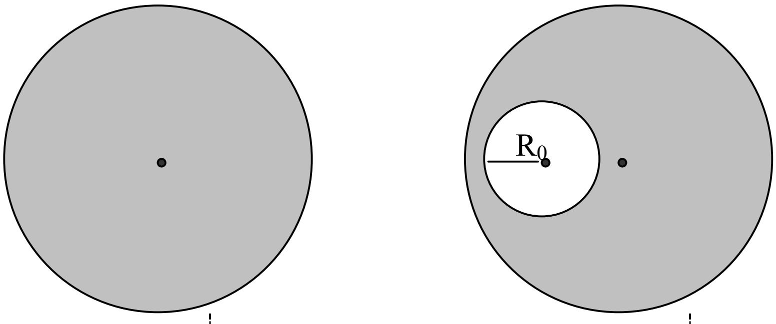
ในการหาขนาดของระยะห่าง S_1 กับ S_2 นั้น นักเรียนต้องใช้ความรู้เรขาคณิตของสามเหลี่ยมคล้าย และในการหาบริเวณที่เกิดการแทรกสอดนั้น นักเรียนต้องเขียนทางเดินของแสงเป็น

โจทย์ข้อนี้จึงแยบยล และต้องอาศัยความรู้ฟิสิกส์เรื่องแสงทั้งสองแง่มุม เนื่องจากคำตอบมีหลายขั้นตอน โจทย์จึงสามารถจำแนกความสามารถของเด็กเก่ง และเด็กอ่อนได้

ปฏิบัติ

นักเรียนแต่ละคนได้รับทรงกระบอกสองทรงกระบอก ซึ่งมีขนาดเดียวกัน และทำด้วยวัสดุชนิดเดียวกัน ทรงกระบอกแรกตัน แต่ทรงกระบอกที่สองกลวง โดยส่วนที่กลวงนั้นก็มีรูปทรงเป็นทรงกระบอกด้วย ให้แกนของส่วนที่ตัน และส่วนที่กลวงนั้นมิได้ซ้อนทับกัน แต่ก็ขนานกัน ทรงกระบอกที่สองนี้มีฝาบางๆที่ทำด้วยวัสดุเดียวกับเนื้อทรงกระบอกปิดที่ปลายทั้งสองข้างของทรงกระบอก

จงหาความหนาแน่นของวัตถุที่ใช้ทำทรงกระบอก และตำแหน่งแกนของส่วนที่กลวงในทรงกระบอกที่สอง



รูปที่ 6.5

ให้ ρ เป็นความหนาแน่นของวัสดุที่ใช้ในการทำทรงกระบอก

m_1 คือมวลของทรงกระบอกแรก

m_2 คือมวลของทรงกระบอกที่สอง

R คือรัศมีของทรงกระบอกทั้งสอง

และ L คือความยาวของทรงกระบอก

$\because$ ปริมาตรของทรงกระบอกตัน $= \pi R^2 L$

ความหนาแน่น ρ $= \dfrac{\text{มวลทรงกระบอก}}{\text{ปริมาตรทรงกระบอก}} = \dfrac{m_1}{\pi R^2 L}$

ซึ่งถ้านักเรียนวัดขนาดของทรงกระบอก และชั่งน้ำหนัก นักเรียนก็สามารถรู้ความหนาแน่น ρ ได้

เพราะเหตุว่า ทรงกระบอกทั้งสองทำด้วยวัสดุเดียวกับทรงกระบอกแรก และเมื่อทรงกระบอกสองมีมวล m_2 ดังนั้นปริมาตรส่วนที่ตันของทรงกระบอกสอง $= \dfrac{m_2}{\rho}$

$$= \frac{m_2}{m_1}\pi R^2 L$$

แต่เมื่อทรงกระบอกสองที่มีปริมาตรทั้งหมด $= \pi R^2 L$

ดังนั้นเราก็จะเห็นได้ว่า ปริมาตรของทรงกระบอกส่วนที่กลวง $= \pi R^2 L - \pi R^2 L \frac{m_2}{m_1}$

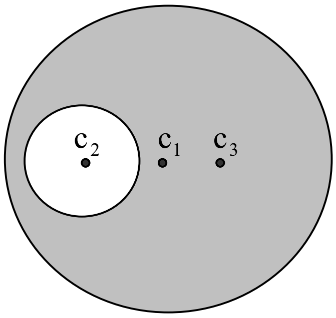
$$= \pi R^2 L\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)$$

ถ้าเราให้ R_0 คือรัศมีของทรงกระบอกส่วนที่กลวง และเมื่อทรงกระบอกส่วนที่กลวงนี้ยาว L

ดังนั้น
$$\pi R_0^2 L = \pi R^2 L\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)$$

$$R_0 = R\sqrt{1 - \frac{m_2}{m_1}}$$

ดังนั้นถ้าเรารู้ m_1, m_2 และ R ซึ่งชั่งได้ และวัดได้ เราก็จะรู้รัศมีของช่องว่างส่วนที่กลวงนั้น ในการคำนวณหาตำแหน่งของแกนส่วนที่กลวง



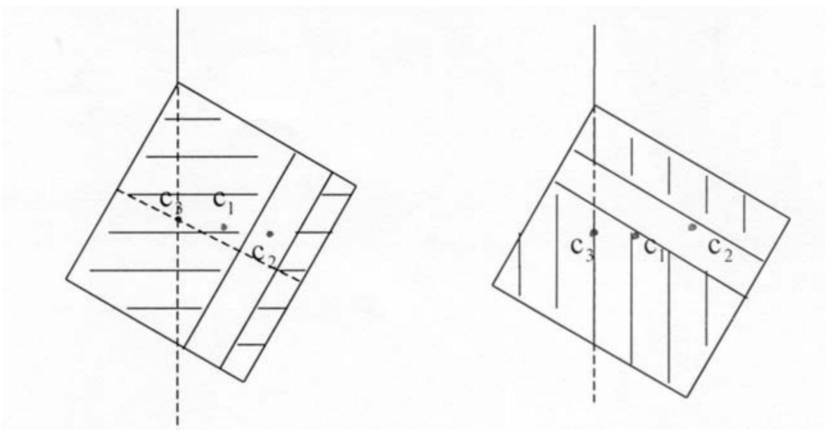
รูปที่ 6.6

ให้ c_1 เป็นจุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกแรก

c_2 เป็นจุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกกลวง

และ c_3 เป็นจุดศูนย์กลางมวลของทรงกระบอกสอง

ซึ่งสามารถหาได้โดยการแขวนทรงกระบอกสองด้วยเชือกที่ขอบ ณ ตำแหน่งต่างๆ ดังรูปที่ 6.7



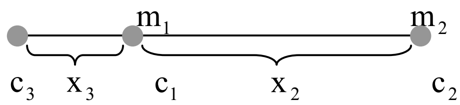
รูปที่ 6.7

ขณะอยู่ในสมดุล จุดศูนย์กลางมวล c_3 จะอยู่ในแนวดิ่ง ดังนั้นถ้าเราลากเส้น แสดงตำแหน่งของเชือกในหลายๆกรณี จุดตัดของแนวเส้นเชือกจะบอกตำแหน่ง c_3

จากนั้นใช้หลักของโมเมนต์ เพื่อคำนวณหาตำแหน่งที่ c_3 อยู่ห่างจาก c_1 โดยการพิจารณาโมเมนต์รอบ c_1 เราจะได้ว่า

ถ้า x_2 คือระยะทางที่ c_2 อยู่ห่างจาก c_1

และ x_3 คือระยะทางที่ c_3 อยู่ห่างจาก c_1



$$(m_1 - m_2)x_3 = m_2 x_2$$

$$x_3 = \frac{m_2 x_2}{(m_1 - m_2)}$$

$\because$ เรารู้ระยะทาง x_2, m_1 และ m_2 ดังนั้นเราก็สามารถหา x_3 ได้

ในการทำโจทย์ปฏิบัติการข้อนี้ นักเรียนต้องรู้เรื่องความหนาแน่น และจุดศูนย์กลางมวล รวมทั้งวิธีคำนวณหาจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุที่มีองค์ประกอบหลายชิ้น ซึ่งหัวข้อเหล่านี้มีปรากฏในหลักสูตร

โจทย์ข้อนี้ก็เช่นเดียวกับโจทย์ปฏิบัติอื่นๆ มีความแยบยลอยู่ นักเรียนต้องออกแบบการทดลองเอง สร้างทฤษฎีเอง แล้วทดลองเพื่อจะให้ได้มาซึ่งคำตอบโดยใช้อุปกรณ์ที่กำหนดให้

โจทย์ลักษณะนี้จึงสนับสนุน และส่งเสริมให้นักเรียนมีความคิดริเริ่มมาก

วิธีที่ปรากฏในที่นี้เป็นเพียงวิธีเดียว ข้อสอบนี้ จึงเป็นข้อสอบที่ดี

โจทย์ฟิสิกส์โอลิมปิกครั้งที่ 7

พ.ศ. 2517

ประเทศโปแลนด์

ทฤษฎี

ปัญหาข้อที่ 1

ไฮโดรเจนอะตอมในสถานะพื้นฐานพุ่งชนไฮโดรเจนอะตอมอีกตัวหนึ่งซึ่งหยุดนิ่งและอยู่ในสถานะพื้นฐานเช่นกัน จงคำนวณหา

ก. ความเร็วน้อยที่สุดของไฮโดรเจนอะตอมตัวแรก เมื่อการชนที่เกิดขึ้นเป็นการชนแบบไม่ยืดหยุ่น

ข. ถ้าความเร็วของไฮโดรเจนอะตอมตัวแรกมากกว่าความเร็วที่น้อยที่สุด โฟตอนจะถูกปลดปล่อยออกมา และแสงที่ถูกปลดปล่อยออกมาจะถูกสังเกตตามทิศเดียวกับความเร็วเริ่มต้นของไฮโดรเจนอะตอมตัวแรกและสวนทิศความเร็วของไฮโดรเจนอะตอมตัวแรก จงหาความแตกต่างของความถี่แสงจากความถี่ปกติ

<u>กำหนดให้</u> มวลของไฮโดรเจนอะตอมเท่ากับ 1.67×10^{-27} ก.ก. พลังงานไอออนไนซ์ของไฮโดรเจนอะตอม, $E_0 = 13.6 \text{ eV} = 2.18\times10^{-18}$ จูล

ในการทำโจทย์ฟิสิกส์ยุคใหม่ข้อนี้ นักเรียนต้องใช้ความรู้เบื้องต้นของทฤษฎีควอนตัม และกลศาสตร์คลาสซิค จากความรู้พื้นฐานเรื่องระดับพลังงานของไฮโดรเจนอะตอม เรารู้ว่าความแตกต่างระหว่างพลังงานของไฮโดรเจนอะตอมที่สถานะพื้นฐานกับสถานะที่ n คือ

$$E = E_0\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{1^2}\right)$$

และพลังงานไอออนไนซ์ คือพลังงานที่ใช้ในการดึงอิเล็กตรอนวงนอกสุดให้หลุดออกจากอะตอมเป็นอิเล็กตรอนอิสระ นั่นคือ เมื่อเราแทนค่า $n=\infty$ ลงไปในสมการข้างต้น เราจะได้

$$E_0 = -2.18\times10^{-18} \text{ จูล}$$

พลังงานของสถานะกระตุ้นที่หนึ่ง E_1 คล้องจองกับสถานะกระตุ้นที่ $n=2$ นั่นคือ

$$E_1 = E_0\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{1^2}\right) = -1.16\times10^{-18} \text{ จูล}$$

จุดประสงค์ของคำถามแรก คือต้องการหาความเร็วที่น้อยที่สุดที่ทำให้เกิดการชนระหว่างไฮโดรเจนอะตอมสองตัวแบบไม่ยืดหยุ่น ความเร็วน้อยที่สุดที่ว่านี้จะเป็นความเร็วของไฮโดรเจนอะตอมตัวแรกที่พุ่งชนไฮโดรเจนอะตอมอีกตัวที่หยุดนิ่ง แล้วกระตุ้นทำให้ไฮโดรเจนอะตอมตัวที่ถูกชนถูกกระตุ้นจากสถานะพื้นฐานไปสู่พลังงานกระตุ้นระดับที่หนึ่ง

ในแง่ของทฤษฎีควอนตัม พลังงานสูญเสียที่มากที่สุดที่ว่านี้ คือพลังงานกระตุ้นระดับที่หนึ่งของไฮโดรเจนอะตอม ซึ่งก็คือ $E_1 = 1.16 \times 10^{-18}$ จูล

ถ้าเราให้ V_{min} เป็นความเร็วน้อยที่สุดที่เป็นไปได้ของไฮโดรเจนอะตอมตัวที่หนึ่ง และเพราะการชนเป็นแบบไม่ยืดหยุ่น ดังนั้นพลังงานจลน์ที่เสียมากที่สุดในระหว่างการชนจะเกิดขึ้นเมื่อไฮโดรเจนอะตอมเคลื่อนที่ติดกันไป จากหลักความถาวรของโมเมนตัม

โมเมนตัมของระบบก่อนชน = โมเมนตัมของระบบหลังชน

$$mV_{min} = (m + m)V$$

ในที่นี้ V คือความเร็วของไฮโดรเจนอะตอมหลังชน นั่นคือ จะได้

$$V = \frac{V_{min}}{2}$$

เพราะฉะนั้นพลังงานจลน์สูญเสียที่เกิดขึ้นจากการชน จะมีค่าเท่ากับผลต่างของพลังงานจลน์ของไฮโดรเจนตัวแรกก่อนและหลังชน

$$E_{LOSS} = \frac{1}{2}(2m)V^2 - \frac{1}{2}mV_{min}^2 = \frac{1}{2}m\left(2\frac{V_{min}^2}{4} - V_{min}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mV_{min}^2\right)$$

$$\therefore E_{LOSS} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mV_{min}^2\right) = 1.16 \times 10^{-18} \text{ จูล} \qquad (4)$$

และเมื่อแทนค่า $m = 1.67 \times 10^{-27}$ ก.ก. ในสมการ (4)

จะได้ $V_{min} = 3.13 \times 10^4$ เมตร/วินาที

สำหรับคำถามที่สองที่ว่าจะสังเกตเห็นความถี่ของแสงเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมอย่างไร ถ้าแสงที่ถูกปลดปล่อยออกมาเคลื่อนที่ในทิศเดียว หรือสวนทิศ กับการเคลื่อนที่ของไฮโดรเจนอะตอม แนวคิดทางฟิสิกส์สำหรับการตอบคำถามนี้เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ดอปเปลอร์ของแสง กล่าวคือ ความถี่ของแสงที่ปรากฏต่อผู้สังเกตจะเปลี่ยนไปจากเดิมขึ้นกับว่าแหล่งกำเนิดแสงมีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์กับผู้สังเกตุอย่างไร

ถ้าแหล่งกำเนิดแสง(ในปัญหาของเรา คือไฮโดรเจนอะตอมซึ่งปลดปล่อยแสงออกมา)มีทิศการเคลื่อนที่เดียวกับแสงที่เปล่งออกมา หน้าคลื่นจะถูกอัดทำให้ความถี่เพิ่มขึ้น แต่ถ้าทิศทางของแสงกับแหล่งกำเนิดแสงเคลื่อนที่แยกออกจากกันในทิศตรงกันข้าม หน้าคลื่นของแสงจะขยายออกทำให้ความถี่น้อยลง ความถี่ของแสงที่ถูกเปลี่ยนไปจากเดิมเป็นไปตามสมการ

$$\nu = \nu_0\left(1 \pm \frac{V_{min}}{c}\right) \qquad (5)$$

ในที่นี้ ν คือความถี่แสงที่ปรากฏต่อผู้สังเกต, ν_0 คือความถี่ของแสงเมื่อแหล่งกำเนิดแสงอยู่นิ่ง ส่วน V_{min} และ c คือความเร็วของแหล่งกำเนิดแสงและความเร็วแสงตามลำดับ

จากสมการ (5) เราจะได้การเปลี่ยนแปลงของความถี่แสงที่เกิดจากปรากฏการณ์ ดอปเปลอร์ ว่า

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \pm\frac{V_{min}}{c} = \pm\frac{3.13\times10^4}{3\times10^8} = \pm1.04\times10^{-4}$$

นั่นคือถ้าแสงที่ถูกปลดปล่อยออกมามีทิศเดียวกับทิศการเคลื่อนที่ของไฮโดรเจนอะตอม ความถี่จะเพิ่มขึ้นจากเดิม 1.04×10^{-2} % และความถี่จะลดลงจากเดิม 1.04×10^{-2} %เมื่อแสงที่ถูกปลดปล่อยออกมาสวนทิศกับการเคลื่อนที่ของไฮโดรเจนอะตอม

โจทย์ฟิสิกส์ข้อนี้ เป็นคำถามที่ผสมผสานความรู้ฟิสิกส์อะตอม กลศาสตร์ และคลื่นในข้อเดียวกัน

ในการทำโจทย์นักเรียนจะต้องมีความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างของอะตอม คือรู้ระดับพลังงานของไฮโดรเจนอะตอม (ซึ่งมีปรากฏในหลักสูตร) และรู้ว่าในการชนแบบไม่ยืดหยุ่นเลยนั้นอะตอมสองตัวจะรวมกันเป็นหนึ่งเดียว ทำให้พลังงานส่วนหนึ่งหายไป ซึ่งพลังงานนี้จะถูกนำไปใช้ในการกระตุ้นให้อิเล็กตรอนเคลื่อนย้ายจากสถานะพื้นฐานไปสู่สถานะกระตุ้น ดังนั้นมันจะปลดปล่อยแสงออกมา และในขณะเดียวกันมันก็มีความเร็วด้วย เพราะเหตุว่าความเร็วของมันน้อยกว่าความเร็วแสงมาก ดังนั้นความถี่มันจะเปลี่ยนไป ซึ่งก็คือปรากฏการณ์ดอปเปลอร์ที่มีในหลักสูตรเช่นกัน

โจทย์ข้อนี้จึงผสมผสานวิทยาการฟิสิกส์หลายๆแขนงเข้าด้วยกัน เป็นโจทย์ที่น่าสนใจ ที่สามารถกระตุ้นนักเรียนให้ค้นคว้าศึกษาต่อ ให้รู้จักใช้หลักการฟิสิกส์ง่ายๆ อธิบายปรากฏการณ์ที่สลับซับซ้อนได้ “ถูกต้อง” ระดับหนึ่ง

จึงเป็นโจทย์ที่ดี ที่สามารถแยกแยะความสามารถของนักเรียนได้

ปัญหาข้อที่ 2

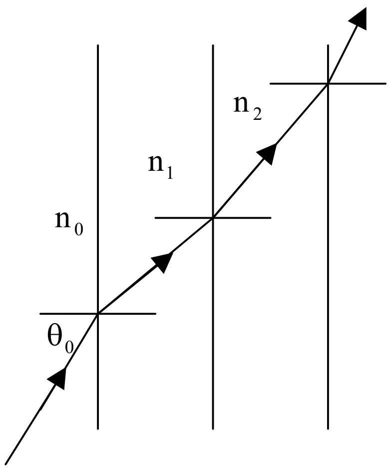
แท่งแก้วทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าหนา d และมีด้านหนึ่งวางตัวตามแนวแกน x ถ้าดัชนีหักเห n ที่ตำแหน่งต่างๆภายในแท่งแก้วเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับ x ตามสมการ

$$n_x = \frac{n_0}{1-\frac{x}{r}}$$

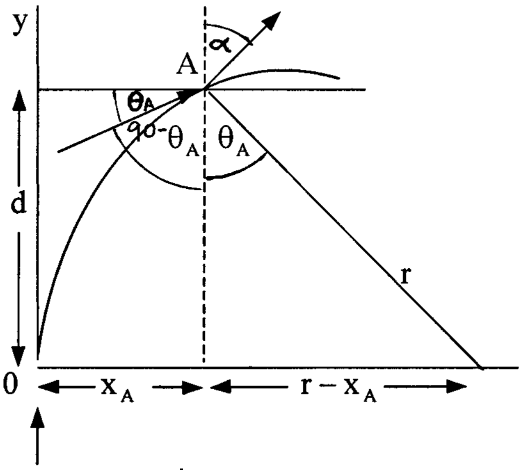
ในที่นี้ n_0 คือดัชนีหักเหที่ตำแหน่ง $x = 0$ (ดูรูปที่ 7.1) r เป็นค่าคงที่ และ x เป็นตำแหน่งใดๆภายในแท่งแก้วที่วัดตามแกน x

รูปที่ 7.1 แสดงรังสีจากอากาศพุ่งเข้าแท่งแก้วที่จุด O แล้วหักเหภายในแก้วก่อนที่จะออกจากแท่งแก้วที่จุด A ทำมุม α กับแนวดิ่ง จงหาดัชนีหักเหของแท่งแก้วที่จุด A และความหนาของแท่งแก้วดังกล่าว

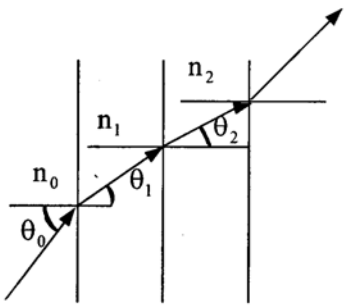
<u>กำหนด</u> $n_0 = 1.2, r = 13$ ซ.ม., $\alpha = 30^\circ$



รูปที่ 7.1



รูปที่ 7.2



รูปที่ 7.3

โจทย์แสงเรขาคณิตข้อนี้ต้องการหาดัชนีหักเหแก้วที่ตำแหน่ง A ซึ่งอยู่บนผิวแก้ว และความหนาของแท่งแก้ว ความซับซ้อนของโจทย์ข้อนี้อยู่ที่ดัชนีหักเห n ของแท่งแก้วมีค่าไม่สม่ำเสมอแต่เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง x เราสามารถใช้จินตนาการว่าแสงได้หักเหอย่างต่อเนื่องภายในแท่งแก้วก่อนที่จะหักเหผ่านแท่งแก้วสู่อากาศต่อไป

ความงามของโจทย์ข้อนี้คือการวิเคราะห์ปัญหา โดยการประยุกต์กฎของสเนลที่ใช้บรรยายการหักเหของแสงในตัวกลางที่มีดัชนีหักเหต่างกัน เราสามารถพิจารณาแท่งแก้วว่าประกอบด้วยตัวกลางหลายชนิดเป็นชั้นซ้อนกัน การหักเหภายในแท่งแก้วจึงเปรียบเสมือนเป็นการหักเหจากตัวกลางหนึ่งไปสู่อีกตัวกลางหนึ่งเป็นชั้นๆอย่างต่อเนื่อง

เพื่อความง่ายเราจะพิจารณาจากรูปที่ 7.3 สมมุติว่าเนื้อแก้วประกอบด้วยแก้วสองชั้น โดยที่แสงตกกระทบแท่งแก้วจากอากาศด้วยมุมตกกระทบ θ_0 และหักเหทำมุม θ ตามกฎของสเนลเราจะได้

$$n_0 \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1$$

พิจารณาการหักเหจากแก้วชั้นที่1 ซึ่งมีดัชนีหักเห n_1 สู่แก้วชั้นที่2 ซึ่งมีดัชนีหักเห n_2

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

ดังนั้นแสงมีการหักเหอย่างต่อเนื่องภายในเนื้อแก้ว โดยการใช้สูตรในทำนองเดียวกัน เราจะได้

$$n_0 \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 = ... = n_x \sin\theta_x \qquad (1)$$

เพราะฉะนั้น จะเห็นได้ว่าในตำแหน่งที่ x

$$n_0 \sin\theta_0 = n_x \sin\theta_x \qquad (2)$$

เพราะที่ O $\theta_0 = 90$ องศา ดังนั้นจาก (2)

$$n_0 = n_x \sin\theta_x$$

นั่นคือ

$$\sin\theta_x = \frac{n_0}{n_x} \qquad (3)$$

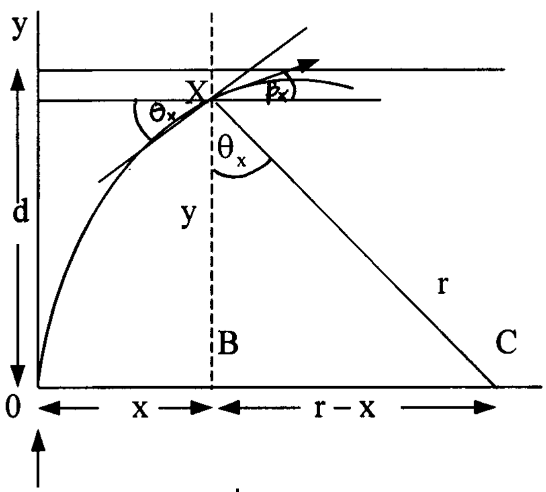
แต่โจทย์กำหนดว่า

$$n_x = \frac{n_0}{1-\frac{x}{r}} \qquad (4)$$

$\therefore$ $$\sin\theta_x = \frac{n_0}{n_x} = \frac{r-x}{r}$$

หรือ $$r - x = r\sin\theta_x \qquad (5)$$

จากรูปที่ 7.4



รูปที่ 7.4

จาก ΔBCX , $\because r - x = BC$, $XC = r$, $\sin B\hat{X}C = \frac{r-x}{r} = \sin\theta_x$

นั่นคือ $B\hat{X}C = \theta_x$ และ $B\hat{C}X = 90 - \theta_x$

ดังนั้นจาก Δ มุมฉาก BCX , เราได้ $r^2 = y^2 + (r_0 - x)^2$ นี้คือสมการวงกลมที่มีรัศมี $= r$ และจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(r,0)$

พิจารณาการหักเหที่จุด A จะเห็นได้ว่ามุมตกกระทบคือ $90 - \theta_A$ และมุมหักเหคือ α นั่นคือจากกฎของสเนล เราจะได้

$$n_A \sin(90 - \theta_A) = 1 \times \sin\alpha$$

$$\therefore \quad n_A \cos\theta_A = \sin\alpha \qquad (6)$$

แต่จากสมการ (3) เรารู้ว่า

$$\sin\theta_A = \frac{n_0}{n_A}$$

ดังนั้น $\cos\theta_A = \sqrt{1 - \sin^2\theta_A} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_A}\right)^2}$ เมื่อแทนค่า $\cos\theta_A$ นี้ลงในสมการ (6) เราจะได้

$$n_A \sqrt{1 - \left(\frac{n_0}{n_A}\right)^2} = \sin\alpha \qquad (7)$$

ยกกำลังสองสมการ (7) ทั้งสองข้าง แล้วจัดรูปใหม่ จะได้

$$n_A = \sqrt{n_0^2 + \sin^2\alpha} \qquad (8)$$

โจทย์กำหนดให้ว่า $n_0 = 1.2, \alpha = 30^\circ$ จากสมการ (8) เราจะได้ค่าดัชนีหักเหที่ A

$$n_A = 1.3$$

จากผลที่ได้นี้ เราสามารถนำไปใช้ในการคำนวณหาความหนาของแท่งแก้วได้

จากรูปที่ 7.4

$$\because r - x_A = r\sin\theta_A$$

$$\frac{r - x_A}{r} = \sin\theta_A$$

$$= \frac{n_0}{n_A}$$

$$\therefore \quad x_A = r\left[1 - \frac{n_0}{n_A}\right]$$

หลังจากแทนค่า $r = 13$ ซ.ม., $n_0 = 12$, $n_A = 1.3$ เราจะได้ $x_A = 1$ ซ.ม. จากรูปที่ 7.4 จะเห็นได้ว่า

$$d^2 = r^2 - (r - x_A)^2$$

$$\therefore \quad d = \sqrt{13^2 - (13-1)^2}$$

$$= 5 \text{ ซ.ม.}$$

นั่นคือ แท่งแก้วหนา 5 เซนติเมตร

กฎการหักเห หรือสูตรของสเนลมีในหลักสูตร แต่การหักเหลักษณะต่อเนื่องเช่นนี้อาจจะยากเกินความสามารถของนักเรียนที่จะวิเคราะห์ เพราะนักเรียนต้องแบ่งแก้วออกเป็นชั้นๆ แล้ววิเคราะห์ทางเดินของแสงในแก้ว ภายใต้เงื่อนไข $n_i \sin\theta_i$ มีค่าคงที่
เมื่อ n_i คือดรรชนีหักเหของแก้วที่ชั้น i และ θ_i คือมุมตกกระทบของแสงที่ชั้น i

อนึ่งความรู้ด้านเรขาคณิตวิเคราะห์ก็เป็นเรื่องหนึ่งที่นักเรียนต้องรู้ว่า สมการวงกลมเป็นอย่างไร

โจทย์ที่ค่อนข้างยากเช่นนี้ ทำให้การจำแนกความสามารถของนักเรียนคงทำได้ไม่ดีนัก

ปัญหาข้อที่ 3

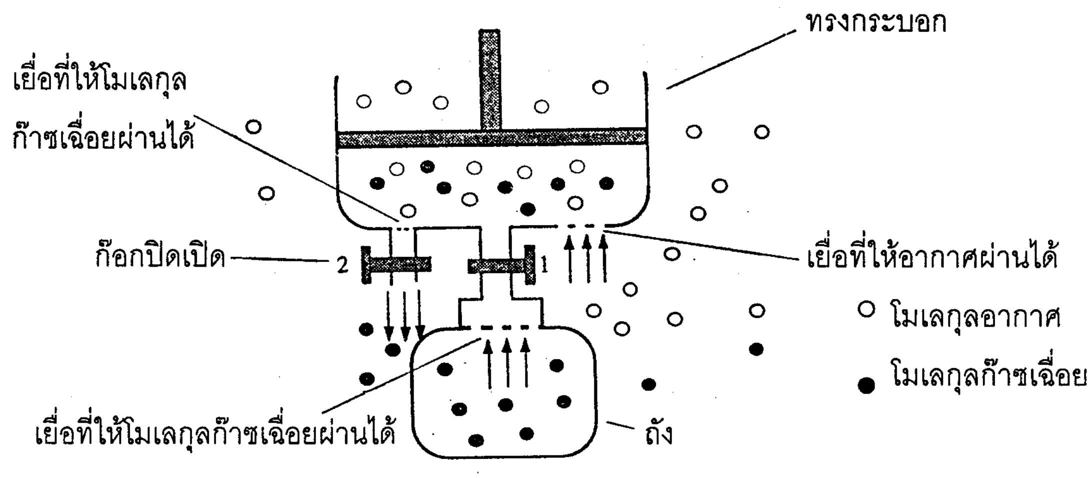
การอัปปางของเรือสำรวจได้ทำให้คณะนักวิทยาศาสตร์ต้องตกค้างบนเกาะร้าง นักวิทยาศาสตร์กลุ่มนี้ไม่มีอุปกรณ์ที่จะให้พลังงานใดๆ นอกจากพลังงานที่จะได้จากก๊าซเฉื่อยที่บรรจุอยู่ในถัง ซึ่งก๊าซเฉื่อยนี้หนักกว่าอากาศ และมีความดันรวมทั้งอุณหภูมิเท่ากับความดัน และอุณหภูมิของบรรยากาศแวดล้อมภายนอก นอกจากนี้คณะนักวิทยาศาสตร์กลุ่มนี้ยังมีเยื่อสองชนิด เยื่อชนิดหนึ่งยอมให้ก๊าซเฉื่อยผ่านได้ ส่วนอีกชนิดหนึ่งยอมให้เฉพาะแต่อากาศเท่านั้นผ่านได้

จงเสนอแนวคิดในการออกแบบเครื่องยนตร์ ที่สามารถทำงานให้คณะนักวิทยาศาสตร์ที่ตกอยู่บนเกาะนี้ จากปัจจัยที่มีอยู่เหล่านี้

คำถามข้อนี้ต้องการให้นักเรียนแสดงความคิดริเริ่มในการออกแบบเครื่องจักรความร้อนจากสิ่งของที่มีอยู่ อันได้แก่ ถังที่บรรจุด้วยก๊าซเฉื่อย ตลอดจนเยื่อ 2 ชนิด ซึ่งชนิดหนึ่งยอมให้เฉพาะแต่ก๊าซเฉื่อยเท่านั้นผ่านไปได้ ส่วนอีกชนิดยอมให้อากาศผ่านได้เพียงอย่างเดียว

ปัญหาก็คือเราจะประยุกต์ถังก๊าซเฉื่อยกับเยื่อที่ให้มา เพื่อออกแบบเครื่องจักรความร้อนที่ทำงานให้เราได้อย่างไร โดยทั่วไปแล้วฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้องกับปัญหานี้ก็คือ ฟิสิกส์ของพลศาสตร์ของความร้อน และฟิสิกส์ของก๊าซ สำหรับก๊าซเราทราบดีว่า ความดันลัพธ์ของก๊าซสองชนิดที่ไม่มีอันตรกิริยาต่อกันที่อยู่ในภาชนะเดียวกัน จะเท่ากับผลบวกของความดันของก๊าซแต่ละชนิดที่ปริมาตรและอุณหภูมิเดียวกัน ปัญหาที่ต้องตระหนักอีกประการหนึ่งก็คือ เราจะเปลี่ยนความดันของก๊าซในภาชนะเพื่อทำให้ลูกสูบทำงานเป็นวัฏจักรได้อย่างไร

เครื่องจักรความร้อนที่ว่ามีแสดงในรูปที่ 7.5 ข้างล่างนี้ วงกลมดำทึบแทนโมเลกุลของก๊าซเฉื่อย(ซึ่งหนักกว่าอากาศ) และวงกลมขาวแทนโมเลกุลอากาศ เส้นประแสดงเยื่อที่ถูกนำมาปิดที่ก้นกระบอกสูบ และในภาชนะที่บรรจุก๊าซเฉื่อย เยื่อติดที่ก้นกระบอกสูบเป็นเยื่อที่ยอมให้อากาศเท่านั้นผ่าน ส่วนอีกเยื่อหนึ่งให้โมเลกุลก๊าซเฉื่อยผ่าน และเยื่อที่อยู่ภายในถังที่บรรจุก๊าซเฉื่อยเป็นเยื่อที่ยอมให้เฉพาะก๊าซเฉื่อยเท่านั้นผ่าน



รูปที่ 7.5

การทำงานของเครื่องจักร

1. เมื่อปิดก๊อก 2 และเปิดก๊อก 1 ก๊าซเฉื่อยจะไหลจากถังเข้าไปในภาชนะทรงกระบอกจนกระทั่งความดันของก๊าซเฉื่อยภายในทรงกระบอกเท่ากับ 1 บรรยากาศ และนั่นก็หมายความว่าความดันสุทธิ ภายในทรงกระบอกจะเพิ่มขึ้นๆ จนกระทั่งเท่ากับ 2 บรรยากาศ เพราะความดันอากาศในทรงกระบอกเองจะเท่ากับความดันอากาศนอกทรงกระบอกคือเท่ากับ 1 บรรยากาศอยู่แล้ว ดังนั้น เมื่อความดันภายในทรงกระบอกเพิ่มขึ้น ลูกสูบจะเคลื่อนที่ขึ้น ในการเคลื่อนที่ขึ้นนี้ เฉพาะก๊าซเฉื่อยในทรงกระบอกเท่านั้นที่ทำงาน อากาศในทรงกระบอกไม่ทำงาน เพราะมันมีความดันเท่ากับความดันอากาศภายนอก
2. ปิดก๊อก 1 การปิดเป็นการสกัดการไหลของก๊าซเฉื่อยเข้าทรงกระบอก ดังนั้นเมื่อความดันก๊าซเฉื่อยไม่เพิ่ม ลูกสูบก็จะไม่เลื่อนขึ้นอีกต่อไป
3. ขณะที่ก๊อก 1 ปิด เปิดก๊อก 2 เพื่อปล่อยให้ก๊าซเฉื่อยซึมผ่านเยื่อออกสู่อากาศข้างนอก ลูกสูบก็จะเคลื่อนที่ลงมาสู่ตำแหน่งเดิม และเมื่อถึงตำแหน่งที่เคยเริ่มต้น ขณะนี้ภายในทรงกระบอกจะมีแต่อากาศเท่านั้น และไม่มีก๊าซเฉื่อยเลย
4. และนี่ก็คือวัฏจักรการทำงานของเครื่องจักร
   ซึ่งเราจะทำให้เกิดได้อีก โดยการทำขั้นตอน $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ ซ้ำ

ดังนั้นถ้าทรงกระบอก และลูกสูบทำด้วยตัวนำความร้อนที่ดี เหตุการณ์ต่างๆที่เกิดภายในทรงกระบอกจะเป็นการเปลี่ยนแปลงที่ อุณหภูมิคงที่ (isothermal process).

งานที่ทำโดยก๊าซเฉื่อย ในกรณีนี้คือ $W = \int_{V_1}^{V_2} PdV$

สมมุติให้สมการสถานะของก๊าซเฉื่อย คือ $PV = nRT$

ดังนั้น งาน $W = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \frac{V_1}{V_2}$

เมื่อ n คือจำนวนโมลของก๊าซเฉื่อย

T คืออุณหภูมิ และ R คือค่าคงที่ของก๊าซ

V_1 , V_2 คือปริมาตรเริ่มต้น และปริมาตรสุดท้ายของก๊าซ ตามลำดับ

โจทย์การเปลี่ยนแปลงของก๊าซอุดมคติมีในหลักสูตร

แต่โจทย์นี้ยากเพราะนักเรียนต้องออกแบบการทำงานของเครื่องจักรเอง และนักเรียนต้องรู้กฎความดันย่อยของดาลตัน และรู้การคำนวณงาน เมื่อก๊าซเปลี่ยนแปลงแบบ isothermal นักเรียนที่เก่ง อาจมีความคิดสร้างเครื่องจักรความร้อนที่แตกต่างจากที่บรรยายมานี้

ดังนั้น โจทย์ข้อนี้ จึงเป็นโจทย์ที่นักเรียนต้องใช้ความคิดริเริ่มมาก

ปฏิบัติ

กำหนดว่ามีไดโอดชนิดกึ่งตัวนำ (semi-conductor diode) สองตัว และตัวต้านทานอีกหนึ่งตัว ต่อกันเป็นวงจร ถ้าอุปกรณ์ทั้ง 3 ชิ้นนี้อยู่ภายในกล่องดำ ที่มีขั้วต่อสองขั้ว

จงหาความต้านทานของตัวต้านทาน และของไดโอดโดยไม่เปิดกล่อง

นักเรียนทุกคนมี แบตเตอรี่กระแสตรง

แอมมิเตอร์กระแสตรง

และโวลท์มิเตอร์กระแสตรงใช้

วิธีทำ

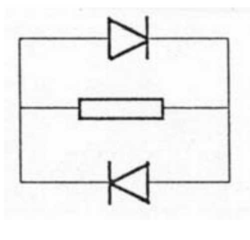
1. ต่อความต่างศักย์กระแสตรงคร่อมขั้วต่อ แล้ววัดกระแสเป็นฟังก์ชันของความต่างศักย์
2. กลับทิศของความต่างศักย์ แล้ววัดกระแสเป็นฟังก์ชันของความต่างศักย์อีก

ผลการทดลอง

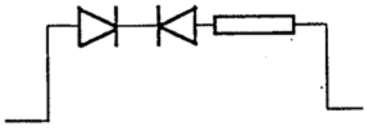
เมื่อนักเรียนกลับขั้วความต่างศักย์ กระแสที่อ่านได้ในทั้งสองกรณีจะไม่เท่ากัน และเมื่อกระแสกับความต่างศักย์มิได้เป็นปฏิภาคโดยตรงกัน ดังนั้นอุปกรณ์ภายในกล่องดำ จึงมิได้เป็นตัวต้านทานแบบโอห์ม นอกจากนี้กราฟของกระแส และความต่างศักย์ก็มิได้สมมาตร

ดังนั้นนักเรียนพอจะสรุปได้ว่า ในกล่องดำนั้นมี ไดโอด 2 ตัว และตัวต้านทาน 1 ตัว ต่อกันอยู่เป็นวงจร

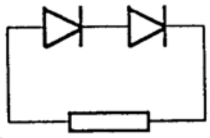
โดยวงจร จะต้องไม่สมมาตร เช่น



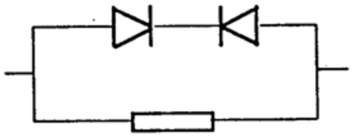
หรือ เช่นนี้



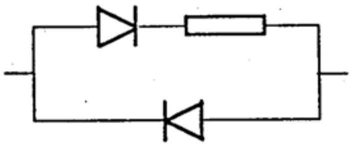
หรือ เช่นนี้



หรือ เช่นนี้



แต่อาจจะเป็น เช่นนี้



ถ้า I_U คือกระแสที่ไหลในวงจรส่วนบน

และ I_L คือกระแสที่ไหลในวงจรส่วนล่าง

ให้ R คือความต้านทานของตัวต้านทาน

และ r คือความต้านทานของไดโอด

ถ้า V_U คือความต่างศักย์คร่อมขั้วต่อ

จากกฎของโอห์ม

$$I_U = \frac{V_U}{(R+r)}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$I_L = \frac{V_L}{r}$$

แต่กระแสที่ junction เท่ากัน นั่นคือ $I_U = I_L$

$$\therefore \quad \frac{V_U}{R+r} = \frac{V_L}{r}$$

$$R = \frac{r(V_U - V_L)}{V_L}$$

ดังนั้น เมื่อเราแทนค่า $r = V_L / I_L$

เราก็จะได้ $$R = \left(\frac{V_U - V_L}{I_L}\right)$$

ถ้านักเรียนวัดค่า V_U, V_L และ I_L ได้

นักเรียนก็จะรู้ R และ r ได้

นักเรียนมักไม่มีประสบการณ์การทำงานด้วยไดโอด เพราะหลักสูตรฟิสิกส์ระดับมัธยมไม่มีเรื่องนี้

ดังนั้นการเดาลักษณะของวงจรว่า องค์ประกอบต่างๆจะถูกนำมาต่อกันอย่างไร จึงเป็นเรื่องยาก

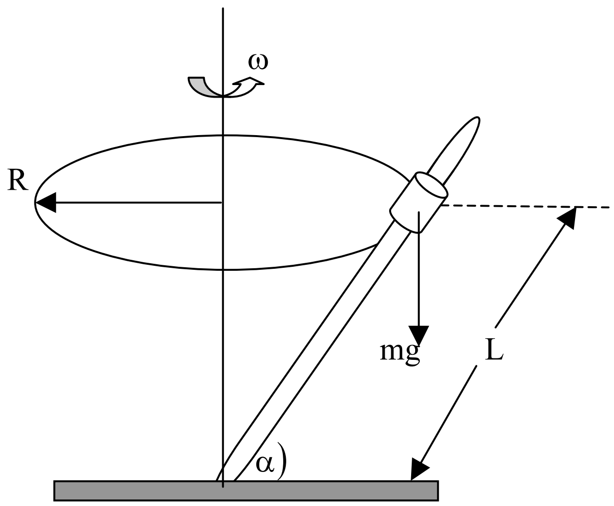
โจทย์ฟิสิกส์โอลิมปิกครั้งที่ 8
พ.ศ. 2518
ประเทศเยอรมันตะวันออก

ทฤษฎี

ปัญหาข้อที่ 1

ไม้แท่งหนึ่งสามารถหมุนรอบแกนในแนวดิ่งด้วยความเร็วเชิงมุม ω โดยที่แกนของไม้เอียงทำมุม α กับแนวราบ (ดังรูปที่ 8.1) ที่ปลายบนของไม้มีวงแหวนมวล m สวมอยู่ วงแหวนสามารถเคลื่อนที่ขึ้นลงตามไม้ได้ ถ้าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างวงแหวน และไม้เท่ากับ $\tan\theta$

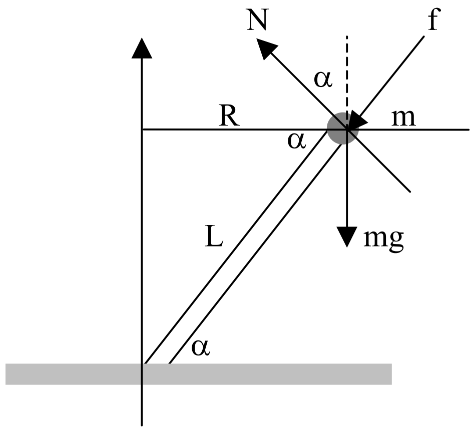
จงคำนวณหาเงื่อนไขที่ทำให้วงแหวนสามารถอยู่ที่ระยะ L ซึ่งวัดจากปลายไม้ที่แตะอยู่กับพื้น ในขณะที่ไม้กำลังหมุนไปด้วยความเร็วเชิงมุม ω



รูปที่ 8.1

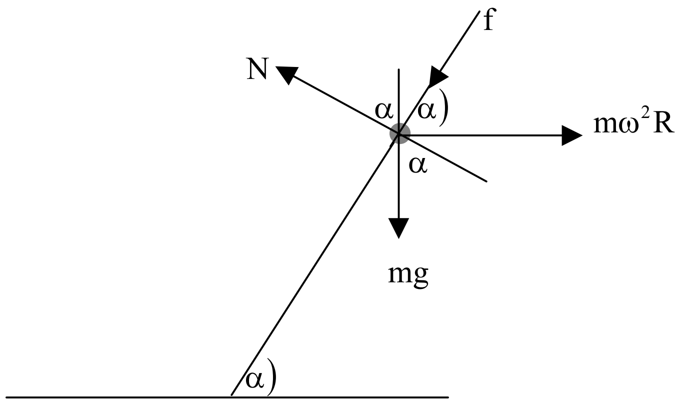
โจทย์กลศาสตร์ข้อนี้ ต้องการให้นักเรียนวิเคราะห์เงื่อนไขที่ทำให้ระบบอยู่ในสมดุล ซึ่งวงแหวนจะขยับขึ้นหรือลงตามแกนไม้ สมดุลที่เป็นไปได้สองลักษณะนี้มีผลต่อทิศทางของแรงเสียดทานที่จะนำมาวิเคราะห์ โดยนิยามแรงเสียดทาน เป็นแรงที่มีทิศต้านทานการเคลื่อนที่ของวัตถุ ดังนั้นถ้าเราพิจารณาสมดุลที่วงแหวนกำลังจะเลื่อนขึ้น แรงเสียดทานก็จะมีทิศพุ่งลงขนานกับแท่งไม้ และในกรณีที่วงแหวนกำลังจะเลื่อนลง แรงเสียดทานจะมีทิศพุ่งขึ้นขนานกับแท่งไม้ นอกจากนี้เราต้องนำอิทธิพลของการเหวี่ยงของไม้เป็นวงกลมรอบแกนดิ่งเข้ามาวิเคราะห์ด้วย

เราเริ่มการวิเคราะห์โดยการเขียนแผนภาพของแรงที่กระทำต่อวงแหวนมวล m โดยพิจารณาสมดุลของวงแหวนที่กำลังจะเลื่อนขึ้น ซึ่งในกรณีแรงเสียดทานจะมีทิศพุ่งลงขนานกับแท่งไม้



รูปที่ 8.2

จากรูปที่ 8.2 m คือมวลของวงแหวน ณ ตำแหน่ง L ที่วัดจากปลายไม้ที่แตะพื้น N คือแรงปฏิกิริยาที่มีทิศตั้งฉากกับแท่งไม้ และเมื่อวงแหวนมวล m ถูกแรง $m\omega^2 R$ กระทำในแนวนอน เพราะมวล m กำลังเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี R ด้วยความเร็วเชิงมุม ω



รูปที่ 8.3

หากเราพิจารณาแรงในแนวตั้งฉากกับแท่งไม้ เมื่อมวล m อยู่ในสมดุล

$$N = mg\cos\alpha + m\omega^2 R\sin\alpha \qquad (1)$$

แรงลัพธ์ในแนวขนานกับแท่งไม้ หาก f เป็นแรงเสียดทาน

$$f + mg\sin\alpha = m\omega^2 R\cos\alpha$$

ดังนั้น

$$f = m[\omega^2 R\cos\alpha - g\sin\alpha] \qquad (2)$$

ในสมดุลสถิต $f \le \mu N$

นั่นคือ $m[\omega^2 R\cos\alpha - g\sin\alpha] \le \mu[mg\cos\alpha + m\omega^2 R\sin\alpha]$

แทนค่า $\mu = \tan\theta$ ในสมการข้างบนนี้ เราจะได้

$$\omega^2 R[\cos\alpha - \tan\theta\sin\alpha] \le g[\cos\alpha\tan\theta + \sin\alpha]$$

แต่ $R = L\cos\alpha$ และ $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

ดังนั้น $\omega^2 L\cos\alpha[\cos\alpha - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\alpha] \le g[\cos\alpha\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \sin\alpha]$

$$\omega^2 L\cos\alpha\cos(\alpha+\theta) \le g\sin(\theta+\alpha)$$

$$L \le \frac{g\tan(\theta+\alpha)}{\omega^2\cos\alpha}$$

ความยาว L ที่มากที่สุด $= \dfrac{g\tan(\theta+\alpha)}{\omega^2\cos\alpha}$

ในทำนองตรงข้าม เมื่อมวล m จะเลื่อนลง แรงเสียดทาน f จะมีทิศขึ้น เราพิจารณาสมดุลของแรงในแนวขนานกับท่อนไม้ และตั้งฉากกับท่อนไม้

ในแนวขนาน

$$f + m\omega^2 R\cos\alpha = mg\sin\alpha \qquad (3)$$

ในแนวตั้งฉาก

$$N = mg\cos\alpha + m\omega^2 R\sin\alpha \qquad (4)$$

ดังนั้นจาก (1)

$$f = m(g\sin\alpha - \omega^2 R\cos\alpha)$$

ในสมดุลสถิตย์ $f \le \mu N$

นั่นคือ $m(g\sin\alpha - \omega^2 R\cos\alpha) \le \tan\theta(mg\cos\alpha + m\omega^2 R\sin\alpha)$

ด้วยเหตุผลเดียวกับกรณีแรก

$$g\sin(\alpha-\theta) \le \omega^2 R\cos(\alpha-\theta)$$

$$g\sin(\alpha-\theta) \le \omega^2 L\cos\alpha\cos(\alpha-\theta)$$

$$\frac{g\tan(\alpha-\theta)}{\omega^2\cos\alpha} \le L$$

นั่นคือ L น้อยที่สุด $= \dfrac{g\tan(\alpha-\theta)}{\omega^2\cos\alpha}$

ดังนั้น เราจะได้เงื่อนไขโดยสรุปว่ามวล m จะอยู่ที่ระยะ L จากปลายล่างของแท่งไม้ เมื่อ

$$\frac{g\tan(\alpha-\theta)}{\omega^2\cos\alpha} \le L \le \frac{g\tan(\alpha+\theta)}{\omega^2\cos\alpha}$$

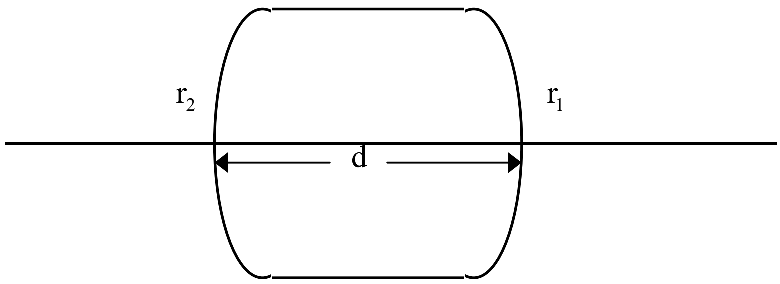
โจทย์เกี่ยวกับแรงเสียดทาน แรงปฏิกิริยาในแนวศูนย์กลางมีอยู่ในหลักสูตร โจทย์ข้อนี้ไม่ยาก และอยู่ในวิสัยที่นักเรียนที่เก่งจะทำได้ถูกต้องหมด

ความรู้คณิตศาสตร์ ด้านตรีโกณมิติ เป็นเรื่องจำเป็นที่จะทำให้คำตอบกระชับ และไม่รุ่มร่าม

การพิจารณากรณีมวล m เลื่อนขึ้น และลง จะทำให้นักเรียนที่คิดรอบคอบ ตอบคำถามนี้ได้อย่างสมบูรณ์

ปัญหาข้อที่ 2

จงหาเงื่อนไขที่ทำให้ความยาวโฟกัสของเลนส์หนามีค่าเท่ากันสำหรับแสง 2 แสงที่มีความยาวคลื่นต่างกัน จงอภิปรายความเป็นไปได้ของโครงสร้างของเลนส์หนาดังกล่าวนี้



รูปที่ 8.4

โจทย์แสงเชิงเรขาคณิตที่เกี่ยวกับเลนส์หนาข้อนี้ต้องการให้นักเรียนหาเงื่อนไขที่ทำให้ความยาวโฟกัสของเลนส์มีค่าคงที่ สำหรับแสงสองความยาวคลื่น

จากสูตรความยาวโฟกัสของเลนส์หนา ซึ่งเขียนในรูปของรัศมีความโค้งของผิวทั้งสอง ดัชนีหักเห และความหนาของเลนส์ซึ่งวัดตามแนวแกนมุขสำคัญ คือ

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{d(n-1)}{n\,r_1 r_2}\right] \qquad (1)$$

ในที่นี้ r_1, r_2 คือรัศมีความโค้งของผิวทั้งสอง

n คือดัชนีหักเหของเลนส์

d คือความหนาของเลนส์ซึ่งวัดตามแนวแกนมุขสำคัญ

สิ่งที่ต้องการหาก็คือ เงื่อนไขที่ทำให้ระยะโฟกัสมีค่าคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงสำหรับความยาวคลื่นที่ต่างกันสองความยาวคลื่น

สำหรับในความยาวคลื่นแรกซึ่งแก้วมีค่าดัชนีหักเห= n_A สำหรับความยาวคลื่นนี้ จาก

สมการ (1) เราจะได้

$$\frac{1}{f_A} = (n_A - 1)\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{d(n_A - 1)}{n_A r_1 r_2}\right] \tag{2}$$

และสำหรับแสงอีกความยาวคลื่นหนึ่ง ซึ่งแก้วมีดัชนีหักเห= n_B จากสมการ (1) เช่นกัน เราจะได้

$$\frac{1}{f_B} = (n_B - 1)\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{d(n_B - 1)}{n_B r_1 r_2}\right] \tag{3}$$

ถ้าความยาวโฟกัส f ไม่เปลี่ยนแปลงสำหรับแสงความยาวคลื่นที่แตกต่างกันดังกล่าว นั่นคือ $f_A = f_B$ จากสมการ (2) และสมการ (3) เราจะได้

$$(n_A - 1)\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{d(n_A - 1)}{n_A r_1 r_2}\right] = (n_B - 1)\left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{d(n_B - 1)}{n_B r_1 r_2}\right] \tag{4}$$

$$\frac{d}{r_1 r_2}\left[-\frac{(n_A - 1)^2}{n_A} + \frac{(n_B - 1)^2}{n_B}\right] = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\left[(n_B - 1) - (n_A - 1)\right]$$

$$\frac{d}{r_1 r_2 n_A n_B}\left[n_A n_B (n_B - n_A) - (n_B - n_A)\right] = \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\right)(n_B - n_A)$$

$$d = \frac{n_A n_B (r_1 + r_2)}{n_A n_B - 1}$$

$$r_1 + r_2 = d\left[\frac{n_A n_B - 1}{n_A n_B}\right]$$

$$r_1 + r_2 = d\left[1 - \frac{1}{n_A n_B}\right] \tag{5}$$

เพราะเหตุว่า n_A และ n_B > 1 ดังนั้น ทางด้านขวาของสมการ (5) > 0 ดังนั้น $r_1 + r_2 > 0$

สำหรับเครื่องหมายของ r ในที่นี้ ถ้าผิวโค้งนูน r มีเครื่องหมาย +

และถ้าผิวโค้งเว้า r มีเครื่องหมาย –

ดังนั้น ถ้าผิวโค้งแรก r_1 เป็นผิวโค้งเว้า r_1 มีเครื่องหมาย – ถ้า $r_1 + r_2 > 0$ เราก็ต้องทำให้ $|r_2| > |r_1|$ และ r_2 ต้องมีเครื่องหมาย + นั่นคือ r_2 ต้องเป็นผิวโค้งนูน แต่ถ้าผิวโค้งแรก r_1 เป็นผิวโค้งนูน นั่นคือ r_1 มีเครื่องหมาย +

$$\because \quad r_1 + r_2 > 0$$

r_2 จะเป็นรัศมีความโค้งของผิวโค้งนูนก็ได้ หรือ ผิวโค้งเว้าก็ได้ ถ้า $|r_1| < |r_2|$

คำตอบวิธีที่ 2 จากสมการ

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{d(n - 1)}{n r_1 r_2}\right)$$

เมื่อ n เปลี่ยน f ก็จะเปลี่ยนค่าด้วย

ดังนั้น เราทำอนุพันธ์สมการนี้เทียบกับ n เราจะได้

$$-\frac{1}{f^2}\frac{df}{dn} = \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{d(n-1)}{n\,r_1 r_2}\right)+(n-1)\left[-\frac{d}{r_1 r_2}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

เมื่อ f ไม่เปลี่ยน $\because$ โจทย์กำหนด ดังนั้น $\frac{df}{dn}=0$

นั่นคือ

$$\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}-\frac{d(n-1)}{n\,r_1 r_2}\right)+(n-1)\left[-\frac{d}{r_1 r_2}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]=0$$

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=d\left[\frac{n-1}{r_1 r_2}\right]\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$r_1+r_2=\frac{d(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$=d\left[\frac{n^2-1}{n^2}\right]=d\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

แต่ $n_A = n-\Delta n$

และ $n_B = n+\Delta n$

$$\because \qquad n_A n_B = n^2-(\Delta n)^2$$

$$\approx n^2$$

$\because$ เราต้องทำให้ $r_1+r_2 = d\left(1-\frac{1}{n_A n_B}\right)$

โจทย์เกี่ยวกับเลนส์หนา ไม่มีในหลักสูตรระดับมัธยมศึกษา

ดังนั้นโจทย์ข้อนี้ ถ้านักเรียนไม่รู้สูตร ก็จะทำไม่ได้เลย

แต่สิ่งที่นักเรียนพอจะรู้จากการศึกษาโจทย์ข้อนี้ก็คือ เมื่อความยาวคลื่นแสงเปลี่ยน ความยาวโฟกัสของเลนส์ก็จะเปลี่ยนด้วย

นี่คือความคลาดรงค์

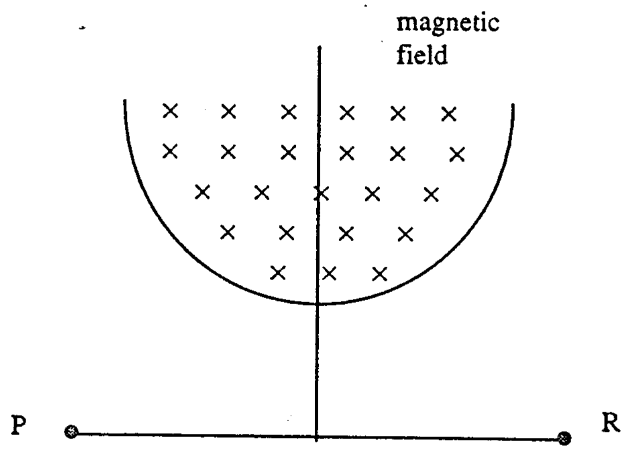
ดังนั้น ถ้าจะไม่ให้เลนส์มีความยาวโฟกัสแตกต่างกันสำหรับแสงสองความยาวคลื่น เราต้องสร้างเลนส์ให้หนา ตามเงื่อนไข

$$r_1+r_2 = d\left(1-\frac{1}{n_A n_B}\right)$$

หลังจากการทำโจทย์ข้อนี้แล้ว นักเรียนคงมีความรู้สึกอยากจะศึกษาต่อ เรื่องการออกแบบเลนส์กรณีที่มีแสง 3 ความยาวคลื่นขึ้นไปบ้างเป็นแน่

ปัญหาข้อที่ 3

ลำของกลุ่มอิออนที่อิออนแต่ละตัวมีมวล m พุ่งจากจุด P ไปยังจุด R ด้วยอัตราเร็วที่เท่ากัน แต่มีทิศทางต่างๆกัน สนามแม่เหล็กที่มีทิศตั้งฉากกับระนาบของกระดาษบังคับให้อิออนทุกตัวลู่เข้าหาจุด R โดยที่ระยะ $PR = 2a$ วิถีโคจรของอิออนมีลักษณะที่สมมาตรกับแกน y จงหาขอบเขตของสนามแม่เหล็กที่โฟกัสอิออนทุกตัวให้ลู่เข้าจุด R



รูปที่ 8.5

โจทย์ฟิสิกส์พลาสมาข้อนี้เกี่ยวข้องกับการออกแบบสนามแม่เหล็กเพื่อโฟกัสลำพลาสมา โดยให้วิเคราะห์หาขอบเขตของสนามแม่เหล็กที่โฟกัสกลุ่มของอิออนให้เคลื่อนที่สู่จุด R ความสวยงามของโจทย์ข้อนี้อยู่ที่การนำเอาความรู้ด้านกลศาสตร์ ด้านไฟฟ้า และความรู้ทางเรขาคณิตมาวิเคราะห์ประกอบกัน

เราทราบดีว่าประจุไฟฟ้าที่เคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็กจะถูกแรงแม่เหล็กกระทำหรือเรียกว่าแรงลอเรนซ์ ซึ่งจะเป็นไปตามสมการ

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (1)$$

ในที่นี้ q คือขนาดของประจุ , $\vec{v}$ คือความเร็วที่ประจุไฟฟ้าเคลื่อนที่ , $\vec{B}$ คือความเข้มสนามแม่เหล็ก ส่วน $\vec{F}$ คือแรงแม่เหล็ก(แรงลอเรนซ์) ซึ่งมีทิศตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{v}$ และ $\vec{B}$

เพราะเหตุว่าความเร็วของประจุมีทิศตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก ดังนั้นจะมีแรงสู่ศูนย์กลางที่บังคับให้ประจุเคลื่อนที่โค้งเป็นวงกลม นั่นคือจากสมการ (1) เราจะได้

$$\frac{mv^2}{r}\hat{r} = q\vec{v} \times \vec{B} \qquad (2)$$

$\hat{r}$ ในสมการ (2) คือเวกเตอร์หน่วย ซึ่งมีทิศตามแนวรัศมีของวงกลม

ถ้าเราพิจารณาวงโคจรของประจุในสนามแม่เหล็กทางซีกเหนือแกน PR เราก็จะเห็นได้ว่าประจุทุกตัวจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี r เท่ากันทุกตัว โดยจะมีจุดศูนย์กลางของการเคลื่อนที่ต่างๆกัน ซึ่งขึ้นกับตำแหน่งประจุที่เริ่มเข้ามาในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็ก

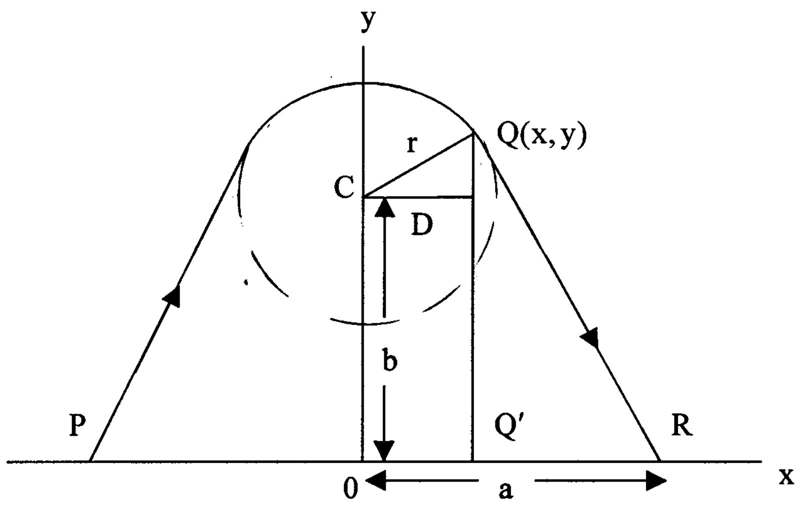
ในที่นี้ถ้าเรากำหนดให้ประจุที่พุ่งออกจากสนามแม่เหล็กมีตำแหน่งพิกัดเป็น (x, y) ตามรูปที่ 8.6 ให้ C เป็นจุดศูนย์กลางของการเคลื่อนที่เป็นวงกลมประจุซึ่งมีพิกัด $(0, b)$ และ R คือตำแหน่งที่ลำพลาสมาหรือกลุ่มของประจุถูกโฟกัสที่ $(a,0)$

จากรูปที่ 8.6 $\because C\hat{Q}D = Q'\hat{R}Q$ $\therefore$ จะเห็นได้ว่า ΔCQD และ $\Delta Q'RQ$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย จากเรขาคณิตของสามเหลี่ยมคล้าย เราจะได้

$$\frac{Q'Q}{Q'R} = \frac{CD}{QD}$$

นั่นคือ

$$\frac{y}{(a-x)} = \frac{x}{(y-b)} \tag{3}$$



รูปที่ 8.6

จากรูปที่ 8.6 เราจะเห็นได้ว่าสมการวงโคจรของประจุไฟฟ้าในสนามแม่เหล็กเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่พิกัด $(0, b)$ และมีรัศมีเท่ากับ r ซึ่งสามารถแทนได้ด้วยสมการ

$$x^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{4}$$

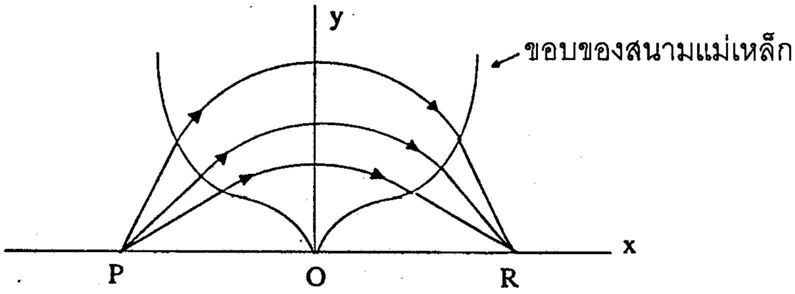
จากสมการ (3) $\because y - b = \dfrac{x}{y}(a-x)$ หลังจากแทนค่าลงในสมการ (4) เราจะได้

$$y = \frac{x(a-x)}{\sqrt{r^2 - x^2}} \tag{5}$$

สมการ (5) ที่ได้นี้เป็นสมการที่บรรยายตำแหน่งของจุด Q ซึ่งเป็นจุดบนขอบของสนามแม่เหล็กที่โฟกัสลำของประจุ ที่ถูกบังคับให้เคลื่อนจากจุด $P \to R$ สมการ (3), (4) และ (5) จะแสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ของประจุที่ถูกโฟกัสด้วยสนามแม่เหล็กดังกล่าว ซึ่งสามารถนำมาเขียนเป็นกราฟได้ดังนี้

ก. กรณีที่ $r < a$

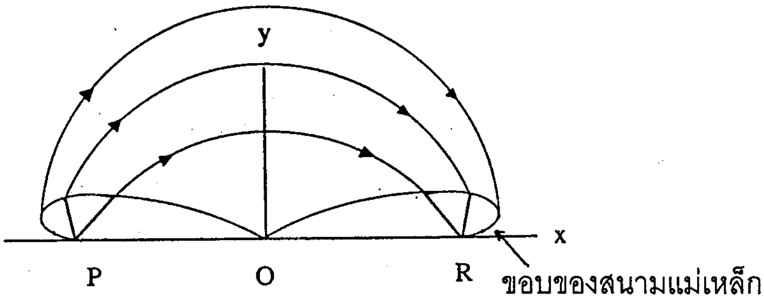
นี่คือวงกลมของการเคลื่อนที่มีรัศมีสั้น กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ สนามแม่เหล็กมีความเข้มสูงและประจุมีความเร็วต่ำ ตามสมการ $r = \frac{mv}{Be}$ กราฟ $y = \frac{x(a-x)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ สามารถเขียนได้เป็น



รูปที่ 8.7

ข. กรณีที่ $r = a$

สมการของ Q คือ $y^2(a+x) = x^2(a-x)$ อิออนทุกตัวที่ออกจาก P จะเคลื่อนที่สู่ Q

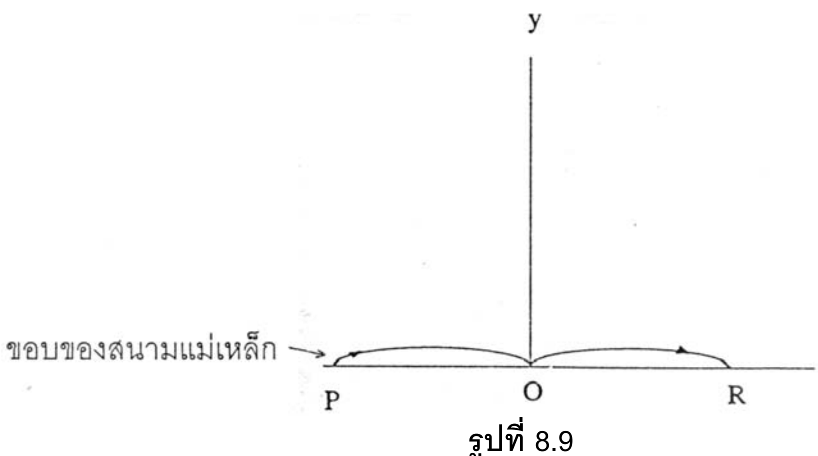


รูปที่ 8.8

ค. กรณีที่ $r > a$

นี่คือกรณีสนามแม่เหล็กมีความเข้มต่ำ หรือประจุมีความเร็วสูง

เฉพาะอิออนที่พุ่งออกจาก P ในแนวใกล้กับแกน PR เท่านั้นที่ถูกโฟกัสสู่ Q



รูปที่ 8.9

โจทย์เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของประจุในสนามแม่เหล็ก มีในหลักสูตร

แต่โจทย์ข้อนี้ยากขึ้นมาก เพราะสนามแม่เหล็กที่ใช้บังคับให้ประจุเคลื่อนที่มีบริเวณจำกัด

ดังนั้นการพิจารณาจึงต้องกระทำอย่างระมัดระวัง โดยอาศัยหลักการที่ว่า ในบริเวณที่ไม่มีสนามแม่เหล็ก ประจุจะเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง แต่เมื่อประจุเคลื่อนที่เข้าไปในบริเวณที่มีสนามแม่เหล็ก ประจุจะเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งของวงกลม ดังนั้นในการที่จะให้ประจุพุ่งออกจากบริเวณที่มีสนามแม่เหล็กมาสู่จุด R ประจุจะต้องพุ่งออก ในแนวเส้นสัมผัสกับวงกลมมาสู่จุด R ซึ่งจะต้องเป็นเส้นตรง และในบริเวณดังกล่าวนี้ก็จะต้องไม่มีสนามแม่เหล็กมารบกวน

จากนั้น โดยอาศัยหลักการของวิชาเรขาคณิตเกี่ยวกับ วงกลม เส้นสัมผัส เราก็สามารถหาพิกัด $Q\ (x, y)$ ได้

ข้อสอบนี้ ทดสอบความรอบคอบ และความลึกซึ้งในการเข้าใจของนักเรียนโดยให้พิจารณากรณี $r < a$, $r = a$ และ $r > a$ ดังนั้นจึงเป็นข้อสอบที่ยาก แต่สำหรับเด็กที่เก่ง แก้ปัญหาลักษณะนี้ จะกระตุ้นเร้าให้เด็กสนใจศึกษา วิทยาการด้านเครื่องเร่งประจุ หรือ mass spectrometry ฯลฯ ต่อไป

ปฏิบัติ

กล่องมีอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกอยู่ภายใน และมีขั้วต่อสองขั้ว

ให้นักเรียนตรวจสอบดูว่า อุปกรณ์ภายในนั้นคืออะไร โดยไม่ต้องเปิดกล่องออกดู โดยกำหนดอุปกรณ์ต่อไปนี้ให้

แบตเตอรี่ขนาด 9 โวลท์

ตัวต้านทานที่มีค่าคงที่

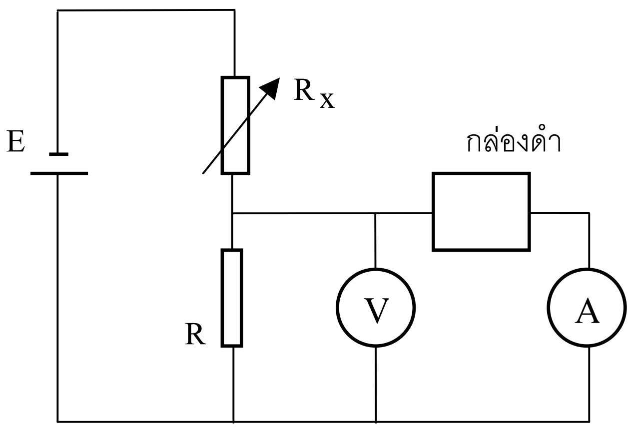
แอมมิเตอร์ชนิด กระแสตรง

และโวลท์มิเตอร์ชนิดกระแสตรง

ข้อสังเกต กำลังไฟฟ้าที่ใช้ในการทดลองไม่ควรเกิน 0.25 W

วิธีทำ

ให้นักเรียนต่อวงจรดังรูป



รูปที่ 8.10

ในที่นี้ R คือความต้านทานที่คงที่

V คือโวลท์มิเตอร์

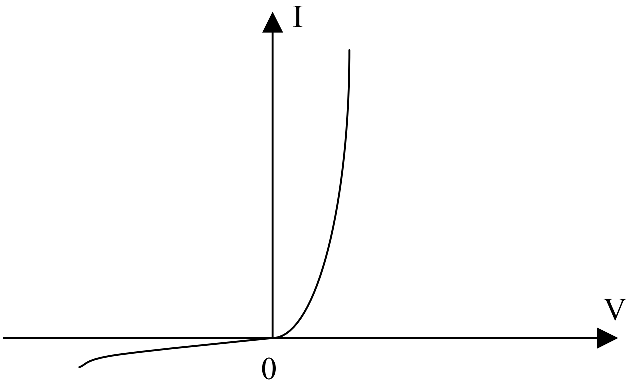
A คือแอมมิเตอร์

R_x คือความต้านทานที่แปรค่าได้

และ E คือแบตเตอรี่

ให้นักเรียนปรับเปลี่ยน R_x แล้ววัดกระแสเป็นฟังก์ชันของความต่างศักย์ จากนั้นก็ให้กลับขั้วของกล่องดำ แล้วทำการทดลองซ้ำ

กราฟความสัมพันธ์ระหว่างกระแสกับความต่างศักย์ที่ได้แสดงให้เห็นว่าอุปกรณ์ภายในกล่องดำ คือ Zener diode



รูปที่ 8.11

หลักสูตรมัธยมไม่มีเรื่องไดโอด

ดังนั้นในการทดลองเรื่องนี้นักเรียนจะประสบปัญหา

การศึกษาทฤษฎี และ character ของ diode จึงเป็นเรื่องจำเป็นในการทำโจทย์ข้อนี้

โจทย์ฟิสิกส์โอลิมปิกครั้งที่ 9

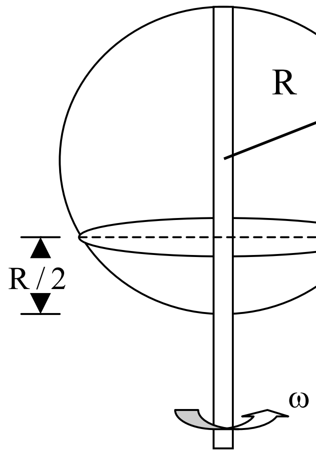
พ.ศ. 2519

ประเทศฮังการี

ทฤษฎี

ปัญหาข้อที่ 1

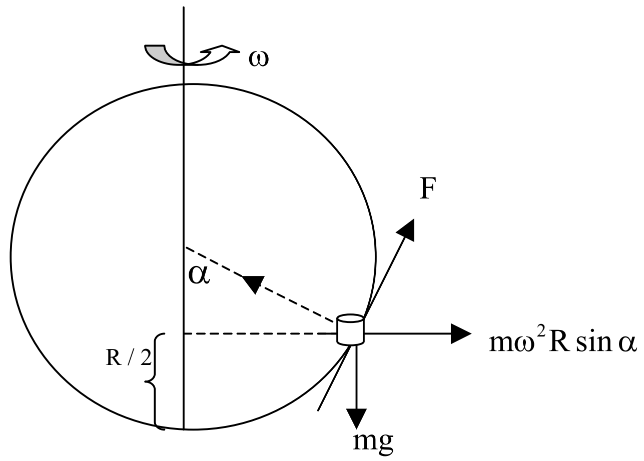
ทรงกลมกลวงรัศมี $R = 0.5$ เมตร หมุนรอบแกนที่อยู่ในแนวดิ่งด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega = 5$ เรเดียน/วินาที ที่ผิวภายในทรงกลมนี้มีแท่งไม้ท่อนหนึ่งวางอยู่ โดยที่แท่งไม้อยู่ที่ระดับความสูง $R/2$ จากจุดต่ำสุดของทรงกลม และท่อนไม้เคลื่อนที่ไปพร้อมกับทรงกลมดังรูปที่ 9.1



รูปที่ 9.1

จงคำนวณหา

1. สัมประสิทธิ์ความเสียดทานระหว่างท่อนไม้กับทรงกลม ซึ่งมีค่าน้อยที่สุดเพียงพอที่จะทำให้ท่อนไม้เคลื่อนที่ไปพร้อมกับทรงกลม
2. เงื่อนไขที่จะทำให้ท่อนไม้เคลื่อนที่ขึ้น เมื่อ $\omega = 8$ เรเดียน/วินาที
3. เงื่อนไขที่ทำให้ท่อนไม้อยู่ในสมดุล
   ก. ถ้าตำแหน่งของท่อนไม้เปลี่ยนเล็กน้อย
   ข. ถ้าความเร็วเชิงมุมของทรงกลมเปลี่ยนเล็กน้อย



รูปที่ 9.2

ตอนที่ 1

ให้มวลของท่อนไม้ $= m$

พิจารณาแรงปฏิกิริยา N แรงเสียดทาน F แรงหนีศูนย์กลางที่กระทำต่อท่อนไม้ และน้ำหนักของท่อนไม้ mg

$\because$ แรงหนีศูนย์กลาง $= m\omega^2(R\sin\alpha)$

เมื่อ α คือมุมที่ตำแหน่งของท่อนไม้ทำกับแกนดิ่ง , R คือรัศมีของทรงกลม และ ω คือความเร็วเชิงมุมของทรงกลม

เงื่อนไขสมดุลในแนวรัศมีทำให้เราได้สมการ

$$N = mg\cos\alpha + m\omega^2 R\sin\alpha\ (\sin\alpha) \tag{1}$$

สมดุลในแนวเส้นสัมผัส ทำให้เราได้

$$F + (m\omega^2 R\sin\alpha)\cos\alpha = mg\sin\alpha \tag{2}$$

แต่เมื่อท่อนไม้กำลังจะเลื่อน นั่นแสดงว่าแรงเสียดทาน

$$F \le \mu N \tag{3}$$

เมื่อ μ คือสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน

ดังนั้น จาก (1) และ (2) โดยการแทนค่าใน (3) เราจะได้

$$m\sin\alpha\,[g - \omega^2 R\cos\alpha] \le \mu m[g\cos\alpha + \omega^2 R\sin^2\alpha]$$

$$\frac{\sin\alpha\,(g - \omega^2 R\cos\alpha)}{g\cos\alpha + \omega^2 R\sin^2\alpha} \le \mu \tag{4}$$

โจทย์กำหนดว่า อนุภาคอยู่ที่ระดับ $R/2$ จากจุดต่ำสุด

ดังนั้น $$\sin\alpha = \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

โดยการแทนค่า $\omega = 5$ เรเดียน/วินาที , $R = 0.5$ เมตร , $g = 10$ เมตร/วินาที ^{2} ในสมการ (4) เราได้

$$\mu \quad \geq \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{10-(25\times 0.5\times 0.5)}{10\times\frac{\sqrt{3}}{2}+(25\times 0.5\times\frac{1}{4})}\right]$$

$$\mu \quad \geq \quad 0.22$$

นั่นคือ สัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่น้อยที่สุด $= 0.22$

ตอนที่ 2

เมื่อ $\omega = 8$ เรเดียน/วินาที

จากสมการ (2) แรงเสียดทาน $F = m\sin\alpha\,[g-\omega^2 R\cos\alpha]$

$$= m\sin 30\,[10-(64\times 0.5\times\tfrac{\sqrt{3}}{2})]$$

$$= \frac{m}{2}[10-16\sqrt{3}]$$

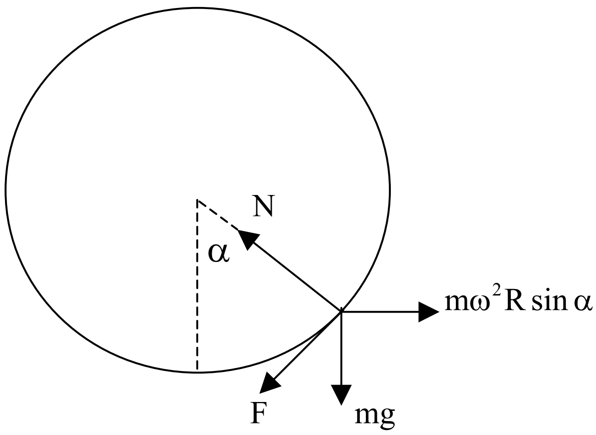
ซึ่งมีเครื่องหมายลบ นั่นแสดงให้เห็นว่า แรงเสียดทานมีทิศลง และวัตถุกำลังจะเคลื่อนที่ขึ้น

เมื่อเราพิจารณาสมดุลในแนวรัศมี และแนวเส้นสัมผัส เราได้

$$N = mg\cos\alpha + m\omega^2 R\sin^2\alpha \tag{5}$$

และ

$$F + mg\sin\alpha = m\omega^2 R\sin\alpha\cos\alpha \tag{6}$$



รูปที่ 9.3

และเมื่อเราใช้เงื่อนไขสมดุลจำกัดอีกว่า $F \leq \mu N$

เราก็จะได้

$$m\sin\alpha\,[\omega^2 R\cos\alpha - g] \leq \mu m\,[g\cos\alpha + \omega^2 R\sin^2\alpha]$$

$$\frac{\sin\alpha\,(\omega^2 R\cos\alpha - g)}{g\cos\alpha + \omega^2 R\sin^2\alpha} \le \mu$$

โดยการแทนค่า $g = 10$ เมตร/วินาที ^{2} , $R = 0.5$ เมตร

$\omega = 8$ เรเดียน/วินาที และ $\alpha = 30^\circ$

เราได้ $\mu \ge 0.18$

นั่นคือสัมประสิทธิ์ความเสียดทานต้องมากกว่า 0.18 วัตถุจึงจะเลื่อนขึ้น

ตอนที่ 3

ในการหาเงื่อนไขของการเสถียร เมื่อ ตำแหน่ง และความเร็วเชิงมุมเปลี่ยนแปลง

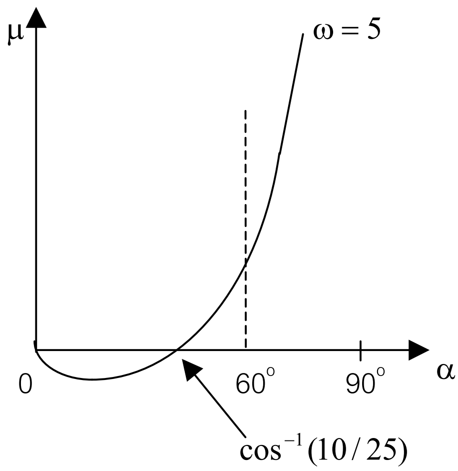
เราพิจารณากรณี $\omega = 5$ เรเดียน/วินาที

และ $\omega = 8$ เรเดียน/วินาที แยกกัน

เมื่อ $\omega = 5$ เรเดียน/วินาที นั้นเราได้

$$\mu \ge \sin\alpha\left[\frac{g - \omega^2 R\cos\alpha}{g\cos\alpha + \omega^2 R\sin^2\alpha}\right]$$

เราเขียนกราฟระหว่าง μ กับ α

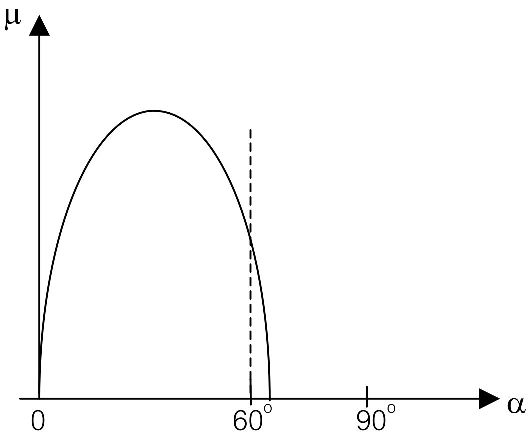


รูปที่ 9.4

โดยการเพิ่ม α คือถ้าเราทำให้ท่อนไม้เคลื่อนที่ขึ้น μ ก็จะต้องมากขึ้น เพราะ $\cos\alpha$ น้อยลง ดังนั้น μ ในกรณีนี้จะมากกว่า μ ที่น้อยที่สุด

ดังนั้น ท่อนไม้จะเคลื่อนต่อไป สมดุลไม่เสถียร หรือถ้าเราลด ω ลงไป μ ก็จะมากขึ้น ซึ่ง μ นี้มากกว่า μ ที่น้อยที่สุด คือ 0.22 เมื่อ μ มากขึ้นเช่นนี้ สมดุลก็เสถียร ท่อนไม้กลับสู่ที่เดิม แต่ถ้าเราเพิ่ม ω มากขึ้น μ ก็จะน้อยลง ซึ่ง μ นี้จะน้อยกว่า 0.22 นั่นคือ ท่อนไม้ จะไม่อยู่ในสมดุล และจะเคลื่อนที่ไปไม่กลับที่เดิมอีก

กรณี $\omega = 8$ เรเดียน/วินาที



รูปที่ 9.5

เราได้ $$\mu \geq \sin\alpha \left[\frac{\omega^2 R\cos\alpha - g}{g\cos\alpha + \omega^2 R\sin^2\alpha} \right]$$

เมื่อเราเพิ่ม α คือให้ไม้เคลื่อนที่ขึ้น μ จะลดลงกว่า $\mu_{min} = 0.18$ ดังนั้น ท่อนไม้จะเคลื่อนที่ไปไม่กลับที่เดิม สมดุลไม่เสถียร

ถ้าลด α คือให้ไม้เคลื่อนที่ลง μ จะเพิ่มขึ้น คือมากกว่า 0.18

ดังนั้นท่อนไม้จะถูกแรงต้านมาก ก็จะกลับที่เดิม สมดุลเสถียร และถ้าเราเพิ่ม ω เล็กน้อย μ ก็จะมากขึ้น คือมากกว่า 0.18 ดังนั้นสมดุลเสถียร ท่อนไม้จะไถลไม่กลับสู่ที่เดิม หรือถ้าเราลด ω เล็กน้อย μ ก็จะลด นั่นคือ $\mu < 0.18$ แรงต้านลดลง สมดุลเสถียร ท่อนไม้กลับสู่ที่เดิม

โจทย์แรงเสียดทานข้อนี้ คล้ายกับข้อสอบที่เคยออกที่ประเทศเยอรมัน แต่ความพิสดารอยู่ในช่วง 3 ซึ่งเป็นตอนวิเคราะห์เงื่อนไขเสถียรภาพ

การคำนวณแรงเสียดทาน แรงในแนวศูนย์กลางมีในหลักสูตร แต่การวิเคราะห์เสถียรภาพไม่อยู่ในหลักสูตร เนื้อหาในการทำการวิเคราะห์ค่อนข้างยาว ในสองตอนแรกการวิเคราะห์ ค่อนข้างตรงไป ตรงมา เด็กเก่งจะสามารถทำได้หมด

ความสับสน จะอยู่ตอนช่วง 3 ซึ่งต้องอาศัยการศึกษาค่า μ เป็นฟังก์ชันของ α และ ω ในการวิเคราะห์ ได้แสดงเฉพาะ $\mu(\alpha)$ หากนักเรียน จะเขียน $\mu(\omega)$ ก็จะเห็นวิธีหาคำตอบได้เช่นกัน

ปัญหาข้อที่ 2

ตัวทรงกระบอก มีลูกสูบพื้นที่ภาคตัดขวาง 1 ตารางเดซิเมตร ปิดอยู่ ภายในของตัวถังถูกแบ่งเป็นสองห้อง และระหว่างห้องมีลิ้นที่สามารถเปิดได้ เมื่อความดันภายในห้องข้างขวาสูงกว่าความดันภายในห้องข้างซ้าย ดูรูปที่ 9.6

เมื่อเริ่มต้น ภายในห้องข้างซ้ายมีก๊าซฮีเลียมอยู่ 12 กรัม และห้องข้างขวามีก๊าซฮีเลียม 2 กรัม ถ้าความยาวของห้องทั้งสองส่วนเท่ากัน คือ 11.2 เดซิเมตร และอุณหภูมิของฮีเลียมเท่ากันคือ 0° เซลเซียส

กำหนดให้ความดันอากาศภายนอกถัง = 10 นิวตัน/ซ.ม.^{2} = 1 บรรยากาศ

= 10 kPa

ความร้อนจำเพาะของฮีเลียมที่ปริมาตรคงที่ $C_V = 3.15 \text{ J}/(\text{g.K})$

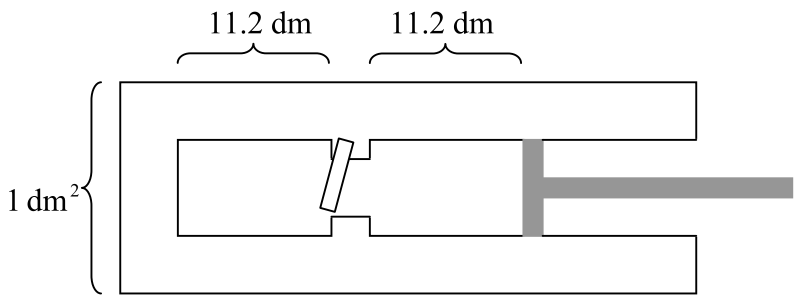
$= 0.75 \text{ cal}/(\text{g.K})$

และความร้อนจำเพาะของฮีเลียมที่ความดันคงที่ $C_P = 1.25 \text{ cal}/(\text{g.K})$

$= 5.25 \text{ J}/(\text{g.K})$

เมื่อดันลูกสูบเข้าไปช้าๆ ภายในเวลาไม่นาน ลิ้นที่กั้นระหว่างห้องก็เปิด ทันทีที่ลิ้นเปิดลูกสูบก็หยุดเคลื่อนที่ จนเมื่อก๊าซผสมกันแล้ว ลูกสูบก็จะเคลื่อนที่ต่อ จนกระทั่งลูกสูบเคลื่อนที่มาหยุดที่ตำแหน่งของลิ้น

ถ้าผนังของทรงกระบอกเป็นฉนวนที่ดี จงคำนวณหางานที่ทำต่อก๊าซฮีเลียม



รูปที่ 9.6

เมื่อเริ่มต้น ลิ้นปิด

ปริมาตรของห้องทางซ้าย $= 11.2 \text{ dm} \times 1 \text{ dm}^2 = 11.2 \text{ dm}^3$ (ลิตร)

เพราะเหตุว่า ก๊าซฮีเลียมมวล 4 กรัม ปริมาตร 22.4 dm^3 ที่อุณหภูมิ 0°C มีความดัน 1 บรรยากาศ

ดังนั้น ก๊าซฮีเลียมมวล 12 กรัม ปริมาตร 22.4 dm^3 ที่อุณหภูมิ 0°C มีความดัน 3 บรรยากาศ

ก๊าซฮีเลียมมวล 12 กรัม ปริมาตร 11.2 dm^3 ที่อุณหภูมิ 0°C มีความดัน 6 บรรยากาศ

ดังนั้นความดันเริ่มต้นของฮีเลียม ในห้องทางซ้าย = 6 บรรยากาศ

ส่วนในห้องทางขวา

$\because$ ก๊าซฮีเลียมมวล 2 กรัม ปริมาตร 22.4 dm^3 ที่อุณหภูมิ $0^\circ C$ มีความดัน $\frac{3}{12}\times 2 = \frac{1}{2}$ บรรยากาศ

ก๊าซฮีเลียมมวล 2 กรัม ปริมาตร 11.2 dm^3 ที่อุณหภูมิ $0^\circ C$ มีความดัน $\frac{1}{2}\times 2 = 1$ บรรยากาศ

ความดันเริ่มต้นของก๊าซฮีเลียมในห้องทางขวา = 1 บรรยากาศ

เมื่อเราดันลูกสูบเข้าไป เพราะเหตุว่า ความดันห้องข้างขวา น้อยกว่าห้องข้างซ้าย ดังนั้น ลิ้นจึงยังคงปิดอยู่ เมื่อลูกสูบถูกดันเข้าไป ความดันของฮีเลียมในห้องทางขวาก็จะเพิ่มๆ จนกระทั่ง มีความดัน = 6 บรรยากาศ

เพราะทรงกระบอกทั้งระบบถูกฉนวนหุ้มเป็นอย่างดี ดังนั้นจึงไม่มีความร้อนไหลถ่ายเทใน ระบบ $\Delta Q = 0$ และการเปลี่ยนแปลงเป็นแบบอะเดียแบติค

$\because$ $$P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

ในเมื่อ P_1 คือความดันตอนต้น = 1 บรรยากาศ

P_2 คือความดันตอนหลัง = 6 บรรยากาศ

V_1 คือปริมาตรตอนต้น $= 11.2\ dm^3$

V_2 คือปริมาตรตอนหลัง = ?

และ $\gamma = C_P / C_V = 1.25/0.75 = 5/3$

โดยการแทนค่าใน (1) เราได้

$$1(11.2)^{5/3} = 6(V_2)^{5/3}$$

$$V_2 = 3.82\ dm^3$$

ดังนั้นเมื่อความดันของฮีเลียมในถังข้างขวาเพิ่มถึง 6 บรรยากาศนั้น ปริมาตรของฮีเลียม จะลดลง เหลือ 3.82 ลูกบาศก์เดซิเมตร และอุณหภูมิของมันได้เพิ่มขึ้นถึง T ซึ่งเราสามารถหาได้จากสมการ

$$P_2 V_2 = RT_2 \qquad (2)$$

การที่ $$C_P - C_V = R$$

ทำให้เรารู้ค่าคงที่ของก๊าซฮีเลียมว่า $R = (5.25 - 3.15)$

$$= 2.1\ J/(g.K)$$

ซึ่งฮีเลียมในที่นี้มี 2 กรัม

ดังนั้นจาก (2) $$T_2 = \frac{P_2 V_2}{R}$$

$P_2 =$ ความดัน 6 บรรยากาศ $= 6\times 10\ N/cm^2$

$$= 60\times 10^2\ N/dm^2$$

$$V_2 = 3.82\ dm^3$$

และ $$R = 2.1\times 2\ J/K$$

$$T_2 = \frac{6\times10^3\times3.82}{4.2} \quad \frac{N.dm}{J}.K$$

$$T_2 = \frac{6\times10^2\times3.82}{4.2} \quad \frac{N.m.K}{J}$$

$$= 545 \quad K$$

อุณหภูมิของก๊าซฮีเลียม ขณะความดัน = 6 บรรยากาศนั้น $= 545 \quad K$

และพลังงานภายในหาได้จากเงื่อนไข $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$

$\because \Delta Q = 0$ ในการเปลี่ยนแปลงแบบอะเดียแบติค

$\Delta U = C_V \Delta T$

แต่ $C_V = 3.15 \quad J/(g.K)$ ซึ่งในที่นี้มีฮีเลียม 2 กรัม

และ $\Delta T = T_2 - T_0$

$= 545 - 273 = 272$

ดังนั้น $\Delta U = 2\times3.15\times272$

$= 1713.6$ จูล

และเมื่อลิ้นเปิด ก๊าซฮีเลียมจากทั้งสองห้องจะผสมกัน สมมติให้อุณหภูมิผสมเป็น T_f จากหลักการทรงพลังงาน

ความร้อนลดจากทางซ้าย = ความร้อนเพิ่มทางขวา

$$2\times(545 - T_f)\times C_P \quad = \quad 12\times C_P\times(T_f - 273)$$

$$T_f \quad = \quad 311.8 \quad K$$

นั่นคือ อุณหภูมิของก๊าซผสม = 311.8 องศาเคลวิน

จากนั้นลูกสูบก็จะดันต่อไป จนกระทั่งตำแหน่งของลูกสูบอยู่ที่ลิ้น ปิด-เปิด

ดังนั้น ปริมาตรสุดท้ายของก๊าซผสมคือ 11.2 ลูกบาศก์เซ็นติเมตร

เพราะว่าการเปลี่ยนแปลงเป็นแบบอะเดียแบติค ในการหาอุณหภูมิสุดท้ายของก๊าซ

เราใช้สมการ $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$

เมื่อ T_1 คืออุณหภูมิเริ่มต้น $= 311.8 \quad K$

T_2 คืออุณหภูมิสุดท้าย $= ?$

V_1 คือปริมาตรเริ่มต้น $= 11.2 + 3.82 = 15.02 \quad dm^3$

V_2 คือปริมาตรสุดท้าย $= 11.2 \quad dm^3$

โดยการแทนค่า ในสมการข้างบน

$$311.8\left(\frac{15.02}{11.2}\right)^{2/3} = T_2$$

$$311.8\ (1.8)^{2/3} = T_2$$

$$T_2 = 379 \quad K$$

ดังนั้นพลังงาน ภายในที่เพิ่ม คือ $\Delta U = (m_1 + m_2)C_V \Delta T$

เมื่อ m_1 และ m_2 คือมวลของก๊าซฮีเลียมในทั้งสองในทั้งสองห้อง = 14 กรัม

$$C_P = 3.15 \quad J/(g.K)$$

และ $\Delta T = (379 - 311.8) \quad K$

$$\Delta U = 14 \times 3.15 \times 67.5 \quad \text{จูล}$$

พลังงานภายในที่เพิ่มทั้งหมดจึง $= 1713.6 + 2976.75$

$$= 4690 \quad \text{จูล}$$

เพราะเหตุว่า ความดันภายนอกทรงกระบอก = 1 บรรยากาศ

$= 10^5$ นิวตัน/ตารางเมตร

ดังนั้นงานที่ทำโดยความดันอากาศภายนอก $= \Delta W$

$$= P\Delta V$$

$$= 10^5 \times 1 \times 11.2 \times 10^{-3}$$

$$= 1120 \quad \text{จูล}$$

ดังนั้น งานทำบนก๊าซฮีเลียม $= 4690 - 1120$

$$= 3570 \quad \text{จูล}$$

ในการทำโจทย์ข้อนี้ นักเรียนต้องรู้เรื่องการขยายตัว และการหดตัวของก๊าซ แบบอะเดียแบติค ซึ่งหัวข้อนี้มีในหลักสูตร แต่การคำนวณไม่ลึกซึ้งนัก

โจทย์ข้อนี้ผสมผสาน ทฤษฎีบททางพลศาสตร์ของความร้อน การหางาน การหาพลังงานภายใน เมื่อก๊าซขยายตัวหรือหดตัว โจทย์ยังทดสอบความรู้เรื่องการผสมก๊าซ เพื่อหาอุณหภูมิผสมด้วย

ในการคำนวณนักเรียนจะต้องรู้ว่า ก๊าซ 1 โมล ที่อุณหภูมิ $0^\circ C$ และความดัน 1 บรรยากาศ มีปริมาตร 22.4 dm^3

โจทย์จึงค่อนข้างยาว แต่ไม่ยาก นักเรียนเก่ง จะสามารถวิเคราะห์หาคำตอบได้ทุกขั้นตอน

ปัญหาข้อที่ 3

แท่งแก้วรูปทรงกลม มีฟองอากาศรูปทรงกลมอยู่ภายใน โดยที่จุดศูนย์กลางของฟองอากาศมิได้ทับกับจุดศูนย์กลางของแท่งแก้ว จงเสนอวิธีวัดขนาดของฟองอากาศ

วิธีหนึ่งที่เป็นไปได้ คือนำแท่งแก้วรูปทรงกลมนั้นวางลงในภาชนะบรรจุของเหลวที่มีดัชนีหักเหเท่าแท่งแก้ว แสงจากฟองอากาศจะพุ่งตกกระทบผนังของภาชนะ เพราะเหตุว่าดัชนีหักเหของแก้ว และของเหลวเท่ากัน เราจึงไม่เห็นขอบนอกของแก้ว แต่เราจะเห็นฟองอากาศแต่เพียงอย่างเดียว “ปรากฏ” ลอยอยู่ในของเหลว

ดังนั้นเราก็สามารถใช้ กล้องจุลทรรศน์ชนิดเลื่อนได้ วัดขนาดของฟองอากาศได้

นักเรียนอาจจะใช้เทคนิคการวัดขนาดของฟองอากาศที่แตกต่างจากนี้ก็ได้ ดังนั้นในการทำโจทย์ข้อนี้ คำตอบจึงมีได้หลายคำตอบ

โจทย์ข้อนี้เหมาะสำหรับใช้ทดสอบความสามารถด้านปฏิบัติ แต่ก็มีข้อจำกัดตรงที่นักเรียนจะไม่สามารถหาของเหลวที่มีดัชนีหักเหเท่าแก้วได้

ดังนั้นโจทย์ข้อนี้จึงทดสอบจินตนาการด้านทฤษฎีแทน

ปฏิบัติ

กำหนดของเหลวที่รู้ค่าความร้อนจำเพาะ และผลึกที่ไม่ละลายในของเหลวมาให้ และให้ใช้อุปกรณ์ต่อไปนี้ คือ เทอร์โมมิเตอร์

หลอดทดลอง

นาฬิกาจับเวลา

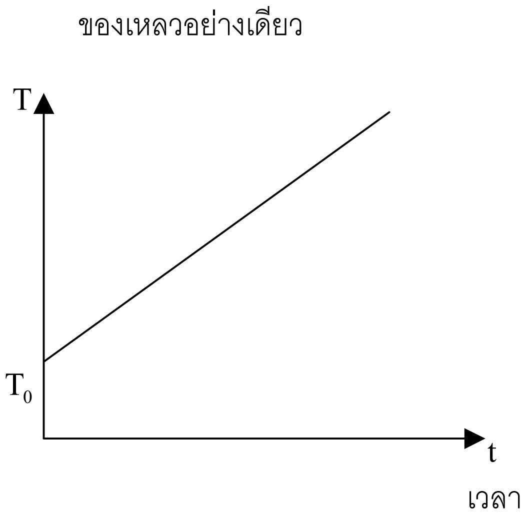
ลวดไฟฟ้าสำหรับให้ความร้อน

จงหาจุดหลอมเหลว และความร้อนจำเพาะของผลึก

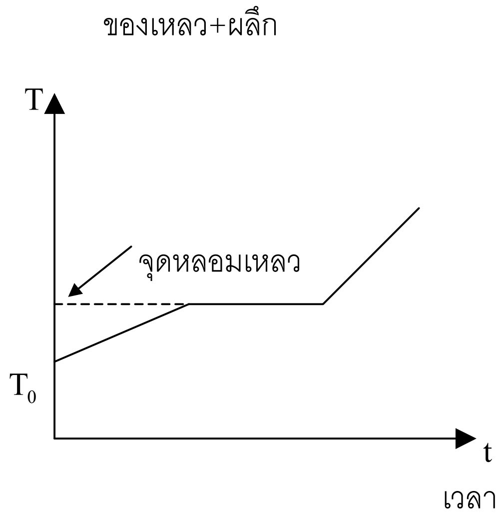
วิธีทำ

1. แบ่งของเหลวออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน
2. ใช้ลวดไฟฟ้าให้ความร้อนแก่ของเหลวส่วนแรก บันทึกอุณหภูมิของของเหลวเป็นฟังก์ชันของเวลา แล้วเขียนกราฟ แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง อุณหภูมิกับเวลา
3. เอาผลึกใส่ลงในของเหลวส่วนที่สอง แล้วใช้ลวดไฟฟ้าให้ความร้อนแก่ของเหลว และผลึก บันทึกอุณหภูมิของๆเหลวเป็นฟังก์ชันของเวลา แล้วเขียนกราฟอุณหภูมิกับเวลา
4. จากกราฟทั้งสอง เราก็สามารถหาจุดหลอมเหลว และความร้อนจำเพาะของผลึกได้

เพราะว่าเวลาผลึกหลอมเหลว อุณหภูมิของมันจะไม่เปลี่ยน ดังนั้น ตำแหน่งที่กราฟของอุณหภูมิคงที่ เมื่อเวลาเปลี่ยน คือจุดหลอมเหลว



รูปที่ 9.7



รูปที่ 9.8

ในกรณีของเหลวเพียงอย่างเดียว

$$Ht \quad = \quad m_L C_L (T_1 - T_0)$$

เมื่อ H คือปริมาณพลังงานความร้อนที่ลวดไฟฟ้าให้ ใน 1 หน่วยเวลา

t คือเวลา

T_1 คืออุณหภูมิที่อ่านได้ และ T_0 คืออุณหภูมิเริ่มต้น

m_L คือมวลของของเหลว

C_L คือความร้อนจำเพาะของๆเหลว

$$\therefore T_1 = T_0 + \frac{Ht}{m_L C_L} \qquad (1)$$

ในทำนองเดียวกันในกรณีของผสม

$$Ht = m_L C_L (T_2 - T_0) + m_C C_C (T_2 - T_0)$$

$$\therefore T_2 = T_0 + \frac{Ht}{m_L C_L + m_C C_C} \qquad (2)$$

ในที่นี้ C_C คือความร้อนจำเพาะของผลึก

m_C คือมวลของผลึก

ดังนั้น ความชันของกราฟแรก $= \dfrac{H}{m_L C_L}$ (3)

ความชันของกราฟหลัง $= \dfrac{H}{m_L C_L + m_C C_C}$ (4)

$$\frac{\text{ความชันแรก}}{\text{ความชันหลัง}} = 1 + \frac{m_C C_C}{m_L C_L}$$

ดังนั้นหากรู้ m_L , m_C , C_L และความชันของกราฟทั้งสอง เราก็สามารถหา C_C ได้

ความรู้เรื่อง จุดหลอมเหลว ปริมาณการคาย และการรับความร้อน มีอยู่ในหลักสูตร นักเรียน อาจจะขาดประสบการณ์การหาความร้อนจำเพาะ โจทย์ข้อนี้จะช่วยเสริมประสบการณ์ที่ขาดนั้น

โจทย์ฟิสิกส์โอลิมปิกครั้งที่ 10

พ.ศ. 2520

ประเทศเชคโกสโลวาเกีย

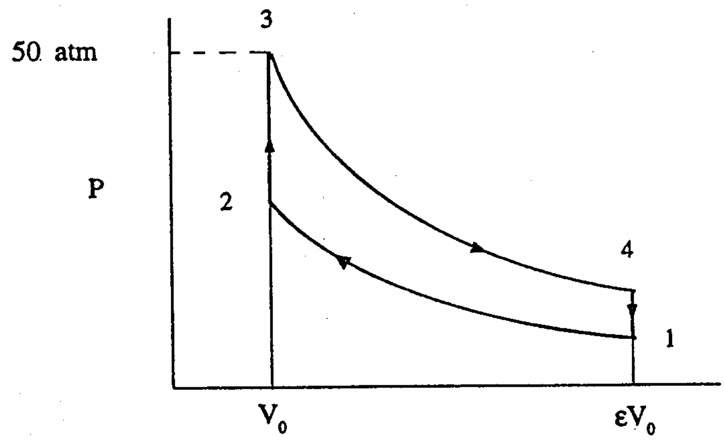
ทฤษฎี

ปัญหาข้อที่ 1

อัตราส่วนของการอัดตัวที่เกิดจากการสันดาปภายในเครื่องจักรความร้อน 4 จังหวะคือ $\varepsilon = 9.5$ ถ้าเครื่องจักรนี้ดูดอากาศ และน้ำมันเชื้อเพลิงที่ $27^{\circ}\mathrm{C}$ ที่ปริมาตร V_0 และความดัน 1 บรรยากาศ (100 กิโลปาสคาล) และต่อมาปริมาตรก๊าซในกระบอกสูบถูกอัดแบบอะเดียแบติคจากสถานะที่ 1 ไปยังสถานะที่ 2 (ดังรูปที่ 10.1)

เมื่อก๊าซผสมระหว่างอากาศกับเชื้อเพลิงระเบิดทำให้ความดันเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่า(ตามรูปที่ 10.1 คือ สถานะ 2 ไปยังสถานะ 3) และจากสถานะ 3 ไปยังสถานะ 4 ก๊าซผสมได้ขยายตัวแบบอะเดียแบติคอีกครั้งจนกระทั่งมีปริมาตรเท่ากับ $9.5\,V_0$ และลิ้นในกระบอกสูบจะเปิดออกเพื่อทำให้ความดันในกระบอกสูบลดลงจนกระทั่งเท่ากับ 1 บรรยากาศ

(อัตราส่วนของการอัดตัว $\varepsilon =$ อัตราส่วนระหว่างค่ามากที่สุด และค่าน้อยที่สุดของปริมาตรก๊าซในกระบอกสูบ และ $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V} = 1.4$)



รูปที่ 10.1

จงคำนวณหา

1. ความดัน และอุณหภูมิของก๊าซ ณ สถานะ 1, 2, 3 และ 4
2. ประสิทธิภาพเชิงความร้อนของเครื่องจักรความร้อน

โจทย์ข้อนี้ต้องการทดสอบความรู้ของนักเรียนเรื่องพลศาสตร์ความร้อน โดยต้องการให้วิเคราะห์จากแผนภาพที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ความดัน – ปริมาตร (สถานะที่ 1 ไปยังสถานะที่ 2) และการขยายตัว (จากสถานะ 3 ไปยังสถานะ 4) ของปริมาตรในกระบอกสูบ ซึ่งเป็นการอัดตัวและขยายตัวแบบอะเดียแบติค กล่าวคือไม่มีความร้อนไหลเข้า – ออกในระบบ หรืออาจกล่าวได้ว่าทรงกระบอกสูบได้ถูกหุ้มด้วยฉนวนเป็นอย่างดี

ในกระบวนการอะเดียแบติค ความสัมพันธ์ระหว่าง ความดัน และปริมาตร เป็นไปตามสมการ

$$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma} \qquad (1)$$

เมื่อ P_1, P_2 คือความดันของก๊าซในสถานะ 1 และสถานะ 2 ตามลำดับ

ส่วน V_1, V_2 คือปริมาตรของก๊าซในสถานะ 1 และสถานะ 2 เช่นกัน

โดยที่ในสมการ (1) นี้ $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V} = 1.4$

จากสมการสถานะสำหรับก๊าซ 1 โมล $PV = RT$ ดังนั้น

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \qquad (2)$$

และจากสมการ (1) โดยการหารกับสมการ (2) เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาตร และอุณหภูมิสำหรับกระบวนการอะเดียแบติคดังนี้

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$$

จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้สำหรับ สถานะ$1 \to$ สถานะ 2 เรารู้ว่า $\varepsilon = 9.5$, $\gamma = 1.4$, $P_1 = 1$ บรรยากาศ , $T_1 = 300$ K, $V_1 = \varepsilon V_0$ และ $V_2 = V_0$ ดังนั้นเราคำนวณ T_2 จากสมการ (3) ได้

$$T_2 = 738 \text{ K}$$

หลังจากที่ทราบค่า T_2 เราสามารถคำนวณหา P_2 ได้จากสมการ (2) สำหรับก๊าซ 1 โมลคือ

$$P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

นั่นคือ จะได้ $P_2 = 23.37$ บรรยากาศ

พิจารณาการเปลี่ยนแปลงจากสถานะ$2 \to 3$ โจทย์กำหนด $P_3 = 2P_2 = 46.7$ บรรยากาศ และจากแผนภาพจะเห็นได้ว่ากระบวนการจากสถานะ$2 \to 3$ เกิดขึ้นที่ปริมาตรคงที่ ดังนั้นจากสมการ (2) เมื่อ $V_2 = V_3$ เราจะได้

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_3}$$

และเมื่อแทนค่า $P_3 = 2P_2$, $T_2 = 738$ K จะได้ $T_3 = 2 \times 738 = 1476$ K

สำหรับกระบวนการจากสถานะ$3 \to 4$ เป็นการขยายตัวของก๊าซแบบอะเดียแบติค และความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิ และปริมาตรเป็นไปตามสมการ (1)

$$T_3V_3^{\gamma-1} = T_4V_4^{\gamma-1}$$

และเมื่อเรารู้ $T_3 = 1476$ K จากสมการนี้เราสามารถคำนวณหา T_4 ได้ $= 600$ K และเมื่อใช้สมการสถานะสำหรับก๊าซ 1 โมล

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_4V_4}{T_4}$$

เพราะว่า $V_1 = V_4 = \varepsilon V_0$, $T_1 = 300$ K และ $T_4 = 600$ K เราคำนวณหาค่า $P_4 = 2$ บรรยากาศ

2. ในการตอบคำถามส่วนนี้ เราต้องการหาประสิทธิภาพ η ของเครื่องจักรความร้อน

เราเริ่มจากนิยามของประสิทธิภาพของเครื่องกลใดๆ η ดังนี้

η = งานที่ได้ / พลังงานความร้อนที่ให้

จากแผนภาพ PV เราจะเห็นได้ว่าในขั้นตอนการเปลี่ยนแปลงจากสถานะ $1 \rightarrow 2$ และสถานะ $3 \rightarrow 4$ เป็นการเปลี่ยนแปลงที่ไม่มีความร้อนไหลเข้าหรือออกจากระบบ เพราะเป็นการเปลี่ยนแปลงแบบอะเดียแบติค สำหรับการเปลี่ยนแปลงจาก $2 \rightarrow 3$ นั้น เพราะ $T_3 > T_4$ ความร้อนจึงไหลเข้าระบบ และในกรณี $4 \rightarrow 1$ เพราะ $T_4 > T_1$ ดังนั้นความร้อนจึงไหลออกจากระบบ

ดังนั้นพลังงานความร้อนไหลเข้า $= C_V m(T_3 - T_2)$ จาก $2 \rightarrow 3$

พลังงานความร้อนที่สูญเสียให้กับสิ่งแวดล้อม $= C_V m(T_4 - T_1)$ จาก $4 \rightarrow 1$

นั่นคือ งานที่ได้จากเครื่องกล $= C_V m[(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)]$

เพราะฉะนั้น η = งานที่ได้ / พลังงานความร้อนที่ให้

$$= \frac{mC_V[(T_3 - T_2) - (T_4 - T_1)]}{mC_V[T_3 - T_2]}$$

$$= 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \tag{4}$$

เพราะการเปลี่ยนแปลงจากสถานะ $1 \rightarrow 2$ เป็นกระบวนการแบบอะเดียแบติค เราจะได้

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1} \tag{5}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับการเปลี่ยนแปลงจากสถานะ $3 \rightarrow 4$ เราได้

$$T_3V_3^{\gamma-1} = T_4V_4^{\gamma-1} \tag{6}$$

และจากแผนภาพ $V_1 = V_4$ และ $V_2 = V_3$

จากสมการ (5) และสมการ (6) เราจะได้

$$\frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2}{T_3} \tag{7}$$

$$1 - \frac{T_1}{T_4} = 1 - \frac{T_2}{T_3}$$

$$\frac{T_4 - T_1}{T_4} = \frac{T_3 - T_2}{T_3}$$

$$\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \frac{T_4}{T_3} = \frac{T_1}{T_2}$$

นั่นคือจากสมการ (4)

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{300}{738} = 0.59$$

ในการทำโจทย์ข้อนี้ นักเรียนต้องรู้จักการเปลี่ยนแปลงแบบอะเดียบาติค สมการของก๊าซ การทำงานของเครื่องจักรความร้อน รวมทั้งการหาประสิทธิภาพของเครื่องจักร เนื่องจากหัวข้อเหล่านี้ไม่มีในหลักสูตรชั้นมัธยมปลาย แต่มีในหลักสูตรระดับมหาวิทยาลัย

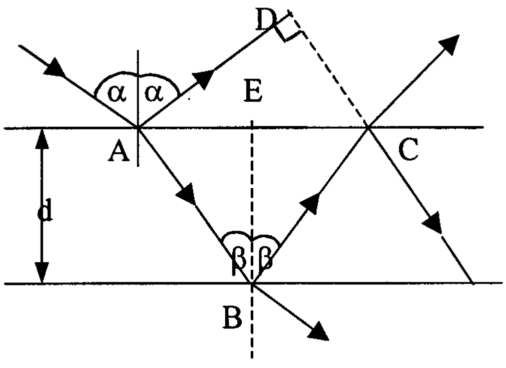
ดังนั้น นักเรียนที่ไม่มีความรู้เรื่องนี้มาก่อน จะทำไม่ได้ ส่วนนักเรียนที่รู้ ก็จะเห็นว่าการคำนวณเป็นไปอย่างตรงไปตรงมา และเป็นตัวอย่างมาตราฐานที่ใช้ประกอบการสอนในระดับมหาวิทยาลัย ซึ่งพบว่า ประสิทธิภาพของเครื่องจักรความร้อนที่ทำงานลักษณะนี้ คือ

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma - 1}$$

ปัญหาข้อที่ 2

แสงขาวตกกระทบฟิล์มสบู่บางเป็นมุม 30 องศากับแนวดิ่ง แสงที่สะท้อนส่วนใหญ่เป็นแสงสีเขียวที่มีความยาวคลื่น 0.5 ไมโครเมตร อยากทราบว่า

1. ฟิล์มสบู่จะต้องมีความหนาน้อยที่สุดเท่าไร
2. ถ้าสังเกตจากแนวดิ่ง แสงที่สะท้อนออกมาจะเป็นสีอะไร



รูปที่ 10.2

โจทย์แสงข้อนี้เป็นเหตุการณ์ที่เราทุกคนเคยเห็น คือแสงที่สะท้อนจากผิวฟองสบู่จะมีสีต่างๆ ขึ้นกับมุมที่สังเกต สีที่ปรากฏนี้เกิดจากการแทรกสอดของแสงที่สะท้อนจากผิวด้านใน และผิวด้านนอกของฟองสบู่

ถ้าเราให้ความหนาของฟิล์มสบู่เป็น d ตามรูปที่ 10.2 จะเห็นได้ว่า

$\because AB = BC = d \sec\beta$

ดังนั้น
$$AB + BC = \frac{2d}{\cos\beta} \quad (1)$$

เพราะแสงเคลื่อนที่ในตัวกลาง ดังนั้นระยะทางเรขาคณิตที่แสงเคลื่อนที่คูณด้วยดัชนีหักเหของตัวกลาง คือทางเดินทัศน์ (optical path) จาก A ไป B และ C

$$ABC = \frac{2d\mu}{\cos\beta} \quad (2)$$

เมื่อ μ คือดัชนีหักเหของฟิล์มสบู่

จาก ΔACD เรารู้ว่า

$$AD = AC\sin\alpha \quad (3)$$

และจาก ΔABE

$$AC = 2AE = 2d\tan\beta \quad (4)$$

จากสมการ (3) และ(4) เราจะได้ AD ซึ่งเป็นระยะทางที่แสงเคลื่อนที่ในอากาศจาก $A \rightarrow D$

$$AD = AC\sin\alpha = 2d\tan\beta\sin\alpha \quad (5)$$

เพราะฉะนั้น ความแตกต่างของทางเดินทัศน์ที่แสงเคลื่อนที่จาก $A \rightarrow D$ และจาก $A \rightarrow B \rightarrow C$ ซึ่งเกิดจากการสะท้อนจากผิวด้านนอก และด้านในของฟิล์มสบู่ คือ

$$ABC - AD = \frac{2d\mu}{\cos\beta} - 2d\tan\beta\sin\alpha \quad (6)$$

ซึ่งเงื่อนไขที่แสงทั้งสองรังสีจะแทรกสอดแบบเสริม คือความแตกต่างของทางเดินทัศน์ที่จะต้องเท่ากับ $(2n+1)\frac{\lambda}{2}$ โดยที่ $n = 0,1,2,3,\ldots$ ทั้งนี้เพราะแสงส่วน AD มีการเปลี่ยนเฟสไป $\frac{\pi}{2}$ นั่นคือ จากสมการ (6) เราจะได้

$$ABC - AD = \frac{2d\mu}{\cos\beta} - 2d\tan\beta\sin\alpha = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \quad (7)$$

ความหนา d_{min} ที่น้อยที่สุดที่ทำให้เราเห็นแสงที่สะท้อนแทรกสอดกัน สามารถหาได้จากสมการ (7) โดยให้ $n = 0$ ดังนั้นเราจะได้

$$2d_{min} = \frac{\cos\beta}{(\mu - \sin\alpha\sin\beta)}\frac{\lambda}{2} \quad (8)$$

เพราะว่าการหักเหของแสงผ่านตัวกลางสองชนิดที่มีดัชนีหักเหต่างกัน (อากาศ-ฟิล์มสบู่) เป็นไปตามกฎของสเนล คือ

$$\sin\alpha = \mu\sin\beta$$

เพราะฉะนั้น

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\mu} \Rightarrow \cos\beta = \sqrt{1-\frac{\sin^2\alpha}{\mu^2}}$$

หลังจากที่แทนค่า $\cos\beta$ ลงในสมการ (8) เราจะได้

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4\sqrt{\mu^2 - \sin^2\alpha}} \tag{9}$$

โจทย์กำหนดให้แสงตกกระทบผิวนอกของฟิล์มสบู่เป็นมุม $\alpha = 30^\circ$ แสงที่สะท้อนออกมาเป็นแสงสีเขียวที่มีความยาวคลื่น $\lambda_{\text{เขียว}} = 0.5\times10^{-6}$ เมตร และเมื่อดัชนีหักเห $\mu = 1.33$ เราจะได้ความหนาที่น้อยที่สุดของฟิล์มสบู่มีค่าเท่ากับ 10^{-7} เมตร หรือ 0.1 ไมโครเมตร

ถ้าเราให้ μ และ $\lambda_\perp$ เป็นดัชนีหักเห และความยาวคลื่นของแสงที่ตกกระทบตั้งฉากกับฟิล์มสบู่ ดังนั้นเมื่อ $\alpha = 0, \beta = 0, \cos\beta = 1, \sin\alpha = \sin\beta = 0$ จากสมการ (8) เราได้

$$2d_{\min}\mu = \frac{\lambda_\perp}{2}$$

หลังจากแทนค่า $\mu = 1.33$ และ $d = 0.1$ ไมโครเมตร จะได้

$$\lambda_\perp = 0.53 \text{ ไมโครเมตร}$$

ในกรณีนี้แสงที่ปรากฏจะเป็นแสงสีเหลือง

ทฤษฎีการแทรกสอดของแสง ทั้งแบบเสริม และทำลายมีในหลักสูตรชั้นมัธยมปลาย แต่ก็ไม่ได้ละเอียดนัก โจทย์ข้อนี้เป็นโจทย์มาตรฐานที่ใช้สอนในระดับมหาวิทยาลัย

ในการทำโจทย์ นักเรียนต้องรู้ เงื่อนไขการแทรกสอด แบบเสริม เมื่อแสงสะท้อนจากตัวกลางที่มีความหนา (มีดัชนีหักเห) ต่างกัน

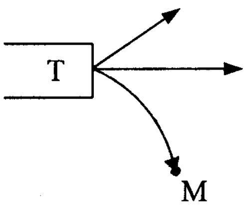
นักเรียนต้องรู้จักคำนวณหา ทางเดินทัศน์ (optical path) ของแสงว่าสามารถหาได้จากการเอาระยะทางเรขาคณิตคูณด้วยดัชนีหักเห จากนั้นเงื่อนไขที่ทำให้เกิดการแทรกสอดแบบเสริมก็สามารถหาได้อย่างตรงไปตรงมา โจทย์มิได้ทดสอบความคิดริเริ่ม แต่เป็นการทดสอบความจำเสียมากกว่า และความละเอียดในการคำนวณ

ประการสุดท้ายที่โจทย์ต้องการรู้ คือ นักเรียนรู้หรือไม่ว่า แสงสีต่างๆนั้น มีความยาวคลื่นอะไรบ้าง

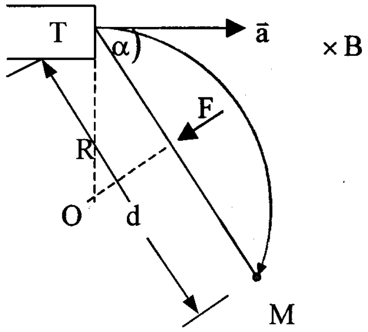
ปัญหาข้อที่ 3

ปืนอิเล็กตรอนที่มีความต่างศักย์ $U = 1000$ โวลท์ ยิงอิเล็กตรอนตามรูปที่ 10.3 ซึ่งแสดงไว้ข่างล่างนี้ ถ้าต้องการให้อิเล็กตรอนที่ออกจากจุด T ไปชนเป้า M ที่อยู่ห่างจากจุด T เป็นระยะทาง $d = 5$ ซ.ม. และแนว TM ทำมุม α กับแนวของเวกเตอร์ $\vec{a}$ จงหาองค์ประกอบของสนามแม่เหล็กในทิศต่อไปนี้

1. ตั้งฉากกับระนาบที่มีเวกเตอร์ $\vec{a}$ และระยะทาง $\vec{d}$
2. ขนานกับ TM



รูปที่ 10.3



รูปที่ 10.4

ในการทำโจทย์การเคลื่อนที่ของประจุไฟฟ้าในสนามแม่เหล็กข้อนี้ นักเรียนต้องรู้แรงที่กระทำต่อประจุที่กำลังเคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็ก และความรู้ทางกลศาสตร์ (กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน และหลักการถาวรของพลังงาน) เพื่อหาสนามแม่เหล็ก

เพราะว่าแรงที่กระทำต่ออิเล็กตรอน (ซึ่งมีประจุ $= -q$)ที่กำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{v}$ ในสนามแม่เหล็กความเข้ม $\vec{B}$ ถูกบรรยายด้วยสมการ

$$\vec{F} = -q\vec{v} \times \vec{B}$$

ดังนั้น เมื่ออิเล็กตรอนมีความเร็ว $\vec{v}$ ในแนวตั้งฉากกับสนามแม่เหล็กที่สม่ำเสมอ และมีทิศพุ่งเข้าไปในระนาบ มันจะถูกแรงสม่ำเสมอกระทำในทิศที่ตั้งฉากกับการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอน และทำให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นวงกลม นั่นคือการเคลื่อนที่ที่ถูกบรรยายด้วยสมการ

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \qquad (1)$$

ในที่นี้

v เป็นความเร็วในแนวเส้นสัมผัสของวงกลม ซึ่งในกรณีนี้จะมีค่าคงที่เนื่องจากสนามแม่เหล็กมีขนาดสม่ำเสมอ

m คือมวลของอิเล็กตรอน

B คือความเข้มของสนามแม่เหล็กที่สม่ำเสมอซึ่งมีทิศตั้งฉากพุ่งเข้าไปในระนาบของรูป

และ R คือรัศมีของวงโคจร

จากหลักความถาวรของพลังงาน พลังงานของอิเล็กตรอนที่ออกมาจากปืนอิเล็กตรอนซึ่งมีความต่างศักย์ U จะเปลี่ยนเป็นพลังงานจลน์ทำให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v นั่นคือ

$$qU = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2}$$

จากสมการ (1) จะได้

$$R = \frac{mv}{qB} \tag{3}$$

และจากสมการ (2) เราจะได้

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \tag{4}$$

จากสมการ (3) และสมการ (4) จะได้

$$R = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qU}{m}} \tag{5}$$

และจากเรขาคณิตของรูป จะเห็นได้ว่า

$$\sin\alpha = \frac{d}{2R} \tag{6}$$

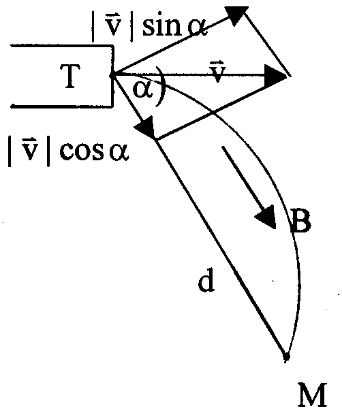
โดยการแทนค่า R จากสมการ (5) ลงในสมการ (6) เราสามารถเขียนสนามแม่เหล็ก B ในเทอมของมวล และประจุของอิเล็กตรอน ความต่างศักย์ที่เร่งอิเล็กตรอน และโครงสร้างเชิงเรขาคณิตของทางโคจร

$$B = \frac{2\sin\alpha}{d}\sqrt{\frac{2mU}{q}} \tag{7}$$

โดยการแทนค่าข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ คือ $U = 10^3$ โวลท์ , $m = 9.1\times10^{-31}$ กิโลกรัม , $e = 1.6\times10^{-19}$ คูลอมบ์ , $d = 5\times10^{-2}$ เมตร และ $\alpha = 60^\circ$ ในสมการ (7) เราจะได้ความเข้มสนามแม่เหล็กในทิศตั้งฉากกับระนาบของการเคลื่อนของอิเล็กตรอน

$$B = 3.8\times10^{-3} \text{ เทสลา}$$

ในการหาความเข้มของสนามแม่เหล็กที่มีทิศขนานกับแนว TM แผนภาพของเวกเตอร์ความเร็วแสดงทิศการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนดังนี้



รูปที่ 10.5

ในกรณีนี้เราจะเห็นได้ว่าความเร็วของอิเล็กตรอนในทิศที่ตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$ คือ $v\sin\alpha$ ดังนั้น อิเล็กตรอนจะถูกแรงกระทำอันเนื่องมาจากสนามแม่เหล็กที่มีขนาดเท่ากับ $qvB\sin\alpha$ และมีทิศพุ่งเข้าหาจุดศูนย์กลางของวงกลม ตามสมการ

$$\frac{mv^2\sin^2\alpha}{R} = qvB\sin\alpha \tag{8}$$

$$R = \frac{mv\sin\alpha}{qB} \tag{9}$$

เพราะว่าสนามแม่เหล็กมีขนาดสม่ำเสมอ ดังนั้นอิเล็กตรอนจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยความเร็วที่สม่ำเสมอ $v\sin\alpha$ ในแนวเส้นสัมผัสของวงกลม เราสามารถคำนวณหาคาบของการเคลื่อนที่ได้จากนิยามของคาบ T

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{10}$$

และเมื่อความเร็วเชิงเส้น $= v\sin\alpha$ และวงกลมรัศมี R
ดังนั้น

$$\omega = \frac{v\sin\alpha}{R} \tag{11}$$

นั่นคือ เราจะได้คาบ T ในเทอมของสนามแม่เหล็ก และมุม α $= \dfrac{2\pi R}{v\sin\alpha}$ แต่จากสมการ (9)

$R = \dfrac{mv\sin\alpha}{qB}$ ดังนั้น

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \tag{12}$$

ส่วนความเร็วของอิเล็กตรอนในแนวขนานกับสนามแม่เหล็ก $\vec{B}$ (ตามแนว TM)นั้นจะไม่ถูกสนามแม่เหล็กรบกวน ความเร็วจะคงที่ $= v\cos\alpha$ ดังนั้นเมื่อพิจารณาภาพรวมของการเคลื่อนที่ทั้งในแนวตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก และในแนวขนานกับสนามแม่เหล็ก อิเล็กตรอนจะเคลื่อนที่เป็น

รูปเกลียวรอบแกน TM กล่าวคือมันจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมที่มีรัศมี $R = \frac{mv\sin\alpha}{qB}$ โดยที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ $v\cos\alpha$ ไปตามแนว TM และทุกครั้งที่อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ครบรอบจุดศูนย์กลางของวงกลมจะเลื่อนตำแหน่งไป P ในแนว TM เราเรียกค่า P นี้ว่า ค่าพิทช์ (pitch) ซึ่งค่าพิทช์ P นี้หาได้จากความเร็วในแนว TM คูณด้วยคาบ T

จากสมการ (4) และสมการ (12) เราจะได้

$$P = T(v\cos\alpha) = \frac{2\pi}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}\cos\alpha$$

ดังนั้นถ้าจะให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่เป็นวงกลมครบรอบ N ครั้งก่อนที่จะชนเป้าที่ตำแหน่ง M นั่นคือเราจะต้องให้ ระยะทาง จาก $T \rightarrow M$ เป็นจำนวนเต็มเท่าของ P นั่นคือ

$$d = NP$$

โดยที่ $N = 1, 2, 3, \ldots$

$$\therefore \qquad d = NP = \frac{2\pi N}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}\cos\alpha$$

$$B = \frac{2\pi}{d}N\sqrt{\frac{2mU}{q}}\cos\alpha$$

และถ้าเราแทนค่า $N = 1$

$d = 5\times10^{-2}$ เมตร

$U = 10^{3}$ โวลท์

$m = 9.1\times10^{-31}$ กิโลกรัม

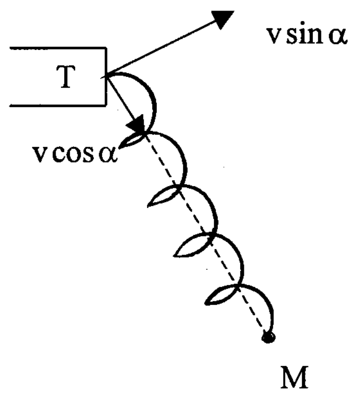
และ $\alpha = 60^{\circ}$

ในสมการนี้ เราก็จะได้ $B = 6.9\times10^{-3}$ เทสลา

ความเข้มสนามแม่เหล็กที่น้อยที่สุดในแนว TM ที่จะทำให้อิเล็กตรอนที่ออกจาก T พุ่งชน TM ได้มีค่า 6.9×10^{-3} เทสลา

ทฤษฏีการเคลื่อนที่ของประจุในสนามแม่เหล็กมีในหลักสูตรมัธยม แต่มักจะเน้นการเคลื่อนที่ๆมีเวกเตอร์ความเร็วตั้งฉากกับสนามแม่เหล็ก ซึ่งเป็นกรณีง่าย ดังนั้น นักเรียนจะไม่ประสบปัญหาในการทำโจทย์ข้อนี้ ในส่วนแรก แต่ในส่วนที่สอง เมื่อเวกเตอร์ความเร็วทำมุมกับสนามแม่เหล็ก หลักสูตรมิได้กล่าวถึงการเคลื่อนที่เป็นเกลียว นักเรียนจะมีความยุ่งยากในการทำเล็กน้อย

โจทย์ข้อนี้ดี ที่สามารถจำแนกเด็กเก่ง เด็กอ่อนได้ และในกรณีสุดท้ายที่ให้คำนวณหาสนามแม่เหล็กในแนว TM นั้น เด็กเก่งจะตอบได้ว่า $d = NP$ เมื่อ N เป็นเลขจำนวนเต็ม ดังนั้นคำตอบของ B จะมีได้หลายค่า แต่ค่าน้อยที่สุด เป็นคำตอบที่เขาต้องการ



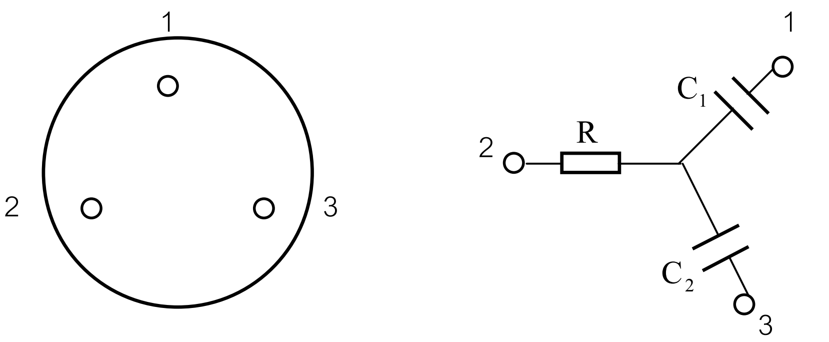
รูปที่ 10.6

ปฏิบัติ

กำหนดกล่องดำมาให้กล่องหนึ่ง ซึ่งภายในมีตัวต้านทาน R ตัวจุสองตัว ต่อกันเป็นรูปดาว ดังรูปที่ 10.6 กล่องนี้มีขั้ว 3 ขั้ว และนักเรียนไม่สามารถเปิดออกดูภายในได้ จงหาความต้านทานและค่าความจุ

โดยใช้อุปกรณ์ต่อไปนี้

1. แหล่งความต่างศักย์กระแสสลับ ซึ่งทำงานที่ความถี่ตั้งแต่ 0.1 กิโลเฮิรตซ์ ถึง10 กิโลเฮิรตซ์
2. โวลท์มิเตอร์แบบ AC และแอมมิเตอร์แบบ AC



(a) (b)

รูปที่ 10.6

ตามรูป (b) ความต้านทาน AC หรือ impedance ระหว่างขั้ว

1-2 $$Z_{12} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 {C_1}^2}}$$

2-3 $$Z_{23} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 {C_2}^2}}$$

3-1 $$Z_{31} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

ในการหาขั้วที่เป็น 1กับ3 นั้น เราดำเนินการดังนี้

1. ส่งสัญญาณ AC เข้าขั้ว 1-2

   2-3

   3-1 ทีละคู่ทุกครั้งบันทึกความถี่ ความต่างศักย์ และกระแส แล้วเปลี่ยนความถี่ ทำการทดลองซ้ำ
2. เขียนกราฟของ V/I เป็นฟังก์ชัน $\frac{1}{f}$

ขั้วคู่ใดที่ให้กราฟเส้นตรง แสดงให้เห็นว่าขั้วคู่นั้นเป็นขั้ว 1กับ3 ซึ่งมีตัวจุ 2 ตัวต่อกันแบบอนุกรม

3. เมื่อรู้ขั้ว 1กับ3 ต่อไปก็ส่งสัญญาณ AC เข้าขั้ว 1-2 และ 3-2 ซึ่งมีตัวจุ C_1 ต่อเป็นอนุกรมกับ R และตัวจุ C_2 ต่อเป็นอนุกรมกับ R ตามลำดับ

โดยการใช้ความถี่สูง (10 กิโลเฮิรตซ์) จะได้ $Z_{12} \approx R$

$$\because \quad \frac{1}{\omega C_1} \approx 0$$

$$\frac{\text{ค่าความต่างศักย์ } V}{\text{กระแส } I} \text{ อ่านได้ } = Z_{12} = R$$

ดังนั้น $R = V / I$

แต่ถ้าเราใช้ความถี่ต่ำ (0.1 กิโลเฮิรตซ์) $Z_{12} \approx \dfrac{1}{\omega C_1}$

ดังนั้น
$$\frac{V}{I} = \frac{1}{\omega C_1}$$
$$C_1 = \frac{I}{\omega V}$$

ทำการทดลองซ้ำกับ ขั้ว 3-2 ซึ่งมีตัวจุ C_2 ต่อแบบอนุกรมกับตัวต้านทาน R ดังนั้น เมื่อใช้ความถี่สูง $V / I = R = Z_{23}$

และ เมื่อใช้ความถี่ต่ำ $V / I = Z_{23} = \dfrac{1}{\omega C_2} \Rightarrow C_2 = \dfrac{I}{\omega V}$

ดังนั้น เราก็รู้ค่า R, C_1, C_2 ได้หมด

ทฤษฎี Impedance ของกระแสสลับ ไม่มีในหลักสูตร

การทดลองที่ใช้กระแสสลับ ก็ไม่มีในหลักสูตร

ในการทำโจทย์ข้อนี้ นักเรียนจึงต้องมีความรู้เรื่องนี้ และรู้ค่า Impedance เป็นฟังก์ชันของความถี่

รวมทั้งรู้ด้วยว่า ที่ความถี่สูงๆ Impedance ของตัวจุ ≈ 0

ที่ความถี่ต่ำๆ Impedance ของตัวจุ $\approx \dfrac{1}{\omega C}$