

สำหรับ $p = 5$ เมื่อแยก $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $\{6, 7, 8, 9, 10\}$ ออกไปจากหมู่สับเซตของ $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ ที่มีสมาชิกอยู่ 5 ตัวแล้ว เราพยายามจัดกลุ่มสับเซตซึ่งมีสมาชิก 5 ตัวที่เหลือทั้งหมด $\binom{10}{5} - 2 = 250$ เซต ออกเป็น 5 กลุ่ม $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$ ซึ่งถ้า $A \in \mathcal{S}_i$ แล้ว $S(A) \equiv i \pmod{5}$ เมื่อ $S(A)$ หมายถึงผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A แต่แทนที่เราจะแบ่งเซต 250 เซต ออกเป็น 5 กลุ่ม ๆ ละ 50 เซต เราจะแบ่งสับเซตออกเป็น 50 กลุ่ม ๆ ละ 5 เซต

หันกลับไปพิจารณากรณี $p = 3$ ใหม่ ให้ $L = \{1, 2, 3\}$ และ $R = \{4, 5, 6\}$ พิจารณา $A = \{2, 3, 4\}$ แบ่ง A ออกเป็นสองส่วนคือส่วนซ้าย $A_L = A \cap L$ และส่วนขวา $A_R = A \cap R$ ฉะนั้น

$$A_L = \{2, 3\} \text{ และ } A_R = \{4\}$$

เซตที่มีส่วนขวาท่เท่ากับ A_R มีอยู่สองเซตคือ $\{1, 3, 4\}$ และ $\{1, 2, 4\}$

เมื่อพิจารณาส่วนซ้ายของเซตทั้งสาม จะได้ $\{2, 3\}, \{1, 3\}$ และ $\{1, 2\}$

เซตเหล่านี้คือ 2-cycle ของ $\{1, 2, 3\}$ หรืออาจมองอีกนัยหนึ่งได้ว่า

$$\{1, 3\} = \{3, 1\} = \{1 + 2, 1 + 3\} = 1 \oplus A_L$$

$$\{1, 2\} = \{2 + 2, 2 + 3\} = 2 \oplus A_L$$

เมื่อการบวกเป็นการบวกใน Z_3 กล่าวคือเป็นการบวกมอดุโล 3

เพื่อความเข้าใจยิ่งขึ้น เราจะทำตัวอย่างในกรณี $p = 5$

ให้ $A = \{1, 5, 7, 8, 9\}$, $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $R = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

$$A_L = A \cap L = \{1, 5\} \text{ และ } A_R = A \cap R = \{7, 8, 9\}$$

2-cycle ทั้งหมดใน $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ได้แก่

$$\{1, 5\} = A_L, \{2, 1\} = 1 \oplus A_L, \{3, 2\} = 2 \oplus A_L, \{4, 3\} = 3 \oplus A_L \text{ และ } \{5, 4\} = 4 \oplus A_L$$

นอกจากนี้ $S(\{1, 5\}), S(\{2, 1\}), S(\{3, 2\}), S(\{4, 3\})$ และ $S(\{5, 4\})$ เป็นจำนวนที่ต่างกันทั้งหมดมอดุโล 5

ปัญหาที่เหลือคือเราจะพิสูจน์ขบวนการนี้ในกรณีทั่วไปได้อย่างไร การที่ p เป็นจำนวนเฉพาะจะเป็นส่วนสำคัญที่ทำให้ขั้นตอนดังกล่าวข้างต้นได้ผลหรือไม่

3. สิ่งที่ต้องการวัด

โจทย์ต้องการวัดความสามารถในการประยุกต์ใช้การจัดหมู่หรือแบ่งกลุ่มสิ่งของ เพื่อการนับจำนวนเซตที่มีสมบัติตามต้องการ

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

เราได้เรียนรู้วิธีการแบ่งกันเซตโดยใช้พีชคณิตบนเซตคือ $x \oplus B$ สมภาค จำนวนเต็มสมภาค และระบบเศษคก้างแบบสมบูรณมอดุโล รวมทั้งการวิเคราะห์ปัญหาในเชิงตรรกศาสตร์

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

ทุกอย่างที่ใช้ไม่มีในหลักสูตร ปัญหาข้อนี้เป็นปัญหาที่ยากที่สุดในปัญหาทั้งหมดหกข้อใน IMO ครั้งที่ 36 จำนวนผู้เข้าแข่งขันที่ทำโจทย์ข้อนี้ได้มีน้อยมาก

2. IMO'96 (ข้อ 1.)

ให้ $ABCD$ เป็นกระดานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มี $|AB| = 20$, $|BC| = 12$ แบ่งกระดานนี้ออกเป็นช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสหนึ่งหน่วยทั้งหมด 20×12 ช่อง ให้ r เป็นจำนวนเต็มบวก การเดินหมากแต่ละครั้งจากช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสช่องหนึ่งไปยังอีกช่องหนึ่ง จะกระทำได้อต่อเมื่อระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสองเท่ากับ $\sqrt{r}$

เป้าหมายคือการหาลำดับของการเดินหมากโดยเริ่มเดินจากช่องที่มี A เป็นจุดมุมไปสิ้นสุดที่ช่องที่มี B เป็นจุดมุม

- (a) จงพิสูจน์ว่า เราไม่สามารถเดินหมากให้บรรลุได้ในกรณีที่ 2 หรือ 3 หาร r ลงตัว
- (b) จงพิสูจน์ว่า เราสามารถเดินหมากให้บรรลุเป้าหมายได้ในกรณีที่ $r = 73$
- (c) ในกรณีที่ $r = 97$ จงตรวจสอบว่าเราสามารถเดินหมากให้บรรลุเป้าหมายได้หรือไม่

ส่วนที่ 1 เกลยข้อสอบ

วิธีทำ เราจะพิจารณาการเดินหมากบนกระดานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้เป็นการเดินจุด $(0, 0)$ บนจุดแลตทิซของ $\mathcal{A}$ ที่กำหนดโดย

$$\mathcal{A} = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 0 \leq i \leq 19, 0 \leq j \leq 11\}$$

ไปยังจุด $(19, 0)$ บน $\mathcal{A}$

เป้าหมาย คือ การเดินจากจุด $(0, 0)$ ไปจบลงที่จุด $(19, 0)$ โดยการเดินแต่ละครั้งจากจุด (x, y) ไปยัง $(x + a, y + b)$ เมื่อ $a^2 + b^2 = r$ ซึ่งเราจะเรียกว่าเป็นการเดินแบบ $[a, b]$ เพื่อความสะดวกในการอ้างถึง

- (a) กรณี r เป็นจำนวนคู่

เนื่องจาก $a^2 + b^2 = r$ และ r เป็นจำนวนคู่ เราได้ว่า a^2 และ b^2 มีความเป็นคู่หรือความเป็นคี่เหมือนกัน ทำให้ได้ว่า a และ b มีความเป็นคู่หรือความเป็นคี่เหมือนกัน ดังนั้น $a + b$ เป็นจำนวนคู่

เราเริ่มเดินจากจุด $(0, 0)$ ดังนั้นทุกจุดที่จะเดินไปถึงได้จะต้องอยู่ในรูป (x, y) ซึ่ง x และ y เป็นจำนวนคู่ แต่ $(19, 0)$ มี 19 เป็นจำนวนคี่ เราจึงเดินไปยังจุด $(19, 0)$ ไม่ได้

กรณี r เป็นผลคูณของ 3 (3 หาร r ลงตัว)

เนื่องจากไม่ว่า x จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$ หรือ $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ เราได้ว่า

$$a^2 + b^2 = r \equiv 0 \pmod{3} \text{ ก็ต่อเมื่อ } a^2 \equiv 0 \pmod{3} \text{ และ } b^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

เนื่องจาก $x^2 \equiv 0 \pmod{3}$ ก็ต่อเมื่อ $x \equiv 0 \pmod{3}$ เมื่อเราเริ่มเดินจากจุด $(0, 0)$ ทุกครั้งของการเดิน จะเดินไปยังจุด (x, y) ซึ่ง $x \equiv 0 \pmod{3}$ และ $y \equiv 0 \pmod{3}$ แต่ $19 \not\equiv 0 \pmod{3}$ เราจึงไม่สามารถเดินไปยังจุด $(19, 0)$ ได้

(b) กรณี $r = 73 = 8^2 + 3^2$

ดังนั้นการเดินทั้งหมดมี 8 แบบด้วยกัน คือ $[8, 3], [-8, -3], [8, -3], [-8, 3], [3, 8], [-3, -8], [3, -8]$ และ $[-3, 8]$

ให้ $a =$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[8, 3] -$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[-8, -3]$

$b =$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[8, -3] -$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[-8, 3]$

$c =$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[3, 8] -$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[-3, -8]$

$d =$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[3, -8] -$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[-3, 8]$

เนื่องจากเราต้องเดินจาก $(0, 0)$ ไปจบลงที่ $(19, 0)$ จึงได้ว่า

$$8(a + b) + 3(c + d) = 19 \quad \text{และ}$$

$$3(a - b) + 8(c - d) = 0$$

คำตอบหนึ่งที่น่าจะเป็นไปได้คือ

$$(a + b, c + d) = (2, 1) \text{ และ } (a - b, c - d) = (-8, 3)$$

เราอาจเลือก $a = -3, b = 5, c = 2$ และ $d = -1$

นั่นคือ เราเลือกเดินแบบ $[-8, -3]$ สามครั้ง แบบ $[8, -3]$ ห้าครั้ง แบบ $[3, 8]$ สองครั้ง และแบบ $[-3, 8]$ หนึ่งครั้ง

หลังจากการทดลองจะพบว่าทางเดินหนึ่งที่เป็นไปได้คือ

$$(0, 0) \rightarrow (3, 8) \rightarrow (11, 5) \rightarrow (19, 2) \rightarrow (16, 10) \rightarrow (8, 7) \rightarrow (0, 4) \rightarrow (8, 1) \rightarrow (11, 9) \rightarrow (3, 6) \rightarrow (11, 3) \rightarrow (19, 0)$$

(c) กรณี $r = 97 = 9^2 + 4^2$

การเดินทั้งหมดในกรณีนี้มี 8 แบบ เช่นกันคือ $[\pm 9, \pm 4], [\pm 4, \pm 9]$,

เราจะแบ่งกันจุดใน $\mathcal{A}$ ออกเป็น $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ โดยที่

$$\mathcal{B} = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 0 \leq i \leq 19, 4 \leq j \leq 7\} \text{ และ } \mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$$

เราจะแสดงได้โดยง่ายว่า

(ก) การเดินแบบ $[\pm 9, \pm 4]$ จะนำเราจากจุดใน $\mathcal{S}$ ไปยังจุดใน $\mathcal{S}$ และถ้าเราเดินจากจุดใน $\mathcal{S}$ จะนำเราไปสู่จุดใน $\mathcal{S}$ เสมอ

(ข) การเดินแบบ $[\pm 4, \pm 9]$ จะนำเราจากจุดใน $\mathcal{S}$ ไปยังอีกจุดหนึ่งใน $\mathcal{S}$ เท่านั้น

สังเกตว่าเราไม่สามารถเดินจากจุดใน $\mathcal{S}$ ไปยังจุดใน $\mathcal{S}$ ได้ในการเดินเพียงครั้งเดียว

การเดินในแบบ $[\pm 9, \pm 4]$ แต่ละครั้งจะเปลี่ยนความเป็นคู่หรือคี่ของค่าพิกัด x (x -coordinate) ดังนั้นหากเราต้องการเดินจาก $(0, 0)$ ไปยัง $(19, 0)$ เราต้องเดินเป็นจำนวนคี่ครั้ง

เราเริ่มต้นจากจุด $(0, 0)$ ซึ่งอยู่ใน $\mathcal{S}$ และเดินเป็นจำนวนคี่ครั้งเราจะต้องจบลงที่จุดใน $\mathcal{S}$ เสมอ (จากข้อสังเกต (ก) และ (ข)) แต่จุด $(19, 0)$ อยู่ใน $\mathcal{S}$ จึงเป็นไปได้ที่เราจะหาทางเดินให้บรรลุเป้าหมายดังกล่าว

#

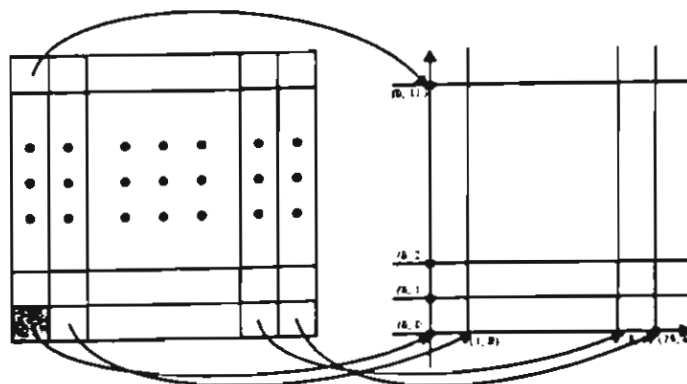
ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

- 1.1 ระบบแกนมุมฉาก
- 1.2 สูตรระยะทางระหว่างจุดสองจุด
- 1.3 การแก้สมการในรูป $ax + by = c$
- 1.4 การแก้ระบบสมการเชิงเส้น
- 1.5 สมภาค

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

ก่อนอื่นเราต้องสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้กับการเดินหมาก เนื่องจากกระดานเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก เมื่อแบ่งเป็นช่องและเดินหมากจากช่องหนึ่งไปยังช่องอื่น เราจึงแทนกระดานนี้ด้วยระนาบในควอดรนต์แรกในระบบแกนมุมฉาก โดยช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสมุมล่างซ้ายแทนด้วยจุด $(0, 0)$ ช่องถัดไปทางขวาแทนด้วยจุด $(1, 0)$ ไปเรื่อย ๆ จนช่องมุมล่างขวาแทนด้วย $(19, 0)$ ดังรูป



ดังนั้นเราแทนช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสของตารางนี้ด้วยเซต $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 0 \leq i \leq 19 \text{ และ } 0 \leq j \leq 11\}$$

เราแปลงเป้าหมายการเดินทางจากจุด A ไปจุด B เป็นการเดินจากจุด $(0, 0)$ ไปยัง $(19, 0)$ และการเดินหมากแต่ละครั้งคือการเดินจากจุด (x, y) ไปยัง $(x + a, y + b)$ โดยที่ $a^2 + b^2 = r$

ในการพิสูจน์ (a) กรณี r เป็นจำนวนคู่เราใช้ความเป็นคู่ของ r ในการแสดงว่า เราไม่สามารถเดินหมากบรรลุตามเป้าหมายได้ กรณีที่ r เป็นผลคูณของ 3 เราแสดงได้ในทำนองเดียวกันกับกรณี r เป็นจำนวนคู่คือพิจารณาความเป็นไปได้ของการหารด้วย 3 ลงตัว แทนความเป็นคู่

เพื่อความสะดวกในการพิสูจน์กรณี $r = 73$ และ $r = 97$ เราจะเขียนแทนการเดินทางจากจุด (x, y) ไปยัง $(x + a, y + a)$ ด้วยสัญลักษณ์ $[a, b]$

กรณี $r = 73 = 8^2 + 3^2$ จะมีการเดินทั้งหมด 8 แบบคือ $[8, 3], [-8, -3], [8, -3], [-8, 3], [3, 8], [-3, -8], [3, -8]$ และ $[-3, 8]$ ซึ่งเราจับคู่การเดินในทิศตรงกันข้ามกันได้ 4 คู่ เราจึงควรนับจำนวนครั้งของการเดินเหล่านี้

ให้ $a =$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[8, 3] -$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[-8, -3]$

$b =$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[8, -3] -$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[-8, 3]$

ถ้าเราเดินแบบ $[8, 3]$ 1 ครั้ง และ $[8, -3]$ 1 ครั้ง หมากจะเคลื่อนที่ไปในแนวแกน X 8 หน่วย แต่หากเราเดินแบบ $[8, 3]$ 1 ครั้ง และ $[-8, 3]$ 1 ครั้ง หมากจะเคลื่อนที่ไปในแนวแกน Y 3 หน่วย

ให้ $c =$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[3, 8] -$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[-3, -8]$

$d =$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[3, -8] -$ จำนวนครั้งของการเดินแบบ $[-3, 8]$

วิเคราะห์ในทำนองเดียวกัน เพื่อบรรลุเป้าหมายเราจะต้องได้สมการ

$$8(a + b) + 3(c + d) = 19$$

และ
$$3(a - b) + 8(c - d) = 0$$

แก้สมการทั้งสองโดยใช้หลักการแก้สมการในรูป $\alpha x + \beta y = \gamma$

เราจะได้คำตอบที่อาจเป็นไปได้ และนำคำตอบที่ได้มาทดลองหาทางเดินที่เป็นไปได้ (ซึ่งอาจมีมากกว่าหนึ่งทางเดิน)

ส่วนกรณี $r = 97 = 9^2 + 4^2$ จะมีการเดินที่เป็นไปได้ทั้งหมด 8 แบบเช่นเดียวกับกรณี $r = 73$ แต่ในกรณีนี้เราทดลองเดินหมากอย่างไรก็ไม่สำเร็จ อย่างไรก็ตามเราพบว่าหากแบ่งขนานกับแกน X เป็นสามส่วน ส่วนกลางคือ

$$\mathcal{B} = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 0 \leq i \leq 19 \text{ และ } 4 \leq j \leq 7\}$$

และอีกสองส่วนที่เหลือเรียกว่า $\mathcal{C}$ เนื่องจากการเดินในแบบ $[\pm 9, \pm 4]$ ค่าพิกัด y ทำให้หมากเดินสลับไปมาระหว่างบริเวณ $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$ ค่าพิกัด x เป็นคู่-คี่สลับกัน จึงต้องเดินเป็นจำนวนคี่ครั้งเพื่อให้

ค่าพิกต์ x เป็น 19 ประกอบกับการเดินแบบ $[\pm 4, \pm 9]$ เป็นการเดินหมากจากบริเวณ $\times$ ไปบริเวณ $\times$ เท่ากัน จึงไม่สามารถบรรลุเป้าหมายได้

3. สิ่งที่ต้องการวัด

โจทย์ต้องการวัดการแปลงปัญหาคอมบินาทอริกเชิงเรขาคณิตเป็นตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อแก้ปัญหาโดยใช้ทฤษฎีจำนวน เรขาคณิตวิเคราะห์และทฤษฎีสมการ

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

เราได้เรียนรู้การใช้คณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหากล่นเกมถึงความเป็นไปได้ในการบรรลุเป้าหมายที่วางไว้ พร้อมทั้งได้เห็นตัวอย่างการแปลงปัญหาในชีวิตจริงเป็นรูปตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

หลักสูตรยังขาดคอมบินาทอริกเชิงเรขาคณิต การรู้จักวิเคราะห์โจทย์ปัญหา และการนำคณิตศาสตร์ไปแก้ปัญหในชีวิตจริง

3. Inequalities

1. IMO'94 (ข้อ 1.)

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_m$ เป็นสมาชิกที่แตกต่างกันของ $\{1, 2, \dots, n\}$ ซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขที่ว่า

* ถ้า $a_i + a_j \leq n$, $1 \leq i < j \leq m$, แล้วจะมี k , $1 \leq k \leq m$, ที่ทำให้ $a_i + a_j = a_k$

จงพิสูจน์ว่า $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}$

หมายเหตุ เงื่อนไข * มีความหมายเดียวกันกับข้อความที่กล่าวว่า

“ถ้า $a_i + a_j \leq n$, $1 \leq i < j \leq m$ แล้ว $a_i + a_j$ ต้องเป็นสมาชิกของ $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ”

ซึ่งสะดวกในการนำไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์มากกว่าข้อความเดิม

ส่วนที่ 1 เกลยข้อสอบ

ข้อพิสูจน์ 1 เนื่องจาก $a_1, a_2, \dots, a_m$ แตกต่างกันทั้งหมด และการสับเปลี่ยนตำแหน่งของ $a_1, a_2, \dots, a_m$ ไม่มีผลต่อเงื่อนไข * ดังนั้น (โดยการจัดลำดับใหม่ ถ้าจำเป็น) เราสามารถสมมติได้ว่า

$$a_1 > a_2 > \dots > a_m \quad \dots\dots\dots(1)$$

ถ้าเราพิสูจน์ได้ว่า $a_i + a_{m+1-i} \geq n+1$ ทุก $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

แล้วเราจะได้ว่า
$$\begin{aligned} 2(a_1 + a_2 + \dots + a_m) &= (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + \dots + (a_m + a_1) \\ &\geq \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{m \text{ ครั้ง}} \end{aligned}$$

ซึ่งคือ
$$a_1 + a_2 + \dots + a_m \geq \frac{m(n+1)}{2}$$

นั่นคือ
$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2} \quad \text{ตามต้องการ}$$

จะเห็นว่าขณะนี้จึงเหลือแต่เพียงพิสูจน์ให้ได้ว่า

$$a_i + a_{m+1-i} \geq n+1 \quad \text{ทุก } i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ ก็จะจบการพิสูจน์}$$

ในที่นี้จะใช้การพิสูจน์แบบข้อขัดแย้ง โดยสมมติว่ามี $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ที่ทำให้

$$a_i + a_{m+1-i} < n+1$$

แต่เนื่องจากทั้ง a_i, a_{m+1-i} ต่างก็เป็นจำนวนเต็ม จึงได้ว่า

$$a_i + a_{m+1-i} \leq n \quad \dots\dots\dots(2)$$

จาก (1) จะได้ว่า $a_m < a_{m-1} < \dots < a_{m-(i-1)}$ (ข้อสังเกต : $m - (i - 1) = m + 1 - i$)

และเนื่องจาก $a_m > 0$ และจาก (2) จึงได้ว่า

$$a_i < a_i + a_m < a_i + a_{m-1} < \dots < a_i + a_{m+1-i} \leq n \quad \dots\dots\dots(3)$$

เนื่องจาก $a_i + a_m, a_i + a_{m-1}, \dots, a_i + a_{m+1-i}$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ n

ดังนั้นโดยเงื่อนไข * $a_i + a_m, a_i + a_{m-1}, \dots, a_i + a_{m+1-i}$ ต้องเป็นสมาชิกของ $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$

แต่จาก (3) $a_i + a_m, a_i + a_{m-1}, \dots, a_i + a_{m+1-i}$ ต้องแตกต่างกันทั้งหมด และต้องมากกว่า a_i ด้วย ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่า $a_i + a_m, a_i + a_{m-1}, \dots, a_i + a_{m+1-i}$ มีทั้งสิ้น i จำนวน แต่สมาชิกของ $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ที่มากกว่า a_i คือ $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}$ ซึ่งมีอยู่ $i - 1$ จำนวนเท่านั้น

จะเห็นว่าข้อสมมติฐานที่ว่า มี $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ที่ทำให้ $a_i + a_{m+1-i} < n + 1$ นำไปสู่ข้อขัดแย้ง ดังนั้น $a_i + a_{m+1-i} \geq n + 1$ ทุก $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ #

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานความรู้

1.1 การพิสูจน์แบบขัดแย้ง

1.2 พิจารณาและอสมการ

1.3 วิธีพิสูจน์สูตร $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

โจทย์ข้อนี้ความยากขั้นแรก คือการแปลโจทย์ให้เข้าใจ ถ้าเราเขียนเงื่อนไข * ให้อยู่ในรูปใหม่ดังหมายเหตุ จะช่วยให้มองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาได้ชัดเจนขึ้น ขั้นต่อมาคือการเรียงลำดับสมาชิกในเซต $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ซึ่งทำได้เพราะสมาชิกทุกตัวในเซตนี้เป็นจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกันทั้งหมด ฉะนั้นเราจะสมมติว่า $a_1 > a_2 > \dots > a_m$ ขั้นตอนนี้มีความสำคัญมากเช่นกัน เพราะเป็นการสร้างเงื่อนไขเพิ่มเติมขึ้นมาจากสิ่งที่โจทย์กำหนด ซึ่งช่วยให้ปัญหาง่ายขึ้น ขั้นตอนที่ต่อไป ถ้าเรานึกถึงวิธีการหาผลบวก $1 + 2 + \dots + n$ เราทำดังนี้

$$\begin{aligned} 2(1 + 2 + \dots + n) &= (1 + 2 + \dots + (n-1) + n) + (n + (n-1) + \dots + 2 + 1) \\ &= (1 + n) + (2 + (n-1)) + \dots + ((n-1) + 2) + (n + 1) \\ &= \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ พจน์}} \\ &= n(n+1) \end{aligned}$$

เราลองเลียนแบบวิธีการข้างต้นดังนี้

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_m) = (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + \dots + (a_m + a_1)$$

ถ้าเราสามารถพิสูจน์ได้ว่าผลบวกในแต่ละวงเล็บมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ $n + 1$ เราจะสามารถสรุปได้ว่า

$$2(a_1 + a_2 + \dots + a_m) \geq m(n + 1)$$

ซึ่งจะได้สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ฉะนั้นขั้นตอนสุดท้ายคือการแสดงว่า $a_i + a_{m-i+1} \geq n + 1$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, m$ ซึ่งเราจะใช้การพิสูจน์แบบขัดแย้ง เราอาจลองพิจารณากรณีเฉพาะ $m = 6$ เพื่อเป็นแนวทาง สมมติว่าผลบวกต่อไปนี้ $a_1 + a_6, a_2 + a_5, a_3 + a_4$ มีอย่างน้อยหนึ่งจำนวนที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ n ถ้า $a_1 + a_6 \leq n$ จะได้ว่า $a_1 + a_6 \in \{a_1, a_2, \dots, a_6\}$ แต่เนื่องจาก $a_1 + a_6 > a_1$ และ a_1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดในเซตนี้ จึงเป็นไปได้ว่า $a_1 + a_6 \geq n + 1$ สมมติว่า $a_2 + a_5 \leq n$ ฉะนั้น $a_2 + a_5 \in \{a_1, a_2, \dots, a_6\}$

เนื่องจาก $a_2 + a_5 > a_2$ ดังนั้น $a_2 + a_5$ ต้องเป็น a_1

แต่ $a_2 + a_6 < a_2 + a_5 = a_1 \leq n$ ฉะนั้น $a_2 + a_6 = a_j$ บาง $j \in \{1, 2, \dots, m\}$

แต่ $a_j > a_2$ ฉะนั้น $a_j = a_1$ เกิดข้อขัดแย้ง ฉะนั้น $a_2 + a_5 \geq n + 1$

สมมติว่า $a_3 + a_4 \leq n$ เนื่องจาก $a_6 < a_5 < a_4$ ฉะนั้น $a_3 + a_6 < a_3 + a_5 < a_3 + a_4 \leq n$

ดังนั้น $a_3 + a_4, a_3 + a_5, a_3 + a_6$ ต้องเป็นสมาชิกของเซต $\{a_1, a_2, \dots, a_6\}$

เนื่องจากผลบวกทั้งสามมีค่ามากกว่า a_3 ฉะนั้นแต่ละผลบวกจะมีค่าเป็นได้เพียง a_1 หรือ a_2 ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง เพราะผลบวกทั้งสามมีค่าแตกต่างกันทั้งหมด แต่มีค่าที่เป็นไปได้เพียง 2 ค่า ดังนั้น $a_3 + a_4 \geq n + 1$ เราสามารถเขียนพิสูจน์นี้ในกรณีทั่วไปได้

3. สิ่งที่ต้องการวัด

โจทย์ข้อนี้ต้องการวัดความสามารถในการคิดอย่างเป็นระบบ มีขั้นตอน สามารถทำสิ่งที่เคยพบเห็นมาประยุกต์ใช้ได้ มีกระบวนการคิดอย่างสืบสวนสอบสวน ทดลองกรณีย่อย เพื่อดังสมมติฐานสำหรับกรณีทั่วไป แล้วจึงพิสูจน์กรณีทั่วไป

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

สิ่งที่ได้เรียนรู้จากโจทย์ข้อนี้ คือ การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูปทั่วไป อาจทำโดยเริ่มต้นจากกรณีย่อย ๆ ก่อน เพื่อให้ได้แนวทางในการพิสูจน์กรณีทั่วไป

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

สำหรับข้อนี้สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร คือ ระเบียบวิธีการพิสูจน์ (method of proof) โจทย์ในการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกส่วนใหญ่จะเป็นโจทย์เกี่ยวกับการพิสูจน์เป็นหลัก ฉะนั้นนักเรียนต้องได้รับการฝึกฝนเพิ่มเติมเกี่ยวกับวิธีพิสูจน์แบบต่าง ๆ นอกจากนั้น สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร ก็คือการฝึกฝนให้มีการวางแผนการแก้ปัญหาอย่างมีระบบโดยเฉพาะโจทย์หลายชั้น

2. IMO'95 (ข้อ 2.)

ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $abc = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

ส่วนที่ 1 เผลยข้อสอบ

วิธีทำ วิธีที่ 1 : ให้ $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ และ $z = \frac{1}{c}$ จะได้ว่า $xyz = 1$ และ

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ให้ผลบวก (1) เขียนแทนด้วย T ดังกล่าว

$$x+y+z = \frac{1}{2}[(x+y) + (y+z) + (z+x)]$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned} (x+y+z)T &= \frac{1}{2}[(y+z) + (z+x) + (x+y)]T \\ &= \frac{1}{2}[(\sqrt{y+z})^2 + (\sqrt{z+x})^2 + (\sqrt{x+y})^2] \left[\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{z+x}} \right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x+y}} \right)^2 \right] \\ &\geq \frac{1}{2}(x+y+z)^2 \end{aligned}$$

โดยอสมการของโคชี ดังนั้น $T \geq \frac{1}{2}(x+y+z)$

โดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต จะได้ว่า

$$T \geq \frac{3}{2} \left(\frac{x+y+z}{3} \right) \geq \frac{3}{2} (\sqrt[3]{xyz}) = \frac{3}{2}$$

วิธีที่ 2 : ให้ $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ และ $z = \frac{1}{c}$ จะได้ว่า $xyz = 1$

ให้ $S = x+y+z$ ฉะนั้น

$$\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{x^3}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = \frac{x^3yz}{y+z} = \frac{x^2}{S-x} = \frac{S^2 - (S^2 - x^2)}{S-x} = \frac{S^2}{S-x} - S - x$$

ทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\frac{1}{b^3(c+a)} = \frac{S^2}{S-y} - S - y \quad \text{และ} \quad \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{S^2}{S-z} - S - z$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= S^2 \left(\frac{1}{S-x} + \frac{1}{S-y} + \frac{1}{S-z} \right) - 4S \\ &\geq S^2 \left(\frac{9}{(S-x) + (S-y) + (S-z)} \right) - 4S \quad \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{9}{2}S - 4S = \frac{S}{2} \\
&= \frac{3}{2} \cdot \frac{x+y+z}{3} \\
&\geq \frac{3}{2} (\sqrt[3]{xyz}) \quad \dots\dots\dots(3) \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

โดยที่อสมการ (2) ได้จากอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ฮาร์มอนิก และอสมการ (3) ได้จากอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต #

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

- 1.1 อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต-ฮาร์มอนิก
- 1.2 อสมการของโคชี

2. ขั้นตอนของความคิดในการทองคำถาม

ขั้นตอนของความคิดในวิธีทำทั้งสองวิธีมีลำดับขั้นตอนเหมือนกัน จึงขออธิบายเฉพาะวิธีที่ 1 เท่านั้น อสมการในโจทย์มีพจน์ทางซ้าย คือ $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)}$ อยู่ในรูปของผลบวกของเศษส่วน ซึ่งส่วนมีความซับซ้อน เราจึงควรจัดรูปเศษส่วนใหม่โดยการแทนค่า $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ เพื่อให้ส่วนอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น ซึ่งจะได้ $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$ จากนั้นพยายามจัดรูปเพื่อให้อยู่ในรูปแบบที่สามารถใช้อสมการที่รู้จัก เช่น อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต-ฮาร์มอนิก หรืออสมการของโคชี ซึ่งจะได้

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}$$

จากนั้นใช้อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิตอีกครั้ง เพื่อให้ได้ว่า $\frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2} (\sqrt[3]{xyz}) = \frac{3}{2}$

3. สิ่งที่ต้องการวัด

โจทย์ข้อนี้ต้องการวัดทักษะในการพิสูจน์เกี่ยวกับอสมการ ความสามารถทางพีชคณิต และความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาหลายชั้น

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

สิ่งที่ได้เรียนรู้จากการทำโจทย์ข้อนี้คือความพยายามในการแก้ปัญหาโจทย์ที่มีความซับซ้อนมากกว่าโจทย์ชั้นเดียว โจทย์ปัญหาที่พบในระดับมัธยมศึกษา ส่วนใหญ่แล้วจะเป็นโจทย์ชั้นเดียว ในข้อนี้ถึงแม้จะไม่ใช้ความรู้นอกเหนือจากหลักสูตรมัธยมศึกษา นอกเหนือไปจากอสมการ 1.1 และ 1.2 แต่ผู้ที่แก้ปัญหาโจทย์ข้อนี้ได้ต้องมีทักษะและความอดทนในการทำโจทย์หลาย ๆ ชั้น

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

สิ่งที่เห็นได้ชัดว่ายังขาดในหลักสูตร คือ อสมการต่าง ๆ ที่เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์ อสมการอื่น ๆ เช่น อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต-ฮาร์มอนิก และอสมการของโคชี นอกจากนี้ สิ่งที่ต้องเพิ่มเติมในหลักสูตร คือ การฝึกฝนให้นักเรียนมีทักษะในการแก้ปัญหาโจทย์หลาย ๆ ชั้น

3. IMO'99 (ข้อ 2.)

ให้ n เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $n \geq 2$ จงหาค่าคงตัว c ที่น้อยที่สุดที่ทำให้อสมการ

$$\sum_{i < j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq c \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4 \quad \dots\dots\dots(1)$$

เป็นจริง ทุก ๆ $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ และสำหรับค่าคงตัวนี้ จงหาเงื่อนไขที่ทำให้สมการเป็นจริง

หมายเหตุ ผลบวกทางซ้ายของอสมการ (1) เป็นผลบวกของจำนวนจริง $\binom{n}{2}$ จำนวน

ส่วนที่ 1 เฉลยข้อสอบ

วิธีทำ วิธีที่ 1 : ขั้นแรกเราจะแสดงว่า กำหนดค่าคงตัว $c \geq 0$ ถ้าอสมการ

$$\sum_{i < j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq c \quad \dots\dots\dots(2)$$

เป็นจริง ทุก ๆ $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ ซึ่ง $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ แล้วอสมการ (1) เป็นจริงด้วย

สมมติอสมการ (2) เป็นจริง และให้ $y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0$ จะแสดงว่า

$$\sum_{i < j} y_i y_j (y_i^2 + y_j^2) \leq c \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^4 \quad \dots\dots\dots(3)$$

ถ้า $\sum_{i=1}^n y_i = 0$ จะได้ว่า $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$ ฉะนั้นอสมการ (3) เป็นสมการที่ทั้งสองข้างเป็นศูนย์

สมมติว่า $\lambda = \sum_{i=1}^n y_i > 0$ และให้ $x_i = \frac{y_i}{\lambda}$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$

ฉะนั้น $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ และ $\sum_{i=1}^n x_i = 1$

ดังนั้นอสมการ (2) เป็นจริง แทนค่า $x_i = \frac{y_i}{\lambda}$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ ในอสมการ (2) จะได้ว่า

$$\sum_{i < j} \frac{y_i}{\lambda} \cdot \frac{y_j}{\lambda} \left[\left(\frac{y_i}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{y_j}{\lambda} \right)^2 \right] \leq c$$

ฉะนั้น
$$\sum_{i < j} y_i y_j (y_i^2 + y_j^2) \leq c \lambda^4 = c \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^4$$

นั่นคือ อสมการ (1) เป็นจริง ทุก ๆ $y_1, y_2, \dots, y_n \geq 0$

ดังนั้นต่อไปเราจะหาค่าคงตัว c ที่น้อยที่สุดที่ทำให้สมการ (2) เป็นจริง ทุก ๆ $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

$$\text{ซึ่ง } \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$\text{ให้ } X = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \text{ และ } \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

$$\text{และกำหนด } F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \text{ สำหรับ } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$$

เราจะหาค่าสูงสุดของ F บนเซต X ซึ่งค่านี้ก็คือค่าคงตัว c ที่ต้องการ

เนื่องจากอสมการ (2) มีสมมาตรในตัวแปร กล่าวคือ ถ้าสลับตำแหน่งของตัวแปรคู่ใด ๆ ในอสมการ (2)

แล้วยังคงได้อสมการเดิม ฉะนั้นเราสมมติได้ว่า $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$

ให้ $x = (x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, 0, \dots, 0)$ โดยที่ $k \geq 2$ และ x_{k+1} เป็นพิกัดสุดท้ายที่ไม่เป็นศูนย์

และให้ $x' = (x_1, x_2, \dots, x_k + x_{k+1}, 0, \dots, 0)$ เราจะแสดงว่าถ้าเราแทน x ด้วย x' ใน F แล้วค่าของ F จะเพิ่มขึ้น นั่นคือ $F(x') > F(x)$

$$\begin{aligned} F(x') &= \sum_{1 \leq i < j \leq k-1} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) + \sum_{i=1}^{k-1} x_i (x_k + x_{k+1}) [x_i^2 + (x_k + x_{k+1})^2] \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq k-1} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) + x_k \sum_{i=1}^{k-1} x_i [x_i^2 + (x_k + x_{k+1})^2] \\ &\quad + x_{k+1} \sum_{i=1}^{k-1} x_i [x_i^2 + (x_k + x_{k+1})^2] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq k-1} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) + x_k \sum_{i=1}^{k-1} x_i (x_i^2 + x_k^2) + x_{k+1} \sum_{i=1}^{k-1} x_i (x_i^2 + x_{k+1}^2) \\ &\quad + x_k x_{k+1} (x_k^2 + x_{k+1}^2) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(5)$$

ฉะนั้น โดยสมการ (4) และ (5) จะได้

$$\begin{aligned} F(x') - F(x) &= x_k \sum_{i=1}^{k-1} x_i [(x_k + x_{k+1})^2 - x_k^2] + x_{k+1} \sum_{i=1}^{k-1} x_i [(x_k + x_{k+1})^2 - x_{k+1}^2] \\ &\quad - x_k x_{k+1} (x_k^2 + x_{k+1}^2) \\ &= x_k x_{k+1} (2x_k + x_{k+1}) \sum_{i=1}^{k-1} x_i + x_k x_{k+1} (x_k + 2x_{k+1}) \sum_{i=1}^{k-1} x_i - x_k x_{k+1} (x_k^2 + x_{k+1}^2) \\ &= x_k x_{k+1} \left[(3x_k + 3x_{k+1}) \sum_{i=1}^{k-1} x_i - (x_k^2 + x_{k+1}^2) \right] \\ &= x_k x_{k+1} [3(x_k + x_{k+1})(1 - x_k - x_{k+1}) - (x_k^2 + x_{k+1}^2)] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(6)$$

โดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ จะได้ว่า

$$3(x_k + x_{k+1})(1 - x_k - x_{k+1}) - (x_k^2 + x_{k+1}^2) = (x_k + x_{k+1})(3 - 4(x_k + x_{k+1})) + 2x_k x_{k+1} \dots (7)$$

เนื่องจาก $k \geq 2$ และ $1 \geq x_1 \geq x_k \geq x_{k+1}$ ฉะนั้น

$$1 = \sum_{i=1}^{k+1} x_i \geq x_1 + x_k + x_{k+1} \geq \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) + x_k + x_{k+1}$$

ดังนั้น
$$x_k + x_{k+1} \leq \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

เพราะฉะนั้นพจน์ทางขวาของสมการ (7) มีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ ซึ่งทำให้ได้ว่าพจน์ทางขวาของสมการ (6)

มีค่ามากกว่าศูนย์ ดังนั้น $F(x') > F(x)$

โดยใช้วิธีการข้างต้นหลาย ๆ ครั้ง เราได้ว่า

$$F(x) \leq F(a, b, 0, \dots, 0) = ab(a^2 + b^2) = \frac{1}{2}(2ab)(1 - 2ab) \leq \frac{1}{8} \dots \dots \dots (8)$$

อสมการสุดท้ายใน (8) ได้มาจากอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต

$$x(1-x) \leq \left(\frac{x + (1-x)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \quad \text{ทุก ๆ } x \in [0, 1]$$

และสมการเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $x = 1 - x$ นั่นคือ $x = \frac{1}{2}$

ฉะนั้นอสมการสุดท้ายใน (8) จะเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $2ab = \frac{1}{2}$ นั่นคือ $a = b = \frac{1}{2}$

ดังนั้น
$$F(x) \leq \frac{1}{8} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right) \quad \text{ทุก ๆ } x \in X$$

ฉะนั้น $c = \frac{1}{8}$ คือค่าคงตัวที่น้อยที่สุดที่ทำให้สมการ (2) เป็นจริง ทุก ๆ $x \in X$ และสมการใน (2)

เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ มี $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ซึ่ง $i \neq j$ และ $x_i = x_j = \frac{1}{2}$ และ $x_k = 0$ เมื่อ $k \neq i$ และ

$$k \neq j \dots \dots \dots (9)$$

ดังนั้น $c = \frac{1}{8}$ คือค่าคงตัวที่น้อยที่สุดที่ทำให้สมการ (1) เป็นจริง ทุก ๆ $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$

ต่อไปจะแสดงว่าสำหรับ $c = \frac{1}{8}$ สมการใน (1) เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ มี $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ซึ่ง $i \neq j$ และ

$$x_i = x_j \text{ (อาจเท่ากับศูนย์ได้) และ } x_k = 0 \text{ เมื่อ } k \neq i \text{ และ } k \neq j \dots \dots \dots (10)$$

สมมติว่าสมการใน (1) เป็นจริง ถ้า $x_i = 0$ ทุก i จะได้ว่าเงื่อนไขใน (10) เป็นจริง สมมติว่ามี $x_i > 0$

ให้ $\lambda = \sum_{i=1}^n x_i$ และให้ $x'_i = \frac{x_i}{\lambda}$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$

จะได้ว่าสมการใน (2) เป็นจริง ดังนั้น มี $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ซึ่ง $i \neq j$ และ $x'_i = x'_j = \frac{1}{2}$ และ

$x'_k = 0$ เมื่อ $k \neq i$ และ $k \neq j$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $x_i = x_j$ และ $x_k = 0$ เมื่อ $k \neq i$ และ $k \neq j$ เห็น

ได้ชัดว่าถ้า $x_1, x_2, \dots, x_n$ สอดคล้องเงื่อนไขใน (10) แล้วสมการใน (1) เป็นจริง

วิธีที่ 2: วิธีนี้ เราใช้ความสัมพันธ์ของนิวตัน (Newton's relation)

$$\text{ให้ } P_k = \sum_{i=1}^n x_i^k \text{ และ } S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} \quad (S_k = 0 \text{ เมื่อ } k > n)$$

ความสัมพันธ์ของนิวตันกล่าวว่า

$$P_4 - S_1 P_3 + S_2 P_2 - S_3 P_1 + 4S_4 = 0$$

โดยขั้นแรกของวิธีที่ 1 เราสามารถสมมติได้ว่า $P_1 = S_1 = \sum_{i=1}^n x_i = 1$ ฉะนั้น

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i < j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = \sum_{i=1}^n \left(x_i^3 \sum_{j \neq i} x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^3 (1 - x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^3 - \sum_{i=1}^n x_i^4 \\ &= P_3 - P_4 \\ &= S_2 P_2 - S_3 P_1 + 4S_4 \\ &= S_2 (1 - 2S_2) - S_3 + 4S_4 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(11)$$

โดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต จะได้ว่า

$$S_2 (1 - 2S_2) = \frac{1}{2} (2S_2) (1 - 2S_2) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2S_2 + (1 - 2S_2)}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\text{และสมการเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ } S_2 = \frac{1}{4} \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\begin{aligned} 4S_4 - S_3 &= \sum_{i_1 < i_2 < i_3} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \left(\sum_{i_4 \notin \{i_1, i_2, i_3\}} x_{i_4} \right) - \sum_{i_1 < i_2 < i_3} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < i_3} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \left(\sum_{i_4 \notin \{i_1, i_2, i_3\}} x_{i_4} - 1 \right) \\ &= - \sum_{i_1 < i_2 < i_3} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} (x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3}) \leq 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$\text{และสมการเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ มี } x_i \text{ อย่างน้อย } n - 2 \text{ จำนวนที่เป็นศูนย์} \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\text{จาก (11), (12), (14) จะได้ว่า } F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{1}{8} \quad \dots\dots\dots(16)$$

และจาก (13), (15) จะได้ว่า อสมการ (16) เป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ มี x_i เท่ากับ $n - 2$ จำนวนที่เป็นศูนย์ และอีก 2 จำนวนที่เหลือมีผลคูณเท่ากับ $\frac{1}{4}$ สมมติว่าสองจำนวนนั้น คือ a และ b ดังนั้น

$a + b = 1$ และ $ab = \frac{1}{4}$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $a = b = \frac{1}{2}$ โดยการพิจารณาเช่นเดียวกับวิธีที่ 1 เราจะได้เงื่อนไขการเป็นสมการเช่นเดียวกัน

#

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

- 1.1 พหุนามเอกพันธ์ (homogeneous) และพหุนามสมมาตร (symmetric)
- 1.2 สมบัติต่าง ๆ ของเครื่องหมายผลบวก $\sum$ โดยเฉพาะเมื่อมีการบวกหลาย ๆ ชั้น
- 1.3 พีชคณิต เช่น อสมการพื้นฐาน และกำลังสองสมบูรณ์
- 1.4 อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต
- 1.5 ความสัมพันธ์ของนิวตัน (สำหรับวิธีที่ 2)

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

วิธีที่ 1 ขั้นแรก สังเกตว่าอสมการ (1) เป็นอสมการที่ทั้งสองข้างเป็นพหุนามที่มีดีกรีเท่ากัน (ซึ่งเท่ากับ 4) ซึ่งเราเรียกว่าพหุนามเอกพันธ์ จากนั้นใช้ความเป็นเอกพันธ์ ทำให้เราสมมติได้ว่า $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ซึ่งช่วยลดจำนวนพจน์ที่เกี่ยวข้องในการคำนวณ โดยการทดลองแทนค่าน้อย ๆ จะเห็นว่าผลบวก $F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i < j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2)$ จะมีค่ามากขึ้นถ้ามี x_i เพียงสองพจน์ที่ไม่เป็นศูนย์ จากนั้นก็พยายามพิสูจน์ข้อสังเกตนี้ โดยใช้สมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับเครื่องหมายผลบวก ซึ่งเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{1}{8}$ เสมอ และ $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right) = \frac{1}{8}$ เราใช้อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิตช่วยในการพิสูจน์ข้อความทั้งสอง ดังนั้น $c = \frac{1}{8}$ จึงเป็นค่าคงตัวที่โจทย์ต้องการ ขั้นตอนสุดท้าย คือ การหาเงื่อนไขที่ทำให้สมการ (1) เป็นสมการ ซึ่งเราต้องใช้ความเป็นเอกพันธ์ของอสมการ (1) อีกครั้งหนึ่ง

วิธีที่ 2 ขั้นแรก ให้ทำเหมือนวิธีที่ 1 คือ สมมติว่า $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ จากนั้นใช้ความสัมพันธ์ของนิวตันเพื่อจัดรูป $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ให้เป็นผลบวกของพหุนามสมมาตร ต่อไปใช้อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต และสมบัติของเครื่องหมาย $\sum$ และพีชคณิต เพื่อแสดงว่า $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{1}{8}$ เสมอ จากนั้นจึงตรวจสอบเงื่อนไขที่ทำให้สมการเป็นจริงโดยใช้วิธีการคล้าย ๆ กับวิธีที่ 1

3. สิ่งที่ต้องการวัด

โจทย์น่าจะต้องการวัดความสามารถในการนำความรู้ในเรื่องต่าง ๆ ที่กล่าวถึงใน 1.1-1.5 ซึ่งมีความหลากหลาย มาเชื่อมโยงกันเพื่อแก้ปัญหาในข้อเดียว นับว่าเป็นบูรณาการทางความรู้และความคิดอย่างลึกซึ้ง ผู้ที่ทำโจทย์ข้อนี้ได้ต้องมีความแม่นยำในทุกเรื่องทีกล่าวมา และมีการฝึกฝนอย่างเพียงพอเพื่อให้เกิดทักษะในการเชื่อมโยงความรู้

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

สิ่งที่เรียนรู้จากโจทย์ข้อนี้ คือ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ เข้าด้วยกัน เพื่อใช้ในการแก้ปัญหา

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

นอกเหนือจากเนื้อหาที่ไม่อยู่ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา เช่น พหุนามเอกพันธ์, พหุนามสมมาตร, สมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต, ความสัมพันธ์ของนิวตัน ฯลฯ แล้ว สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร ก็คือ การฝึกให้นักเรียนสามารถเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ที่ได้ศึกษาไปเข้าด้วยกัน

4. Geometry และ Geometric Inequalities

4.1 Geometry

1. IMO'95 (ข้อ 3.)

จงหาพร้อมพิสูจน์ให้เห็นจริง จำนวนเต็ม $n > 3$ ทั้งหมดที่ทำให้เราสามารถหาจุด n จุด $A_1, A_2, \dots, A_n$ ในระนาบ และเราสามารถหาจำนวนจริง $r_1, r_2, \dots, r_n$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขทั้งสองข้อต่อไปนี้

- (i) จุดสามจุดใด ๆ จากจุด $A_1, A_2, \dots, A_n$ ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
- (ii) สำหรับแต่ละ i, j, k ($1 \leq i < j < k \leq n$) สามเหลี่ยม $A_i A_j A_k$ มีพื้นที่เท่ากับ $r_i + r_j + r_k$

ส่วนที่ 1 เกลยข้อสอบ

วิธีทำ ข้อตกลง จะกล่าวว่า n เป็นคำตอบก็ต่อเมื่อ เราสามารถหาจุด $A_1, A_2, \dots, A_n$ และจำนวนจริง $r_1, r_2, \dots, r_n$ ที่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ได้

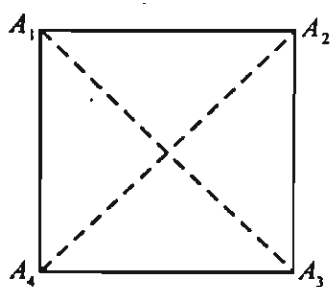
หมายเหตุ เงื่อนไข (ii) มีความหมายตรงกับข้อความต่อไปนี้

สำหรับแต่ละ $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ โดยที่ i, j, k แตกต่างกันทั้งหมด

พื้นที่ $\Delta A_i A_j A_k = r_i + r_j + r_k$

และในการทำโจทย์ข้อนี้บางครั้งเราจะใช้ข้อความข้างต้นแทนเงื่อนไข (ii)

ขั้นตอนที่ 1 จะแสดงว่า $n = 4$ เป็นคำตอบ



ให้ $A_1 A_2 A_3 A_4$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาว 2 หน่วย

และ $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{2}{3}$ จะได้ว่า

พื้นที่ $\Delta A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{2} A_1 A_2 \cdot A_2 A_3 = 2 = r_1 + r_2 + r_3$

พื้นที่ $\Delta A_1 A_2 A_4 = 2 = r_1 + r_2 + r_4$

พื้นที่ $\Delta A_1 A_3 A_4 = 2 = r_1 + r_3 + r_4$

พื้นที่ $\Delta A_2 A_3 A_4 = 2 = r_2 + r_3 + r_4$

ดังนั้น A_1, A_2, A_3, A_4 และ r_1, r_2, r_3, r_4 สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์

นั่นคือ $n = 4$ เป็นคำตอบ

ขั้นตอนที่ 2 จะแสดงว่า ทุกจำนวนเต็ม $n \geq 5$ ไม่เป็นคำตอบ

เป็นที่ชัดเจนว่า ถ้ามีจำนวนเต็ม $n > 5$ เป็นคำตอบแล้ว 5 ต้องเป็นคำตอบด้วย

ดังนั้น จึงเป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า 5 ไม่เป็นคำตอบ

จะใช้วิธีขัดแย้ง จึงสมมติว่า 5 เป็นคำตอบ ดังนั้น มีจุด A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 และจำนวนจริง r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 ที่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์

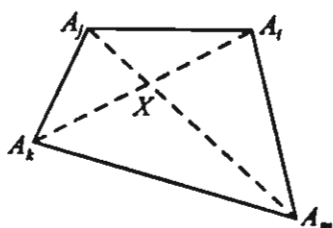
ทฤษฎีบทประกอบ สำหรับทุก $i, j, k, m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ที่แตกต่างกันทั้งหมด

(1) ถ้า $A_i A_j A_k A_m$ เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากแล้ว $r_i + r_k = r_j + r_m$

(2) ถ้า A_m เป็นจุดภายในสามเหลี่ยม $A_i A_j A_k$ แล้ว $r_i + r_j + r_k + 3r_m = 0$

พิสูจน์ (1) สมมติว่า $A_i A_j A_k A_m$ เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก และให้ X เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุม

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle A_i X A_m - \text{พื้นที่ } \triangle A_j X A_k &= \text{พื้นที่ } \triangle A_i A_j A_m - \text{พื้นที่ } \triangle A_i A_j A_k \\ &= (r_i + r_j + r_m) - (r_i + r_j + r_k) \\ &= r_m - r_k \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{และพื้นที่ } \triangle A_i X A_m - \text{พื้นที่ } \triangle A_j X A_k &= \text{พื้นที่ } \triangle A_i A_k A_m - \text{พื้นที่ } \triangle A_j A_k A_m \\ &= (r_i + r_k + r_m) - (r_j + r_k + r_m) \\ &= r_i - r_j \end{aligned}$$

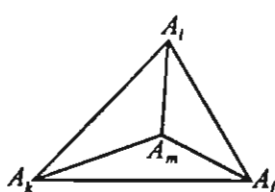
ดังนั้น

$$r_m - r_k = r_i - r_j$$

นั่นคือ

$$r_m + r_j = r_i + r_k \quad \text{ตามต้องการ}$$

(2) สมมติว่า A_m เป็นจุดภายใน $\triangle A_i A_j A_k$



$$\text{พื้นที่ } \triangle A_i A_j A_k - \text{พื้นที่ } \triangle A_i A_j A_m = r_k - r_m \quad \dots\dots\dots(i)$$

$$\text{พื้นที่ } \triangle A_i A_j A_k - \text{พื้นที่ } \triangle A_j A_k A_m = r_i - r_m \quad \dots\dots\dots(ii)$$

$$\text{พื้นที่ } \triangle A_i A_j A_k - \text{พื้นที่ } \triangle A_i A_k A_m = r_j - r_m \quad \dots\dots\dots(iii)$$

$$(i) + (ii) + (iii); \quad 3 \text{ พื้นที่ } \triangle A_i A_j A_k - \text{พื้นที่ } \triangle A_i A_j A_k = r_i + r_j + r_k - 3r_m$$

$$2(r_i + r_j + r_k) = r_i + r_j + r_k - 3r_m$$

ดังนั้น

$$r_i + r_j + r_k + 3r_m = 0$$

จบการพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบ

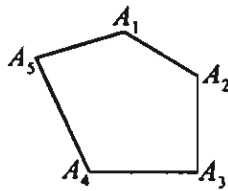
จากการที่เรามีจุด A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 และจำนวนจริง r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 ที่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ เราสามารถพิจารณาได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 เป็นจุดยอดของรูปห้าเหลี่ยมมุมฉาก

โดยไม่เสียไร้วาย สมมติว่า $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ เป็นรูปห้าเหลี่ยมมุมฉาก

จากทฤษฎีบทประกอบ (1) เนื่องจาก $A_1A_2A_3A_4$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุม

จึงได้ $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$



ทำนองเดียวกัน จากรูปสี่เหลี่ยมมุม $A_2A_3A_4A_5$ ได้ $r_2 + r_4 = r_3 + r_5$

ทำนองเดียวกัน จากรูปสี่เหลี่ยมมุม $A_1A_3A_4A_5$ ได้ $r_1 + r_4 = r_3 + r_5$

ทำนองเดียวกัน จากรูปสี่เหลี่ยมมุม $A_1A_2A_4A_5$ ได้ $r_1 + r_4 = r_2 + r_5$

ทำนองเดียวกัน จากรูปสี่เหลี่ยมมุม $A_1A_2A_3A_5$ ได้ $r_1 + r_3 = r_2 + r_5$

ดังนั้น $r_1 + r_3 = r_2 + r_4 = r_3 + r_5 = r_1 + r_4 = r_2 + r_5$

นั่นคือ $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5$ ทำให้ได้ว่า

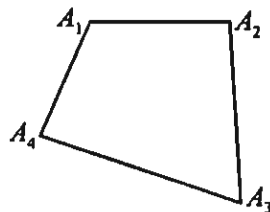
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle A_1A_2A_3 &= r_1 + r_2 + r_3 = r_1 + r_2 + r_4 = \text{พื้นที่ } \triangle A_1A_2A_4 \\ &= r_1 + r_2 + r_5 = \text{พื้นที่ } \triangle A_1A_2A_5 \end{aligned}$$

แต่รูปสามเหลี่ยม $A_1A_2A_3, A_1A_2A_4$ และ $A_1A_2A_5$ มีฐาน A_1A_2 ร่วมกัน ดังนั้น ส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมทั้งสามต้องเท่ากัน และเพราะว่า A_3, A_4, A_5 อยู่บนครึ่งระนาบด้านเดียวกันของเส้นตรง A_1A_2 จึงสรุปได้ว่า A_3, A_4, A_5 อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไข (i) ของโจทย์

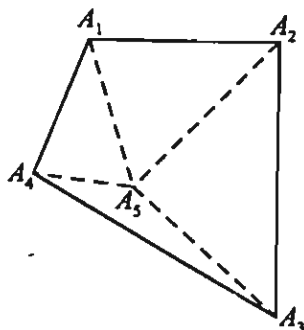
กรณีที่ 2 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 เป็นจุดยอดของรูปห้าเหลี่ยมที่ไม่ใช่รูปห้าเหลี่ยมมุม

กรณีที่ 2.1 A_1, A_2, A_3, A_4 เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมมุม

โดยไม่เสียหยาทั่วไป สมมติว่า $A_1A_2A_3A_4$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุม ดังรูป



กรณีที่ 2.1.1 A_5 อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยม $A_1A_2A_3A_4$



เนื่องจาก A_2, A_4, A_5 ต้องไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

และ A_1, A_2, A_5 ต้องไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

ดังนั้น โดยไม่เสียหยาทั่วไป สมมติว่า A_5 อยู่ในตำแหน่งดังรูป

โดยทฤษฎีบทประกอบ (1) จากรูปสี่เหลี่ยมมุม $A_1A_2A_3A_5$

ได้ $r_1 + r_3 = r_2 + r_5$ (iv)

โดยทฤษฎีบทประกอบ (2) จาก A_5 เป็นจุดภายใน $\triangle A_1A_3A_4$

ได้ $r_1 + r_3 + r_4 + 3r_5 = 0$ (v)

ทำนองเดียวกัน จาก A_5 เป็นจุดภายใน $\triangle A_2A_3A_4$

ได้ $r_2 + r_3 + r_4 + 3r_5 = 0$ (vi)

(v) – (vi) ได้ $r_1 = r_2$ เมื่อแทนค่าใน (iv) ได้ $r_3 = r_5$

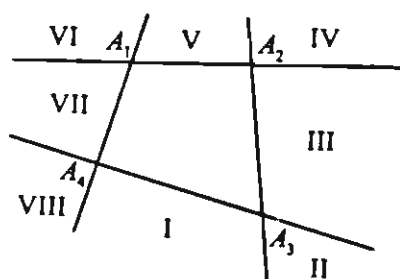
ดังนั้น พื้นที่ $\triangle A_1 A_2 A_5 = r_1 + r_2 + r_5 = r_1 + r_2 + r_3 =$ พื้นที่ $\triangle A_1 A_2 A_3$

เนื่องจาก A_3, A_5 อยู่บนครึ่งระนาบด้านเดียวกันของเส้นตรง $A_1 A_2$ จึงได้ว่า $A_3 A_5 \parallel A_1 A_2$

ทำนองเดียวกัน พื้นที่ $\triangle A_1 A_4 A_5 =$ พื้นที่ $\triangle A_1 A_4 A_3$ และ A_3, A_5 อยู่บนครึ่งระนาบด้านเดียวกันของเส้นตรง $A_1 A_4$ จึงได้ว่า $A_3 A_5 \parallel A_1 A_4$

ดังนั้น $A_1 A_4 \parallel A_1 A_2$ ซึ่งส่งผลว่า A_1, A_2, A_4 อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไข (i) ของโจทย์

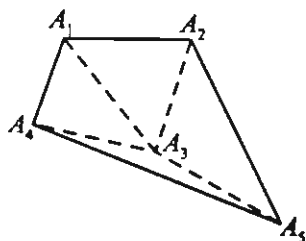
กรณี 2.1.2 A_5 อยู่ภายนอกรูปสี่เหลี่ยม $A_1 A_2 A_3 A_4$



เส้นตรง $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_4, A_4 A_1$ แบ่งระนาบออกเป็นชิ้นส่วนดังรูป ถ้า A_5 อยู่ในชิ้นส่วนที่ I หรือ III หรือ V หรือ VII จะได้ว่า A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 เป็นจุดยอดของรูปห้าเหลี่ยมมุม ซึ่งขัดแย้งกับกรณีที่ 2 นี้

ดังนั้น A_5 ต้องอยู่ในชิ้นส่วนที่ II หรือ IV หรือ VI หรือ VIII

โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติว่า A_5 อยู่ในชิ้นส่วนที่ II จะเห็นว่าเป็นลักษณะเดียวกันกับกรณี 2.1.1

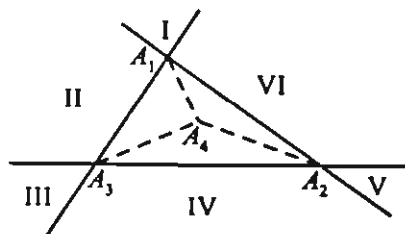


ดังนั้นโดยใช้เหตุผลทำนองเดียวกันกับในกรณี 2.1.1 (โดยการสลับที่ระหว่าง A_3 กับ A_5)

จะได้ว่ามีจุด 3 จุด จาก $A_1, A_2, \dots, A_5$ อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไข (i) ของโจทย์

กรณีที่ 2.2 A_1, A_2, A_3, A_4 เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมที่ไม่ใช่รูปสี่เหลี่ยมมุม

โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติว่า A_4 อยู่ภายใน $\triangle A_1 A_2 A_3$ ดังรูป

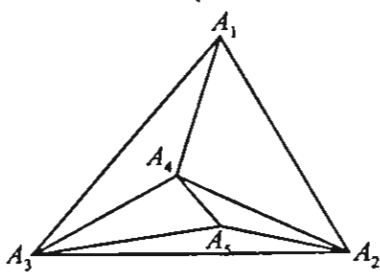


เส้นตรง $A_1 A_2, A_2 A_3, A_3 A_1$ แบ่งระนาบออกเป็นชิ้นส่วนดังรูป ถ้า A_5 อยู่ในชิ้นส่วนที่ II หรือ IV หรือ VI จะได้ว่า A_1, A_2, A_3, A_5 เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมมุม และมี A_4 เป็นจุดภายในรูปสี่เหลี่ยมนี้

ดังนั้น โดยใช้เหตุผลทำนองเดียวกันกับในกรณี 2.1.1 จะได้ว่ามีจุด 3 จุดจาก A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไข (i) ของโจทย์

นั่นคือ A_5 อยู่ภายใน $\triangle A_1 A_2 A_3$ หรือ A_5 อยู่ในชิ้นส่วนที่ I หรือ III หรือ V

กรณีที่ 2.2.1 A_5 อยู่ภายใน $\triangle A_1 A_2 A_3$



โดยไม่เสียชัยทั่วไป สมมติว่า A_5 อยู่ภายใน $\triangle A_2 A_3 A_4$
 ดังรูป

โดยทฤษฎีบทประกอบ (1); จากรูปสี่เหลี่ยมมุม $A_1 A_2 A_5 A_4$
 ได้ $r_1 + r_5 = r_2 + r_4$ (*)

โดยทฤษฎีบทประกอบ (2); จาก $\triangle A_2 A_3 A_4$ มี A_5 เป็นจุด
 ภายใน ได้

$$r_2 + r_3 + r_4 + 3r_5 = 0 \quad \text{.....(**)}$$

โดยทฤษฎีบทประกอบ (2); จาก $\triangle A_1 A_3 A_5$ มี A_4 เป็นจุด
 ภายใน ได้

$$r_1 + r_3 + r_5 + 3r_4 = 0 \quad \text{.....(***)}$$

$$(**) - (***) ; \quad r_2 - r_1 + 2(r_5 - r_4) = 0$$

$$\text{จาก (*) ได้} \quad r_5 - r_4 + 2(r_5 - r_4) = 0$$

$$3(r_5 - r_4) = 0$$

ดังนั้น $r_5 = r_4$ ซึ่งส่งผลว่า $r_1 = r_2$ (จาก (*))

ทำให้ได้ว่า พื้นที่ $\triangle A_1 A_3 A_5 = r_1 + r_3 + r_5 = r_1 + r_3 + r_4 =$ พื้นที่ $\triangle A_1 A_3 A_4$

แต่ทั้งคู่มีฐาน $A_1 A_3$ ร่วมกัน และ A_4, A_5 อยู่บนครึ่งระนาบด้านเดียวกันของเส้นตรง

$A_1 A_3$ จึงได้ว่า $A_4 A_5 \parallel A_1 A_3$

ทำนองเดียวกันจะได้ พื้นที่ $\triangle A_1 A_2 A_5 =$ พื้นที่ $\triangle A_1 A_2 A_4$ และโดยเหตุผลเดียวกัน จะได้ว่า

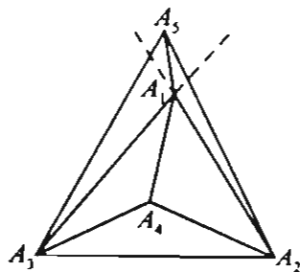
$A_4 A_5 \parallel A_1 A_2$

ดังนั้น $A_1 A_3 \parallel A_1 A_2$ ซึ่งส่งผลว่า A_1, A_2, A_3 อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งขัดแย้งกับ

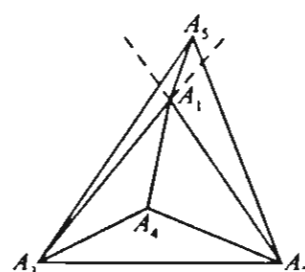
เงื่อนไข (i) ของโจทย์

กรณีที่ 2.2.2 A_5 อยู่ในชั้นส่วนที่ I หรือ III หรือ V

โดยไม่เสียชัยทั่วไป สมมติว่า A_5 อยู่ในชั้นส่วน I ซึ่งอาจเกิดรูปได้ 2 แบบ ดังนี้



แบบที่ 1



แบบที่ 2

ซึ่งทั้งสองแบบเป็นลักษณะเดียวกันกับกรณี 2.2.1 ดังนั้น โดยใช้เหตุผลทำนองเดียวกันกับในกรณี 2.2.1 จะได้ว่า มีจุดสามจุดจาก A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไข (i) ของโจทย์

จะเห็นว่าเกิดข้อขัดแย้งในทุกกรณี ดังนั้น $n = 5$ ไม่เป็นคำตอบ

#

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

1.1 พื้นที่อยู่รูปสามเหลี่ยม สีเหลี่ยม ห้าเหลี่ยม

1.2 สมบัติของรูปสามเหลี่ยม

1.3 การใช้เหตุผลเกี่ยวกับการสร้างที่ทำได้สำหรับรูป $n \geq 5$ เหลี่ยม แล้วทำให้ได้ว่ารูป 5 เหลี่ยมทำได้ด้วย

1.4 การแยกกรณีพิจารณา

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

2.1 พิจารณากรณีแรก เมื่อ $n = 4$ เพื่อแสดงว่าสร้างได้

2.2 แสดงให้เห็นว่าหากกรณี $n > 5$ สร้างได้แล้ว กรณี $n = 5$ จะสร้างได้ด้วย

2.3 แสดงให้เห็นว่า กรณี $n = 5$ สร้างได้ โดยการแยกพิจารณาเป็นกรณีย่อย

3. สิ่งที่ต้องการวัด

3.1 การหาพื้นที่รูปสามเหลี่ยม สีเหลี่ยม ห้าเหลี่ยม

3.2 การใช้เหตุผลในการทอนจากกรณี $n > 5$ มายังกรณี $n = 5$

3.3 การแจกแจงกรณีย่อยอย่างครบถ้วน

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

4.1 ในโจทย์ประเภทนี้ ควรทดลองจากกรณีเล็กสุดเป็นต้นไป

4.2 หากพบกรณีแรกที่ไม่ได้ ให้ลองแสดงว่ากรณีสูงกว่านี้ทำไม่ได้ด้วย

4.3 การแจกแจงกรณีย่อยต้องทำอย่างครบถ้วน

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

5.1 การใช้เหตุผลในการทอนกรณีสูงไปยังกรณีต่ำ

5.2 ความรอบคอบในการแจกแจงกรณีย่อยให้ครบทุกกรณี

6. การเชื่อมโยงความรู้

6.1 จากพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ทำให้หาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม รูปห้าเหลี่ยม ได้

6.2 เมื่อตรวจสอบการสร้างในกรณีเล็ก (คือ $n = 4$) ว่าสร้างได้ แล้วให้พิจารณาว่ากรณีถัดไป ($n = 5$) สร้างได้หรือไม่

6.3 เมื่อแสดงว่ากรณี $n > 5$ ทำได้แล้ว เหมื่อนำให้ว่ากรณี $n = 5$ ได้

6.4 แจกแจงให้เห็นจริงว่า กรณี $n = 5$ สร้างไม่ได้

2. IMO'96 (ข้อ 2.)

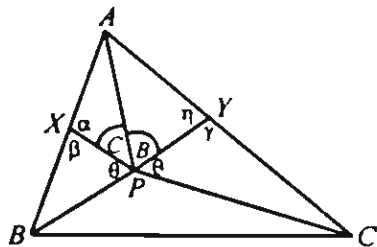
ให้ P เป็นจุดภายใน $\triangle ABC$ โดยที่ $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$

ให้ D, E เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบใน $\triangle APB, \triangle APC$ ตามลำดับ

จงพิสูจน์ว่า AP, BD และ CE พบกันที่จุดเดียว

ส่วนที่ 1 เฉลยข้อสอบ

วิธีทำ วิธีที่ 1



จาก P เป็นจุดภายใน $\triangle ABC$

เราสามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายว่า

$$\angle APB > \angle ACB \text{ และ } \angle APC > \angle ABC$$

ดังนั้น จากโจทย์กำหนด

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC > 0$$

ที่จุด P ลาก PX และ PY พบ AB และ AC ที่จุด X และ Y ตามลำดับ โดยที่ $\angle APX = \angle ACB$ และ $\angle APY = \angle ABC$

ให้ $\theta = \angle BPX$ ดังนั้น $\angle CPY = \theta$ ด้วย และให้ $\alpha = \angle AXP$, $\beta = \angle BXP$, $\eta = \angle AYP$ และ $\gamma = \angle CYP$

พิจารณาสี่เหลี่ยม $AXPY$ จะได้ว่า $\angle XAY + \angle XPY = \angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$

ดังนั้น $AXPY$ มีวงกลมล้อมรอบได้ นั่นคือ $\alpha + \eta = 180^\circ$ ด้วย และจาก $\alpha + \beta = 180^\circ = \eta + \gamma$

ทำให้เราได้ว่า $\alpha = \gamma$, $\beta = \eta$ และ $\beta = 180^\circ - \gamma$, $\eta = 180^\circ - \alpha$ (1)

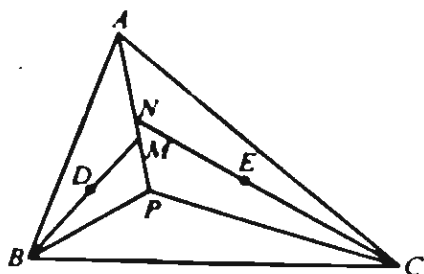
โดยใช้ law of sine กับ $\triangle BXP$ และ $\triangle CYP$ ตามลำดับ จะได้

$$\frac{BP}{\sin \beta} = \frac{BX}{\sin \theta} \text{ และ } \frac{CP}{\sin \gamma} = \frac{CY}{\sin \theta}$$

จาก $\beta = 180^\circ - \gamma$ ดังนั้น $\sin \beta = \sin \gamma$ จึงได้ว่า $\frac{BP}{CP} = \frac{BX}{CY}$ (2)

ลาก BD, CE ไปตัด AP ที่ M และ N ตามลำดับ

จะพิสูจน์ว่า $M = N$



เนื่องจาก D, E เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบใน $\triangle APB, \triangle APC$ ตามลำดับ ดังนั้น BD, CE แบ่งครึ่ง $\angle ABP, \angle ACP$ ตามลำดับ และโดยทฤษฎีเส้นแบ่งครึ่งมุม จะได้ว่า

$$\frac{BP}{AB} = \frac{PM}{MA} \text{ และ } \frac{CP}{AC} = \frac{PN}{NA}$$

จากการวิเคราะห์พบว่า $M = N$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{PM}{MA} = \frac{PN}{NA}$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$

ดังนั้น ในที่นี้เราจะพยายามพิสูจน์ว่า $\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$

โดยใช้ law of sine กับ $\triangle APX$ และ $\triangle APY$ ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\frac{AX}{\sin C} = \frac{AP}{\sin \alpha} \quad \text{และ} \quad \frac{AY}{\sin B} = \frac{AP}{\sin \eta}$$

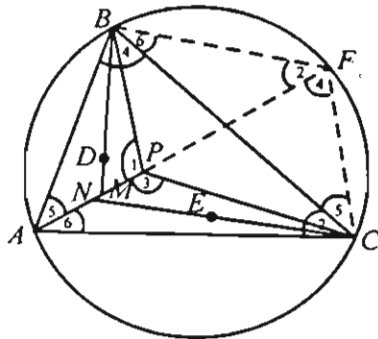
จาก (1); $\eta = 180^\circ - \alpha$ ดังนั้น $\sin \alpha = \sin \eta$ จึงได้ว่า $\frac{AX}{AY} = \frac{\sin C}{\sin B}$

และจาก law of sine กับ $\triangle ABC$ จะได้ว่า $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B}$

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ} \quad \frac{AB}{AC} &= \frac{AX}{AY} = \frac{AB - AX}{AC - AY} \quad (\text{จากทฤษฎีบทที่กล่าวไว้ว่า ถ้า } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ แล้ว } \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}) \\ &= \frac{BX}{CY} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3)$$

จาก (2) และ (3) จึงได้ว่า $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CP}$ ซึ่งก็คือ $\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$ ตามต้องการ

วิธีที่ 2



ลาก AP ไปตัดเส้นรอบวงของวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ ที่ F ลาก BD, CE ไปตัด AP ที่ M, N ตามลำดับ

จะพิสูจน์ว่า $M = N$

เนื่องจาก D, E เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบใน $\triangle APB, \triangle APC$ ตามลำดับ ดังนั้น BD, CE แบ่งครึ่ง $\widehat{ABP}, \widehat{ACP}$ ตามลำดับ และโดยทฤษฎีเส้นแบ่งครึ่งมุม จะได้ว่า

$$\frac{BP}{AB} = \frac{PM}{MA} \quad \text{และ} \quad \frac{CP}{AC} = \frac{PN}{NA}$$

จากการวิเคราะห์พบว่า $M = N$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{PM}{MA} = \frac{PN}{NA}$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$

ดังนั้น ในที่นี้เราจะพยายามพิสูจน์ว่า $\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$

เพื่อความสะดวกในการอ้างอิงให้ $\widehat{APB} = \hat{1}, \widehat{ACB} = \hat{2}, \widehat{APC} = \hat{3}, \widehat{ABC} = \hat{4}, \widehat{PAB} = \hat{5}$ และ $\widehat{PAC} = \hat{6}$
 $\widehat{AFC} = \hat{4}, \widehat{AFB} = \hat{2}, \widehat{BCF} = \hat{5}$ และ $\widehat{PAC} = \hat{6}$ เนื่องจากมุมแต่ละคู่เหล่านี้นรองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน
 $\hat{1}$ เป็นมุมภายนอก $\triangle PBF$ ดังนั้น $\widehat{PBF} = \hat{1} - \hat{2}$ ทำนองเดียวกัน $\widehat{PCF} = \hat{3} - \hat{4}$

จากโจทย์กำหนด จึงได้ว่า $\widehat{PBF} = \widehat{PCF}$ ซึ่งเราเรียกว่า $\hat{7}$ โดยใช้ law of sine กับ $\triangle PBF$ และ $\triangle PCF$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \frac{\sin \hat{1}}{FB} = \frac{\sin (180^\circ - \hat{1})}{FB} = \frac{\sin \hat{7}}{PF}$$

$$\text{และ} \quad \frac{\sin \hat{3}}{FC} = \frac{\sin (180^\circ - \hat{3})}{FC} = \frac{\sin \hat{7}}{PF}$$

ดังนั้น $\frac{FB}{FC} = \frac{\sin \hat{1}}{\sin \hat{3}}$ แต่ $\frac{FB}{FC} = \frac{\sin \hat{5}}{\sin \hat{6}}$ (โดย law of sine กับ $\triangle BFC$)

จึงได้ว่า $\frac{\sin \hat{1}}{\sin \hat{3}} = \frac{\sin \hat{5}}{\sin \hat{6}}$ และโดย law of sine กับ $\triangle APB$ และ $\triangle APC$

จะได้ว่า $\frac{\sin \hat{1}}{\sin \hat{5}} = \frac{AB}{BP}$ และ $\frac{\sin \hat{3}}{\sin \hat{6}} = \frac{AC}{CP}$ ซึ่งส่งผลว่า
 $\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$ ตามต้องการ #

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

1.1 เรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (วงกลม สามเหลี่ยม การสร้าง และการพิสูจน์)

1.2 ทฤษฎีเส้นแบ่งครึ่งมุม

1.3 ทรีโกณมิติ

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

2.1 ให้ $\overline{AP}$ พบ $\overline{BD}$ ที่ M และ $\overline{AP}$ พบ $\overline{CE}$ ที่ N โดยวาดรูปให้ M กับ N ไม่ใช่จุดเดียวกัน

2.2 วิเคราะห์จากสมบัติของ D และ E เพื่อหาเงื่อนไขที่เพียงพอและจำเป็นที่ทำให้เราสามารถสรุปได้ว่า M กับ N เป็นจุดเดียวกัน ซึ่งจะได้ว่า

$$M = N \text{ ก็ต่อเมื่อ } \frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$$

2.3 พยายามพิสูจน์ว่า $\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$ โดยใช้สมบัติของจุด P ซึ่งสามารถทำได้ 2 วิธี

วิธีที่ 1 สร้างรูปเพิ่มเติม คือ ลาก PX พบ AB ที่ X โดยที่ $\angle APX = \angle ACB$

และลาก PY พบ AC ที่ Y โดยที่ $\angle APY = \angle ABC$

จะได้ว่าสี่เหลี่ยม $AXPY$ มีวงกลมล้อมรอบได้

นำสมบัติของ $AXPY$ มีวงกลมล้อมรอบได้ และกฎของ sine กับ $\triangle BXP$ และ

$\triangle CYP$ ไปใช้พิสูจน์ว่า $\frac{BP}{CP} = \frac{BX}{CY}$ ต่อจากนั้นใช้กฎของ sine กับ $\triangle APX$ และ

$\triangle APY$ พิสูจน์ว่า $\frac{AX}{AY} = \frac{\sin C}{\sin B}$ ซึ่งจะสรุปได้ว่า

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY} = \frac{AB - AX}{AC - AY} = \frac{BX}{CY}$$

วิธีที่ 2 สร้างรูปเพิ่มเติม คือ วงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ และลาก $\overline{AP}$ ไปตัดเส้นรอบวง

ที่ F นำสมบัติของมุมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน และสมบัติของจุด P ไป

ใช้พิสูจน์ว่า $\angle BPF = \angle CPF$ ต่อจากนั้นใช้กฎของ sine กับ $\triangle PBF$ และ $\triangle PCF$

พิสูจน์ว่า $\frac{FB}{FC} = \frac{\sin \hat{APB}}{\sin \hat{APC}}$ ซึ่งจะสรุปได้ว่า $\frac{\sin \hat{APB}}{\sin \hat{APC}} = \frac{\sin \hat{BCF}}{\sin \hat{CBF}}$ และใช้กฎของ sine กับ $\triangle APB$ และ $\triangle APC$ ก็จะสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$

3. สิ่งที่ต้องการวัด

3.1 ความสามารถในการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้สมบัติของจุดต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนด นำมาสร้างรูปเพิ่มเติม

3.2 การใช้สมบัติของจุดศูนย์กลางวงกลมแนบในสามเหลี่ยมกับกฎของ sine

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

4.1 เทคนิคการแก้ปัญหาลักษณะที่โจทย์ต้องการสร้างรูปเพิ่มเติมจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

4.2 การใช้สมบัติของวงกลม และกฎของ sine หลาย ๆ ครั้ง

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

Synthetic geometry ไม่อยู่ในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย นักเรียน (อาจ) ได้เคยศึกษา มาจากระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งหลาย ๆ โรงเรียนไม่ได้ฝึกเด็กนักเรียนในเรื่องการพิสูจน์ข้อความทางเรขาคณิตเลย

6. การเชื่อมโยงความรู้

สมบัติต่าง ๆ ของวงกลม และกฎของ sine

3. IMO'99 (ข้อ 1.)

จงหาพร้อมพิสูจน์ เซตจำกัดของจุดในระนาบ S ซึ่งมีสมาชิกอย่างน้อยสามจุดทั้งหมดที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้ :

สำหรับจุด A และ B ที่แตกต่างกันสองจุดใด ๆ ในเซต S เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง AB เป็นแกนสมมาตรของเซต S เสมอ

ส่วนที่ 1 เฉลยข้อสอบ

วิธีทำ ให้ r_{PQ} แทน reflection เทียบกับเส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากส่วนของเส้นตรง PQ

ให้ G เป็น barycenter ของ S

$$\therefore r_{AB}(S) = S \quad \therefore r_{AB}(G) = G \quad (\forall A, B \in S)$$

$\therefore$ ทุกจุดใน S อยู่ห่างจาก G เท่ากัน

$\therefore S$ เป็นจุดบนวงกลมวงเดียวกัน คือ S เป็นรูปหลายเหลี่ยมมุม (convex polygon)

ขอเรียกว่า $A_1, A_2, \dots, A_n$

Reflection เทียบกับเส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากของ A_1A_3 ส่งแต่ละครึ่งระนาบที่มีขอบเขตกำหนดโดย A_1A_3 ไปในตัวเอง

$$\therefore r_{A_1A_3}(A_2) = A_2 \quad \therefore A_1A_2 = A_2A_3$$

ในทำนองเดียวกัน $A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_nA_1$

ได้ว่า $A_1 \dots A_n$ เป็นรูป n -เหลี่ยมปกติ (regular n -gon)

หมายเหตุ Barycenter หรือจุดศูนย์กลางความถ่วง (center of mass) มีนิยามดังนี้

ให้ $\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}$ เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด n จุด ที่มีก๊อนน้ำหนักขนาด $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

วางอยู่ที่จุดดังกล่าวตามลำดับ โดยที่ $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$

ดังนั้น เรียกจุด

$$\bar{x} = \lambda_1 \overline{p_1} + \dots + \lambda_n \overline{p_n}$$

ว่าเป็น barycenter ของก๊อนน้ำหนัก $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ณ จุด $\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}$

ในกรณีทั่วไป (เช่นข้างต้น) เมื่อ $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ จะเรียก $\bar{x}$ ว่า barycenter ของ

$\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}$

#

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

- 1.1 วิธีการ Reflection
- 1.2 แนวคิดและสมบัติของ barycenter
- 1.3 วงกลม

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

2.1 ใช้ reflection เทียบกับ barycenter เพื่อแสดงว่าทุกจุดอยู่ห่างจาก barycenter เป็นระยะทางเท่ากัน เพราะฉะนั้น ทุกจุดในเซตต้องอยู่บนวงกลมเดียวกัน

2.2 ใช้ reflection เทียบกับเส้นแบ่งครึ่ง และตั้งฉากของด้านแต่ละด้านเพื่อสรุปว่าเซตที่ได้เป็นรูปหลายเหลี่ยมปกติ

3. สิ่งที่ต้องการวัด

- 3.1 การใช้ reflection เทียบกับจุด และเทียบกับเส้นตรง
- 3.2 การใช้แนวคิดและสมบัติของ barycenter

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

- 4.1 การใช้ reflection เทียบกับจุด และเทียบกับเส้นตรง
- 4.2 การใช้แนวคิดและสมบัติของ barycenter

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

5.1 แนวคิดและสมบัติของ reflection ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต

5.2 แนวคิดและสมบัติของ barycenter

6. การเชื่อมโยงความรู้

6.1 จากแนวคิดและสมบัติของ reflection เทียบกับ barycenter นำไปสู่ข้อสรุปที่ว่าทุกจุดอยู่ห่างจากจุดคงที่เดียวกัน

6.2 ใช้แนวคิดและสมบัติของ reflection ครั้งที่สองเทียบกับเส้นตรงเพื่อสรุปว่าเซตของจุดนี้ต้องเป็นรูปหลายเหลี่ยมปกติ

4.2 Geometric Inequalities

1. IMO'95 (ข้อ 5.)

ให้ $ABCDEF$ เป็นรูปหกเหลี่ยมมุมที่มี $AB = BC = CD$

$$DE = EF = FA$$

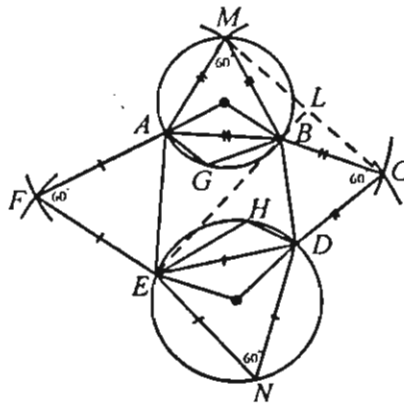
$$\text{และ } \hat{BCD} = \hat{EFA} = 60^\circ$$

ให้ G และ H เป็นจุดสองจุดที่อยู่ภายในรูปหกเหลี่ยมนี้ โดยที่ $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$

จงพิสูจน์ว่า $AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$

ส่วนที่ 1 เฉลยข้อสอบ

วิธีทำ



สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า $\triangle ABM$ และ $\triangle DEN$ บนด้าน AB และ DE ตามลำดับ ดังรูป

จาก $BC = CD$ และ $\hat{BCD} = 60^\circ$ จะได้ว่า $\triangle BCD$ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

ดังนั้น $BD = BC = CD$ (1)

ทำนองเดียวกัน $\triangle AEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าด้วย

และ $AF = AE = EF$ (2)

เนื่องจาก $\angle AGB = 120^\circ$ และ $\angle AMB = 60^\circ$ ดังนั้น $\angle AMB + \angle AGB = 180^\circ$ จึงได้ว่า
รูปสี่เหลี่ยม $AGBM$ มีวงกลมล้อมรอบได้ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทของโตเลมี จะได้ว่า

$$GM \cdot AB = AM \cdot GB + MB \cdot AG$$

แต่เนื่องจาก $AB = AM = MB$ ดังนั้น $GM = GB + AG$ (3)

ทำนองเดียวกันรูปสี่เหลี่ยม $DHEN$ มีวงกลมล้อมรอบได้ และเนื่องจาก $DE = DN = EN$
จึงได้ว่า $NH = DH + HE$ (4)

จาก (1) และโจทย์กำหนดว่า $AB = BC = CD$ จะได้ว่า $AB = BD$

จาก (2) และโจทย์กำหนดว่า $DE = EF = FA$ จะได้ว่า $AE = DE$

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม $ABDE$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว จึงได้ว่า $AD \perp BE$ และ BE แบ่งครึ่ง AD
นั่นคือ $\angle ABE = \angle EBD$

ลาก BE ต่อออกไปทางจุด B ตัดกับ CM ที่ L จะได้ว่า

$$\angle MBL = 180^\circ - \angle MBA - \angle ABE = 180^\circ - 60^\circ - \angle EBD = 180^\circ - \angle CBD - \angle EBD = \angle CBL$$

แต่ $\triangle CBM$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ดังนั้น $BL \perp CM$ และ $CL = LM$

นั่นคือ M เป็น reflection ของจุด C เทียบกับเส้นตรง BE

ทำนองเดียวกัน N เป็น reflection ของจุด F เทียบกับเส้นตรง BE

ดังนั้น $CF = MN$ (5)

เป็นที่ชัดเจนว่า $MN \leq MG + GH + HN$

ดังนั้น จาก (3), (4) และ (5) จึงได้ $CF \leq GB + AG + GH + DH + HE$ ตามต้องการ #

ส่วนที่ 2 สรุปผลการวิเคราะห์

1. พื้นฐานที่ต้องรู้

- 1.1 เรขาคณิตระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (วงกลม สามเหลี่ยม การสร้าง และการพิสูจน์)
- 1.2 ทฤษฎีบทของโตเลมี (Ptolemy's theorem)
- 1.3 วิธีการ reflection

2. ขั้นตอนของความคิดในการตอบคำถาม

2.1 สังเกตจากเงื่อนไขของรูปหกเหลี่ยมมุม $ABCDEF$ ที่โจทย์กำหนดให้ สร้างสามเหลี่ยมด้านเท่า ABM และ DEN บนด้าน AB และ DE (ภายนอกรูปหกเหลี่ยม $ABCDEF$)

2.2 พิสูจน์ว่า $AGBM$ มีวงกลมล้อมรอบได้ และ $DHEN$ มีวงกลมล้อมรอบได้ แล้วใช้ทฤษฎีบทของโตเลมี สรุปได้ว่า $GM = GB + AG$ และ $NH = DH + HE$

2.3 พิสูจน์ว่า M เป็น reflection ของ C เทียบกับเส้นตรง BE และ N เป็น reflection ของ F เทียบกับเส้นตรง BE จึงสรุปได้ว่า $CF = MN$

2.4 สังเกตว่า $MN \leq MG + GH + HN$ และจากผลสรุปใน 2.2 และ 2.3 สามารถสรุปได้ว่า $CF \leq GB + AG + GH + DH + HE$

3. สิ่งที่ต้องการวัด

3.1 ความสามารถในการวิเคราะห์โจทย์ โดยพิจารณาจากเงื่อนไขต่าง ๆ ที่โจทย์กำหนดให้ นำมาสร้างรูปเพิ่มเติม

3.2 การใช้ทฤษฎีบทของโตเลมี และ reflection

4. สิ่งที่ได้เรียนรู้

4.1 เทคนิคการแก้ปัญหাজョทย์ที่ต้องอาศัยการสร้างรูปเพิ่มเติมจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

4.2 การใช้ทฤษฎีบทของโตเลมี และ reflection

5. สิ่งที่ยังขาดในหลักสูตร

Synthetic geometry ไม่อยู่ในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย นักเรียน (อาจ) ได้เคยศึกษา มาจากระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ซึ่งหลาย ๆ โรงเรียนไม่ได้ฝึกเด็กนักเรียนในเรื่องการพิสูจน์ข้อความทางเรขาคณิตเลย

6. การเชื่อมโยงความรู้

สมบัติของสามเหลี่ยมด้านเท่า สมบัติของสี่เหลี่ยมรูปว่าว สี่จุดมีวงกลมล้อมรอบได้ ทฤษฎีบทของโตเลมี และสมบัติของ reflection

บรรณานุกรม

- [1] วารสารคณิตศาสตร์ ปริมา 38 ฉบับที่ 436-437 มกราคม-กุมภาพันธ์ 2538
- [2] หนังสือข้อสอบแข่งขันโอลิมปิกระหว่างประเทศ MATHS ปี พ.ศ. 2538 สำนักพิมพ์แม็ค พ.ศ. 2538
- [3] หนังสือข้อสอบแข่งขันโอลิมปิกระหว่างประเทศ MATHS ปี พ.ศ. 2539 สำนักพิมพ์แม็ค พ.ศ. 2539
- [4] หนังสือข้อสอบแข่งขันโอลิมปิกระหว่างประเทศ ปี พ.ศ. 2541 สสวท. พ.ศ. 2541
- [5] หนังสือข้อสอบแข่งขันโอลิมปิกระหว่างประเทศ ปี พ.ศ. 2542 สสวท. พ.ศ. 2542