



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ “วิเคราะห์ข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ
เพื่อพัฒนาการเรียน การสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทย”

โดย ผศ. สุวิมล ฮอลด์ และคณะ

1 มิถุนายน 2543

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ “วิเคราะห์ข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ เพื่อพัฒนาการเรียน การสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทย

คณะผู้วิจัย

สังกัด

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. ผศ. สุวิมล สอดดี | ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 2. รศ. ดร. วิเชียร เลาหโกศล | ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 3. ผศ. ดร. ทศนีย์ อุดมกะวานิช | ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 4. ดร. วิษณุ อภิสิทธิ์กุล | ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 5. ผศ. ัญญนาถ ไกรภพ | ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| 6. ผศ. ชุวัณย์ พันธกัณ | ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

ชุดโครงการวิเคราะห์ข้อสอบโอลิมปิกระหว่างประเทศ
เพื่อพัฒนาการเรียน การสอนคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในประเทศไทย

คำนำ

เป็นที่ทราบกันดีว่านักเรียน นิสิต นักศึกษาที่เรียนสายวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ ส่วนใหญ่ขาดทักษะในการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ ข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศเป็นข้อสอบที่เน้นทักษะการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์พร้อมทั้งพิสูจน์คำตอบที่ได้ด้วย การวิเคราะห์ข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศน่าจะเป็นวิธีการหนึ่งที่จะช่วยเป็นแนวทางในการพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน เพื่อให้โรงเรียนต่าง ๆ ได้ทราบว่าควรจะพัฒนาทักษะของนักเรียนในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์นั้น ครูควรจะมีความรู้พื้นฐานในด้านใดบ้าง และหากต้องการให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ดีขึ้นในการสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ครูควรจะต้องเสริมความรู้ส่วนที่นอกเหนือจากหลักสูตรในเรื่องใดบ้าง การผลิตนักเรียนที่มีทักษะในการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ เป็นการป้อนวัตถุดิบที่มีคุณภาพเข้าศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษา อันจะนำไปสู่การพัฒนาประเทศในอนาคตได้

จากที่กล่าวข้างต้นข้าพเจ้าและคณะทำงานจึงได้ทำการวิเคราะห์ข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศตั้งแต่ปี ค.ศ. 1994 ถึง ค.ศ. 1999 โดยเลือกข้อสอบตามเนื้อหาซึ่งจัดเป็นกลุ่มได้ 4 กลุ่ม ดังนี้ : สมการเชิงฟังก์ชัน ทฤษฎีจำนวนและคอมบินาทอริก อสมการ เรขาคณิตและอสมการเชิงเรขาคณิต และเลือกโดยให้มีข้อสอบอย่างน้อย 1 ข้อในแต่ละกลุ่มและข้อสอบในกลุ่มเดียวกันใช้เทคนิคการแก้ปัญหาก็แตกต่างกัน

ข้าพเจ้าและคณะทำงานทำรายงานผลการวิเคราะห์ข้อสอบแต่ละข้อโดยแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่ 1. เฉลยข้อสอบ และส่วนที่ 2. สรุปผลการวิเคราะห์

ส่วนที่เป็นการเฉลยข้อสอบนั้นเนื่องจากผู้เขียนส่วนใหญ่ในคณะทำงานเป็นผู้ที่เขียนเฉลยตีพิมพ์ในวารสารและหนังสือที่ปรากฏรายชื่อในบรรณานุกรม และวัตถุประสงค์หลักในการทำวิจัยนี้เพื่อวิเคราะห์ข้อสอบเพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน ดังนั้นเฉลยข้อสอบบางข้อจึงลอกจากวารสารและหนังสือในบรรณานุกรม รายละเอียดดังนี้

ข้อ 1. ในกลุ่ม Number Theory (IMO'1994 ข้อ 6.) ลอกจาก [1]

ข้อ 2. ในกลุ่ม Number Theory (IMO'1996 ข้อ 4.) ลอกจาก [3]

ข้อ 2. ในกลุ่มผสมผสานระหว่าง Combinatorics และ Number Theory (IMO'1996 ข้อ 1.) ลอกจาก [3]

ข้อ 4. ในกลุ่ม Number Theory (IMO'1998 ข้อ 3.) ลอกจาก [4]

ข้อ 1. ในกลุ่ม Inequalities (IMO'1994 ข้อ 1.) ลอกจาก [1]

ข้อ 1. ในกลุ่ม Geometry (IMO'1995 ข้อ 3.) และข้อ 1. ในกลุ่ม Geometric Inequalities (IMO'1995 ข้อ 5.) ลอกจาก [2]

ข้อ 2. ในกลุ่ม Geometry (IMO'1996 ข้อ 2.) ลอกจาก [3]

ข้อ 3. ในกลุ่ม Geometry (IMO'1999 ข้อ 1.) ลอกจาก [5]

สรุปผลการวิเคราะห์แบ่งออกเป็นหัวข้อต่าง ๆ ดังนี้ : พื้นฐานที่ต้องรู้ ขั้นตอนของความคิด ในการตอบคำถาม สิ่งที่ต้องการวัด สิ่งที่ได้เรียนรู้ สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร และการเชื่อมโยงความรู้ การวิเคราะห์ข้อสอบบางข้อผู้เขียนบางท่านได้รวมสิ่งที่ได้เรียนรู้และการเชื่อมโยงความรู้ไว้ด้วยกันใน หัวข้อสิ่งที่ได้เรียนรู้ ข้อเหล่านั้นจึงไม่มีหัวข้อการเชื่อมโยงความรู้

ข้าพเจ้าและคณะทำงานหวังเป็นอย่างยิ่งที่จะให้รายงานฉบับนี้เป็นประโยชน์ต่อการ พัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทย เพื่อผลิตนักเรียนที่มีทักษะในการแก้ปัญหาทาง คณิตศาสตร์ซึ่งเป็นการป้อนวัตถุดิบที่มีคุณภาพเข้าศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษา อันจะนำไปสู่การพัฒนา ประเทศในอนาคต

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าและคณะทำงานขอขอบคุณรองศาสตราจารย์สุชาติา ชินะจิตร ที่แนะนำให้ ทำการวิจัยนี้ สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัยที่ได้ให้ทุนอุดหนุนการวิจัย อาจารย์สุพัทธา ผาติวิสันต์ ที่ช่วยจัดหาหนังสืออ้างอิง และคุณสุรกิจ กิจจะปฐมนะ ที่ช่วยพิมพ์รายงานฉบับนี้จนสำเร็จ

บทคัดย่อ

รายงานฉบับนี้เป็นการวิเคราะห์ข้อสอบบางข้อจากข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศตั้งแต่ปี ค.ศ. 1994 ถึง ค.ศ. 1999 เพื่อพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในประเทศไทย ข้อสอบเหล่านี้ถูกแบ่งออกเป็น 4 กลุ่มดังนี้ : สมการเชิงฟังก์ชัน ทฤษฎีจำนวนและคอมบินาทอริก อสมการ เรขาคณิตและอสมการเชิงเรขาคณิต โดยเลือกโจทย์เพื่อให้มีข้อสอบอย่างน้อย 1 ข้อในแต่ละกลุ่ม และข้อสอบในกลุ่มเดียวกันใช้เทคนิคการแก้ปัญหาที่แตกต่างกัน การรายงานผลการวิเคราะห์ข้อสอบแต่ละข้อจะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน : ส่วนที่ 1 เฉลยข้อสอบ และส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์ ส่วนที่สรุปผลการวิเคราะห์แบ่งออกเป็นหัวข้อต่าง ๆ ดังนี้ : พื้นฐานที่ต้องรู้ ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม สิ่งที่ต้องการวัด สิ่งที่ได้เรียนรู้ สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร และการเชื่อมโยงความรู้

Abstract

In this paper some problems in the international mathematical olympiad from the year 1994 to 1999 are analyzed in order to improve mathematics learning and teaching in Thailand. These problems are classified into 4 areas as follows : functional equations, number theory and combinatorics, inequalities, and geometry and geometric inequalities. The problems are selected in such a way that at least one problem in each area is chosen and the problems in the same area use different techniques to solve. The report on each problem consists of 2 parts : solution, and analysis. The analysis part is divided in the following categories : basic knowledge needed, main idea that leads to the solution, what to examine, what can be learned from the problem, what is missing in the high school program, and how knowledge is combined.

สารบัญ

	หน้า
1. Functional Equation	1
1. IMO' 1997 ข้อ 6.	1
2. IMO' 1998 ข้อ 6.	5
3. IMO' 1999 ข้อ 6.	8
2. Number Theory และ Combinatorics	11
2.1 Number Theory	11
1. IMO' 1994 ข้อ 6.	11
2. IMO' 1996 ข้อ 4.	12
3. IMO' 1997 ข้อ 5.	15
4. IMO' 1998 ข้อ 3.	19
2.2 Combinatorics	24
1. IMO' 1997 ข้อ 4.	24
2. IMO' 1998 ข้อ 2.	29
2.3 ผสมผสานระหว่าง Combinatorics และ Number Theory	31
1. IMO' 1995 ข้อ 6.	31
2. IMO' 1996 ข้อ 1.	35
3. Inequalities	40
1. IMO' 1994 ข้อ 1.	40
2. IMO' 1995 ข้อ 2.	43
3. IMO' 1999 ข้อ 2.	45
4. Geometry และ Geometric Inequalities	51
4.1 Geometry	51
1. IMO' 1995 ข้อ 3.	51
2. IMO' 1996 ข้อ 2.	57
3. IMO' 1999 ข้อ 1.	60
4.2 Geometric Inequalities	62
1. IMO' 1995 ข้อ 5.	62

1. Functional Equation

1. IMO' 97 (ข้อ 1.)

สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ให้ $f(n)$ แทนจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะสามารถแทน n ในรูปกำลังของ 2 โดยที่กำลังไม่เป็นลบ

ตัวแทนซึ่งมีความแตกต่างกันเพียงลำดับของตัวบวกให้คิดเป็นรูปเดียวกัน ตัวอย่างเช่น $f(4) = 4$ เพราะว่า 4 มีตัวแทนได้ 4 แบบ ดังนี้

$$4; 2 + 2; 2 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1$$

จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 3$ ใด ๆ

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$$

ส่วนที่ 1 : เฉลยข้อสอบ

วิธีทำ เราจะพิสูจน์ $f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$ ก่อน โดยแสดงเป็นขั้นดังนี้

$$(1) \quad f(2k+1) = f(2k) \quad \text{ทุกจำนวนเต็มบวก } k$$

$$(2) \quad f(2k) = f(2k-1) + f(k) \quad \text{ทุกจำนวนเต็มบวก } k$$

$$(3) \quad f(2k) = f(0) + f(1) + \dots + f(k) \quad \text{ทุกจำนวนเต็มบวก } k$$

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

บทพิสูจน์ 1 แต่ละตัวแทนของ $2k+1$ (จำนวนคี่) ย่อมมีตัวบวกซึ่งเป็น 1 อย่างน้อยหนึ่งตัวเสมอ เมื่อเราเอาตัวบวกซึ่งเป็น 1 ออกจากตัวแทนนี้หนึ่งตัว จะได้ตัวแทนของ $2k$ (จำนวนคู่) ตัวหนึ่งเสมอ ในนัยกลับกันแต่ละตัวแทนของ $2k$ (จำนวนคู่) เมื่อเราเติม 1 เป็นตัวบวกไปอีกหนึ่งตัวย่อมได้ตัวแทนหนึ่งของ $2k+1$ เสมอ จึงสรุปได้ว่า

$$f(2k+1) = f(2k)$$

บทพิสูจน์ 2 เราจัดตัวแทนของ $2k$ เป็น 2 ประเภทคือประเภทที่มีตัวบวก 1 ปรากฏอยู่ และประเภทที่ไม่มี 1 ปรากฏเป็นตัวบวกอยู่เลย

สำหรับประเภทแรกในทำนองเดียวกับบทพิสูจน์ 1 เราจะได้ว่าจำนวนตัวแทนของ $2k$ ในประเภทนี้เท่ากับ $f(2k-1)$ (โดยการเอาตัวบวก 1 ออกจากตัวแทนของ $2k$)

สำหรับประเภทที่ 2 เราหารแต่ละตัวบวกของตัวแทนของ $2k$ ในประเภทนี้ด้วย 2 จะได้ตัวแทนของ k ในนัยกลับกันแต่ละตัวแทนของ k เราคูณแต่ละตัวบวกด้วย 2 จะได้ตัวแทนของ $2k$ ดังนั้นจำนวนตัวแทนประเภทนี้ของ $2k$ เท่ากับ $f(k)$ สรุปได้ว่า

$$f(2k) = f(2k-1) + f(k)$$

บทพิสูจน์ 3 เราสังเกตเห็นว่าถ้าเรากำหนดให้ $f(0) = 1$ (เพื่อความสะดวก) จะได้ว่า (1) ยังคงเป็นจริงสำหรับ $k = 0$ และ (2) ยังคงเป็นจริงสำหรับ $k = 1$ ดังนั้นเราได้จาก (1) และ (2) ว่า

$$\begin{aligned} f(k) &= f(2k) - f(2k-1) \\ &= f(2k) - f(2k-2) \quad \text{ทุก } k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

ฉะนั้น
$$\sum_{k=1}^i f(k) = \sum_{k=1}^i (f(2k) - f(2k-2)) = f(2i) - f(0)$$

นั่นคือ
$$f(2i) = f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(i) \quad \text{ทุกจำนวนนับ } i$$

ต่อไปเราจะแสดง $f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}$

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันไม่ลด ผลอันนี้ประกอบกับ $f(1) = 1$ และ (3) จะได้

$$\begin{aligned} f(2i) &= 2 + f(2) + \dots + f(i) \\ &\leq 2 + (i-1)f(i) \\ &\leq if(i) \quad \text{ทุกจำนวนนับ } i \geq 2 \end{aligned}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อ $i = 2^{j-1}$ โดยที่ j เป็นจำนวนนับใดๆ จะได้

$$f(2^j) \leq 2^{j-1} f(2^{j-1})$$

เราใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ แสดงได้ว่า $f(2^n) \leq 2 \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้น
$$f(2^n) = 2^{\frac{n^2}{2}} \quad \text{ทุกจำนวนนับ } n \geq 3$$

ในการแสดงอสมการอีกข้างหนึ่ง เราแบ่งการพิสูจน์เป็นสองขั้น ดังนี้

(4) สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $b \geq a \geq 0$ และ a มีความเป็นคู่-คี่เหมือนกับ b

$$f(b+1) - f(b) \geq f(a+1) - f(a)$$

(5)
$$f(2^m) > 2^{m-1} f(2^{m-2}) \quad \text{ทุกจำนวนนับ } m \geq 2$$

บทพิสูจน์ 4 ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $b \geq a \geq 0$

ถ้า a และ b เป็นจำนวนคู่ จาก (1) เราจะได้ว่า

$$f(b+1) - f(b) = f(b) - f(b) = 0 = f(a) - f(a) = f(a+1) - f(a)$$

สมมติว่าทั้ง a และ b เป็นจำนวนคี่

จาก (2) และ f เป็นฟังก์ชันไม่ลด

$$f(b-1) - f(b) = f\left(\frac{b-1}{2}\right) \geq f\left(\frac{a-1}{2}\right) = f(a+1) - f(a)$$

บทพิสูจน์ 5 ให้ r เป็นจำนวนคู่ใดๆ และ k เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $1 \leq k \leq r$

แทนค่า $a = r - j$ และ $b = r + j$ โดยที่ $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ ใน (4) จะได้

$$f(r+j+1) - f(r+j) \leq f(r-j+1) - f(r-j)$$

เพราะฉะนั้น
$$\sum_{j=0}^{k-1} (f(r+j+1) - f(r+j)) \geq \sum_{j=0}^{k-1} (f(r-j+1) - f(r-j))$$

นั่นคือ
$$f(r+k) - f(r) \geq f(r+1) - f(r-k+1)$$

ดังนั้น
$$f(r+k) + f(r-k+1) \geq f(r+1) + f(r)$$

เนื่องจาก r เป็นจำนวนคู่ จึงได้
$$f(r+1) = f(r)$$

ดังนั้น
$$f(r+k) + f(r-k+1) \geq 2f(r) \quad \text{ทุก } k = 1, \dots, r$$

ดังนั้น
$$\sum_{k=1}^r (f(r+k) + f(r-k+1)) \geq 2 \sum_{k=1}^r f(r)$$

นั่นคือ
$$f(1) + f(2) + \dots + f(2r) \geq 2rf(r)$$

จาก (3) จะได้
$$f(4r) - 1 \geq 2rf(r)$$

ฉะนั้น
$$f(4r) > 2rf(r) \quad \text{ทุกจำนวนคู่ } r \geq 2$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับจำนวนเต็ม $m \geq 3$ ใด ๆ เราได้

$$f(2^m) = f(4 \cdot 2^{m-2}) > 2 \cdot 2^{m-2} f(2^{m-2}) = 2^{m-1} f(2^{m-2})$$

เนื่องจาก $f(4) > 2f(0)$ เราจึงได้ว่า
$$f(2^m) > 2^{m-1} f(2^{m-2}) \quad \text{ทุก } m \geq 2$$

ต่อไปเราจะใช้ (5) พิสูจน์สมการข้างซ้ายที่โจทย์ต้องการ ให้ $n \geq 3$ และ ℓ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $1 < 2\ell < n$ เราใช้ (5) เป็นจำนวน $2\ell - 1$ ครั้ง จะได้

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot \dots \cdot 2^{n-2\ell+1} f(2^{n-2\ell}) \\ &= 2^{\ell(n-\ell)} f(2^{n-2\ell}) \end{aligned}$$

ถ้า n เป็นจำนวนคู่ เราให้ $\ell = \frac{n}{2}$ จะได้

$$f(2^n) > 2^{\frac{n^2}{4}} f(0) = 2^{\frac{n^2}{4}}$$

ถ้า n เป็นจำนวนคี่ เราให้ $\ell = \frac{(n-1)}{2}$ จะได้

$$\begin{aligned} f(2^n) &> 2^{\frac{n^2-1}{4}} f(2) \\ &= 2^{\frac{n^2-1}{4}} \cdot 2 \\ &> 2^{\frac{n^2}{4}} \quad (\text{เพราะ } n \geq 3) \quad \# \end{aligned}$$

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

1.1 ฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

1.2 ฟังก์ชันไม่ลด

1.3 อสมการ

1.4 การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยวิธีตรวจสอบความไม่เปลี่ยนแปลง เช่น
ความเป็นคู่-คี่ ของจำนวนนับ

1.5 ระเบียบวิธีการพิสูจน์

$$1.6 \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

เนื่องจาก $f(n)$ เป็นจำนวนวิธีที่จะเขียน n ในรูปผลบวกของกำลังของ 2 สิ่งที่จะมีบทบาทในการแก้ปัญหาคือ ความเป็นคู่-คี่ เราจึงสามารถสร้างสมการเชิงฟังก์ชันโดยใช้แนวคิดเรื่องฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง คือ

$$f(2k+1) = f(2k) \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$f(2k) = f(2k-1) + f(k) \quad \dots\dots\dots(2)$$

เมื่อเราแก้ระบบสมการนี้จะได้

$$f(k) = f(2k) - f(2k-1) \quad \text{ทุก } k = 1, 2, \dots$$

โดยปกติแล้วเมื่อเรามีระบบสมการในรูปนี้เราจะหาผลบวกข้างซ้ายและข้างขวาของระบบสมการ เพราะว่าผลบวกข้างขวาของสมการลดรูปเหลือสองพจน์ เราจึงได้

$$f(2r) = 2 + f(2) + \dots + f(r) \quad \text{ทุกจำนวนนับ } r$$

สมการนี้จะช่วยเราหาขอบเขตบนของ $f(2^n)$ ได้ เพราะเราอาจแทน r ด้วย 2^{n-1} เราจึงต้องหาขอบเขตบนให้ f จาก (1) และ (2) เราได้ว่า f เป็นฟังก์ชันไม่ลด ดังนั้น $f(i) \leq f(r)$ ทุก $i \leq r$ ซึ่งทำให้

$$f(2r) \leq rf(r)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

$$f(2^n) \leq 2^{n-1} f(2^{n-1})$$

เมื่อเราใช้สมการนี้ซ้ำ ๆ จะนำไปสู่ขอบเขตบนที่ต้องการ

ส่วนการแสดงขอบเขตล่างเป็นส่วนที่ยากกว่า เมื่อหวนกลับไปพิจารณาสมการ (1) และ (2) และทดลองพิจารณาความเป็นคู่-คี่ที่เหมือนกันของจำนวนเต็มสองจำนวน a และ b จะได้

$$f(b+1) - f(b) \geq f(a+1) - f(a) \quad \dots\dots\dots(4)$$

เมื่อ a และ b มีความเป็นคู่-คี่เหมือนกัน และ $b \geq a \geq 0$

ขั้นตอนที่เหลือนี้อาจคล้ายกับการแสดงขอบเขตบน กล่าวคือ พยายามหาระบบสมการหรือสมการซึ่งเมื่อหาผลบวกแล้วพจน์ตรงกลางจะตัดกันหมดเหลือแต่พจน์แรกและพจน์ท้าย ซึ่งอาจนำไปสู่ขอบเขต

ล่างที่ต้องการอยู่ในรูปกำลังของ 2 เนื่องจาก (4) มีข้อจำกัดที่ว่า a และ b ต้องมีความเป็นคู่-คี่เหมือนกัน เราจึงต้องปรับปรุงสมการนี้ เราจึงเริ่มจากให้ r เป็นจำนวนคู่ เพราะจำนวนคู่เมื่อบวกหรือลบจำนวนใดก็ตามจะมีความเป็นคู่-คี่ตามจำนวนที่นำมาบวกหรือลบ เราต้องการ a และ b มีความเป็นคู่-คี่เหมือนกัน และ $b \geq a \geq 0$ ดังนั้นเราให้ $a = r - j$ และ $b = r + j$ เพื่อใช้ (4) และหาผลบวกของสมการและใช้สมการ (1) จะได้ระบบสมการใหม่ซึ่งสามารถใช้เทคนิคเดิมคือการบวกระบบสมการ จะได้ขอบเขตที่ต้องการ

3. สิ่งที่ต้องการวัด

โจทย์ต้องการวัดการใช้พีชคณิตในการหาขอบเขตของจำนวนการแบ่งกัน (partition) ของจำนวนเต็ม n ในรูปผลบวกของกำลังของ 2 โดยผู้ทำโจทย์ต้องรู้จักประยุกต์ใช้ฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึงในการนับ และมองเห็นความสำคัญของความเป็นคู่-คี่ในการแก้ปัญหาโจทย์

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

เราได้เรียนรู้วิธีใช้ฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึงเพื่อการนับ รู้จักวิเคราะห์เพื่อพบความสำคัญของความเป็นคู่-คี่ และค้นหาความไม่เปลี่ยนแปลง (invariant) ในที่นี้คือความเป็นคู่-คี่ พร้อมทั้งนำมาใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหา

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

ในหลักสูตรยังขาดการประยุกต์ใช้ฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึงเพื่อการนับ การแก้ปัญหาโจทย์โดยวิธีตรวจหาความเปลี่ยนแปลง และระเบียบวิธีการพิสูจน์

2. IMO' 98 (ข้อ 6.)

จงหาค่าเล็กสุดที่เป็นไปได้ของ $f(1998)$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันจากเซต N ของจำนวนเต็มบวกไปยัง N ซึ่งแต่ละ $m, n \in N$

$$f(n^2 f(m)) = m(f(n))^2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

ส่วนที่ 1 เฉลยข้อสอบ

วิธีทำ ให้ $f : N \rightarrow N$ สอดคล้องเงื่อนไข (1) และ $a = f(1)$

แทนค่า $n = 1$ จะได้ $f(f(m)) = a^2 m \quad \text{ทุก } m \in N$

แทนค่า $m = 1$ จะได้ $f(a n^2) = (f(n))^2 \quad \text{ทุก } n \in N$

ดังนั้นสำหรับแต่ละ $m, n \in N$ จะได้

$$\begin{aligned} (f(m) f(n))^2 &= f(a m^2) (f(n))^2 \\ &= f(n^2 f(f(a m^2))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= f(n^2 a^2 (am^2)) \\
 &= f(a(amn)^2) \\
 &= (f(amn))^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad f(amn) &= f(m)f(n) & \text{ทุก } m, n \in N \\
 \text{โดยเฉพาะอย่างยิ่ง} \quad f(am) &= a f(m) & \text{ทุก } m \in N \\
 \text{ดังนั้น} \quad a f(mn) &= f(m)f(n) & \text{ทุก } m, n \in N \quad \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $a|f(n)$ ทุก $n \in N$ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $p|a$ และ α เป็นกำลังสูงสุดของ p ซึ่ง $p^\alpha|a$ ให้ $n \in N$ และ β เป็นกำลังสูงสุดซึ่ง $p^\beta|f(n)$ ในการแสดงว่า $a|f(n)$ จึงเป็นการเพียงพอที่เราจะแสดงว่า $\alpha \leq \beta$ เราแสดงได้โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และ (2) ว่า

$$(f(n))^k = a^{k-1} f(n^k) \quad \text{ทุก } k \in N$$

ฉะนั้นกำลังสูงสุดของ p ที่หาร $(f(n))^k$ ลงตัว และกำลังสูงสุดของ p ที่หาร a^{k-1} ลงตัวคือ $k\beta$ และ $(k-1)\alpha$ ตามลำดับ ดังนั้น $\alpha(k-1) \leq \beta k$ ทุก $k \in N$ จึงได้ว่า $\alpha \leq \beta$

กำหนด $g: N \rightarrow N$ โดย $g(n) = \frac{f(n)}{a}$ ทุก $n \in N$ จะแสดงได้ว่า

$$g(a) = a, \quad g(mn) = g(m)g(n) \text{ และ } g(g(m)) = m \quad \text{ทุก } m, n \in N \quad \dots\dots\dots(3)$$

จาก (3) เราได้

$$g(n^2 g(m)) = g(n^2) g(g(m)) = m g(n^2) \quad \text{ทุก } m, n \in N$$

นั่นคือ g สอดคล้อง (1) ต่อไปจะแสดงว่า $g(p)$ เป็นจำนวนเฉพาะ ทุกจำนวนเฉพาะ p โดยเขียน $g(p) = uv$ โดยที่ $u, v \in N$ จะได้ว่า

$$p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v)$$

ทำให้ได้ว่า $g(u) = 1$ หรือ $g(v) = 1$ โดยไม่เสียอรรถาธิบาย สมมติว่า $g(u) = 1$

$$\text{ดังนั้น} \quad u = g(g(u)) = g(1) = 1$$

ฉะนั้น $g(p)$ เป็นจำนวนเฉพาะตามต้องการ นอกจากนี้เราแสดงได้ว่า g เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้นถ้า p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่ต่างกัน จะได้ $g(p)$ และ $g(q)$ เป็นจำนวนเฉพาะที่ต่างกันด้วย

กล่าวโดยสรุปถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งสอดคล้องสมการ (1) แล้ว g ซึ่งกำหนดโดย $g(n) = \frac{f(n)}{f(1)}$

จะเป็นฟังก์ชันจาก N ไปยัง N ซึ่งสอดคล้อง (2) และ $g(p) = p$ ทุกจำนวนเฉพาะ p นอกจากนี้ฟังก์ชันซึ่งสอดคล้องสมการ (2) จะสอดคล้องสมการ (1) ฉะนั้นในการหาค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ $f(1998)$ เราจึงคำนวณ $g(1998) = g(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = g(2)g(3)^3g(37)$

จากการกำหนด $g(3) = 2$, $g(2) = 3$ และ $g(37) = 5$ นั่นคือ 120

#

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

- 1.1 ความหมายของฟังก์ชัน 1-1
- 1.2 ฟังก์ชันประกอบ
- 1.3 การหารลงตัวของจำนวนเต็ม
- 1.4 จำนวนเฉพาะ
- 1.5 หลักเบื้องต้นในการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน
- 1.6 แต่ละจำนวนเต็ม $n > 1$ ใด ๆ มีจำนวนเฉพาะ p ซึ่ง $p|n$
- 1.7 จำนวนนับ n บ่อยเขียนได้เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ
- 1.8 การพิสูจน์โดยวิธีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

เมื่อสมการเชิงฟังก์ชันอยู่ในรูปฟังก์ชันประกอบ เราจะเริ่มโดยวิธีแทนค่าตัวแปรด้วยสมาชิกในโดเมนบางตัว เมื่อได้สมการที่สองคือ

$$a f(mn) = f(m) f(n) \quad \text{ทุก } m, n \in N$$

ประกอบกับโดเมนเป็น N ทำให้มองเห็นว่าทฤษฎีหลักมูลอาจเป็นประโยชน์

นั่นคือหากเราสามารถกำหนด $f(p)$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะได้ เราขอมรรู้ค่าของ $f(n)$ ทุกจำนวนนับ n ส่วนที่ยากและแปลกไปจากโจทย์อื่น ๆ คือการได้ $a|f(n)$ ซึ่งทำให้เราสร้างฟังก์ชัน $g: N \rightarrow N$ โดย $g(n) = \frac{f(n)}{a}$ ตรวจสอบพบว่า g สอดคล้องสมการที่กำหนดให้ ขั้นตอนต่อไปจะต้องพยายามหาวิธีกำหนด g ทั้งนี้เนื่องจากเราต้องการหาค่าเล็กสุดของ $f(1998)$ และ g สอดคล้องสมการที่ต้องการอีกทั้ง $g(n)$ มีค่าน้อยลงหาก $a > 1$ สมบัติของ g ใน (3) ทำให้เราแสดงได้ว่า $g(p)$ เป็นจำนวนเฉพาะ ทุกจำนวนเฉพาะ p ขั้นสุดท้ายเราใช้ทฤษฎีหลักมูลของจำนวนนับเพื่อหาค่า $g(1998)$ โดยเขียน $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$ จึงได้

$$g(1998) = g(2) \cdot (g(3))^3 \cdot g(37)$$

เราต้องการค่าเล็กสุดจึงควรกำหนดให้ $g(3)$ เป็นจำนวนเฉพาะตัวเล็กสุด คือ 2 ส่วน $g(2)$ และ $g(37)$ ควรเป็นจำนวนเฉพาะตัวถัดไป ทั้งนี้เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชัน 1-1

3. สิ่งที่ต้องการวัด

โจทย์ต้องการวัดความสามารถในการใช้ทฤษฎีจำนวนเพื่อแก้สมการเชิงฟังก์ชันนอกเหนือไปจากการวิเคราะห์สมการเชิงฟังก์ชันระดับพื้นฐาน

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

เราได้เรียนรู้การประยุกต์ใช้ทฤษฎีจำนวน และความเป็นหนึ่งต่อหนึ่งของฟังก์ชัน

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

5.1 หลักเบื้องต้นในการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน

5.2 ทฤษฎีบทแต่ละจำนวนนับซึ่งไม่ใช่ 1 ย่อมหารลงตัวด้วยจำนวนเฉพาะอย่างน้อยหนึ่งตัว

5.3 ทฤษฎีหลักมูลของจำนวนนับ

5.4 ระเบียบวิธีการพิสูจน์

3. IMO'99 (ข้อ 6.)

จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดซึ่งสอดคล้องสมการ

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

ทุก $x, y \in \mathbb{R}$

ส่วนที่ 1. เอลยข้อสอบ

วิธีทำ สมมติว่า $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องสมการที่กำหนดให้

ให้ $c = f(0)$ และแทนค่า $x = y = 0$ ลงในสมการ จะได้

$$f(-c) = f(c) + c - 1$$

ทำให้สรุปได้ว่า $c \neq 0$ และเมื่อแทนค่า $x = f(y)$ ในสมการ เราได้

$$f(f(y)) = \frac{c+1}{2} - \frac{(f(y))^2}{2} \quad \text{ทุก } y \in \mathbb{R}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2} \quad \text{ทุก } x \in \text{Im } f \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{ต่อไปเราจะแสดงว่า} \quad R = \{a - b \mid a, b \in \text{Im } f\} = A$$

$$\text{ให้ } x \in R \text{ จะได้} \quad x = \frac{c(x+1-f(c))}{c} + f(c) - 1$$

เมื่อแทน $x = z$ และ $y = 0$ ในสมการที่กำหนดให้ เราจะได้

$$f(x - c) - f(z) = cz + f(c) - 1 \quad \text{ทุก } z \in R$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อ $z = \frac{x+1-f(c)}{c}$ เราจะได้

$$x = f\left(\frac{x+1-f(c)}{c} - c\right) - f\left(\frac{x+1-f(c)}{c}\right) \in A$$

ฉะนั้น $R = A$

ต่อไปเราจะหาสูตรสำหรับ $f(x)$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ

สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ จะมี $y_1, y_2 \in \text{Im } f$ ซึ่ง $x = y_1 - y_2$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } f(x) &= f(y_1 - y_2) = f(y_2) + y_1 y_2 + f(y_1) - 1 \\
 &= \frac{c+1}{2} - \frac{y_2^2}{2} + y_1 y_2 + \frac{c+1}{2} - \frac{y_1^2}{2} - 1 \quad (\text{จาก (1)}) \\
 &= c - \frac{x^2}{2} \quad \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

$$\text{จาก (1) เราได้ } f(f(1)) = \frac{c+1}{2} - \frac{(f(1))^2}{2}$$

$$\text{จาก (2) เราได้ } f(f(1)) = c - \frac{(f(1))^2}{2}$$

$$\text{ฉะนั้น } \frac{c+1}{2} = c \text{ ทำให้ได้ว่า } c = 1$$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{ทุก } x \in R$$

ในนัยกลับกันเราแสดงได้โดยง่ายว่า $f: R \rightarrow R$ ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ ทุก $x \in R$

สอดคล้องสมการที่โจทย์กำหนด

#

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

โจทย์ข้อนี้เป็นปัญหาที่ยากที่สุดในการแข่งขัน IMO ครั้งที่ 40 และเป็นปัญหาที่ยากมาก (วัดได้จากจำนวนผู้เข้าแข่งขันที่แก้ปัญหาคือ) จนถึงขณะนี้ยังไม่พบเฉลยวิธีอื่น

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

โจทย์ข้อนี้ใช้ความรู้พื้นฐานของการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน กล่าวคือ การแทนตัวแปรในสมการด้วยสมาชิกบางตัวในโดเมนของฟังก์ชัน เพื่อให้ปรากฏเพียง $f(x)$ ในบางครั้งเราจะไม่ได้สูตรของ $f(x)$ สำหรับทุก x ในโดเมน เช่นในข้อนี้เมื่อเริ่มทำจะได้สูตรของ $f(x)$ สำหรับ x ใน $\text{Im } f$ (เรนจ์ของ f) เท่านั้น

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

เริ่มด้วยการทดลองแทนค่า x และ y ด้วยจำนวนต่าง ๆ ส่วนใหญ่นิยมเริ่มจาก 0 หรือ 1 จะเห็นว่าเมื่อแทน $x = 0 = y$ ไม่นำไปสู่สิ่งใดนอกจาก $c = f(0) \neq 0$ เนื่องจากซ้ายมือของสมการอยู่ในรูป $f(x - f(y))$ จึงควรลองแทน $x = f(y)$ จะได้ $f(f(y)) = \frac{c+1}{2} - \frac{(f(y))^2}{2}$ นั่นคือสูตรของ $f(x)$ สำหรับ $x \in \text{Im } f$ หัวใจสำคัญที่สุดของการแก้ปัญาโจทย์ข้อนี้คือการแสดงว่า $R = \{a - b \mid a, b \in \text{Im } f\}$ นี่คือการทำให้ผู้เข้าแข่งขันส่วนน้อยมากทำโจทย์ข้อนี้ได้ แต่เมื่อวิเคราะห์จากเฉลยอาจมองได้ว่าซ้ายมือของสมการอยู่ในรูป $f(x - f(y))$ ถ้าเราสามารถเขียนจำนวนจริง x ใดๆ ในรูปผลต่าง $x_0 - f(y_0)$ แล้วเราจะสามารถใช้สมการเชิงฟังก์ชันที่กำหนดให้นำไปสู่สูตรของ f โดยทั่วไปได้หรือไม่ คำตอบคือไม่น่าจะได้เพราะขวามือของสมการจะติดในรูป $f(x_0)$ โดยที่ x_0 เป็นจำนวนจริง โจทย์ข้อนี้จึงต้องอาศัยการวิเคราะห์ปัญหาและพิชิตคิดเบื้องต้น แต่หากเราสามารถเขียน x ในรูป $y_1 - y_2$ โดยที่

$y_1, y_2 \in \text{Im } f$ จะแก้ปัญหานี้ได้เพราะขวามือของสมการจะอยู่ในรูป $f(y_1), f(y_2)$ ซึ่งเราทราบเมื่อแรกแก้ปัญห ส่วนที่เหลือคือการพยายามเขียน x ในรูปผลต่างดังกล่าว เมื่อหวนกลับไปแทนค่า $x = z$ และ $y = 0$ ลงในสมการจะได้

$$f(z - c) = f(c) + c + f(z) - 1$$

นั่นคือ
$$f(z - c) - f(x) = cz + f(c) - 1$$

ดังนั้นเราจึงเหลือเพียงคำนวณหา z เมื่อ $x = cz + f(c) - 1$ ซึ่งพบว่า $z = \frac{x + 1 - f(c)}{c}$ หาก $c \neq 0$

และเราได้พบแต่แรกแล้วว่า $c \neq 0$

3. สิ่งที่ต้องการวัด

โจทย์วัดความเข้าใจในเรื่อง $\text{Im } f$ (เรนจ์ของฟังก์ชัน) อย่างลึกซึ้ง และความสามารถในการสร้างความสัมพันธ์ระหว่าง R และ $\text{Im } f$

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

ได้เรียนรู้การแก้ปัญหอย่างมีระบบ อาศัยการวิเคราะห์โดยใช้ตรรกศาสตร์ นอกจากนี้การแก้สมการต้องทำทั้งสองด้านคือสมมติว่าสมการมีคำตอบ วิเคราะห์ให้ได้ว่าคำตอบนั้นควรจะเป็นอะไร และต้องแสดงทุกครั้งว่าคำตอบที่หามาได้นั้นสอดคล้องสมการที่กำหนดให้จริง หากขาดส่วนหลังนี้จะไม่ได้คะแนนเต็ม

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

ในหลักสูตรจะไม่พบการแก้ปัญหในเชิงวิเคราะห์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งข้อสอบแบบปรนัย ไม่เอื้อต่อการฝึกคิด วิเคราะห์อย่างเป็นเหตุเป็นผล มีโอกาสตอบถูกโดยการเดา การแก้ปัญหาโจทย์ในหลักสูตรปัจจุบันต่างกันโดยสิ้นเชิงกับการแก้ปัญหาโจทย์ในการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิก นอกจากนี้ยังขาดระเบียบวิธีการพิสูจน์ (method of proof) ในการตอบปัญหา

2. Number Theory และ Combinatorics

2.1 Number Theory

1. IMO'94 (ข้อ 6.)

จงแสดงว่า มีเซตของจำนวนเต็มบวก เรียกว่า เซต A ที่มีสมบัติดังนี้ :

สำหรับเซตอนันต์ของจำนวนเฉพาะใด ๆ เรียกว่า เซต S จะมี $k \geq 2$ และมีจำนวนเต็มบวกสองจำนวน $m \in A$ และ $n \notin A$ โดยที่แต่ละจำนวนสามารถเขียนได้เป็นผลคูณของสมาชิก k ตัวที่แตกต่างกันของ S

ส่วนที่ 1 เกลยข้อสอบ

วิธีทำ ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่อยู่ในรูปแบบ $q_1 q_2 \dots q_k$ (ผลคูณของจำนวนเฉพาะ q_1 จำนวนโดยมี q_1 เป็นตัวเริ่มต้น) เมื่อ $q_1 < q_2 < \dots < q_k$ เป็นจำนวนเฉพาะ

เพื่อช่วยให้ผู้อ่านสามารถทำความเข้าใจได้ง่ายขึ้น จะขอยกตัวอย่างสมาชิก A พอสังเขป ดังนี้

เมื่อ $q_1 = 2$ จะได้ว่า $\underbrace{2 \cdot p}_{2 \text{ ตัว โดยที่มี } 2 \text{ เป็นตัวเริ่มต้น}} \in A$ สำหรับทุก p ที่เป็นจำนวนเฉพาะที่

เมื่อ $q_1 = 3$ จะได้ว่า $\underbrace{3 \cdot 5 \cdot p}_{3 \text{ ตัว โดยที่มี } 3 \text{ เป็นตัวเริ่มต้น}} \in A$ สำหรับทุก p ที่เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 5

เมื่อ $q_1 = 5$ จะได้ว่า $\underbrace{5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot p}_{5 \text{ ตัว โดยที่มี } 5 \text{ เป็นตัวเริ่มต้น}} \in A$ สำหรับทุก p ที่เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 13

ต่อไปจะแสดงว่า A มีสมบัติตามที่โจทย์ต้องการ

ให้ S เป็นเซตอนันต์ใด ๆ ของจำนวนเฉพาะ เราสามารถเขียน S ได้เป็น

$S = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ โดยที่ $p_1 < p_2 < p_3 < \dots$ เป็นจำนวนเฉพาะ

เลือก $k = p_1$, $m = p_1 p_2 \dots p_k$ และ $n = p_2 p_3 \dots p_{k+1}$ เป็นที่ชัดเจนว่า $k \geq 2$ และจาก $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_{p_1}$ เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $m \in A$

ถ้า $n \in A$ จะได้ว่า $n = \underbrace{p_2 p_3 \dots p_{k+1}}_{k \text{ ตัว}}$ เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ k จำนวน โดยมี k

เป็นตัวเริ่มต้น แต่ตัวเริ่มต้นของ n คือ p_2 ดังนั้น $k = p_2$ ซึ่งขัดแย้งกับ $k = p_1$ และ $p_1 < p_2$ ดังนั้น $n \notin A$

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

1.1 จำนวนเฉพาะ

1.2 การใช้เหตุผลในการสร้างลำดับ (หรือเซต หรือฟังก์ชัน) ที่มีจำนวนสมาชิกขึ้นกับค่าในลำดับ

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

2.1 ทดลองสร้างตัวอย่างของเซตที่มีสมาชิกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน

2.2 ค้นพบว่า เซตคำตอบของโจทย์นี้จะต้องเป็นลำดับที่มีสมาชิกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะที่มีปริมาณขึ้นอยู่กับสมาชิกในผลคูณนั้น

3. สิ่งที่ต้องการวัด

การสร้างลำดับที่มีสมาชิกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ โดยที่ผลคูณนี้ต้องมีจำนวนสมาชิกขึ้นอยู่กับสมาชิกในผลคูณ (เพื่อความสะดวก ขอเรียกลำดับเช่นนี้ว่า ลำดับซ้อน)

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

การสร้างลำดับซ้อน

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

การสร้างลำดับซ้อน

6. การเชื่อมโยงความรู้

6.1 จากเรื่องเซตไปยังลำดับ

6.2 จากจำนวนเฉพาะที่เรียงลำดับ ไปยังผลคูณของจำนวนเฉพาะที่เรียงเป็นลำดับซ้อน

2. IMO'96 (ข้อ 4.)

ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ $15a + 16b$ และ $16a - 15b$ ต่างก็เป็นกำลังสองสมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก จงหาค่าที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ของค่าที่ต่ำสุดของจำนวนที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ทั้งสองจำนวนข้างต้น

ส่วนที่ 1 เฉลยข้อสอบ

วิธีทำ ให้ r และ s เป็นจำนวนเต็มบวกที่

$$r^2 = 15a + 16b \text{ และ } s^2 = 16a - 15b \quad \dots\dots\dots(*)$$

เราต้องการหา $\min \{r^2 = 15a + 16b, s^2 = 16a - 15b\}$ ที่น้อยที่สุด

เมื่อ a, b, r และ s มีสมบัติดังข้างต้น

($\min\{A, B\}$ หมายถึง ค่าต่ำสุดในบรรดา A และ B เช่น ถ้า $A \leq B$ แล้ว $\min\{A, B\} = A$)

$$\begin{aligned}
 \text{จาก (*)} \quad r^4 + s^4 &= (15a + 16b)^2 + (16a - 15b)^2 \\
 &= 15^2 a^2 + 2 \cdot 15 \cdot 16ab + 16^2 b^2 + 16^2 a^2 - 2 \cdot 16 \cdot 15ab + 15^2 b^2 \\
 &= 15^2 a^2 + 16^2 b^2 + 16^2 a^2 + 15^2 b^2 \\
 &= (15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) \\
 &= 481(a^2 + b^2) \\
 &= 13 \cdot 37(a^2 + b^2)
 \end{aligned}$$

$$\text{เราจึงได้ว่า } r^4 + s^4 \equiv 0 \pmod{13} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{และ } r^4 + s^4 \equiv 0 \pmod{37} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{จาก (1) เราได้ว่า } r^4 \equiv -s^4 \pmod{13} \quad \dots\dots\dots(3)$$

เราจะพิสูจน์ว่า $13 \mid r$ โดยวิธีขัดแย้ง

สมมติว่า $13 \nmid r$

เนื่องจาก 13 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น $13 \nmid r^4$ นั่นคือ $r^4 \not\equiv 0 \pmod{13}$

โดย (3) $s^4 \not\equiv 0 \pmod{13}$ ด้วย นั่นคือ $13 \nmid s^4$

ดังนั้น $13 \nmid s$

โดยทฤษฎีบทของแฟร์มาต์* เราจึงได้ว่า

$$r^{12} \equiv 1 \pmod{13} \text{ และ } s^{12} \equiv 1 \pmod{13} \quad \dots\dots\dots(4)$$

จาก (3) และ (4) เราจึงได้ว่า

$$1 \equiv r^{12} \equiv (r^4)^3 \equiv (-s^4)^3 \equiv (-1)^3 s^{12} \equiv (-1)(1) \equiv -1 \pmod{13}$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ $13 \nmid 1 - (-1)$

เราจึงสรุปได้ว่า ที่สมมติว่า $13 \nmid r$ ไม่จริง

นั่นคือ $13 \mid r$

ดังนั้น $r \equiv 0 \pmod{13}$

โดย (3) เราจึงได้ว่า $-s^4 \equiv r^4 \equiv 0 \pmod{13}$

นั่นคือ $13 \mid s^4$

เนื่องจาก 13 เป็นจำนวนเฉพาะ

ดังนั้น $13 \mid s$

$$\text{เราจึงได้ว่า } 13 \mid r \text{ และ } 13 \mid s \quad \dots\dots\dots(5)$$

เนื่องจาก 37 ก็เป็นจำนวนเฉพาะเราสามารถพิสูจน์โดยใช้ (2) ได้ว่า

$$37 \mid r \text{ และ } 37 \mid s \quad \dots\dots\dots(6)$$

จาก (5) และ (6) และ $(13, 37) = 1$ เราได้ว่า

$$13 \cdot 37 \mid r \text{ และ } 13 \cdot 37 \mid s$$

แต่ r และ s เป็นจำนวนเต็มบวก เราจึงได้ว่า

$$r \geq 13 \cdot 37 = 481 \text{ และ } s \geq 13 \cdot 37 = 481$$

ดังนั้น ค่า $\min \{r^2 = 15a + 16b, s^2 = 16a - 15b\} = 481^2$ (7)

ต่อไปเราจะแสดงว่า

$$\min \{r^2 = 15a + 16b, s^2 = 16a - 15b\} = 481^2$$

ให้ $r = s = 481$

เราจะหาจำนวนเต็มบวก a และ b ที่

$$481^2 = 15a + 16b \text{ และ } 481^2 = 16a - 15b \text{(8)}$$

จาก (8) $15a + 16b = 16a - 15b$

ดังนั้น $a = 31b$

แทนค่า $a = 31b$ ในสมการ (8) จะได้ว่า

$$481^2 = 15 \cdot 31b + 16b = 481b$$

ดังนั้น $b = 481$ และ $a = 31 \cdot 481$

ถ้า $a = 31 \cdot 481$ และ $b = 481$ นี้ ทำให้ $\min \{r^2 = 15a + 16b, s^2 = 16a - 15b\} = 481^2$

คำตอบคือ 481^2

*ทฤษฎีบทของแฟร์มาต์ ให้ a และ p เป็นจำนวนเต็มที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p \nmid a$

จะได้ว่า $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

#

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

- 1.1 การหาค่าต่ำสุดภายใต้เงื่อนไข (ต่ำสุด)
- 1.2 การลรอบกัน และทฤษฎีบทของแฟร์มาต์

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

2.1 จากสิ่งที่กำหนดให้ได้ผลของกำลังสองสมบูรณ์แรก จึงทำการทดลองกรณีของกำลังสองสมบูรณ์ถัดมา ซึ่งคือกำลังสี่สมบูรณ์

2.2 พิจารณาการหารลงตัวด้วย 13 และ 37 โดยอาศัยทฤษฎีบทของแฟร์มาต์ เพื่อหาเงื่อนไขของตัวแปรเสริม r, s

2.3 ทดสอบค่า r^2, s^2 ต่ำสุดจากเงื่อนไขในขั้นตอนที่แล้ว เพื่อหาคำตอบที่ต้องการ

3. สิ่งที่ต้องการวัด

3.1 การหาค่าต่ำสุดภายใต้เงื่อนไขซ้อน

3.2 การลงรอยกัน และทฤษฎีบทของแฟร์มาต์

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

4.1 การหาค่าต่ำสุดภายใต้เงื่อนไขซ้อน

4.2 การประยุกต์ของการลงรอยกัน และการใช้ทฤษฎีบทของแฟร์มาต์

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

5.1 การหาค่าต่ำสุดภายใต้เงื่อนไขซ้อน

5.2 การลงรอยกัน และทฤษฎีบทของแฟร์มาต์

6. การเชื่อมโยงความรู้

6.1 จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ นำไปสู่การพิจารณากรณีกำลังสองสมบูรณ์ถัดไปซึ่งคือกรณีกำลังสี่สมบูรณ์ ทำให้ได้เงื่อนไขของการหารลงตัว (การลงรอยกัน) ด้วยจำนวนเฉพาะ 13 และ 37

6.2 โดยพิจารณาการลงรอยกันด้วยจำนวนเฉพาะ 13 และ 37 ร่วมกับทฤษฎีบทของแฟร์มาต์ จะได้เงื่อนไขบนตัวแปรเสริม r^2, s^2

6.3 ลองหาค่าต่ำสุดของตัวแปรเสริม r^2, s^2 เพื่อหาคำตอบที่ต้องการ

3. IMO'97 (ข้อ 5.)

จงหาจำนวนลำดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ที่ $a \geq 1, b \geq 1$ และสอดคล้องสมการ $a^{b^2} = b^a$

ส่วนที่ 1 เฉลยข้อสอบ

วิธีทำ ให้ d เป็น ห.ร.ม. ของ a และ b

จะได้ว่า $a = du$ และ $b = dv$ เมื่อ u และ v เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

$$\text{จาก } a^{b^2} = b^a$$

$$\text{จะได้ว่า } (du)^{(dv)^2} = (dv)^{du}$$

$$\text{ดังนั้น } (du)^{dv^2} = (dv)^u \quad \dots\dots\dots(1)$$

กรณีที่ 1 $dv^2 = u$

จาก (1) จะได้ว่า $du = dv$ แสดงว่า $u = v$

เนื่องจาก u และ v เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

$$\text{ดังนั้น } u = v = 1$$

$$\text{จาก } dv^2 = u \quad \text{จึงได้ว่า } d = 1$$

นั่นคือ $a = 1$

จะได้ $(1, 1)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

กรณีที่ 2 $dv^2 > u$

จาก (1) จะได้ $d^{dv^2} u^{dv^2} = d^u v^u$

ดังนั้น $d^{dv^2-u} u^{dv^2} = v^u$ (2)

แสดงว่า $u^{dv^2} \mid v^u$

เนื่องจาก u และ v เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

ดังนั้น $u = 1$

จาก (2) จะได้ $d^{dv^2-1} = v$ (3)

จาก (3) จะเห็นว่า ถ้า $d = 1$ เราจะได้ $v = 1$ ซึ่งขัดแย้งกับ $dv^2 > u$

แสดงว่า $d \geq 2$

จะได้ว่า $d^{dv^2-1} \geq 2^{dv^2-1}$

$$\geq 2^{2v^2-1}$$

$$\geq 2^{2v-1}$$

$$\geq v$$

(ดูหมายเหตุ 1)

ซึ่งขัดแย้งกับ (3) แสดงว่า กรณีนี้ไม่มีผลเฉลย

กรณีที่ 3 $dv^2 < u$

จะได้ว่า $d < u$

จาก (1) จะได้ $d^{dv^2} u^{dv^2} = d^u v^u$

ดังนั้น $u^{dv^2} = d^{u-dv^2} v^u$ (4)

แสดงว่า $v^u \mid u^{dv^2}$

เนื่องจาก u และ v เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

ดังนั้น $v = 1$

จาก (4) จะได้ $u^d = d^{u-d}$ (5)

จาก (5) และ $u > d$ ทำให้ได้ว่า $d < u - d$ นั่นคือ $2d < u$

จาก (5) จะได้ว่า p เป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวหารของ d ก็ต่อเมื่อ p เป็นตัวหารของ u ให้ $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ เป็นเซตของจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดที่เป็นตัวหาร

ของ d

สำหรับแต่ละจำนวนเฉพาะ $p \in P$ ให้ α และ β เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่ทำให้

$$p^\alpha \mid u \text{ และ } p^\beta \mid d$$

จะได้ $u = p^\alpha s$ และ $d = p^\beta t$ เมื่อ s และ t เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น $u^d = p^{\alpha d} s^d$ และ $d^{u-d} = p^{\beta(u-d)} t^{u-d}$

จาก (5) จะได้ $\alpha d = \beta(u-d)$

แต่ $d < u-d$ แสดงว่า $\alpha > \beta$

ดังนั้น ถ้า d เขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_m^{\beta_m}$ แล้ว u ต้องเขียนได้ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ $u = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_m^{\alpha_m}$ โดยที่ $\alpha_i > \beta_i$ ทุก $i = 1, 2, \dots, m$

เราจึงได้ว่า $d \mid u$ ดังนั้น $u = kd$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

เนื่องจาก $u > 2d$ ดังนั้น $k \geq 3$

จาก (5) จะได้ $(kd)^d = d^{kd-d}$

$$k^d d^d = d^{kd-d}$$

$$k^d = d^{kd-2d}$$

$$k^d = (d^{k-2})^d$$

ดังนั้น $k = d^{k-2}$

โดยการทดลองแทนค่า k จะได้ว่า

ถ้า $k = 3$ จะได้ $3 = d^{3-2}$ ดังนั้น $d = 3$

แสดงว่า $a = du = 3(9) = 27$

และ $b = dv = 3(1) = 3$

จะได้ $(27, 3)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

ถ้า $k = 4$ จะได้ $4 = d^2$ ดังนั้น $d = 2$

แสดงว่า $a = du = 2(8) = 16$

และ $b = dv = 2(1) = 2$

จะได้ $(16, 2)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

พิจารณากรณีที่ $k \geq 5$

ถ้า $d = 1$ จะได้ $k = 1^{k-2}$

แสดงว่า $k = 1$ ซึ่งขัดแย้งกับ $k \geq 5$

ถ้า $d \geq 2$ จะได้ $d^{k-2} \geq 2^{k-2}$

$$> k \quad (\text{ดูหมายเหตุ 2})$$

ซึ่งขัดแย้งกับ $k = d^{k-2}$

แสดงว่า กรณีที่ $k \geq 5$ ไม่มีผลเฉลย

จากทั้งสามกรณีสรุปได้ว่า ผลเฉลยของสมการ คือ $(1, 1)$, $(27, 3)$ และ $(16, 2)$

#

หมายเหตุ 1. $2^{2n-1} > n$ ทุก $n \in N$

พิสูจน์ สำหรับแต่ละ $n \in N$

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $2^{2n-1} > n$

ถ้า $n=1$ จะได้ว่า $2^{2-1} = 2 > 1$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ $k \in N$

สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $2^{2k-1} > k$

จะได้ว่า $2^{2(k+1)-1} = 2^{2k-1} \cdot 2^2$

$$> k \cdot 4$$

$$= 4k$$

$$> 2k$$

$$= k + k$$

$$\geq k + 1$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $2^{2n-1} > n$ ทุก $n \in N$

หมายเหตุ 2. $2^{n-2} > n$ ทุก $n \geq 5$

พิสูจน์ สำหรับแต่ละ $n \in N$ โดยที่ $n \geq 5$

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $2^{n-2} > n$

ถ้า $n=5$ จะได้ว่า $2^{5-2} = 8 > 5$

เพราะฉะนั้น $P(5)$ เป็นจริง

ให้ $k \in N$ โดยที่ $k \geq 5$

สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริง นั่นคือ $2^{k-2} > k$

จะได้ว่า $2^{(k+1)-2} = 2^{k-2} \cdot 2$

$$> k \cdot 2$$

$$= k + k$$

$$> k + 1$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า $2^{n-2} > n$ ทุก $n \geq 5$

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

- 1.1 สมบัติของจำนวนเต็ม
- 1.2 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
- 1.3 เลขยกกำลัง

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

ในการหาผลเฉลยของสมการ $a^b = b^a$ จะเห็นว่า จำนวนเฉพาะที่เป็นตัวหารของ a และ b จะเป็นชุดเดียวกัน เราจึงเริ่มด้วยการพิจารณาตัวหารร่วมของ a และ b โดยนำตัวหารร่วมมากของ a และ b คือ d มาช่วยในการพิจารณา จากนั้นเราใช้สมบัติของตัวหารร่วมมาก เขียน a และ b ได้ในรูปของ $a = du$ และ $b = dv$ เมื่อ u และ v เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ นำ a และ b ไปแทนในสมการ แล้วพิจารณากรณีต่าง ๆ ของเลขชี้กำลังของ a และ b โดยการพิจารณาในแต่ละกรณีจะอาศัยสมบัติของจำนวนเต็ม และการพิสูจน์ข้อความบางข้อความจะใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

3. สิ่งที่ต้องการวัด

โจทย์ข้อนี้ต้องการวัดความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของจำนวนเต็มทั้งในเรื่องจำนวนเฉพาะ การหารลงตัว ตัวหารที่เป็นจำนวนเฉพาะ ตัวหารร่วมมาก และจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

การวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับจำนวนเต็ม และการพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

การพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และการฝึกวิเคราะห์โจทย์ปัญหาที่ไม่ได้เน้นเฉพาะการหาคำตอบเท่านั้น แต่ต้องให้เหตุผลประกอบการได้มาซึ่งคำตอบด้วย

6. การเชื่อมโยงความรู้

การแก้สมการของเลขยกกำลังที่ต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับสมบัติของจำนวนเต็ม

4. IMO'98 (ข้อ 3.)

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ให้ $d(n)$ แทนจำนวนของตัวหารที่เป็นบวกของ n (ซึ่งรวมทั้ง 1 และ n ด้วย)

จงหาพร้อมพิสูจน์ จำนวนเต็มบวก k ทั้งหมดที่มีสมบัติว่ามีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$$

ส่วนที่ 1 เกลยข้อสอบ

วิธีทำ วิธีที่ 1

สังเกตว่า ถ้า a, b เป็นจำนวนเต็มบวกที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์แล้ว $d(ab) = d(a)d(b)$ และถ้า $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}$ เมื่อ $p_1, p_2, \dots, p_r$ เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน และ $k_1, k_2, \dots, k_r$ เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว เราได้ว่า

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_r + 1) \quad \text{และ}$$

$$d(n^2) = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \dots (2k_r + 1)$$

ดังนั้น $d(n^2)$ เป็นเลขคี่ ฉะนั้น จำนวนเต็มบวก $m > 1$ ทั้งหมด ซึ่งสามารถหาจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $\frac{d(n^2)}{d(n)} = m$ ต้องเป็นเลขคี่

จะแสดงว่า จำนวนเต็มบวก k ทุกตัวที่เป็นเลขคี่ จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

เนื่องจาก $d(1^2) = d(1) = 1$ ฉะนั้น $\frac{d(1^2)}{d(1)} = 1$

ให้ $k > 1$ เป็นเลขคี่และสมมติว่า สำหรับจำนวนเต็มบวกคี่ $x < k$ ทุกตัว จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $\frac{d(n^2)}{d(n)} = x$

ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกคี่, $x < k$ และให้ ℓ เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ $\frac{d(\ell^2)}{d(\ell)} = x$

จะแสดงว่า

สำหรับจำนวนเต็มบวก m ใดๆ จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = 2^m x - 1 \quad \dots\dots\dots (*)$$

กรณี $m = 1$ เมื่อให้ $n = p^{x-1} \ell$ โดย p เป็นจำนวนเฉพาะที่ไม่เป็นตัวหารของ ℓ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d(n^2)}{d(n)} &= \frac{d(p^{2(x-1)} \ell^2)}{d(p^{x-1} \ell)} \\ &= \frac{d(p^{2(x-1)}) d(\ell^2)}{d(p^{x-1}) d(\ell)} \\ &= \frac{2x - 1}{x} \cdot x \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

กรณี $m > 1$ เมื่อให้ $n = p_1^{2^{m-1}3x-2} p_2^{2^{m-2}3x-2} \dots p_{m-1}^{2 \cdot 3^{m-1}x-2} p_m^{3^{m-1}x-1} \ell$

โดย $p_1, p_2, \dots, p_m$ เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดและไม่เป็นตัวหารของ ℓ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d(n^2)}{d(n)} &= \frac{2^m 3x-3}{2^{m-1}3x-1} \cdot \frac{2^{m-1}3^2x-3}{2^{m-2}3^2x-1} \cdots \frac{2^2 3^{m-1}x-3}{2 \cdot 3^{m-1}x-1} \cdot \frac{2 \cdot 3^{m-1}x-1}{3^{m-1}x} \cdot x \\ &= 2^m x - 1\end{aligned}$$

ดังนั้น เราได้ (*)

จากการที่ k เป็นเลขคี่ ทำให้ $k+1$ เป็นเลขคู่ ฉะนั้น จะมีจำนวนเต็มบวกที่ $x < k$ และจำนวนเต็มบวก m ที่ทำให้ $k+1 = 2^m x$ นั่นคือ $k = 2^m x - 1$

จากสมมติฐานการอุปนัย และ (*) จึงมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้ว่า จำนวนเต็มบวก k ทุกตัวที่เป็นเลขคี่ จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$

วิธีที่ 2 สังเกตว่า $\frac{d(1^2)}{d(1)} = 1$

ให้ $n \geq 2$ มีจำนวนเฉพาะ $p_1, \dots, p_m$ ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด และมีจำนวนเต็มบวก $a_1, \dots, a_m$ ที่ทำให้ $n = p_1^{a_1} \dots p_m^{a_m}$

เนื่องจาก $d(n^2) = (2a_1 + 1) \dots (2a_m + 1)$ เป็นเลขคี่ และ $d(n) = (a_1 + 1) \dots (a_m + 1)$

ฉะนั้น ถ้า $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ แล้ว k ต้องเป็นเลขคี่

จะแสดงว่า จำนวนเต็มบวก k ทุกตัวที่เป็นเลขคี่ จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$

เราได้แล้วว่า $\frac{d(1^2)}{d(1)} = 1$ ต่อไปจะแสดงว่า

จำนวนเต็มบวก $k \geq 3$ ทุกตัวที่เป็นเลขคี่ จะมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k \dots (**)$

เนื่องจาก $k \geq 3$ ดังนั้น จำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ ต้องมากกว่า 1

เราจะแสดง (**) โดยแสดงว่า

จำนวนเต็มบวก $k \geq 3$ ทุกตัวที่เป็นเลขคี่ จะมีจำนวนเต็มบวก $b_1, b_2, \dots, b_m$ ที่ทำให้

$$k = \frac{(2b_1 + 1)(2b_2 + 1) \dots (2b_m + 1)}{(b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_m + 1)}$$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สังเกตว่า ถ้า $k \geq 3$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่เป็นเลขคี่แล้ว จะมีจำนวนเต็มบวก q ที่ทำให้

$$k = 2q + 1$$

สำหรับจำนวนเต็มบวก q ให้ $P(q)$ แทนข้อความ

มีจำนวนเต็มบวก $b_1, b_2, \dots, b_m$ ที่ทำให้

$$2q + 1 = \frac{(2b_1 + 1)(2b_2 + 1) \dots (2b_m + 1)}{(b_1 + 1)(b_2 + 1) \dots (b_m + 1)}$$

จะแสดงว่า $P(q)$ เป็นจริง ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก q

กรณี $q = 1$ เมื่อให้ $b_1 = 4, b_2 = 2$ เราจะได้ว่า

$$\frac{(2b_1 + 1)(2b_2 + 1)}{(b_1 + 1)(b_2 + 1)} = \frac{9 \cdot 5}{5 \cdot 3} = 3$$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

ให้ $q > 1$ เป็นจำนวนเต็มบวก และสมมติว่า $P(r)$ เป็นจริงทุก ๆ $r \in \{1, 2, \dots, q-1\}$

แยกพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ กรณี $2q + 1$ เป็นจำนวนประกอบ และกรณี $2q + 1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

กรณี $2q + 1$ เป็นจำนวนประกอบ : มี $u, v \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ ซึ่ง $2q + 1 = (2u + 1)(2v + 1)$

โดยสมมติฐานการอุปนัย จะมีจำนวนเต็มบวก $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_m$ ที่ทำให้

$$2u + 1 = \frac{(2f_1 + 1) \dots (2f_m + 1)}{(f_1 + 1) \dots (f_m + 1)}$$

และ
$$2v + 1 = \frac{(2g_1 + 1) \dots (2g_m + 1)}{(g_1 + 1) \dots (g_m + 1)}$$

ดังนั้น
$$2q + 1 = \frac{(2f_1 + 1) \dots (2f_m + 1)(2g_1 + 1) \dots (2g_m + 1)}{(f_1 + 1) \dots (f_m + 1)(g_1 + 1) \dots (g_m + 1)}$$
 เราจึงได้ว่า $P(q)$ เป็นจริง

กรณี $2q + 1$ เป็นจำนวนเฉพาะ : ให้ $2q + 1 = 2^{\ell} j$ โดย ℓ เป็นจำนวนเต็มบวก และ j เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ ซึ่ง $j < q$

เราได้ว่า
$$\begin{aligned} 2q + 1 &= 2^{\ell} j - 1 \\ &= \frac{(2^{\ell} j - 1)(2^{\ell} - 1)}{2^{\ell} - 1} \\ &= \frac{2^{2\ell} - 2^{\ell}(j + 1) + 1}{2^{\ell} - 1} \\ &= \frac{[2(2^{2\ell-1}j - 2^{\ell-1}(j + 1)) + 1][2^{2\ell-1}j - 2^{\ell-1}(j + 1) + 1]}{[2^{2\ell-1}j - 2^{\ell-1}(j + 1) + 1](2^{\ell-1})} \end{aligned}$$

สำหรับ $i = 1, 2, \dots, \ell$ ให้ $h_i = 2^{2^{\ell-i}}j - 2^{\ell-i}(j + 1)$

ดังนั้น h_1 เป็นจำนวนเต็มบวก และทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} 2q + 1 &= \frac{(2h_1 + 1)[2^{2^{\ell-1}}j - 2^{\ell-1}(j + 1) + 1]}{(h_1 + 1)(2^{\ell-1})} \\ &= \frac{(2h_1 + 1)[2(2^{2^{\ell-2}} - 2^{\ell-2}(j + 1)) + 1][2^{2^{\ell-2}}(j + 1) + 1]}{(h_1 + 1)[2^{2^{\ell-2}} - 2^{\ell-2}(j + 1) + 1](2^{\ell-1})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2h_1+1)(2h_2+1)\left[2^{t-2}-2^{t-2}(j+1)\right]+1}{(h_1+1)(h_2+1)(2^t-1)} \\
&\dots\dots\dots \\
&= \frac{(h_1+1)(2h_2+1)\dots(2h_t+1)\left[2^{2^{t-1}j}-2^{t-1}(j+1)\right]+1}{(h_1+1)(h_2+1)\dots(h_t+1)(2^t-1)} \\
&= \frac{(2h_1+1)(2h_2+1)\dots(2h_t+1)\left[(2^t-1)j\right]}{(h_1+1)(h_2+1)\dots(h_t+1)(2^t-1)} \\
&= \frac{(2h_1+1)(2h_2+1)\dots(2h_t+1)}{(h_1+1)(h_2+1)\dots(h_t+1)} \dots\dots\dots(1)
\end{aligned}$$

ถ้า $j = 1$ แล้ว จะได้ว่า $p(q)$ เป็นจริง

ถ้า $j > 1$ แล้ว เนื่องจาก j เป็นจำนวนบวกคี่ และ $j < q$ ฉะนั้น จะมี $t \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ ซึ่งทำให้

$$j = 2t + 1$$

โดยสมมติฐานการอุปนัย จะมีจำนวนเต็มบวก $r_1, r_2, \dots, r_s$ ที่ทำให้

$$j = 2t + 1 = \frac{(2r_1+1)(2r_2+1)\dots(2r_s+1)}{(r_1+1)(r_2+1)\dots(r_s+1)} \dots\dots\dots(2)$$

จาก (1) และ (2) ได้ว่า

$$2q + 1 = \frac{(2h_1+1)\dots(2h_t+1)(2r_1+1)\dots(2r_s+1)}{(h_1+1)\dots(h_t+1)(r_1+1)\dots(r_s+1)}$$

ดังนั้น $p(q)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ได้ว่า $p(q)$ เป็นจริง ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก q

#

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

- 1.1 divisor function
- 1.2 สมบัติ multiplicativity
- 1.3 การอุปนัย

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

2.1 แสดงให้เห็นว่า k ต้องเป็นจำนวนเต็มคี่ โดยใช้สมบัติของ divisor function d

2.2 แสดงให้เห็นว่า $k = 1$ ใช้ได้

2.3 ใช้การอุปนัยแสดงว่า ถ้า k ใช้ได้แล้ว ถ้า $k + 2$ จะใช้ได้ด้วย โดยทำการแยกจำนวนเต็มที่พิจารณาให้อยู่ในรูป $n = 2^o \times$ จำนวนเต็มคี่

3. สิ่งที่ต้องการวัด

3.1 ความรู้เกี่ยวกับ divisor function และสมบัติของฟังก์ชันนี้

3.2 การใช้เหตุผลทางการอุปนัยที่กระทำบนจำนวนเต็มที่เขียนในรูป $n = 2^a \times$ จำนวนเต็มคี่

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

4.1 divisor function และสมบัติของฟังก์ชันนี้

4.2 การใช้การอุปนัยที่กระทำบนเลขชี้กำลังของจำนวนเต็มในรูป $n = 2^a \times$ จำนวนเต็มคี่

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

5.1 divisor function

5.2 การใช้การอุปนัยที่กระทำบนเลขชี้กำลังของจำนวนเต็มในรูป $n = 2^a \times$ จำนวนเต็มคี่

6. การเชื่อมโยงความรู้

6.1 พิจารณาค่า k ที่พบจากสมบัติของ divisor function ว่าต้องเป็นจำนวนเต็มคี่

6.2 ตรวจสอบกรณีคี่ต่ำสุด ซึ่งคือ $k = 1$ ว่าเป็นจริง

6.3 ทำการอุปนัยบนเลขชี้กำลังของจำนวนเต็มในรูป $n = 2^a \times$ จำนวนเต็มคี่ เพื่อสรุปว่าเมื่อ k เป็นจริงแล้ว $k + 2$ เป็นจริงด้วย

2.2 Combinatorics

1. IMO'97 (ข้อ 4.)

เมตริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่ประกอบด้วยสมาชิกในเซต $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ จะเรียกว่า เมตริกซ์เงิน ถ้าสำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \dots, n$ แถวที่ i และหลักที่ i รวมกันประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดของ S จงแสดงว่า

(a) ไม่มีเมตริกซ์เงินสำหรับ $n = 1997$

(b) มี n จำนวนไม่จำกัด ที่เราสามารถหาเมตริกซ์เงินขนาด $n \times n$ ได้

ส่วนที่ 1 เกลยข้อสอบ

วิธีทำ (a) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $n > 1$

สมมติว่า มีเมตริกซ์เงิน A ขนาด $n \times n$ เขียนแทน A ด้วย $[a_{ij}]_{n \times n}$

จะแสดงว่า n ต้องเป็นจำนวนคู่

สำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ให้ R_i และ C_i เป็นเซตของสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ i ของ A ตามลำดับ เนื่องจาก A เป็นเมตริกซ์เงิน ดังนั้น $S = R_i \cup C_i$

เนื่องจากเส้นทแยงมุมหลักของ A มีทั้งหมด n ตำแหน่ง แต่ S มีสมาชิกทั้งหมด $2n-1$ ตัว ดังนั้นจะมี $x \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ โดยที่ x ไม่ปรากฏบนเส้นทแยงมุมหลักของ A นั่นคือ $x \neq a_{ii}$

ทุก $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ แต่จากการที่ $x \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$, $R_k \cup C_k = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ และ $R_k \cup C_k$ มีทั้งหมด $2n-1$ ตำแหน่ง ดังนั้น x จะปรากฏในแต่ละ $R_k \cup C_k$ และปรากฏเพียงครั้งเดียว ถ้าเราให้ (i_k, j_k) เป็นตำแหน่งที่ x ปรากฏใน $R_k \cup C_k$ ดังนั้น $i_k \neq j_k$ แต่ $i_k = k$ หรือ $j_k = k$

สำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ให้ $T_i = \{(k, \ell) \mid k, \ell \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ และ } (k = i \text{ หรือ } \ell = i)\}$ จะกล่าวว่า T_i และ T_j เชื่อมกันด้วย x ก็ต่อเมื่อ x ปรากฏในตำแหน่ง (i, j)

ดังนั้นสำหรับแต่ละ $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, T_{i_k} และ T_{j_k} เชื่อมกันด้วย x และจาก $i_k \neq j_k$ แต่ $i_k = k$ หรือ $j_k = k$ ทำให้ได้ว่า มี $j \in \{1, 2, \dots, n\} - \{k\}$ ซึ่ง T_k และ T_j เชื่อมกันด้วย x และจากการที่ x ปรากฏใน $R_k \cup C_k$ เพียงครั้งเดียว ทำให้สรุปได้ว่า มี j เพียงค่าเดียว ซึ่ง T_k และ T_j เชื่อมกันด้วย x จะเห็นว่า $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ ถูกแบ่งกันเป็นคู่ ๆ โดยที่แต่ละคู่จะเชื่อมกันด้วย x และหีบ 2 คู่ใด ๆ ที่เชื่อมกันด้วย x สองคู่นี้จะไม่มีสมาชิกซ้ำกัน ดังนั้น n ต้องเป็นจำนวนคู่

(b) จาก (a) เราทราบว่าไม่มีเมตริกซ์เงินขนาด $n \times n$ ซึ่ง n เป็นจำนวนคี่ และ $n \geq 3$ แสดงว่า ถ้า A เป็นเมตริกซ์เงิน ขนาดของ A ต้องเป็นจำนวนคู่ $\times$ จำนวนคู่ และเราพบว่า มีเมตริกซ์เงินขนาด 2×2 แน่นอน คือ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = A$ ซึ่งเราสามารถสร้างเมตริกซ์เงิน B ขนาด 4×4 จาก A ได้ จากนั้นก็สร้างเมตริกซ์เงิน C ขนาด 8×8 หา B ได้ในทำนองเดียวกัน

ซึ่งจะเห็นว่าเราจะได้เมตริกซ์เงินขนาด $2^n \times 2^n$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ นั่นเอง

เราสามารถพิสูจน์ความจริงนี้ โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราจะแสดงว่ามีเมตริกซ์เงินขนาด $2^n \times 2^n$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

ให้ $P(n)$ แทนข้อความมีเมตริกซ์เงินขนาด $2^n \times 2^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เมื่อ $n = 1$ จะได้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เงิน

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง แสดงว่ามีเมตริกซ์เงิน A ขนาด $2^k \times 2^k$ เราจะแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง กล่าวคือมีเมตริกซ์เงินขนาด $2^{k+1} \times 2^{k+1}$

ให้ $m = 2^k$ จะได้ว่า $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 = 2m$

ดังนั้น เรามีเมตริกซ์เงิน A ขนาด $m \times m$ และจะสร้างเมตริกซ์เงิน B ขนาด $2m \times 2m$ ดังนี้

$$\text{ให้ } B = \begin{bmatrix} A & Y \\ X & A \end{bmatrix}$$

$$\text{โดยที่ } X = \begin{bmatrix} 2m & 2m+1 & \cdots & 3m-1 \\ 3m-1 & 2m & \cdots & 3m-2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2m+1 & 2m+2 & \cdots & 2m \end{bmatrix}$$

และ
$$Y = \begin{bmatrix} 3m & 3m+1 & \cdots & 4m-1 \\ 4m-1 & 3m & \cdots & 4m-2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3m+1 & 3m+2 & \cdots & 3m \end{bmatrix}$$

ซึ่งสมาชิกใน X ประกอบด้วย $2m, 2m+1, \dots, 3m-1$ โดยแถวแรกของ X คือ

$$2m, 2m+1, 2m+2, \dots, 3m-1 \quad \text{ตามลำดับ}$$

และแถวต่อไปจะได้จากการนำสมาชิกตัวสุดท้ายของแถวก่อนมาเป็นสมาชิกตัวแรก และเรียงต่อไปทางขวาตามลำดับเดิม ซึ่งแถวที่ 2 จะได้เป็น $3m-1, 2m, 2m+1, \dots, 3m-2$ เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ส่วนสมาชิกใน Y ประกอบด้วย $3m, 3m+1, \dots, 4m-1$ และการกำหนดตำแหน่งของสมาชิกในแต่ละแถวก็กระทำในลักษณะเดียวกันกับ B และจะเขียน B ได้ดังนี้

$$B = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & 2m & 2m+1 & \cdots & 3m-1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & 3m-1 & 2m & \cdots & 3m-2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & 2m+1 & 2m+2 & \cdots & 2m \\ \hline 3m & 3m+1 & \cdots & 4m-1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ 4m-1 & 3m & \cdots & 4m-2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 3m+1 & 3m+2 & \cdots & 3m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{array} \right]$$

จะแสดงว่า B เป็นเมตริกซ์เงินขนาด $2m \times 2m$

ซึ่งต้องแสดงว่า สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \dots, 2m$ จะได้ $T_i = \{1, 2, \dots, 4m-1\}$

ให้ $i \in \{1, 2, \dots, 2m\}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T_i &= R_i \cup C_i \\ &= \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}\} \cup (\text{แถวที่ } i \text{ ของ } Y) \cup \{a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi}\} \cup (\text{หลักที่ } i \text{ ของ } X) \\ &= \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}, a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi}\} \cup \{3m, 3m+1, \dots, 4m-1\} \cup \{2m, 2m+1, \dots, 3m-1\} \\ &= \{1, 2, \dots, 2m-1\} \cup \{2m, 2m+1, \dots, 3m-1\} \cup \{3m, 3m+1, \dots, 4m-1\} \\ &= \{1, 2, \dots, 4m-1\} \end{aligned}$$

ดังนั้น B เป็นเมตริกซ์เงินขนาด $2m \times 2m$ $\therefore P(n)$ เป็นจริง ทุก n

$\therefore$ มี n จำนวนไม่จำกัดที่เราสามารถหาเมตริกซ์เงินขนาด $n \times n$ ได้

#

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

เมตริกซ์จัตุรัส

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

จากบทนิยามของเมตริกซ์เงิน เราทดลองสร้างเมตริกซ์เงินขนาดต่าง ๆ เพื่อศึกษาลักษณะของเมตริกซ์เงิน จากการทดลองนี้ เราเริ่มสังเกตได้ว่า ถ้า n เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่า 1 เราไม่สามารถสร้างเมตริกซ์เงินขนาด $n \times n$ ได้ ทำให้เราเกิดความคิดว่าอาจจะไม่มีเมตริกซ์เงินขนาด $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ที่มากกว่า 1 ก็ได้ เราก็ลองหาวิธีพิสูจน์ความคิดนี้ โดยอาศัยสมบัติของเมตริกซ์เงินที่กล่าวว่า ในแต่ละแถวที่ i และหลักที่ i (ซึ่งเราจะเรียกว่ากากบาทที่ i) ต้องประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมดของเซต $S = \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ และเมตริกซ์เงินขนาด $n \times n$ ย่อมมีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเพียง n ตัว แสดงว่าต้องมีสมาชิกใน S ที่ไม่ปรากฏบนเส้นทแยงมุมหลัก เราเลือกสมาชิกดังกล่าวมาใช้พิจารณาตามสมบัติของเมตริกซ์เงิน ซึ่งพบว่าถ้าสมาชิกตัวนี้คือ a_{ij} จะทำให้เกิดการจับคู่กันของกากบาทที่ i และกากบาทที่ j แต่เรามีกากบาททั้งหมด n แห่ง แสดงว่าจะมีการจับคู่กันเป็นคู่ ๆ ในบรรดากากบาททั้งหมด n แห่งนี้ ซึ่งจะจับคู่กันได้พอดี เมื่อ n เป็นจำนวนคู่เท่านั้น เราจึงสามารถแสดงข้อ (a) ได้

สำหรับข้อ (b) นั้น จากการทดลองสร้างเมตริกซ์เงินขนาด 2×2 คือ A เราพบว่า เราสามารถสร้างเมตริกซ์เงินขนาด 4×4 คือ B จาก A ได้ โดยอาศัยความจริงที่ว่า

1. เมตริกซ์เงิน A ประกอบด้วยสมาชิก 1, 2, 3
และเมตริกซ์เงิน B ประกอบด้วยสมาชิก 1, 2, ..., 7
ซึ่งสมาชิกใน B ที่ไม่อยู่ใน A ได้แก่ 4, 5, 6, 7
2. กากบาทที่ i ของ A ต้องประกอบด้วย 1, 2, 3 ทุก $i \in \{1, 2\}$
กากบาทที่ i ของ B ต้องประกอบด้วย 1, 2, ..., 7 ทุก $i \in \{1, 2, 3, 4\}$
3. สมาชิกแต่ละตัวจะปรากฏบนแต่ละกากบาทเพียงครั้งเดียว
4. ขนาดของ A เป็น $\frac{1}{4}$ ของขนาดของ B

จากความจริงเหล่านี้ เราลองวาง A ลงใน B ซึ่งพบว่าต้องวางในแนวเส้นทแยงมุม เพื่อไม่ให้เกิดสมาชิกปรากฏซ้ำกันในกากบาทใดกากบาทหนึ่ง ดังแผนภาพ

$$B = \begin{bmatrix} A & & ? \\ & \ddots & \\ ? & & A \end{bmatrix}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ จะเห็นว่าในบริเวณ ? นั้นเราต้องบรรจุสมาชิก 4, 5, 6, 7 ลงไป ซึ่งอาจ

พิจารณาเป็นเมตริกซ์ย่อยขนาด 2×2 คือ X และ Y ได้ดังแผนภาพ

$$B = \left[\begin{array}{c|c} A & Y \\ \hline X & A \end{array} \right]$$

จากสมบัติของเมตริกซ์เงิน จะเห็นได้ว่า หลักที่ 1 ของ X และแถวที่ 1 ของ Y ต้องประกอบด้วยสมาชิก 4, 5, 6, 7 ถ้าหลักที่ 1 ของ X ประกอบด้วย 4, 5 แถวที่ 1 ของ Y ก็ต้องประกอบด้วย 6, 7 ดังแผนภาพ

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} & & 6 & 7 \\ & A & & \\ \hline 4 & \dots & & \\ 5 & \dots & & A \end{array} \right]$$

โดยอาศัยวิธีการดังกล่าวนี้ เราสามารถสร้าง B ได้เป็น

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} & & 6 & 7 \\ & A & & \\ \hline 4 & 5 & 7 & 6 \\ & & & A \\ \hline 5 & 4 & & \end{array} \right] \quad \text{หรือ} \quad \left[\begin{array}{cc|cc} & & 6 & 7 \\ & A & & \\ \hline 4 & 7 & 5 & 4 \\ & & & A \\ \hline 5 & 6 & & \end{array} \right]$$

จะสังเกตได้ว่า เราสามารถสร้าง B โดยให้สมาชิกใน X ประกอบด้วย 4, 5 และสมาชิกใน Y ประกอบด้วย 6, 7 ได้

จากนั้นเราก็ลองสร้างเมตริกซ์เงิน C ขนาด 8×8 จาก B ซึ่ง C จะประกอบด้วยสมาชิก 1, 2, ..., 15 มีจำนวน 8 ตัว และสมาชิกใน C ที่ไม่อยู่ใน B ได้แก่ 8, 9, ..., 15 มีจำนวน 8 ตัว เราก็กำหนดให้เมตริกซ์ X ของ C ประกอบด้วย 8, 9, 10, 11 และเมตริกซ์ Y ของ C ประกอบด้วย 12, 13, 14, 15 เราจะสร้าง C ได้เป็น

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 12 & 13 & 14 & 15 \\ & & & & 15 & 12 & 13 & 14 \\ & & & & 14 & 15 & 12 & 13 \\ & & & & 13 & 14 & 15 & 12 \\ \hline 8 & 11 & 10 & 9 & & & & \\ 9 & 8 & 11 & 10 & & & & \\ 10 & 9 & 8 & 11 & & & & \\ 11 & 10 & 9 & 8 & & & & \\ \hline & & & & & & B & \end{array} \right]$$

โดยการสร้างในลักษณะเดียวกันนี้ เราจะได้เมตริกซ์เงินขนาด $16 \times 16, 32 \times 32, \dots$ ซึ่งหมายความว่า สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n เราสามารถสร้างเมตริกซ์เงินขนาด $2^n \times 2^n$ ได้เสมอ โดยการสร้างนี้ เป็นการสร้างต่อ ๆ กันมาเป็นลำดับ ดังนั้นเราสามารถแสดงข้อความ (b) ตามแนวความคิดนี้ โดยใช้ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

3. สิ่งที่ต้องการวัด

โจทย์ข้อนี้ต้องการวัดความสามารถในการทำความเข้าใจบทนิยามใหม่ ๆ และอาศัยความเข้าใจสร้างทักษะ นำไปสู่ความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหา

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

4.1 การทำความเข้าใจบทนิยามใหม่ ๆ

4.2 การวิเคราะห์ปัญหา

4.3 การพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

5.1 การพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

5.2 โจทย์ที่ฝึกให้นักเรียนคิดและวิเคราะห์ปัญหา

6. การเชื่อมโยงความรู้

จากบทนิยามที่โจทย์กำหนดให้ ทดลองทำในกรณี $n = 1, 2, 3, 4$ สังเกตรูปแบบและนำไปสู่การพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

2. IMO'98 (ข้อ 2.)

ในการแข่งขันแห่งหนึ่ง มีผู้เข้าร่วมแข่งขัน a คน และกรรมการตัดสิน b คน โดยที่ $b \geq 3$ เป็นจำนวนเต็มคือ กรรมการแต่ละคนตัดสินผู้เข้าแข่งขันแต่ละคนว่า “ผ่าน” หรือ “ตก” ให้ k เป็นจำนวนซึ่งกรรมการสองคนใด ๆ ตัดสินผู้เข้าแข่งขันตรงกันอย่างมาก k คน จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

ส่วนที่ 1 เกลยข้อสอบ

วิธีทำ เราจัดกรรมการได้ทั้งหมด $\binom{b}{2}$ คู่ และแต่ละคู่ตัดสินผู้เข้าแข่งขันตรงกันได้อย่างมาก k คน จึงได้ว่า

จำนวนผลการตัดสินที่ตรงกันมีอย่างมาก $k \binom{b}{2}$

เพื่อความสะดวกให้เบอร์ผู้เข้าแข่งขันเป็น $1, 2, \dots, a$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, a$ ใด ๆ

สมมติว่าผู้เข้าแข่งขันคนที่ i ได้รับผลการตัดสิน “ผ่าน” จากกรรมการ x_i คน และ “ตก” จากกรรมการ y_i คน ดังนั้น $x_i + y_i = b$ และจำนวนคู่ของกรรมการที่ตัดสินตรงกันสำหรับผู้เข้าแข่งขัน

$$\begin{aligned} \text{คือ} \quad \binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} &= \frac{1}{2}(x_i^2 + y_i^2 - x_i - y_i) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x_i + y_i)^2 - b\right) \\ &= \frac{1}{4}((b-1)^2 - 1) \end{aligned}$$

เนื่องจาก b เป็นจำนวนคี่ จึงได้ว่า $\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} \geq \frac{(b-1)^2}{4}$

$$\text{ดังนั้น} \quad k \binom{b}{2} \geq \sum_{i=1}^a \left(\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} \right) \geq \frac{a(b-1)^2}{4}$$

$$\text{ฉะนั้น} \quad \frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b} \quad \#$$

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานความรู้ที่ต้องรู้

- 1.1 การทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์
- 1.2 วิธีเรียงจัดหมู่
31. หลักการนับ

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

โจทย์ข้อนี้ดูผิวเผินเหมือนกับว่าง่ายมากความรู้ที่ใช้เป็นความรู้พื้นฐานทางคอมบินาทอริก แต่ต้องการผู้ที่มีประสบการณ์ในการทำโจทย์มาพอสมควร คู่กันกับการแก้ปัญหาทำนองนี้ เนื่องจากไม่ได้ต้องการคำตอบแต่ต้องการให้พิสูจน์ข้อสมการจึงยากที่จะคิดแก้ปัญหา วิธีที่ลองคิดจากกรณีเฉพาะเพื่อเป็นแนวทางในการพิสูจน์กรณีทั่วไปจึงใช้ไม่ได้ หัวใจในการแก้ปัญหาจึงอยู่ที่การคำนวณหาจำนวนผลการตัดสินที่ตรงกันของผู้เข้าแข่งขันแต่ละคน เพื่อนำมาเปรียบเทียบสร้างสมการกับสิ่งที่โจทย์กำหนด คือ “กรรมการสองคนใด ๆ ตัดสินผู้เข้าแข่งขันตรงกันอย่างมาก k คน” ทำให้เราได้

$$\text{จำนวนผลการตัดสินที่ตรงกันมีอย่างมาก } k \binom{b}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } k \binom{b}{2} \geq \text{จำนวนผลการตัดสินที่ตรงกัน (จริง ๆ)}$$

ขั้นตอนต่อไปจึงต้องหาจำนวนผลการตัดสินที่ตรงกัน ซึ่งสามารถคำนวณได้จากจำนวนกรรมการที่ให้ “ผ่าน” และจำนวนกรรมการที่ให้ “ตก” ของผู้เข้าแข่งขันแต่ละคนรวมกัน นั่นคือ

$$\sum_{i=1}^a \left(\binom{x_i}{2} + \binom{y_i}{2} \right)$$

เมื่อ x , และ y , คือจำนวนกรรมการที่ตัดสินให้ผู้เข้าแข่งขันคนที่ i “ผ่าน” และ “ตก” ตามลำดับ ชั้นตอนสุดท้ายคือการใช้พีชคณิตในการปรับปรุงผลบวกนี้ในนิพจน์ของ b

3. สิ่งที่ต้องการวัด

โจทย์ต้องการวัดความสามารถในการวิเคราะห์ขอบเขตของจำนวนสิ่งของ (ซึ่งในที่นี้คือผลค่าตัดสิน) ที่มีสมบัติตามต้องการ

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

เราได้เรียนรู้ในการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาทางคอมบินาทอริก และการใช้พีชคณิตของจำนวน เช่น การทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ความเป็นจำนวนคู่ในการหาขอบเขตของจำนวน

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

5.1 การวิเคราะห์โจทย์ปัญหาทางคอมบินาทอริก

5.2 หลักการนับ

5.3 การประยุกต์ใช้สมบัติของจำนวนในการหาขอบเขตของจำนวน

2.3 ผสมผสานระหว่าง Combinatorics และ Number Theory

1. IMO' 95 (ข้อ 6.)

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะที่ จงหาพร้อมพิสูจน์ให้เห็นจริง จำนวนสับเซต A ทั้งหมดของเซต $\{1, 2, \dots, 2p\}$ ที่ทำให้

(i) A มีสมาชิก p ตัว และ

(ii) p หารผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน A ลงตัว

ส่วนที่ 1 เฉลยข้อสอบ

คำตอบ $\frac{1}{p} \left(\binom{2p}{p} - 2 \right) + 2$

วิธีทำ ให้ $\mathcal{X}_p = \{A \subseteq \{1, 2, \dots, 2p\} \mid A \text{ มีสมาชิก } p \text{ ตัว}\}$

สำหรับ A ใดๆ ใน $\mathcal{X}_p$ สัญลักษณ์ $S(A)$ หมายถึงผลบวกของสมาชิกทุกตัวใน A

ก่อนอื่นสังเกตว่า $L = \{1, 2, \dots, p\}$ และ $R = \{p+1, p+2, \dots, 2p\}$ เป็นเซตที่สอดคล้อง

(i) และ (ii) เราจะทำกาแบ่งกัน (partition) $\mathcal{X}_p - \{L, R\}$ ออกเป็นกลุ่มมีสมบัติดังนี้

(ก) แต่ละกลุ่มมี p เซต สมมติว่าคือ $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ จะได้ว่า $S(A_0), S(A_1), \dots, S(A_{p-1})$

เป็นระบบเลขตกค้างแบบสมมูลมอดุโล p

(ข) แต่ละ $B \in \mathcal{X}_p - \{L, R\}$ จะอยู่ในกลุ่มใดกลุ่มหนึ่งเพียงกลุ่มเดียวเท่านั้น

พิจารณา A ใดๆ ใน $\mathcal{A}_p - \{L, R\}$ ให้ $A_L = A \cap L$ และ $A_R = A \cap R$

เราสร้าง “พรรคพวก” ในกลุ่มของ A ดังนี้

$$\text{ให้ } A_0 = A_L \cup A_R$$

$$A_1 = (1 \oplus A_L) \cup A_R$$

$$A_2 = (2 \oplus A_L) \cup A_R$$

$\vdots$

$$A_{p-1} = ((p-1) \oplus A_L) \cup A_R$$

โดยที่ $x \oplus B = \{x + b \bmod p \mid b \in B\}$ เมื่อ $B \subseteq \{1, 2, \dots, 2p\}$

เราจะแสดงว่าการแบ่งกลุ่มเช่นนี้จะสอดคล้องเงื่อนไข (ก) และ (ข) ตามต้องการ และจาก (ก) และ (ข) ทำให้เราสรุปได้ว่าในแต่ละกลุ่มนั้นจะมีเพียงเซตเดียวเท่านั้นซึ่งผลบวกของสมาชิกในกลุ่มหารด้วย p ลงตัว ($\equiv 0 \bmod p$) ดังนั้นจำนวนเซตที่โจทย์ต้องการมีเท่ากับ จำนวนกลุ่ม $+ 2$ (คือ L และ R)

$$\text{นั่นคือ } \frac{1}{p} \left(\binom{2p}{p} - 2 \right) + 2$$

กล่าวในอีกนัยหนึ่งได้ว่า การแบ่งกลุ่มที่กล่าวถึงเป็นการแบ่ง $\mathcal{A}_p - \{L, R\}$ เป็นชั้นเทียบเท่า (equivalence class) โดยที่

A และ A' อยู่ในชั้นเทียบเท่าเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $A'_R = A_R$ และ A'_L เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนวัฏจักรของ A_L

พิสูจน์ (ก) ในการแสดงว่าแต่ละกลุ่มมี p สับเซต ให้ A เป็นสมาชิกหนึ่งในกลุ่ม พรรคพวกหนึ่งในกลุ่มของ A ได้แก่ $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$ ตามที่กำหนดข้างต้น เราจะแสดงว่า $A_i = A_j$ ก็ต่อเมื่อ $i = j$

สมมติว่า $A_i = A_j$ เราได้จากการกำหนดพรรคพวกของ A ว่า $i \oplus A_L = j \oplus A_L$ ซึ่งทำให้ $S(i \oplus A_L) = S(j \oplus A_L)$ ดังนั้น

$$ki \equiv kj \bmod p \text{ เมื่อ } k \text{ คือจำนวนสมาชิกของ } A_L$$

เนื่องจาก $0 < k < p$ จึงได้ $i = j$ ดังนั้นในแต่ละกลุ่มมี $p-1$ เซต และ $S(A_0), S(A_1), \dots, S(A_{p-1})$ เป็นระบบเศษตกค้างแบบสมบูรณ์มอดุโล p

พิสูจน์ (ข) เราจะแสดงว่าถ้าสองกลุ่มมีสมาชิกร่วมกันแล้วสองกลุ่มนี้คือกลุ่มเดียวกัน

สมมติว่า E อยู่ในกลุ่มสองกลุ่มกล่าวคือ E เป็นพรรคพวกของ A และ B

$$\text{นั่นคือ } E = (x \oplus A_L) \cup A_R \text{ และ } E = (y \oplus B_L) \cup B_R$$

เนื่องจาก $x \oplus A_L$ และ $y \oplus B_L$ เป็นสับเซตของ L เราได้ว่า $A_R = E \cap R = B_R$

ดังนั้น $x \oplus A_L = y \oplus B_L$ นั่นคือ $B_L = (x - y) \oplus A_L$

นั่นแสดงว่า B เป็นพรรคพวกของ A กลุ่ม A และกลุ่ม B จึงเป็นกลุ่มเดียวกัน #

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

- 1.1 วิธีเรียงจัดหมู่ และวิธีเรียงสับเปลี่ยน
- 1.2 การแบ่งกัน (partition) ของเซต (เทียบได้กับความสัมพันธ์สมมูล)
- 1.3 กระบวนการพิสูจน์
- 1.4 สมภาค (congruences) และจำนวนเต็มสมภาค
- 1.5 ระบบเศษตกค้างแบบสมบูรณ์มอดุโล n

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

เริ่มทดลองกรณี $p = 3$ สังเกตว่า $S(\{1, 2, 3\}) \equiv 0 \equiv S(\{4, 5, 6\}) \pmod{3}$ ทั้งสองเซตนี้จึงเป็นเซตที่ต้องการ เมื่อเราพิจารณาเซตที่เหลือซึ่งมีอยู่ทั้งหมด $\binom{6}{3} - 2 = 18$ สับเซตที่มีสมาชิก 3 ตัว ดังนี้

$\{2, 3, 4\}$	$\{1, 3, 4\}$	$\{1, 2, 4\}$
$\{1, 3, 5\}$	$\{1, 2, 5\}$	$\{2, 3, 5\}$
$\{1, 2, 6\}$	$\{2, 3, 6\}$	$\{1, 2, 6\}$
$\{3, 4, 5\}$	$\{1, 4, 5\}$	$\{2, 4, 5\}$
$\{2, 4, 6\}$	$\{3, 4, 6\}$	$\{1, 4, 6\}$
$\{1, 5, 6\}$	$\{2, 5, 6\}$	$\{3, 5, 6\}$

เราจะสังเกตเห็นว่าสับเซตที่มีสมาชิก 3 ตัวจำนวน 18 เซตนี้แบ่งออกได้เป็นสามกลุ่มเท่า ๆ กัน โดยกลุ่มแรก เป็นพวกที่มีผลรวมของสมาชิกในเซต $\equiv 0 \pmod{3}$ กลุ่มที่สองเป็นเซตที่มีผลรวมของสมาชิกในเซต $\equiv 1 \pmod{3}$ และกลุ่มที่สามเป็นเซตที่มีผลรวมของสมาชิกในเซต $\equiv 2 \pmod{3}$

ดังนั้นคำตอบสำหรับกรณี $p = 3$ คือ $6 + 2 = 8$ ซึ่ง 6 ได้มาจาก $\frac{\binom{6}{3} - 2}{3}$ และ 2 คือ

2 เซต $\{1, 2, 3\}$ และ $\{4, 5, 6\}$ นั่นเอง

เราจึงคาดเดาคำตอบน่าจะเป็น

$$\frac{1}{p} \left(\binom{2p}{p} - 2 \right) + 2$$