



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การศึกษาผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรงบน
อนุภาคฉนวน

โดย บุญชัย เตชะอำนาจ และคณะ

เมษายน 2548

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การศึกษาผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรงบน
อนุภาคฉนวน

คณะผู้วิจัย

สังกัด

บุญชัย เตชะอำนาจ
บัณฑิต เอื้ออาภรณ์
Tadasu Takuma

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Central Research Institute of
Electric Power Industry, Japan

สนับสนุนโดยสำนักงานคณะกรรมการอุดมศึกษา
และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกอ. และสกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

บทคัดย่อ

รายงานวิจัยฉบับนี้นำเสนอการวิเคราะห์หาผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรงบนไอออนูภาคในของไหลอิเล็กทริก. ของไหลอิเล็กทริกประกอบด้วยอนุภาคคณวนที่อยู่ภายในของเหลว โดยมีลักษณะสมบัติที่สำคัญคือ เมื่อได้รับสนามไฟฟ้าภายนอกที่สูงเพียงพอ จะมีการเปลี่ยนแปลงความหนืดของของเหลว. วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัยนี้ก็คือ เพื่อศึกษาพื้นฐานของสนามไฟฟ้าและแรงที่เกิดขึ้นกับไอออนูภาคภายในของไหลอิเล็กทริก ซึ่งเป็นสาเหตุของการเปลี่ยนแปลงความหนืดของของไหล. การศึกษาเน้นที่ การหาวิธีการคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงที่มีความแม่นยำสูง และผลของการจัดเรียงอนุภาค รูปร่างอนุภาค และความนำไฟฟ้าที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรงที่เกิดขึ้น.

สำหรับในการวิจัยในส่วนของวิธีการคำนวณสนามไฟฟ้าและแรง . โครงการนี้ได้นำเสนอวิธีเจมัลติโพล ซึ่งเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์วิธีใหม่สำหรับคำนวณสนามไฟฟ้า ทั้งในระบบที่สนามไฟฟ้าเป็นแบบสมมาตรรอบแกนหมุน และแบบสามมิติทั่วไป. วิธีนี้มีพื้นฐานจากวิธีเจาประจุ แต่มีความสามารถในการคำนวณปัญหาที่มีรูปแบบซับซ้อนกว่ามากได้ โดยผู้วิจัยได้เสนอเจมัลติโพลสำหรับการจัดเรียงแบบต่างๆ เพื่อเป็นคำตอบพื้นฐานในการคำนวณ. นอกจากนี้วิธีวิเคราะห์นี้แล้ว โครงการวิจัยนี้ยังได้ใช้วิธีขึ้นประกอบขอบเขต ซึ่งเป็นวิธีเชิงเลข ในการตรวจสอบความแม่นยำและประเมินความเหมาะสมในการใช้งานอีกด้วย.

ผลการคำนวณบนรูปแบบการจัดเรียงที่สนามไฟฟ้าสมมาตรรอบแกนหมุนพบว่า สนามไฟฟ้าสูงสุดที่เกิดขึ้นบนไอออนูภาคมีค่าเพิ่มสูงขึ้นตามจำนวนอนุภาคที่ประกอบเป็นโซ่นั้น ตามสภาพยอมของไอออนูภาค และตามระดับความไม่สม่ำเสมอของสนามไฟฟ้าที่ไอออนูภาคได้รับ. เมื่อเทียบกับผลการคำนวณด้วยวิธีเจาประจุ ผู้วิจัยพบว่า การคำนวณด้วยวิธีขึ้นประกอบขอบเขตให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกัน. อย่างไรก็ตาม ผลการคำนวณด้วยวิธีขึ้นประกอบขอบเขตมีความแม่นยำต่ำลง เมื่อสภาพยอมของอนุภาคมีค่าสูงขึ้น. ผู้วิจัยได้เสนอแนะให้ใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ ในการตรวจสอบความแม่นยำของวิธีเชิงเลขก่อนใช้งานวิธีเชิงเลขจริง.

การศึกษาผลของการจัดเรียงอนุภาคที่สนามไฟฟ้าเป็นแบบสามมิติทั่วไปพบว่า แรงที่เกิดขึ้นกับไอออนูภาคคณวนมีค่าขึ้นอยู่กับจำนวนอนุภาคของโซ่ และทิศทางของโซ่เมื่อเทียบกับทิศทางของสนามไฟฟ้าภายนอก. อย่างไรก็ตาม ขนาดของแรงดึงดูดและแรงผลัค่าสูงสุดที่เกิดขึ้นบนไอออนูภาคจะลู่เข้าถึงจุดอิมตัว เมื่อจำนวนอนุภาคในโซ่เพิ่มขึ้นเป็น 32 และ 12 โดยประมาณ ตามลำดับ. เมื่ออนุภาคตัวล่างของไอออนูภาคสัมผัสอยู่กับระนาบอิเล็กโตรด แรงไดอิเล็กโตรโฟรีติกบนโซ่มีค่าเพิ่มขึ้นโดยรวม และแรงที่เกิดขึ้นพยายามดึงดูดอนุภาคให้อยู่ติดกับระนาบอิเล็กโตรดเสมอ. ดังนั้น ไอออนูภาคมีเสถียรภาพในช่วงมุมระหว่างโซ่กับสนามไฟฟ้าภายนอกที่กว้างกว่า. โดยปกติแล้ว การละลายปฏิกิริยาระหว่างอิเล็กโตรดกับอนุภาคให้ผลการคำนวณที่แม่นยำเพียงพอสำหรับการคำนวณแรง เว้นแต่ว่าอิเล็กโตรดจะอยู่ใกล้กับอนุภาคอย่างมาก.

โครงการวิจัยนี้ได้ศึกษาต่อถึงผลของระนาบอิเล็กโตรดที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรงอย่างละเอียด โดยพิจารณาสนามไฟฟ้าและแรงไดอิเล็กโตรโฟรีติกบนโซ่ของสองอนุภาคภายในของเหลว ซึ่งอยู่ระหว่างอิเล็กโตรดแบบระนาบคู่ขนาน. ผู้วิจัยได้ตรวจสอบผลของสภาพยอมของอนุภาค มุมเอียง(ระหว่างอนุภาคกับสนามไฟฟ้าที่ป้อน) และรูปแบบการจัดเรียงของอนุภาค ต่อสนามไฟฟ้าและแรง. ผลที่ได้พบว่า สนามไฟฟ้าเพิ่มขึ้นตามอัตราส่วนของสภาพยอมของอนุภาคต่อสภาพยอมของของเหลว. สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส

ระหว่างอนุภาคลดลง เมื่อมุมระหว่างอนุภาคเพิ่มมากขึ้น ในขณะที่สนามไฟฟ้าสูงสุดที่จุดสัมผัสระหว่างอนุภาคกับอิเล็กโตรดแทบจะไม่เปลี่ยนแปลง. สนามไฟฟ้าสูงสุดที่เกิดขึ้นสามารถประมาณได้ด้วยสมการรูปแบบง่าย ๆ โดยเป็นฟังก์ชันกำลังสองของอัตราส่วนสภาพยอม. แรงไดอิเล็กโตรโฟรีติกขึ้นกับระยะระหว่างอนุภาคหรือระยะระหว่างอนุภาคกับอิเล็กโตรดอย่างมาก. อย่างไรก็ตาม ด้วยมุมเอียงของโซ่ที่ศึกษาในที่นี้ แรงในแนวระดับที่ทำกับอนุภาคตัวบนของโซ่อนุภาคมีทิศทางต้านแรงเฉือนภายนอกเสมอ. ค่าสูงสุดของแรงในแนวระดับของโซ่อนุภาคแปรเป็นฟังก์ชันกำลัง 1.7 ของอัตราส่วนสภาพยอม ถ้าอนุภาคในโซ่ยังคงอยู่ติดกัน. ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบแรงที่ได้จากการประมาณจากแรงบนโซ่อนุภาคเดี่ยว กับผลการคำนวณแรงที่ได้จากวิธีเงาประจุ. ผลการเปรียบเทียบแสดงว่า ไม่มีโมเดลการประมาณใดที่สอดคล้องกับผลการคำนวณตลอดช่วงของอัตราส่วนสภาพยอมที่ศึกษา.

โครงการวิจัยนี้ได้วิเคราะห์สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส ซึ่งมีมุมสัมผัสเท่ากับศูนย์ ระหว่างอนุภาคแบบทรงกระบอกที่มีหน้าตัดเป็นวงรีหรืออนุภาคทรงรี กับระนาบอิเล็กโตรด. สนามไฟฟ้าถูกคำนวณด้วยวิธีขึ้นประกอบขอบเขตสำหรับปัญหาแบบสองมิติ และแบบสมมาตรรอบแกนหมุน. ผลการคำนวณแสดงว่า สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสเพิ่มขึ้นเมื่อ อัตราส่วนของความยาวแกนโท่ต่อแกนเอกของอนุภาคลดลง หรืออัตราส่วนสภาพยอมเพิ่มขึ้น. ผู้วิจัยได้นำเสนอสมการง่าย ๆ สองสมการ ในการประมาณค่าสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสในช่วงของอัตราส่วนสภาพยอมที่สนใจ โดยมีความคลาดเคลื่อนในการประมาณน้อยกว่า 6.6%.

การศึกษาผลของความนำไฟฟ้าที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรง ได้ใช้อนุภาคที่ประกอบด้วยแกนกลางและชั้นฟิล์มฉนวนเป็นโมเดลในการศึกษา. การวิเคราะห์นี้ใช้วิธีเงาประจุที่ได้นำเสนอในโครงการ โดยมีผลเฉลยพื้นฐานสำหรับรูปแบบที่หลากหลายของแกนกลางและชั้นฟิล์ม. แนวความคิดของสภาพยอมปรากฏได้ถูกนำไปใช้ เพื่อให้ทราบอย่างชัดเจนถึงความแตกต่างระหว่างอนุภาคชนิดต่างๆ. การวิเคราะห์แสดงว่า ผลตอบสนองของอนุภาคที่มีชั้นฟิล์มต่อสนามไฟฟ้าภายนอกนั้นเป็นลักษณะเฉพาะ. เมื่อเปรียบเทียบกับอนุภาคเนื้อเดียวที่ไม่มีชั้นฟิล์ม เราพบว่า สนามไฟฟ้าและแรงมีค่าต่ำกว่าบนอนุภาคแกนตัวนำ แต่สูงกว่าบนอนุภาคแกนฉนวน. ผู้วิจัยได้คำนวณสนามไฟฟ้าและแรงด้วย วิธีขึ้นประกอบขอบเขตซึ่งใช้พื้นผิวที่ไม่มีความหนาแต่มีสภาพนำเชิงผิวในการคำนวณ. ผลการคำนวณพบว่า ความเหมาะสมของการใช้สภาพนำเชิงผิวนอกจากขึ้นอยู่กับลักษณะสมบัติของฟิล์มแล้ว ยังขึ้นกับระดับของสนามไฟฟ้าภายนอกอีกด้วย.

ABSTRACT

This report presents the analysis of the effects of various parameters on electric field and force on particle chains in electrorheological (ER) fluid. The ER fluid is a suspension of particles in a dielectric liquid. An important characteristic of the fluid is the change in its viscosity under a sufficiently-high applied electric field. The purpose of this research is to study the fundamentals of electric field and force on particle chains in the ER fluid, which contribute to the change of viscosity. This research focuses on the calculation method for electric field and force which can realize high accuracy and the effects of the particle arrangement, profile, and conductivity on the electric field and force.

For the method to calculate electric field and force, we have proposed the method of multipole images, which is a new analytical method for field calculation. The method is applicable for arrangements where the field may be axisymmetrical or arbitrarily three dimensional. The method is based on the method of images, but can be used for more complicated problems. We have presented multipole images for various fundamental arrangements. In addition to the analytical method, we utilized the boundary element method (BEM), a numerical method, to ascertain the accuracy and estimate its propriety.

Calculation results of the arrangements in which the field is axisymmetrical show that the maximum electric field increases with the particle number, the particle permittivity, and the degree of non-uniformity of the applied field. The results by the BEM agree well with the analytical results. However, the results by the BEM become less accurate with increasing the permittivity of dielectric particles. We suggest the use of the analytical method to estimate the accuracy of the numerical method.

The study of the arrangements in which the field is arbitrarily three dimensional shows that the force on a dielectric particle chain in a dielectric fluid depends on the number of particles and the chain direction. However, the maximal attractive and repulsive forces reach their saturation values at about 32 and 12 particles, respectively. When the lower particle of a chain is in contact with a plate electrode, the dielectrophoretic force on the chain becomes higher on the whole, and it always attracts the chain to the electrode. As a result, the particle chain is stabilized for a wider range of the angle between the chain and the applied field. Neglecting the interaction between the electrodes and particles usually gives adequate accuracy in the force calculation, unless the electrodes are very close to particles.

This research also studied in detail the effect of plate electrodes on electric field and force by considering the field and dielectrophoretic force on a dielectric particle chain suspended in a host liquid lying between parallel-plate electrodes. We have investigated the effect of the particle

permittivity, the tilt angle (between the chain and the applied field) and the chain arrangement on the electric field and force. The results show that the electric field intensification rises in accordance with the increase in the ratio of the particle-to-liquid permittivity. The electric field at the contact point between the particles decreases with increasing tilt angle, while the maximal field at the contact point between the particles and the plate electrodes is almost unchanged. The maximal field can be approximated by a simple formula, which is a quadratic function of the permittivity ratio. The dielectrophoretic force depends significantly on the distance from other particles or an electrode. However, for the tilt angles in this work, the horizontal force on the upper particle of the chain always has the direction opposite to the shear direction. The maximal horizontal force of a chain varies as a power function of the permittivity ratio if the particles in the chain are still in contact with each other. The approximated force, based on the force on an isolated chain, has been compared with our calculation results. The comparison shows that no approximation model agrees well with our results throughout the range of permittivity ratios.

We have analyzed the electric field at the contact point of zero contact angle formed by an elliptic-cylindrical or ellipsoidal particle and a plate electrode. The electric field has been calculated by the BEM for two dimensional and axisymmetrical arrangements. The calculation results show that the contact-point electric field is intensified by either decreasing the aspect ratio of the dielectric solid or increasing the ratio of the material constant of the solid to that of the surrounding medium. Two simple equations are given for estimating the contact-point electric field for a range of the material-constant ratio with the errors less than 6.6%.

The study of the effects of conductivity on the electric field and force used a particle composed of a core and a surface film as the model. In the analysis, we use the method of multipole images with the fundamental solutions given for various types of particles composed of a core and a surface film. The concept of the apparent conductivity is introduced to clarify the difference between the particle types. The analysis shows that the response of particle with a surface film to an external field is unique and generally cannot be obtained by replacing the particle with a homogeneous particle. The electric field and force are found smaller on the conductor-core particle but greater on the dielectric-core particle, compared with the particle without any surface film. We have calculated the electric field and force by using the BEM in which a surface film is treated as a zero-thickness medium. The propriety of such treatment of a surface film depends not only on the film properties but also on the external field.

EXECUTIVE SUMMARY

รายงานวิจัยฉบับนี้นำเสนอการวิเคราะห์หาผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรงบนโซ่อนุภาคในของไหลอีอาร์. ของไหลอีอาร์ประกอบด้วยอนุภาคคณวณขนาดประมาณไมโครเมตรอยู่ภายในของเหลว โดยมีลักษณะสมบัติที่สำคัญคือ เมื่อได้รับสนามไฟฟ้าภายนอกที่สูงเพียงพอ จะมีการเปลี่ยนแปลงความหนืดของของเหลว. เวลาตอบสนองของการเปลี่ยนแปลงความหนืดอยู่ในช่วงประมาณ 1 ms ซึ่งถือได้ว่าต่ำมาก. เวลาตอบสนองที่รวดเร็วทำให้เราสามารถนำของไหล ER ไปใช้ประโยชน์ต่างๆ มากมายในอุตสาหกรรม เช่น อุปกรณ์ประเภท คลัทช์ อุปกรณ์รับแรงกระแทก (shock absorber) ชนิดต่างๆ และอุปกรณ์ควบคุมการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์ เป็นต้น.

วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัยนี้ก็คือ เพื่อศึกษาพื้นฐานของสนามไฟฟ้าและแรงที่เกิดขึ้นกับโซ่อนุภาคภายในของไหลอีอาร์ ซึ่งเป็นสาเหตุของการเปลี่ยนแปลงความหนืดของของไหล. ทั้งนี้ การเปลี่ยนแปลงความหนืดของของไหล ER เกิดจากการที่อนุภาคคณวณภายในเรียงตัวกัน เมื่อได้รับสนามไฟฟ้าและเกิดแรงทางไฟฟ้าระหว่างอนุภาคขึ้น. การคำนวณแรงระหว่างอนุภาคที่อยู่ภายในจึงเป็นสิ่งหนึ่งที่สำคัญในการศึกษาลักษณะสมบัติของของไหล ER. การศึกษาในโครงการวิจัยนี้เน้นที่ การหาวิธีการคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงที่มีความแม่นยำสูง และผลของการจัดเรียงอนุภาค รูปร่างอนุภาค และความนำไฟฟ้าที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรงที่เกิดขึ้น.

สำหรับการวิจัยในส่วนของวิธีการคำนวณสนามไฟฟ้าและแรง โครงการนี้ได้นำเสนอวิธีเจามัลติโพล ซึ่งเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์วิธีใหม่สำหรับคำนวณสนามไฟฟ้า ทั้งในระบบที่สนามไฟฟ้าเป็นแบบสมมาตรรอบแกนหมุน และแบบสามมิติทั่วไป. วิธีนี้มีหลักการคำนวณที่เหมือนกับหลักการของวิธีเจาประจุ แต่มีความสามารถในการคำนวณปัญหาที่มีรูปแบบซับซ้อนกว่ามากได้. ผู้วิจัยได้เสนอเจามัลติโพลสำหรับการจัดเรียงแบบต่างๆ เพื่อเป็นคำตอบพื้นฐานในการคำนวณ และได้เสนอการใช้สมการการกระจายมัลติโพลซ้ำ เพื่อขยายการใช้เจามัลติโพลที่ได้นำเสนอไว้. วิธีเจามัลติโพลเหมาะกับระบบซึ่งประกอบด้วยวัตถุที่มีรูปร่างพื้นฐาน เช่น ทรงกลมหรือระนาบ โดยสามารถคำนวณสนามไฟฟ้าได้อย่างแม่นยำสูง. นอกจากวิธีวิเคราะห์นี้แล้ว โครงการวิจัยนี้ยังได้ใช้วิธีชั้นประกอบขอบเขต ซึ่งเป็นวิธีเชิงเลข ในการตรวจสอบความแม่นยำและประเมินความเหมาะสมในการใช้งานอีกด้วย. สาเหตุที่ผู้วิจัยได้เลือกใช้วิธีชั้นประกอบขอบเขตสำหรับการคำนวณเนื่องจากว่า วิธีชั้นประกอบขอบเขตเป็นวิธีการคำนวณแบบแบ่งขอบเขต ซึ่งโดยทั่วไปแล้วจะให้ความแม่นยำของค่าสนามไฟฟ้าสูงกว่าวิธีแบบแบ่งบริเวณ เช่นวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นต้น.

วิธีคำนวณทั้งสองได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้ หาสนามไฟฟ้าบนอนุภาคที่มีการจัดเรียงแบบสนามไฟฟ้าสมมาตรรอบแกนหมุน. ในการคำนวณ โซ่อนุภาคอาจได้รับสนามไฟฟ้าภายนอก(จากแหล่งกำเนิดที่อยู่ไกลออกไป)แบบสม่ำเสมอ หรืออาจได้รับสนามไฟฟ้าแบบไม่สม่ำเสมอระหว่างอิเล็กโตรดรูปทรงกลม. อนุภาคที่สนใจอาจเป็นตัวนำ หรือเป็นฉนวนก็ได้. ผลการคำนวณสนามไฟฟ้าพบว่า สนามไฟฟ้าสูงสุดที่เกิดขึ้นบนโซ่อนุภาคมีค่าเพิ่มสูงขึ้นตามจำนวนอนุภาคที่ประกอบเป็นโซ่นั้น ตามสภาพยอมของโซ่อนุภาค และตามระดับความไม่สม่ำเสมอของสนามไฟฟ้าที่โซ่อนุภาคได้รับ. เมื่อเทียบกับผลการคำนวณด้วยวิธีเจาประจุ ผู้วิจัยพบว่า การคำนวณด้วยวิธีชั้นประกอบขอบเขตให้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกัน. อย่างไรก็ตาม ผลการคำนวณด้วยวิธีชั้นประกอบขอบเขตมีความแม่นยำต่ำลง เมื่อสภาพยอมของอนุภาคมีค่าสูงขึ้น. ผู้วิจัยได้เสนอแนะให้ใช้วิธี

เชิงวิเคราะห์ในการตรวจสอบความแม่นยำของวิธีเชิงเลขก่อน. นอกจากนี้ ผู้วิจัยพบว่าสามารถใช้สมการรูปแบบง่าย ๆ ประมาณสำหรับค่าสนามไฟฟ้าสูงสุดที่เกิดขึ้นบนโซ่อนุภาคฉนวนได้.

การศึกษาผลของการจัดเรียงอนุภาคที่สนามไฟฟ้าเป็นแบบสามมิติทั่วไปพบว่า แรงที่เกิดขึ้นกับโซ่อนุภาคฉนวนมีค่าขึ้นอยู่กับจำนวนอนุภาคของโซ่ และทิศทางของโซ่เมื่อเทียบกับทิศทางของสนามไฟฟ้าภายนอก. แรงที่เกิดขึ้นทั้งแรงดึงดูดและแรงผลัก เพิ่มขึ้นตามจำนวนของอนุภาคบนโซ่อย่างเล็กน้อย. อย่างไรก็ตาม ขนาดของแรงดึงดูดและแรงผลักค่าสูงสุดที่เกิดขึ้นจะลู่เข้าถึงจุดอิ่มตัว เมื่อจำนวนอนุภาคในโซ่เพิ่มขึ้นเป็น 32 และ 12 โดยประมาณ ตามลำดับ. การอิ่มตัวของแรงดึงดูดได้มีการนำเสนอมาแล้ว แต่งานวิจัยนี้ได้ศึกษาถึงค่าอิ่มตัวของแรงผลักเป็นครั้งแรก. ผลการคำนวณแรงบนอนุภาคตัวล่างของโซ่อนุภาคที่สัมผัสอยู่กับระนาบอิเล็กโตรดแสดงให้เห็นว่า ระนาบอิเล็กโตรดทำให้ลักษณะสมบัติของแรงเปลี่ยนแปลงไปจากกรณีที่ไม่มียอิเล็กโตรดอย่างมาก. แรงไดอิเล็กโตรโฟรีติกบนโซ่มีค่าเพิ่มขึ้นโดยรวม และแรงที่เกิดขึ้นพยายามดึงดูดอนุภาคให้อยู่ติดกับระนาบอิเล็กโตรดเสมอ. ดังนั้น โซ่อนุภาคมีเสถียรภาพในช่วงมุมระหว่างโซ่กับสนามไฟฟ้าภายนอกที่กว้างกว่า (เมื่อเทียบกับกรณีที่ไม่มียระนาบอิเล็กโตรด). การพิจารณาโซ่อนุภาคที่ติดอยู่กับระนาบอิเล็กโตรดล่าง แต่อยู่ห่างจากระนาบอิเล็กโตรดบน แสดงว่า โดยปกติแล้ว การละลายปฏิกิริยาระหว่างอิเล็กโตรดกับอนุภาคให้ผลการคำนวณที่แม่นยำเพียงพอสำหรับการคำนวณแรง เว้นแต่ว่าระนาบอิเล็กโตรดบนจะอยู่ใกล้กับอนุภาคอย่างมาก.

โครงการวิจัยนี้ได้ศึกษาต่อถึงผลของระนาบอิเล็กโตรดที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรงอย่างละเอียด โดยพิจารณาสนามไฟฟ้าและแรงไดอิเล็กโตรโฟรีติกบนโซ่ของสองอนุภาคภายในฉนวนเหลว ซึ่งอยู่ระหว่างอิเล็กโตรดแบบระนาบคู่ขนาน. ผู้วิจัยได้ตรวจสอบผลของสภาพยอมของอนุภาค มุมเอียง(ระหว่างอนุภาคกับสนามไฟฟ้าที่ป้อน) และรูปแบบการจัดเรียงของอนุภาค ต่อสนามไฟฟ้าและแรง. สำหรับการจัดเรียงของอนุภาคนั้น ได้สมมติให้อนุภาคภายในโซ่มีการเปลี่ยนแปลงแบบต่างๆ เมื่อได้รับแรงเฉือนภายนอกจากการใช้งานของไหล ER. การจัดเรียงที่ศึกษามีทั้งแบบที่โซ่อนุภาคยึดติดกับอิเล็กโตรดทั้งสอง โซ่อนุภาคยึดติดกัน แต่อยู่ห่างจากอิเล็กโตรด โซ่อนุภาคอยู่ติดกับอิเล็กโตรดเพียงด้านเดียว และโซ่อนุภาคแยกจากกันและแยกจากอิเล็กโตรด. ผลการวิเคราะห์ที่ได้แสดงว่า สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสระหว่างอนุภาคลดลง เมื่อมุมระหว่างอนุภาคเพิ่มมากขึ้น ในขณะที่สนามไฟฟ้าสูงสุดที่จุดสัมผัสระหว่างอนุภาคกับอิเล็กโตรดมีค่าค่อนข้างคงที่ แทบจะไม่เปลี่ยนแปลง. สนามไฟฟ้าสูงสุดที่เกิดขึ้นสามารถประมาณได้ด้วยสมการรูปแบบง่าย ๆ โดยเป็นฟังก์ชันกำลังสองของอัตราส่วนสภาพยอม. แรงไดอิเล็กโตรโฟรีติกบนโซ่อนุภาคขึ้นอยู่กับระยะระหว่างอนุภาคหรือระยะระหว่างอนุภาคกับอิเล็กโตรดอย่างมาก. อย่างไรก็ตาม ด้วยมุมเอียงของโซ่ (0 ถึง 45 องศา) ที่ศึกษาในที่นี้ แรงในแนวระดับที่ทำกับอนุภาคตัวบนของโซ่อนุภาคมีทิศทางต้านแรงเฉือนภายนอกเสมอ ซึ่งก็คือ ทำให้ความหนืดปรากฏของเหลวมีค่าสูงขึ้น. ค่าสูงสุดของแรงในแนวระดับของโซ่อนุภาคแปรเป็นฟังก์ชันกำลัง 1.7 ของอัตราส่วนสภาพยอม ถ้าอนุภาคในโซ่ยังคงอยู่ติดกัน. ในงานวิจัยที่มีอยู่ในปัจจุบัน ความเค้นครากเฉือน (shear yield stress) ของของไหล ER มักประมาณจากแรงที่เกิดขึ้นบนโซ่อนุภาคเดี่ยว (ไม่คิดผลของอิเล็กโตรด). โมเดลโซ่อนุภาคเดี่ยวที่ใช้ อาจเป็นโซ่ของสองอนุภาค หรือโซ่ของอนุภาคจำนวนอนันต์. ในโครงการนี้ ผู้วิจัยได้เปรียบเทียบแรงที่ได้จากการประมาณด้วยแรงบนโซ่อนุภาคเดี่ยว กับผลการคำนวณแรงที่ได้จากวิธีเชิงประจักษ์. ผลการเปรียบเทียบแสดงว่า ไม่มีโมเดลของโซ่อนุภาคเดี่ยวใดที่ให้ค่าแรงสอดคล้องกับผลการคำนวณ เมื่อเราพิจารณาตลอดช่วงของอัตราส่วนสภาพยอมที่ศึกษา.

โครงการวิจัยนี้ได้วิเคราะห์สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส ซึ่งมีมุมสัมผัสเท่ากับศูนย์ ระหว่างอนุภาคแบบทรงกระบอกที่มีหน้าตัดเป็นวงรีหรืออนุภาคทรงรี กับระนาบอิเล็กโตรด. สนามไฟฟ้าถูกคำนวณด้วยวิธีขึ้นประกอบขอบเขตสำหรับปัญหาแบบสองมิติ และแบบสมมาตรรอบแกนหมุน. ผลการคำนวณแสดงว่า สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสเพิ่มสูงขึ้น เมื่ออัตราส่วนของความยาวแกนโทต่อแกนเอกของอนุภาคลดลง หรือเมื่ออัตราส่วนสภาพยอมเพิ่มขึ้น. ผลของอัตราส่วนความยาวแกนและอัตราส่วนสภาพยอมมีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน ทำให้ไม่สามารถแยกแสดงเป็นสมการง่ายๆ ได้. อย่างไรก็ตาม ผู้วิจัยได้นำเสนอสมการประมาณสองสมการ ในการคำนวณค่าสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส เมื่ออนุภาคเป็นแบบทรงกระบอกและแบบทรงรีตามลำดับ สำหรับช่วงของอัตราส่วนสภาพยอมตั้งแต่ 1 ถึง 8. สมการประมาณที่นำเสนอมีความคลาดเคลื่อนในการประมาณน้อยกว่า 6.6%.

การศึกษาผลของความนำไฟฟ้าที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรง ได้ใช้อนุภาคที่ประกอบด้วยแกนกลางและชั้นฟิล์มฉนวนเป็นโมเดลในการศึกษา. การวิเคราะห์นี้ใช้วิธีเงาเมล็ดโพลที่ได้นำเสนอในโครงการ โดยมีผลเฉลยพื้นฐานสำหรับรูปแบบที่หลากหลายของแกนกลางและชั้นฟิล์ม. แนวความคิดของสภาพยอมปรากฏได้ถูกนำใช้ เพื่อทำให้ทราบอย่างชัดเจนถึงความแตกต่างระหว่างอนุภาคชนิดต่างๆ. การวิเคราะห์แสดงว่า ผลตอบสนองของอนุภาคที่มีชั้นฟิล์มต่อสนามไฟฟ้าภายนอกนั้นเป็นลักษณะเฉพาะ โดยเราไม่สามารถแทนอนุภาคที่มีชั้นฟิล์ม ด้วยอนุภาคแบบเนื้อเดียว เพื่อให้ได้ผลตอบสนองที่เหมือนกันได้. (ยกเว้นกรณีพิเศษ ที่สนามไฟฟ้าภายนอกเป็นแบบสม่ำเสมอ) ผู้วิจัยทำการเปรียบเทียบผลตอบสนองของสนามไฟฟ้าและแรงไดอิเล็กโตรโฟรีติกระหว่าง อนุภาคเนื้อเดียวที่ไม่มีชั้นฟิล์ม อนุภาคที่ประกอบด้วยแกนตัวนำและชั้นฟิล์ม และอนุภาคที่ประกอบด้วยแกนฉนวนสมบูรณ์และชั้นฟิล์ม โดยได้กำหนดพารามิเตอร์ของอนุภาคทั้งสามให้มีผลตอบสนองภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอเหมือนกัน. ผลการเปรียบเทียบพบว่า สนามไฟฟ้าและแรงมีค่าต่ำกว่าบนอนุภาคแกนตัวนำ แต่สูงกว่าบนอนุภาคแกนฉนวน. นอกจากนี้ ผู้วิจัยได้คำนวณสนามไฟฟ้าและแรงด้วยวิธีขึ้นประกอบขอบเขต. การคำนวณใช้เทคนิคการแทนชั้นฟิล์มด้วยองค์ประกอบที่ไม่มี ความหนา แต่มีสภาพนำเชิงผิวในการคำนวณ ซึ่งเป็นวิธีคำนวณที่นิยมใช้อยู่ทั่วไป. ผลการคำนวณพบว่า ความเหมาะสมของการใช้สภาพนำเชิงผิว นอกจากขึ้นอยู่กับลักษณะสมบัติของฟิล์มแล้ว ยังขึ้นกับระดับของสนามไฟฟ้าภายนอกอีกด้วย.

ผลการศึกษาทั้งหมดที่ได้จากโครงการวิจัยนี้ ทำให้ทราบถึงลักษณะสมบัติพื้นฐานของแรงและสนามไฟฟ้าบนอนุภาคฉนวน ทราบถึงผลของพารามิเตอร์ต่างๆ ที่สำคัญที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรง และยังแสดงการวิเคราะห์พื้นฐานของอนุภาคที่ประกอบด้วยชั้นฟิล์มอย่างละเอียด ซึ่งไม่มี การวิเคราะห์ในลักษณะเดียวกันนี้มาก่อน. องค์ความรู้ที่ได้จากงานวิจัยสามารถนำไปใช้ประโยชน์กับงานด้านอื่นๆ ได้ ไม่จำกัดอยู่ที่ของไหล ER ซึ่งเป็นเป้าหมายหลักของงานวิจัยนี้. ตัวอย่างของการประยุกต์ใช้งานที่เป็นไปได้ ได้แก่ การศึกษาการกระจายสนามไฟฟ้าของฉนวนแข็งที่มีฟิลเลอร์ (fillers) อยู่ภายใน การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาคในเครื่องกำจัดผงฝุ่น เป็นต้น. นอกจากนี้ วิธีเงาเมล็ดโพล ซึ่งเป็นวิธีคำนวณสนามไฟฟ้าที่ได้นำเสนอจากงานวิจัยนี้ เป็นวิธีคำนวณพื้นฐาน ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้งานอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับการแก้สมการลาปลาซได้. ผลงานทั้งหมดได้รับการตีพิมพ์ในวารสารทางวิชาการระดับนานาชาติที่มี peer review ทั้งสิ้น 5 บทความ และได้นำเสนอในการประชุมทางวิชาการระดับนานาชาติ 1 ครั้ง ดังแสดงอยู่ในรายงานฉบับนี้ด้วยแล้ว.

1. ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ปัจจุบันได้มีการใช้ประโยชน์ต่างๆ จากปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นระหว่างอนุภาคคอลลอยด์ในตัวกลางคอลลอยด์เหลวหรือคอลลอยด์กึ่งของแข็งเมื่ออนุภาคได้รับการกระตุ้นจากสนามไฟฟ้า. การใช้งานของไหล ER [electrorheological (ER) fluid] ก็เป็นการอาศัยประโยชน์จากปฏิกิริยานี้. ของไหล ER เป็นคอลลอยด์(ไฟฟ้า)เหลวที่มีอนุภาคคอลลอยด์ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางในช่วง 1 ถึง 50 μm จำนวนหนึ่งอยู่ภายใน [1]. เมื่อป้อนสนามไฟฟ้าภายนอกให้กับของไหล ER ของไหลจะมีความหนืดเพิ่มขึ้นอย่างฉับพลัน. ความหนืดจำเพาะของของไหล ER จะลดลงเหมือนเดิมเมื่อตัดสนามไฟฟ้าภายนอกออก. เวลาตอบสนองของการเปลี่ยนแปลงความหนืดอยู่ในช่วงประมาณ 1 ms ซึ่งถือว่าต่ำมาก. เวลาตอบสนองที่รวดเร็วทำให้เราสามารถนำของไหล ER ไปใช้ประโยชน์ต่างๆ มากมายในอุตสาหกรรม เช่น อุปกรณ์จำพวกคลัทช์ อุปกรณ์รับแรงกระแทก (shock absorber) ชนิดต่างๆ และอุปกรณ์ควบคุมการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์ เป็นต้น.

เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงความหนืดของของไหล ER เกิดจากการที่อนุภาคคอลลอยด์ภายในของไหลเรียงตัวกันเมื่อได้รับสนามไฟฟ้าและเกิดแรงทางไฟฟ้าระหว่างอนุภาคขึ้น การคำนวณหาแรงระหว่างอนุภาคที่อยู่ภายในจึงเป็นสิ่งหนึ่งที่สำคัญในการศึกษาลักษณะสมบัติของของไหล ER. ในขณะที่ของไหลหยุดนิ่ง การเรียงตัวของอนุภาคนั้นจะเป็นไปในแนวของสนามไฟฟ้า แรงที่เกิดขึ้นระหว่างอนุภาคคอลลอยด์นี้ขึ้นกับความเครียดสนามไฟฟ้าที่ผิวของอนุภาค. จนถึงปัจจุบัน ได้มีการศึกษาองค์ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับแรงที่เกิดขึ้นกับอนุภาคในแง่ต่างๆ มากมาย ทั้งโดยการทดลองและการคำนวณวิเคราะห์ [2,3]. การคำนวณสนามไฟฟ้าบนผิวของอนุภาคคอลลอยด์อย่างแม่นยำทำได้ยาก เนื่องจากสนามไฟฟ้าบนผิวนี้กระจายอย่างไม่สม่ำเสมอ. นอกจากนี้ การวิเคราะห์เกือบทั้งหมดเป็นการศึกษาที่พิจารณาเฉพาะอนุภาคคอลลอยด์และอนุภาคเป็นคอลลอยด์ไฟฟ้าสมบูรณ์ (ไม่มีความนำไฟฟ้าอยู่เลย) เท่านั้น. ข้อจำกัดอีกประการหนึ่งของงานที่มีอยู่ในปัจจุบันก็คือ งานวิจัยที่วิเคราะห์สนามไฟฟ้าและระบบคอลลอยด์ที่มีอยู่เกือบทั้งหมด ได้พิจารณาถึงลักษณะรูปร่างของอนุภาคเฉพาะที่เป็นทรงกลมเท่านั้น.

ในทางปฏิบัติ วัสดุทุกชนิดมีค่าความนำไฟฟ้าเชิงปริมาตรอยู่ค่าหนึ่งซึ่งขึ้นกับชนิดของวัสดุ. นอกเหนือจากนี้อนุภาคยังอาจมีความนำไฟฟ้าทางพื้นผิวเนื่องจากความชื้นหรือสิ่งประปรายบนพื้นผิวของอนุภาคอีกด้วย. ความนำไฟฟ้านี้จะมีผลมากขึ้นเมื่อความถี่ของ(สนาม)ไฟฟ้าต่ำลงหรือในกรณีไฟฟ้ากระแสตรง. ความนำไฟฟ้าของอนุภาคทำให้สนามไฟฟ้าบนผิวของอนุภาคเปลี่ยนแปลงเมื่อเทียบกับกรณีคอลลอยด์ไฟฟ้าสมบูรณ์ และทำให้เกิดกับอนุภาคเปลี่ยนแปลงไปด้วย. ผลของความนำไฟฟ้าของอนุภาคในของไหล ER นั้น ได้มีการศึกษาบ้างแล้ว แต่ส่วนใหญ่เป็นการศึกษาโดยอาศัยการทดลองเท่านั้น. การวิเคราะห์ผลของสนามไฟฟ้าที่ได้มีการนำเสนอ เป็นการวิเคราะห์แบบประมาณ [4-7] เช่น สมมติว่าสนามไฟฟ้าในบริเวณฟิล์มเป็นแบบสม่ำเสมอในแนวแกนของโซ่อนุภาค. ยังไม่มีการวิเคราะห์ผลของความนำไฟฟ้าทางทฤษฎีจากพื้นฐานของสนามไฟฟ้าโดยละเอียด ทำให้ยังมีความเข้าใจในปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นจริงน้อยมาก.

พารามิเตอร์อีกประการหนึ่งที่มีผลต่อลักษณะสมบัติของของไหล ER ก็คือรูปร่างของอนุภาค. รูปร่างของอนุภาคที่เบี่ยงเบนไปจากลักษณะทรงกลมเนื่องจาก กระบวนการผลิตอนุภาค หรือสาเหตุอื่นๆ ย่อมทำให้สนามไฟฟ้าที่ผิวของอนุภาคเปลี่ยนแปลงและทำให้แรงบนอนุภาคเปลี่ยนแปลงด้วย. นอกจากผลงานวิจัยเกี่ยวกับลักษณะรูปร่างของอนุภาคมีอยู่น้อยมากแล้ว งานที่มีอยู่ [8] ยังอาจแสดงผลการวิเคราะห์ที่ผิดพลาดอีกด้วย.

ปัญหาที่ทำการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาลักษณะสมบัติของสนามไฟฟ้าและแรงที่เกิดขึ้นกับอนุภาคในของไหล ER. ผู้วิจัยจะวิเคราะห์หาค่าแรงบนอนุภาคจากค่าสนามไฟฟ้าที่ผิวอนุภาคด้วยวิธีการที่แตกต่างกัน 2 วิธี คือ

- (1) วิธีสมการเชิงวิเคราะห์
- (2) วิธีเชิงเลข ซึ่งในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีขั้นประกอบขอบเขต (boundary element method, BEM).

ในกรณีของวิธีสมการเชิงวิเคราะห์ ผู้วิจัยได้หาสมการเชิงวิเคราะห์ใหม่ ซึ่งสามารถใช้คำนวณสนามไฟฟ้าในโมเดลรูปแบบต่างๆ ได้หลากหลายกว่าวิธีที่มีอยู่เดิม และมีความแม่นยำของผลการคำนวณสูง. ส่วนวิธีขั้นประกอบขอบเขตได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้เพื่อตรวจสอบความแม่นยำของวิธีเชิงเลขดังกล่าว เพื่อเป็นพื้นฐานต่อไปในการนำมาใช้กับการจัดเรียงอนุภาคที่ซับซ้อน ไม่เหมาะที่จะใช้วิธีเชิงวิเคราะห์.

โมเดลของอนุภาคที่ใช้ในงานวิจัยนี้ เน้นที่วัตถุประสงค์ในการศึกษาผลของการจัดเรียงของอนุภาค (รวมถึงอิเล็กโตรดที่มีอยู่ภายในระบบด้วย) ความนำไฟฟ้า และรูปร่างของอนุภาค ที่มีสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาค. องค์ความรู้พื้นฐานที่ได้จากงานวิจัยนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อไปในการวิเคราะห์ลักษณะสมบัติโดยรวมของของไหล ER ในกรณีที่ต้องพิจารณาผลของความนำไฟฟ้าหรือรูปร่างของอนุภาคโดยละเอียด และสามารถนำมาอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นทั้งในการทดลองและในทางปฏิบัติได้. นอกเหนือจากนี้แล้ว เนื่องจากงานวิจัยนี้วิเคราะห์ในแรงที่เกิดจากอนุภาคคั่นในอนุภาคนิกชนิดหนึ่ง ซึ่งไม่จำกัดว่าต้องเป็นของเหลว ความรู้ที่ได้จากงานวิจัยนี้จึงเป็นประโยชน์ในการวิเคราะห์ปัญหาอื่นที่มีรูปแบบคล้ายคลึงกันด้วย เช่น การเคลื่อนที่ของผงหมึกในเครื่องพิมพ์[9] การกระจายของสนามไฟฟ้าเนื่องจากฟิลเลอร์ (fillers) ในฉนวนแข็ง[10] การเคลื่อนที่ของอนุภาคลิโธในเครื่องพ่นสีไฟฟ้า ซึ่งเป็นกรณีของอนุภาคในตัวกลางที่เป็นอากาศ หรือการเกิดดีสชาร์จบางส่วนในช่องว่างภายในฉนวนแข็ง เป็นต้น.

2. วัตถุประสงค์

1. พัฒนาวิธีวิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคที่มีความแม่นยำ เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการทำวิจัยโครงการนี้.
2. ศึกษาพื้นฐานของพฤติกรรมของสนามไฟฟ้าและแรงที่เกิดขึ้นบนโซ่อนุภาคคณวน.
3. วิเคราะห์ผลความนำไฟฟ้า ทั้งสภาพนำเชิงปริมาตรและเชิงผิวของอนุภาคคณวน ต่อสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคคณวน.
4. วิเคราะห์ผลของรูปร่างอนุภาคในกรณีที่อนุภาคมีรูปร่างไม่เป็นทรงกลม ต่อสนามไฟฟ้าและแรงที่เกิดขึ้น.

3. วิธีวิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงที่ใช้ในงานวิจัย

งานวิจัยนี้ใช้วิธีขึ้นประกอบขอบเขต เป็นวิธีเชิงเลขในการคำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาค. ข้อดีของวิธีขึ้นประกอบขอบเขตอยู่ที่ มีความแม่นยำของผลการคำนวณสูง. การจำลองปัญหาที่มีขอบเขตผิวโค้ง หรือที่เป็นบริเวณเปิดทำได้ง่าย. โปรแกรมขึ้นประกอบขอบเขตที่ใช้ เป็นโปรแกรมที่ผู้วิจัยได้พัฒนาขึ้นมาเอง. ผู้วิจัยได้ตรวจสอบผลการคำนวณที่ได้จากโปรแกรม โดยเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ต่างๆ ที่มี เพื่อยืนยันความถูกต้องของโปรแกรม.

นอกจากวิธีเชิงเลขดังกล่าวแล้ว ผู้วิจัยได้พัฒนาวิธีเงาขั้วหลายขั้ว (method of multipole images) ซึ่งเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์ที่มีพื้นฐานอยู่บนวิธีเงาประจุ (method of images). ข้อแตกต่างที่สำคัญระหว่างวิธีทั้งสองก็คือ วิธีเงาขั้วหลายขั้วคำนวณสนามไฟฟ้าโดยใช้ขั้วหลายขั้วที่มีอันดับสูงกว่าประจุหรือไดโพล ซึ่งใช้ในวิธีเงาประจุทั่วไป และวิธีเงาขั้วหลายขั้วอาศัยสมการกระจายขั้วหลายขั้วในการหาเงาขั้วหลายขั้วที่เหมาะสม. ข้อดีของวิธีเงาขั้วหลายขั้วที่เห็นว่าวิธีเงาประจุก็คือ สามารถใช้ได้กับอนุภาครูปแบบซับซ้อนกว่า และใช้ได้กับการจัดเรียงของอนุภาคที่หลากหลายกว่า.

รายละเอียดของวิธีเชิงเลขและวิเคราะห์แสดงอยู่ในหัวข้อย่อยที่ 3.1 ถึง 3.4 ดังต่อไปนี้.

3.1 วิธีขึ้นประกอบขอบเขต

วิธีขึ้นประกอบขอบเขต (boundary element method) [11,12] เป็นวิธีที่อยู่ในกลุ่มของวิธีแบบแบ่งขอบเขต ซึ่งโดยทั่วไปมีความแม่นยำสูงกว่าวิธีแบบแบ่งโดเมน. ในวิธีขึ้นประกอบขอบเขต ศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉากกับขอบเขตจะถูกคำนวณออกมาก่อน. หลังจากนั้น ศักย์ไฟฟ้า ϕ_p ณ จุด p ใดๆ ภายในบริเวณสามารถคำนวณได้จากศักย์ไฟฟ้า ϕ และสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉากกับขอบเขต E_n บนขอบเขต Γ ของบริเวณนั้นๆ ได้.

$$C\phi_p = \int_{\Gamma} E_n \phi^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \phi (\partial\phi^* / \partial n) d\Gamma \quad (3.1-1)$$

เมื่อ C เป็นสัมประสิทธิ์ซึ่งมีค่าขึ้นกับตำแหน่งของจุด p ส่วน ϕ^* เป็นคำตอบพื้นฐานของสมการปัวซอง $\nabla^2 \phi^* = -\Delta^p$ และ $(\partial\phi^* / \partial n)$ เป็นอนุพันธ์ในแนวตั้งฉากกับขอบเขตของ Γ . สัมประสิทธิ์ C เท่ากับ 1 ถ้าจุด p ไม่อยู่บนขอบเขต. ถ้าจุด p อยู่บนขอบเขต และขอบเขตนั้นเรียบสม่ำเสมอ C เท่ากับ 0.5. วิธีขึ้นประกอบขอบเขตสามารถใช้กับบริเวณที่มีตัวกลางหลายชนิดได้ โดยทำการแบ่งบริเวณออกเป็นบริเวณย่อยซึ่งมีตัวกลางเพียงชนิดเดียว. ค่าศักย์และสนามไฟฟ้าบนขอบเขตรอยต่อระหว่างบริเวณย่อย 1 และ 2 เป็นไปตามความสัมพันธ์ต่อไปนี้.

$$\phi_1 = \phi_2 \quad (3.1-2)$$

$$\epsilon_1 E_{n1} = \epsilon_2 E_{n2} \quad (3.1-3)$$

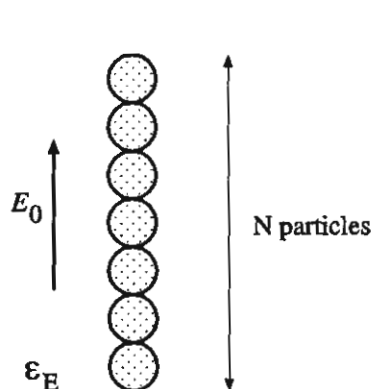
เมื่อ ϵ เป็นสภาพยอมของแต่ละบริเวณย่อย และดัชนีล่าง 1 และ 2 ป่งชี้บริเวณย่อย.

ในบริเวณที่ประกอบด้วยตัวกลางหลายชนิด บางครั้งสนามไฟฟ้าอาจมีค่าสูงมากในบริเวณหนึ่งๆ ได้. สิ่งที่เกิดขึ้นตามมาก็คือ การคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเชิงเลขจะได้ค่าที่มีความแม่นยำต่ำ หรือแม้แต่มิมีความผิดพลาดจากค่าจริงอย่างสิ้นเชิงได้. การนำวิธีเชิงเลขมาวิเคราะห์สนามไฟฟ้าในระบบฉนวนของของ

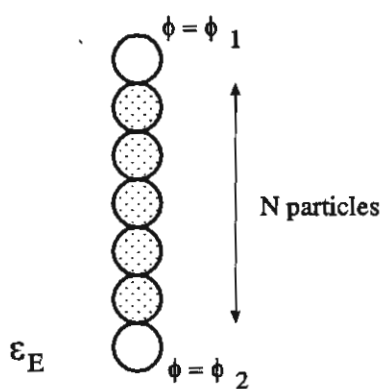
โพลีเมอร์ ER นี้จึงต้องทำการศึกษา ตรวจสอบความแม่นยำของวิธีคำนวณ การแบ่งขอบเขต และปัจจัยอื่นๆ เพื่อให้มั่นใจได้ว่า คำตอบที่ได้จากวิธีเชิงเลข มีความถูกต้องเชื่อถือได้จริง.

3.2 วิธีเงาแม่เหล็กสำหรับอนุภาคเนื้อเดียว เมื่อสนามไฟฟ้าเป็นแบบสมมาตรรอบแกนหมุน

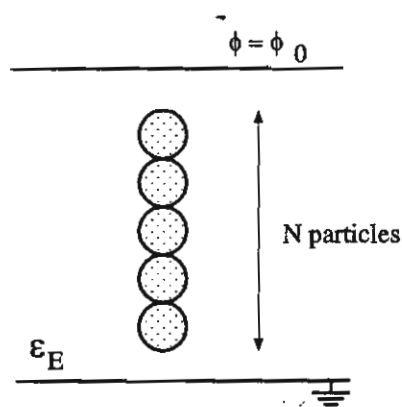
รูปที่ 1 แสดงตัวอย่างของลักษณะการจัดเรียงของอนุภาคซึ่งวิธีที่นำเสนอสามารถใช้คำนวณหาสนามไฟฟ้าได้. ในรูปที่ 1 อนุภาคจำนวน N ตัวอยู่ภายในฉนวนเหลวซึ่งมีสภาพยอมเท่ากับ ϵ_E . รัศมีและสภาพนำของอนุภาคเป็นค่าใดๆ ก็ได้ ซึ่งอาจจะแตกต่างกันไป. อนุภาคอาจสัมผัสอยู่กับอนุภาคอื่น หรืออยู่ห่างจากอนุภาคอื่น.



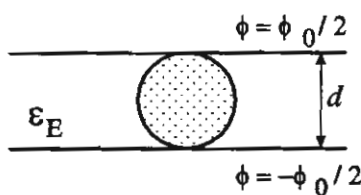
a. ใช้อนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ



b. ใช้อนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้าจากตัวนำทรงกลม



c. ใช้อนุภาคภายใต้ระนาบคู่ขนาน



d. การจัดเรียงที่แทนใช้อนุภาคจำนวนอนันต์ได้

รูปที่ 3.2-1 รูปแบบการจัดเรียงของอนุภาคแบบสมมาตรรอบแกนหมุนที่ใช้วิธีเงาแม่เหล็กวิเคราะห์ได้.

วิธีการคำนวณที่นำเสนอนี้ใช้เทคนิคการกระจายพจน์ใหม่ของศักย์ไฟฟ้าแม่เหล็กโพล เพื่อเขียนสมการของศักย์ไฟฟ้าในรูปของฟังก์ชันซึ่งกระจายรอบจุดศูนย์กลางของอนุภาคแต่ละตัว. โดยที่สำหรับอนุภาคแต่ละตัว เราใช้จุดศูนย์กลางของมันเป็นจุดกำเนิดของระบบพิกัดทรงกลม. ศักย์ไฟฟ้า ϕ_i ภายในอนุภาค และศักย์ไฟฟ้า ϕ_E ภายนอกอนุภาคที่กำลังสนใจ สามารถเขียนในรูปของ

$$\phi_l = \sum_{j=0}^{\infty} A_j r^j P_j(\cos \theta), \quad (3.2-1)$$

$$\phi_E = \sum_{j=0}^{\infty} M_j r^j P_j(\cos \theta) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{r^{j+1}} P_j(\cos \theta) \quad (3.2-2)$$

โดยที่ r และ θ เป็นโคออร์ดิเนตของระบบพิกัดทรงกลม P_j เป็นฟังก์ชันเลอจองด์ร์ และ A_j , B_j และ M_j เป็นสัมประสิทธิ์ของศักย์ไฟฟ้าที่จะคำนวณหาออกมา. พจน์ $B_j P_j(\cos \theta) / r^{j+1}$ ในสมการที่ (3.2-2) นั้นเป็นศักย์ไฟฟ้าของโมโนโพลในกรณี $j = 0$ และเป็นศักย์ของมัลติโพลในกรณี $j > 0$. ทั้งนี้ นิยามของมัลติโพลในที่นี้แตกต่างจากนิยามในหนังสือโดยทั่วไปเล็กน้อย เพื่อความสะดวกในการคำนวณ. พจน์แรกในด้านขวามือของสมการที่ (3.2-2) เป็นศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากแหล่งกำเนิดภายนอกอนุภาค ในขณะที่พจน์หลังเป็นศักย์เนื่องจากแหล่งกำเนิดภายใน. การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของศักย์ไฟฟ้าในสมการ ใช้หลักการเดียวกับวิธีเงาประจุ [13-15] แต่ต้องอาศัยเทคนิคการกระจายพจน์ใหม่ของมัลติโพล และสมการพื้นฐานสำหรับการคำนวณเงาประจุซึ่งสามารถอธิบายเป็นกรณีได้ ดังหัวข้อย่อยต่อไปนี้

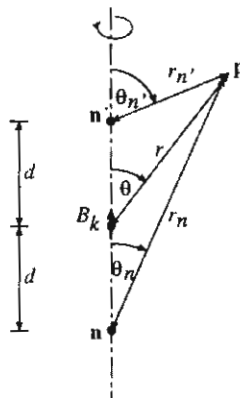
3.2.1 การกระจายพจน์ใหม่ (Re-expansion) ของศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพล

พิจารณามัลติโพลอันดับที่ k มีขนาดหนึ่งหน่วย ($B_k = 1$) อยู่ที่จุดกำเนิดของระบบพิกัดทรงกลมดังรูปที่ 3.2-2. ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลนี้สามารถกระจายพจน์ใหม่รอบจุด n หรือ n' ในรูป. จุด n และ n' อยู่ห่างจากมัลติโพลเป็นระยะทางเท่ากับ d ในทิศมุม $\theta = \pi$ และ 0 ตามลำดับ. สมการของการกระจายพจน์ใหม่ของศักย์ไฟฟ้า ϕ ที่จุด $p(r, \theta)$ ใดๆ ในรูปที่ 3.2-2 เป็นไปสมการต่อไปนี้.

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{r^{k+1}} P_k(\cos \theta) \\ &= \left(\frac{1}{d}\right)^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+j)!}{k! j!} \left(\frac{-r_{n'}}{d}\right)^j P_j(\cos \theta_{n'}) \end{aligned} \quad (3.2-3)$$

$$= (-1)^k \left(\frac{1}{d}\right)^{k+1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+j)!}{k! j!} \left(\frac{r_n}{d}\right)^j P_j(\cos \theta_n) \quad (3.2-4)$$

การพิสูจน์สมการเหล่านี้แสดงอยู่ในเอกสารอ้างอิง [16].



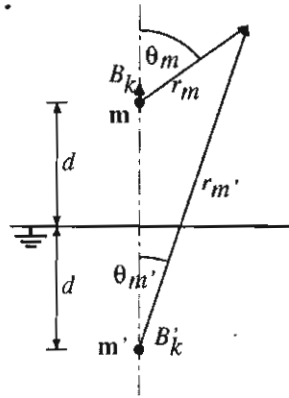
รูปที่ 3.2-2 การกระจายพจน์ใหม่ของศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพล. ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพล B_k สามารถเขียนให้เป็นฟังก์ชันที่กระจายรอบจุด n และ n' ได้.

3.2.2 เงามัลติโพลเนื่องจากมัลติโพลและระนาบตัวนำที่ต่อลงดิน

พิจารณามัลติโพลอันดับที่ k ซึ่งมีขนาดเท่ากับ B_k อยู่ที่จุด m ซึ่งอยู่เหนือตัวนำระนาบที่ต่อลงดินเป็นระยะทาง d ดังแสดงในรูปที่ 3.2-3. ทิศทางของมัลติโพลแสดงด้วยลูกศรในรูป. ศักย์ไฟฟ้า ϕ_m เนื่องจากมัลติโพลนี้เขียนในรูปของ

$$\phi_m = \frac{B_k}{r_m^{k+1}} P_k(\cos \theta_m) \quad (3.2-5)$$

ในสมการนี้ r_m และ θ_m เป็นพิกัดทรงกลมซึ่งมีจุด m เป็นจุดกำเนิด และ $\theta_m = 0$ ในทิศทางของมัลติโพล.



รูปที่ 3.2-3 มัลติโพลและระนาบตัวนำที่ต่อลงดิน.

ถ้าหากว่าระนาบตัวนำมีทิศทางตั้งฉากกับทิศทางของมัลติโพลพอดี ศักย์ไฟฟ้าลัพธ์เนื่องจากมัลติโพลและระนาบสามารถหาได้โดยใช้หลักการเดียวกับวิธีเงาประจุ. เพื่อให้ได้ค่าศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์บนตัวนำ เราจะวางมัลติโพลที่ได้ระนาบตัวนำเป็นระยะห่าง d ดังแสดงในรูปที่ 3.2-3. ขนาดของเงามัลติโพล (multipole image) B'_k สัมพันธ์กับมัลติโพลเดิมโดย

$$B'_k = (-1)^{k+1} B_k \quad (3.2-6)$$

จากขนาดของเงามัลติโพลและมัลติโพลเดิม จะได้ศักย์ไฟฟ้าลัพธ์เป็น

$$\phi = \frac{B_k}{r_m^{k+1}} P_k(\cos \theta_m) + (-1)^{k+1} \frac{B_k}{r_{m'}^{k+1}} P_k(\cos \theta_{m'}) \quad (3.2-7)$$

เมื่อ $r_{m'}$ และ $\theta_{m'}$ นิยามในลักษณะเดียวกันกับ r_m และ θ_m ตามลำดับ. ถ้าหากเราทำการกระจายพจน์ของ $P_k(\cos \theta_{m'})/r_{m'}^{k+1}$ ใหม่ รอบจุด m เราจะได้

$$\phi = \frac{B_k}{r_m^{k+1}} P_k(\cos \theta_m) + \sum_{j=0}^{\infty} M_j r_m^j P_j(\cos \theta_m) \quad (3.2-8)$$

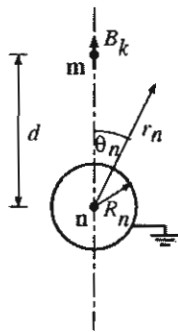
สำหรับ $r_m < 2d$. M_j เป็นสัมประสิทธิ์ศักย์ไฟฟ้าที่คำนวณได้จากการกระจายพจน์ใหม่.

3.2.3 เงามัลติโพลเนื่องจากมัลติโพลและตัวนำทรงกลมที่ต่อลงดิน

พิจารณามัลติโพลอันดับที่ k ซึ่งมีขนาดเท่ากับ B_k และอยู่ห่างจากตัวนำทรงกลมที่ต่อลงดินดังรูปที่ 3.2-4. ในรูป ตัวนำทรงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ n มีรัศมีเท่ากับ R_n และจุดศูนย์กลางอยู่ห่างจากมัลติโพลเท่ากับ d . ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลแสดงดังสมการที่ (3.2-5) ในหัวข้อที่แล้ว. เมื่อทำการกระจายพจน์ของ ศักย์ไฟฟ้าใหม่รอบจุด n เราจะเขียน ϕ_m ได้เป็น

$$\phi_m = \sum_{j=0}^{\infty} M_{nj} r_n^j P_j(\cos \theta_n) \tag{3.2-9}$$

สำหรับ $r_n < d$. ในสมการข้างบนนี้ M_{nj} เป็นสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการกระจายพจน์ใหม่ โดย r_n และ θ_n นิยามในลักษณะเดียวกันกับ r_m และ θ_m .



รูปที่ 3.2-4 มัลติโพลและตัวนำทรงกลมที่ต่อลงดิน.

จากสมการของศักย์ไฟฟ้าหลังการกระจายพจน์ใหม่ ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลและตัวนำทรงกลม สามารถเขียนในรูปของ

$$\phi = \sum_{j=0}^{\infty} M_{nj} r_n^j P_j(\cos \theta_n) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_{nj}}{r_n^{j+1}} P_j(\cos \theta_n). \tag{3.2-10}$$

เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์บนผิวของตัวนำเป็นจริงได้จากการกำหนดให้

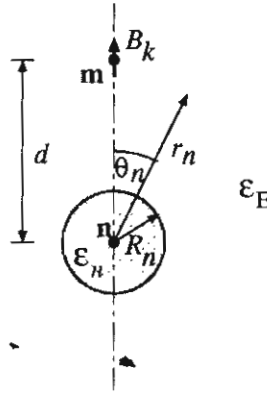
$$B_{nj} = -M_{nj} R_n^{2j+1} \tag{3.2-11}$$

สำหรับ $j = 0, 1, \dots$ ดังนั้นศักย์ไฟฟ้าลัพธ์จะเขียนได้เป็น

$$\phi = \sum_{j=0}^{\infty} M_{nj} \left[r_n^j - \frac{R_n^{2j+1}}{r_n^{j+1}} \right] P_j(\cos \theta_n). \tag{3.2-12}$$

3.2.3 เงามัลติโพลเนื่องจากมัลติโพลและทรงกลมฉนวน

พิจารณามัลติโพลและทรงกลมฉนวนในรูปที่ 3.2-5. การจัดเรียงเป็นแบบเดียวกันกับรูปที่ 3.2-4 เพียงแต่ ทรงกลมในตอนนี้อาศัยตัวนำ แต่เป็นฉนวนไฟฟ้า. กำหนดในสภาพยอมของทรงกลมฉนวนเท่ากับ ϵ_n และ สภาพยอมของของเหลรรอบๆ เท่ากับ ϵ_E .



รูปที่ 3.2-5 มัลติโพลและฉนวนทรงกลม.

ในลักษณะเดียวกันกับกรณีที่ได้กล่าวมาแล้ว ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลจะถูกกระจายพจน์ใหม่รอบจุดศูนย์กลางของทรงกลมฉนวน. ศักย์ไฟฟ้า ϕ_{nl} ภายในทรงกลมฉนวน และ ϕ_{nE} ภายนอกฉนวนสามารถเขียนในรูปของสมการดังต่อไปนี้.

$$\phi_{nl} = \sum_{j=0}^{\infty} A_{nj} r_n^j P_j(\cos \theta_n) \quad (3.2-13)$$

$$\phi_{nE} = \sum_{j=0}^{\infty} M_{nj} r_n^j P_j(\cos \theta_n) + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_{nj}}{r_n^{j+1}} P_j(\cos \theta_n) \quad (3.2-14)$$

เมื่อ M_{nj} เป็นสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการกระจายพจน์ใหม่รอบจุดศูนย์กลางทรงกลม. A_{nj} และ B_{nj} เป็นสัมประสิทธิ์ที่จะคำนวณหาเพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์และสนามไฟฟ้าบนผิวของทรงกลมฉนวนเป็นจริง. เงื่อนไขขอบเขตดังกล่าวก็คือ ที่ $r_n = R_n$

$$\phi_{nl} = \phi_{nE} \quad (3.2-15)$$

และ

$$\epsilon_n \frac{\partial \phi_{nl}}{\partial r_n} = \epsilon_E \frac{\partial \phi_{nE}}{\partial r_n}. \quad (3.2-16)$$

จากเงื่อนไขขอบเขตทั้งสองนี้ เราสามารถหาความสัมพันธ์ของสัมประสิทธิ์ A_{nj} และ B_{nj} กับ M_{nj} ได้เป็น

$$A_{nj} = \frac{\epsilon_E (2j+1)}{(\epsilon_n + \epsilon_E)j + \epsilon_E} M_{nj}, \quad (3.2-17)$$

$$B_{nj} = (R_n)^{2j+1} \frac{(\epsilon_E - \epsilon_n)j}{(\epsilon_n + \epsilon_E)j + \epsilon_E} M_{nj} \quad (3.2-18)$$

สำหรับ $j = 0, 1, \dots$

3.2.4 ขั้นตอนการคำนวณด้วยวิธีเงาผลิโพลซึ่งใช้เงาผลิโพลพื้นฐานและการกระจายพจน์ใหม่

พิจารณาอนุภาคจำนวน N ตัว ซึ่งมีการเรียงตัวดังรูปที่ 3.2-1. แต่ละอนุภาคตัวนำและอนุภาคฉนวนจะถูกกำหนดหมายเลข $n = 1, 2, \dots, N$ เพื่อความสะดวก. ศักย์ไฟฟ้าภายในอนุภาคที่ n แสดงในรูปของ

$$\phi_{ni} = \sum_{j=0}^{\infty} A_{nj} r_n^j P_j(\cos \theta_n) \tag{3.2-19}$$

และศักย์ไฟฟ้าภายนอกอนุภาคที่ n แสดงในรูปของ

$$\phi_{nE} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[M_{nj} r_n^j + \frac{B_{nj}}{r_n^{j+1}} \right] P_j(\cos \theta_n). \tag{3.2-20}$$

ในขั้นตอนคำนวณที่จะกล่าวต่อไปนี้ เราทำการคำนวณสัมประสิทธิ์ศักย์ไฟฟ้า A_{nj} , B_{nj} และ M_{nj} ซ้ำ. ตัวอย่างเช่น สำหรับขั้นที่ l ของการคำนวณซ้ำ เราคำนวณสัมประสิทธิ์ $A_{nj}^{(l)}$, $B_{nj}^{(l)}$ และ $M_{nj}^{(l)}$ แล้วปรับค่าสัมประสิทธิ์เหล่านี้เป็น

$$\begin{aligned} A_{nj} + A_{nj}^{(l)} &\Rightarrow A_{nj} \\ B_{nj} + B_{nj}^{(l)} &\Rightarrow B_{nj} \\ M_{nj} + M_{nj}^{(l)} &\Rightarrow M_{nj} \end{aligned}$$

ขั้นตอนการคำนวณซ้ำสามารถอธิบายสั้นๆ ได้ดังนี้

1. ถ้าอนุภาคที่ n เป็นตัวนำที่มีศักย์ไฟฟ้าเท่ากับ ϕ_n ให้วางโมโนโพลซึ่งมีขนาด $B_{n0}^{(0)} = \phi_n R_n$ ที่จุดศูนย์กลาง n ของอนุภาค. ดังนั้นเราจะได้ศักย์ไฟฟ้า $(\phi_n)_m$ เนื่องจากโมโนโพลนี้เป็น

$$(\phi_n)_m = \frac{B_{n0}^{(0)}}{r_n} P_0(\cos \theta_n). \tag{3.2-21}$$

หลังจากวางโมโนโพลสำหรับอนุภาคตัวนำทุกๆ ตัวแล้ว เราได้ทำให้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเบื้องต้นเป็นจริง. ถ้าหากระบบมีสนามไฟฟ้าภายนอกหรือได้รับสนามไฟฟ้าจากระบบอิเล็กทรอนิกส์โคจรแบบระนาบคู่ขนาน เราจะแทนผลด้วยสนามไฟฟ้าขนาด E_0 ที่เหมาะสม. ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอกนี้เขียนเป็น

$$(\phi_n)_m = \pm E_0 r_0 P_1(\cos \theta_0) \tag{3.2-22}$$

โดยที่ r_0 และ θ_0 เป็นพิกัดของระบบพิกัดทรงกลมที่มีจุดกำเนิดอยู่เป็นจุดอ้างอิงบนแกน z ที่ศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์. เครื่องหมาย $\pm$ ระบุทิศทางของสนามไฟฟ้าภายนอกหรือความต่างศักย์ระหว่างระนาบคู่ขนาน.

2. สำหรับอนุภาคฉนวนแต่ละตัว ให้ทำการกระจายพจน์ใหม่ของศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากโมโนโพล หรือสนามไฟฟ้าในข้อที่แล้ว มายังจุดศูนย์กลาง n ของอนุภาค. บวกผลลัพธ์ของการกระจายพจน์ใหม่มายัง $M_{nj}^{(0)}$. สำหรับโมโนโพลให้ใช้สมการการกระจายพจน์ใหม่ที่ได้อธิบายมาแล้ว. สำหรับศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอก

$$M_{n0}^{(0)} = \phi_{n0} \tag{3.2-23}$$

$$M_{nj}^{(0)} = \pm E_0 \tag{3.2-24}$$

เมื่อ ϕ_{n0} เป็นศักย์ไฟฟ้าเนื่องจาก E_0 ที่ n และ $M_{nj}^{(0)} = 0$ สำหรับ $j \neq 0, 1$.

3. คำนวณสัมประสิทธิ์ $A_{nj}^{(0)}$ และ $B_{nj}^{(0)}$ ($j = 0, 1, \dots$) ของแต่ละอนุภาคคำนวณจาก $M_{nj}^{(0)}$ โดยใช้สมการที่ (3.2-17) และ (3.2-18). หลังจากขั้นตอนนี้ เราได้ทำการคำนวณค่าของ $A_{nj}^{(0)}$, $B_{nj}^{(0)}$ และ $M_{nj}^{(0)}$ สำหรับ $n = 1, 2, \dots, N$ และ $j = 0, 1, \dots$ (สำหรับอนุภาคตัวนำ เราจะได้ A_{nj} ทุกตัวมีค่าเท่ากับศูนย์ ยกเว้นที่ $j = 0$.)

4. สำหรับแต่ละอนุภาคตัวนำและฉนวน ทำการกระจายพจน์ใหม่ของศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลในขั้นตอนก่อนหน้า $B_{mk}^{(0)}$ ($k = 0, 1, \dots$) ของอนุภาคอื่นๆ ทุกตัว ($m \neq n$) รอบจุดศูนย์กลางของอนุภาคที่กำลังสนใจอยู่. หลังจากนั้นให้รวมผลการกระจายพจน์ใหม่เข้ามายัง $M_{nj}^{(1)}$.

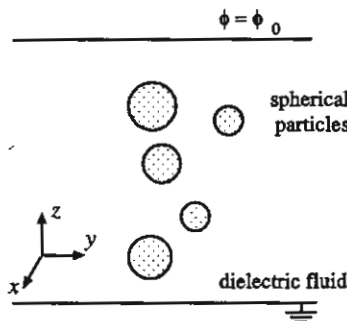
5. คำนวณค่าสัมประสิทธิ์ $A_{nj}^{(1)}$ และ $B_{nj}^{(1)}$

- สำหรับระนาบอิเล็กโตรด คำนวณ $B_{nj}^{(1)}$ ง่ายๆ ด้วยสมการที่ (3.2-6).
- สำหรับอนุภาคตัวนำ คำนวณ $B_{nj}^{(1)}$ โดยใช้สมการที่ (3.2-11).
- สำหรับอนุภาคฉนวน คำนวณ $A_{nj}^{(1)}$ และ $B_{nj}^{(1)}$ โดยใช้สมการที่ (3.2-17) และ (3.2-18).

6. ทำขั้นตอนในข้อที่ 4 และ ข้อที่ 5 ซ้ำ กระจายพจน์ใหม่ของศักย์ไฟฟ้า $B_{mk}^{(l)}$ ให้ได้ $M_{nj}^{(l+1)}$ แล้วทำการคำนวณ $B_{nj}^{(l+1)}$ จาก $M_{nj}^{(l+1)}$ จนกระทั่งคำตอบได้ลู่เข้าหาค่าคำตอบจริง.

3.3 วิธีเงา มัลติโพลสำหรับอนุภาคเนื้อเดียว เมื่อสนามไฟฟ้าเป็นแบบ 3 มิติ(ทั่วไป)

รูปที่ 3.3-1 แสดงตัวอย่างของลักษณะการจัดเรียงของอนุภาคในแบบสามมิติทั่วไป ซึ่งสามารถใช้วิธีเงา มัลติโพลคำนวณสนามไฟฟ้าออกมาได้. การคำนวณในกรณี 3 มิติ มีหลักการเดียวกันกับกรณีสมมาตรรอบแกนหมุนที่ได้กล่าวมาในหัวข้อที่แล้ว. หัวข้อนี้จึงจะเน้นระบุความแตกต่างของสมการหลักที่ใช้กระจายพจน์ศักย์ไฟฟ้าใหม่ และสมการคำตอบพื้นฐานที่จะใช้คำนวณเงา มัลติโพลในกรณี 3 มิติเท่านั้น.



รูปที่ 3.3-1 การจัดเรียงอนุภาคแบบ 3 มิติ ซึ่งสามารถใช้วิธีเงา มัลติโพลคำนวณสนามไฟฟ้าออกมาได้.

ในกรณี 3 มิติ สมการศักย์ไฟฟ้าสำหรับอนุภาคแต่ละตัว ยังคงเขียนอยู่ในรูปของกลุ่มฟังก์ชันที่กระจายรอบจุดกำเนิดของอนุภาค(ซึ่งเป็นทรงกลม). ศักย์ไฟฟ้า ϕ , ภายในอนุภาค และศักย์ไฟฟ้า ϕ_E ภายนอกอนุภาคเขียนเป็นสมการได้ดังนี้.

$$\begin{aligned}\phi_I &= \sum_j \sum_{k=-j}^j L_{j,k} r^j \bar{P}_{j,k}(\cos \theta) \exp(ik\varphi) \\ \phi_E &= \sum_j \sum_{k=-j}^j \left\{ \left[L_{j,k} r^j + \frac{B_{j,k}}{r^{j+1}} \right] \bar{P}_{j,k}(\cos \theta) \exp(ik\varphi) \right\}\end{aligned}\quad (3.3-1)$$

เมื่อ $L_{j,k}$, $M_{j,k}$ และ $B_{j,k}$ เป็นสัมประสิทธิ์ที่จะคำนวณหาออกมา (r, θ, ψ) เป็นพิกัดทรงกลม $i = \sqrt{-1}$ และ $\bar{P}_{j,k}(\cos \theta)$ เป็นฟังก์ชันเลขชี้ของตรีที่ให้เป็นบรรทัดฐาน. พจน์ที่หนึ่งและสองบนด้านขวาของสมการหลังเราสามารถมองเป็น ศักย์ไฟฟ้าที่เกิดจากมัลติโพล (รวมถึงโมโนโพลด้วย) ซึ่งอยู่ภายนอกและภายในอนุภาคที่กำลังพิจารณา ตามลำดับ. ในการคำนวณด้วยวิธีเงาประจูนนี้ เราจะคำนวณซ้ำเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ทั้งสามออกมา จนกระทั่งเงื่อนไขขอบเขตบนผิวของอนุภาคทุกตัวเป็นจริง. สมการด้านบนแสดงศักย์ไฟฟ้าในรูปของ $\bar{P}_{j,k}(\cos \theta)$ ไม่ใช่ $P_{j,k}(\cos \theta)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันเลขชี้ของตรีที่นิยามโดยทั่วไป. ทั้งนี้เนื่องจาก $\bar{P}_{j,k}(\cos \theta)$ มีเสถียรภาพเชิงเลขดีกว่า $P_{j,k}(\cos \theta)$ มากที่อันดับสูงๆ ของ j และ k . นิยามของฟังก์ชันเลขชี้ของตรีที่ให้เป็นบรรทัดฐาน $\bar{P}_{n,m}(x)$ สำหรับ $m \in I$ และ $-n \leq m \leq n$ เขียนเป็นสมการได้ดังนี้.

$$\bar{P}_{n,m}(x) = \sqrt{\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_{n,m}(x) \quad (3.3-2)$$

เมื่อ $P_{n,m}(x)$ เป็นฟังก์ชันเลขชี้ของตรี และ $-1 \leq x \leq 1$.

พจน์ $B_{j,k} \bar{P}_{j,k}(\cos \theta) \exp(ik\varphi) / r^{j+1}$ ในสมการที่ (3.3-1) เป็นศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากองค์ประกอบที่ j ของมัลติโพลอันดับที่ k ซึ่งอยู่ที่จุดศูนย์กลางของอนุภาคทรงกลม. เพื่อความสะดวกในการอ้างอิงต่อไป พจน์นี้จะถูกอ้างถึงว่าเป็นศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลอันดับที่ (j,k) ซึ่งมีขนาดของมัลติโพลเท่ากับ $B_{j,k}$. สังเกตได้ว่า นิยามของขนาดมัลติโพลในที่นี้จะแตกต่างจากนิยามที่นิยมใช้กันทั่วไป ทั้งนี้เพื่อความสะดวกในการคำนวณ.

3.3.1 การกระจายพจน์ใหม่ (Re-expansion) ของศักย์ไฟฟ้า 3 มิติเนื่องจากมัลติโพล

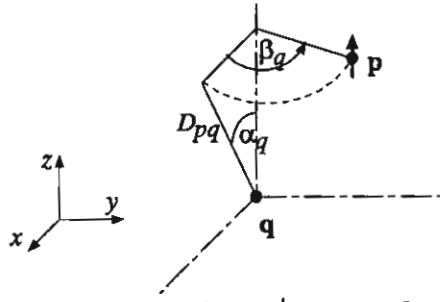
พิจารณามัลติโพลอันดับที่ (n,m) มีขนาดหนึ่งหน่วย ($B_{j,k} = 1$) อยู่ที่จุด p ของระบบพิกัดทรงกลมดังรูปที่ 3.3-2. ศักย์ไฟฟ้าของมัลติโพลนี้เขียนได้เป็น

$$\phi = \frac{1}{r_p^{n+1}} \bar{P}_{n,m}(\cos \theta_p) \exp(ik\varphi) \quad (3.3-3)$$

โดยที่ (r_p, θ_p, ψ_p) เป็นพิกัดทรงกลมของจุดที่ต้องการทราบค่าศักย์ เมื่อมีจุด p เป็นจุดกำเนิด. เราสามารถเขียนศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลนี้ใหม่ โดยกระจายพจน์ใหม่ออบจุด q ได้ดังสมการด้านล่างสำหรับ $r_q < D_{pq}$ [17]. (อ้างอิงตามรูปที่ 3.3-2)

$$\phi = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j M_{j,k} r_q^j \bar{P}_{j,k}(\cos \theta_q) \exp(ik\varphi) \quad (3.3-4)$$

โดยที่ $M_{j,k}$ เป็นขนาดของมัลติโพลซึ่งคำนวณได้จาก $(D_{pq}, \alpha_q, \beta_q)$ ซึ่งเป็นพิกัดของ p เมื่อให้ q เป็นจุดกำเนิดของระบบพิกัดทรงกลม.

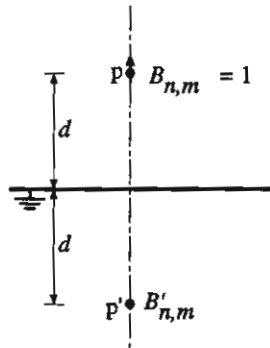


รูปที่ 3.3-2 การกระจายพจน์ใหม่ของศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลที่จุด p มายังรอบจุด q .

3.3.2 เงามัลติโพลเนื่องจากมัลติโพลและตัวนำระนาบที่ต่อลงดิน

พิจารณามัลติโพลอันดับที่ (n, m) ซึ่งมีขนาดเท่ากับ $B_{n,m}$ อยู่ที่จุด p ซึ่งอยู่เหนือตัวนำระนาบที่ต่อลงดินเป็นระยะทาง d ดังแสดงในรูปที่ 3.3-3. ถ้าเราวางเงาของมัลติโพล ณ ตำแหน่งต่ำจากระนาบตัวนำเป็นระยะเท่ากัน. ขนาดของเงามัลติโพล $B'_{n,m}$ ที่ทำให้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์ที่ระนาบตัวนำเป็นจริงได้กำหนดได้ตามสมการด้านล่างนี้.

$$B'_{n,m} = (-1)^{n+m+1} \quad (3.3-5)$$



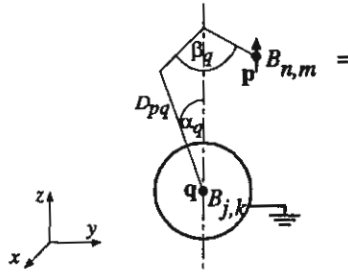
รูปที่ 3.3-3 มัลติโพลกับระนาบตัวนำที่ต่อลงดิน.

3.3.3 เงามัลติโพลเนื่องจากมัลติโพลและตัวนำทรงกลมที่ต่อลงดิน

พิจารณามัลติโพลอันดับที่ (n, m) ซึ่งมีขนาดหนึ่งหน่วย อยู่ที่จุด p และตัวนำทรงกลมที่ต่อลงดินดังรูปที่ 3.3-4. ถ้าตัวนำทรงกลมมีรัศมี R และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด q . ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลนี้อยู่ในรูปของสมการที่ (3.3-3) และสามารถกระจายพจน์ใหม่รอบจุด q ได้. โดยทั่วไป เราจะได้คำตอบพื้นฐานสำหรับตัวนำทรงกลมที่ต่อลงดินได้ ด้วยการวางมัลติโพลจำนวนอนันต์ตัวที่จุดศูนย์กลางของทรงกลมตัวนำ เพื่อให้ได้ศักย์ไฟฟ้าที่ผิวของตัวนำเท่ากับศูนย์. ขนาดของเงามัลติโพลนี้มีความสัมพันธ์กับ $M_{j,k}$ โดย

$$B_{j,k} = -M_{j,k} R^{2j+1} \quad (3.3-6)$$

สำหรับ $j = 0, 1, 2, \dots$ และ $k = -j, -j+1, \dots, j$.



รูปที่ 3.3-3 มัลติโพลกับตัวนำทรงกลมที่ต่อลงดิน.

ถ้าเรากำหนดให้เงามัลติโพลเป็นไปตามสมการด้านบนแล้ว จะสามารถพิสูจน์ได้ง่ายๆ ว่าศักย์ไฟฟ้าที่ผิวของตัวนำ

$$\phi = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j M_{j,k} R^j \bar{P}_{j,k}(\cos \theta_q) \exp(ik\psi) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j \frac{B_{j,k}}{R^{j+1}} \bar{P}_{j,k}(\cos \theta_q) \exp(ik\psi) = 0.$$

ในกรณีที่ตัวนำทรงกลมไม่ได้ต่อลงดิน ศักย์ไฟฟ้าที่ตัวนำไม่จำเป็นต้องเท่ากับศูนย์ แต่ต้องมีค่าคงที่ตลอดตัวนำ. เมื่ออาศัยเงื่อนไขเพิ่มเติมว่า ประจุทั้งหมดโดยรวมที่ผิวของตัวนำเท่ากับศูนย์ เราสามารถหาเงามัลติโพลสำหรับตัวนำทรงกลมที่ไม่ได้ต่อลงดินได้เช่นกัน.

3.3.4 เงามัลติโพลเนื่องจากมัลติโพลและฉนวนทรงกลม

พิจารณามัลติโพลและอนุภาคทรงกลมในรูปที่ 3.3-3 แต่คราวนี้มองว่าอนุภาคเป็นฉนวนไฟฟ้าซึ่งมีรัศมีเท่ากับ R . กำหนดในสภาพยอมของทรงกลมฉนวนเท่ากับ ϵ_I และสภาพยอมของของเหลวรอบๆ เท่ากับ ϵ_E . ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของศักย์ไฟฟ้าภายในและภายนอกทรงกลมฉนวนเป็นไปตามสมการต่อไปนี้

$$\bar{B}_{j,k} = \frac{j(\epsilon_E - \epsilon_I)}{j(\epsilon_E + \epsilon_I) + \epsilon_E} R^{2j+1} M_{j,k} \quad (3.3-7)$$

$$L_{j,k} = \frac{\epsilon_E (2j+1)}{j(\epsilon_E + \epsilon_I) + \epsilon_E} M_{j,k} \quad (3.3-8)$$

ดังนั้น เมื่อเรากระจายพจน์ของศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลใหม่รอบจุดศูนย์กลางของอนุภาค เราสามารถใช้สมการความสัมพันธ์ด้านบนนี้คำนวณหา $L_{j,k}$ และ $B_{j,k}$ จาก $M_{j,k}$ ได้.

3.4 วิธีเงามัลติโพลสำหรับอนุภาคที่ประกอบด้วยแกนกลางและชั้นฟิล์ม

พิจารณาอนุภาคทรงกลมที่อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก E_0 . เราสามารถเขียนศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอกนี้ ในรูปของฟังก์ชันที่กระจายรอบจุดศูนย์กลางของอนุภาคได้เป็น

$$\phi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j M_{j,k} r_c^j \bar{P}_{j,k}(\cos \theta_c) \exp(ik\varphi_c) \quad (3.4-1)$$

โดยที่ $M_{j,k}$ เป็นสัมประสิทธิ์ของการกระจาย $(r_c, \theta_c, \varphi_c)$ เป็นพิกัดทรงกลมของจุดที่สนใจ โดยมีจุดกำเนิดอยู่ที่ c ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของอนุภาคทรงกลม. สังเกตว่า สนามไฟฟ้าภายนอก E_0 ในที่นี้ หมายถึงถึงสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุทั้งหมดที่อยู่ภายนอกอนุภาคที่กำลังสนใจ.

การปรากฏอยู่ของอนุภาคทำให้ศักย์ไฟฟ้าในระบบเปลี่ยนไป. ในกรณีทั่วไป ถ้าอนุภาคไม่มีชั้นผิวเคลือบอยู่ เราสามารถแสดงศักย์ไฟฟ้า ϕ_i ภายใน(แกนกลางของ)อนุภาค และศักย์ไฟฟ้า ϕ_E ภายนอกอนุภาค ได้ดังสมการที่ (3.3-1). ถ้าหากอนุภาคมีชั้นผิวเคลือบอยู่ เราจะแสดงศักย์ไฟฟ้าภายในชั้นฟิล์ม ϕ_F ได้ดังนี้

$$\phi_F = \sum_j \sum_{k=-j}^j \left\{ \left[N_{j,k} r_c^j + \frac{O_{j,k}}{r_c^{j+1}} \right] \bar{P}_{j,k}(\cos \theta_c) \exp(ik\varphi_c) \right\}. \quad (3.4-2)$$

โดยที่ $N_{j,k}$ และ $O_{j,k}$ เป็นสัมประสิทธิ์ที่จะคำนวณหาออกมา เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องเป็นจริง.

กรณีการศึกษาอนุภาคที่ประกอบด้วยชั้นฟิล์ม ผู้วิจัยได้ใช้พารามิเตอร์แตกต่างกับกรณีที่ผ่านมา เนื่องจากว่าในกรณีนี้ สภาพน่าเป็นพารามิเตอร์ที่เด่นกว่าสภาพยอม. ชั้นผิวหรือฟิล์มที่เคลือบอนุภาค มักเป็นวัสดุที่มีความนำไฟฟ้าสูงกว่าแกนกลางที่เป็นฉนวน หรือในทางกลับกัน แกนกลางอนุภาคอาจมีสภาพนำที่สูง ทำให้สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้น ถูกกำหนดด้วยสภาพนำ มากกว่าสภาพยอม. ในหัวข้อต่อไปนี้ เราจะใช้สัญลักษณ์ σ_C , σ_F และ σ_E แทนสภาพนำของแกนกลาง ของชั้นฟิล์ม และของบริเวณภายนอก ตามลำดับ. ในกรณีของอนุภาคเนื้อเดียว สภาพนำของอนุภาคจะแสดงด้วยสัญลักษณ์ σ_i เพื่อไม่ให้สับสน.

3.4.1 ผลเฉลยของศักย์ไฟฟ้าในกรณีอนุภาคเนื้อเดียว

ในกรณีของสนามไฟฟ้าภายนอกแบบกระแสดตรง หรือกระแสดลัดความถี่ต่ำ สภาพนำจะเป็นตัวกำหนดการกระจายศักย์และสนามไฟฟ้า. สัมประสิทธิ์ $L_{j,k}$ และ $B_{j,k}$ ของศักย์ไฟฟ้าในสมการที่ (3.3-1) มีค่าเท่ากับ

$$L_{j,k} = \frac{(2j+1)\sigma_E}{(j+1)\sigma_E + j\sigma_i} M_{j,k} \quad (3.4-3)$$

$$B_{j,k} = \frac{j(\sigma_E - \sigma_i)}{(j+1)\sigma_E + j\sigma_i} R^{2j+1} M_{j,k} \quad (3.4-4)$$

สำหรับ $j \geq 1$ เมื่อ R เป็นรัศมีของอนุภาค. นอกจากสมการที่ (3.4-3) และ (3.4-4) แล้ว เรายังต้องได้ $L_{0,0} = M_{0,0}$ และ $B_{0,0} = 0$ เสมอ (ยกเว้นกรณีที่อนุภาคได้รับการอัดประจุ). จากสมการที่ (3.4-3) และ (3.4-4) เราเห็นได้ชัดเจนว่า ถ้า $\sigma_i = \sigma_E$ แล้ว $L_{j,k} = M_{j,k}$ และ $B_{j,k} = 0$ สำหรับทุกๆ j . นั่นคือ ศักย์ไฟฟ้าทุกๆ จุดเท่ากับ ϕ_0 นั่นเอง.

ถ้าหากอนุภาคเป็นตัวนำไฟฟ้า $\sigma_i = \infty$ แล้ว เราจะได้ $L_{j,k} = 0$ และ $B_{j,k} = -R^{2j+1} M_{j,k}$ สำหรับ $j \geq 1$. ดังนั้น สนามไฟฟ้าภายในอนุภาคมีค่าเท่ากับศูนย์. สนามไฟฟ้า E_r ที่ผิวของอนุภาคตัวนำทรงกลมคำนวณได้จากอนุพันธ์ของ ϕ_E ในสมการที่ (3.3-1).

$$\begin{aligned} E_r &= -\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=-j}^j (2j+1) M_{j,k} R^{j-1} \bar{P}_{j,k}(\cos \theta_p) \exp(ik\varphi_p) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (E_r)_j = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2j+1}{j} (E_{r0})_j \end{aligned} \quad (3.4-5)$$

โดยที่ $(E_{r0})_j$ และ $(E_r)_j$ เป็นองค์ประกอบอันดับที่ $j-1$ ของสนามไฟฟ้า E_r และ $-\partial\phi_0/\partial r_c$ บนผิวของอนุภาคตัวนำทรงกลม ตามลำดับ.

จากสมการที่ (3.4-5) เราเห็นได้ว่า ค่าอัตราส่วนสนามไฟฟ้า $(E_r)_j / (E_{r0})_j$ เท่ากับ 3 สำหรับ $j=1$ และมีค่าลดลงเรื่อยๆ เมื่อ j เพิ่มมากขึ้น. ค่าอัตราส่วนสนามไฟฟ้านี้ลดลงเข้าสู่ 2 เมื่อ $j \rightarrow \infty$. ดังนั้น เราสามารถกล่าวได้ว่า การเพิ่มขนาดความเครียดสนามไฟฟ้าด้วยอนุภาคตัวนำมีระดับสูงกว่า เมื่ออันดับ $j-1$ ของสนามไฟฟ้าภายนอกต่ำกว่า. ในกรณีทั่วไปที่อนุภาคไม่ใช่ตัวนำไฟฟ้าสมบูรณ์ ระดับการเพิ่มขนาดความเครียดสนามไฟฟ้าขึ้นอยู่กับอัตราส่วน σ_j / σ_E .

ข้อสังเกตที่สำคัญสำหรับกรณีของของไหล ER ก็คือ การที่ของเหลวมีลักษณะสมบัติของสภาพนำแบบไม่เป็นเชิงเส้น. เมื่อสนามไฟฟ้าภายในของเหลวมีค่าสูงกว่าค่าวิกฤตค่าหนึ่ง สภาพนำของของเหลวจะเพิ่มขึ้นอย่างมาก ทำให้อัตราส่วน σ_j / σ_E ลดลง. การลดลงของอัตราส่วนสภาพนำนี้ ทำให้อัตราส่วนสนามไฟฟ้าไม่เพิ่มถึงระดับที่ประมาณได้ในกรณีที่พิจารณาว่า σ_E มีค่าคงที่.

3.4.2 ผลเฉลยของศักย์ไฟฟ้าในกรณีอนุภาคที่มีแกนกลางเป็นตัวนำและมีชั้นฟิล์มที่ผิว

รูปที่ 3.4-1 แสดงอนุภาคที่ประกอบด้วยแกนกลางตัวนำไฟฟ้าและชั้นฟิล์ม. เพื่อความสะดวก เราจะอ้างอิงถึงอนุภาคชนิดนี้ต่อไปว่า อนุภาคแกนตัวนำ. ความหนาของชั้นฟิล์มแสดงด้วยสัญลักษณ์ t . เนื่องจากอนุภาคชนิดนี้มีสนามไฟฟ้าภายในแกนกลางเป็นศูนย์ เราจึงสนใจเฉพาะศักย์ไฟฟ้า ϕ_F ในชั้นฟิล์ม และ ϕ_E ในบริเวณภายนอกอนุภาค.

ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ $M_{j,k}$ และสัมประสิทธิ์ของศักย์ไฟฟ้าตัวอื่นสำหรับ $j \geq 1$ แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้.

$$B_{j,k} = \left\{ \frac{j(1-\zeta^{2j+1})\sigma_E - [j+(j+1)\zeta^{2j+1}]\sigma_F}{(j+1)(1-\zeta^{2j+1})\sigma_E + [j+(j+1)\zeta^{2j+1}]\sigma_F} \right\} R^{2j+1} M_{j,k} \quad (3.4-6)$$

$$N_{j,k} = \left\{ \frac{(2j+1)\sigma_E}{(j+1)(1-\zeta^{2j+1})\sigma_E + [j+(j+1)\zeta^{2j+1}]\sigma_F} \right\} M_{j,k} \quad (3.4-7)$$

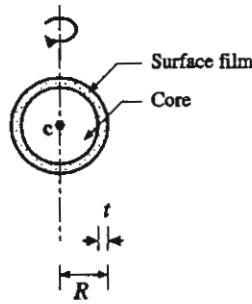
$$O_{j,k} = -R^{2j+1} N_{j,k} \quad (3.4-8)$$

โดยที่ R_C เป็นรัศมีของแกนกลาง ($R_C = R - t$) และ ζ เป็นอัตราส่วนรัศมีที่นิยามเป็น $\zeta = R_C / R$. สมการที่ (3.4-6) สามารถจัดเรียงใหม่ให้อยู่ในรูปเดียวกับสมการที่ (3.4-4) ได้.

$$B_{j,k} = \left\{ \frac{j(\sigma_E - \sigma_j)}{(j+1)\sigma_E + j\sigma_j} \right\} R^{2j+1} M_{j,k} \quad (3.4-9)$$

σ_j ในสมการที่ (3.4-9) สามารถมองได้ว่าเป็น สภาพนำปรากฏ ของอนุภาคเมื่อได้รับสนามไฟฟ้าอันดับที่ $j-1$. กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ถ้าสนามไฟฟ้าภายนอกเป็นสนามไฟฟ้าอันดับ $j-1$ เท่านั้น เราสามารถแทนอนุภาคนี้ด้วยอนุภาคเนื้อเดียวที่มีสภาพนำเท่ากับ σ_j ได้ โดยไม่ทำให้สนามไฟฟ้าลัพธ์ภายนอกอนุภาคเปลี่ยนแปลงแต่อย่างใด. สำหรับอนุภาคแบบแกนตัวนำนี้ สภาพนำปรากฏแสดงได้ในรูปของ

$$\sigma_j = \left[\frac{j+(j+1)\zeta^{2j+1}}{j(1-\zeta^{2j+1})} \right] \sigma_F. \quad (3.4-10)$$



รูปที่ 3.4-1 อนุภาคทรงกลมที่ประกอบด้วยแกนกลางและชั้นฟิล์ม.

แนวความคิดเกี่ยวกับสภาพนำปรากฏได้มีการนำเสนอบ้างแล้วในกรณีของฉนวนผสม [18, 19] และในกรณีของอนุภาคหลายชั้น [20]. อย่างไรก็ตาม ในเอกสารอ้างอิงเหล่านี้ แนวความคิดได้ถูกใช้กับกรณีของสนามแบบสมมาตรรอบแกนหมุนและสนามแบบสม่ำเสมอเท่านั้น. ในที่นี้ เราได้พิจารณาถึงกรณีทั่วไป ที่สนามไฟฟ้าภายนอกเป็นแบบใดๆ ก็ได้ในระบบสามมิติ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบผลตอบสนองของสนามไฟฟ้า ระหว่างอนุภาคที่มีโครงสร้างต่างกันหลายชนิด.

3.4.3 ผลเฉลยของศักย์ไฟฟ้าในกรณีอนุภาคที่มีแกนกลางเป็นฉนวนสมบูรณ์และมีชั้นฟิล์มที่ผิว

พิจารณาอนุภาคในรูปที่ 3.4-1 อีกครั้ง แต่คราวนี้ให้แกนกลางเป็นฉนวนไฟฟ้าสมบูรณ์ (ไม่มีสภาพนำ). เราจะทำอ้างอิงถึงอนุภาคนิดนี้ต่อไปว่า *อนุภาคแกนฉนวน*. เงื่อนไขขอบเขตบนผิวของแกนกลางในกรณีนี้คือ

$$\frac{\partial \phi_F}{\partial r_p} = 0 \quad \text{ที่ } r_c = R_C. \quad (3.4-11)$$

เงื่อนไขข้างต้นนี้ ยังสามารถใช้ได้โดยประมาณ สำหรับอนุภาคที่มีแกนนำเป็นฉนวนไฟฟ้า (ไม่สมบูรณ์) และมีชั้นฟิล์มเคลือบอยู่ โดยมีเงื่อนไขว่าสภาพนำของแกนกลางต้องต่ำกว่าสภาพนำของชั้นฟิล์มอย่างเพียงพอ.

สัมประสิทธิ์ต่างๆ ของศักย์ไฟฟ้าที่ทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนผิวของแกนกลาง และบนผิวของอนุภาคเป็นจริง มีค่าตามสมการต่อไปนี้.

$$B_{j,k} = \frac{j}{j+1} \left\{ \frac{[(j+1) + j\zeta^{2j+1}]\sigma_E - [(j+1)(1-\zeta^{2j+1})]\sigma_F}{[(j+1) + j\zeta^{2j+1}]\sigma_E + j(1-\zeta^{2j+1})\sigma_F} \right\} R^{2j+1} M_{j,k} \quad (3.4-12)$$

$$N_{j,k} = \left\{ \frac{(2j+1)\sigma_E}{[(j+1) + j\zeta^{2j+1}]\sigma_E + j(1-\zeta^{2j+1})\sigma_F} \right\} M_{j,k} \quad (3.4-13)$$

$$O_{j,k} = \frac{j}{j+1} R^{2j+1} N_{j,k} \quad (3.4-14)$$

ในทำนองเดียวกับหัวข้อที่ 3.4.2 เราสามารถเขียนสมการที่ (3.4-12) ให้อยู่ในรูปของสมการที่ (3.4-4) ได้. สภาพนำปรากฏสำหรับอนุภาคแกนฉนวนมีค่าเป็น

$$\sigma_j = \frac{(j+1)(1-\zeta^{2j+1})}{(j+1) + j\zeta^{2j+1}} \sigma_F \quad (3.4-15)$$

สำหรับ $j \geq 1$.

3.4.4 ผลเฉลยของศักย์ไฟฟ้าในกรณีอนุภาคทั่วไปที่ประกอบด้วยแกนกลางและชั้นฟิล์มที่ผิว

แนวความคิดของสภาพนำปรากฏในหัวข้อที่ผ่านมา สามารถใช้ได้กับอนุภาคทั่วไปที่มีโครงสร้างประกอบด้วยแกนกลางและชั้นฟิล์มที่ผิว โดยที่แกนกลางไม่จำเป็นต้องเป็นตัวนำหรือฉนวนสมบูรณ์. ในกรณีของอนุภาคแบบนี้ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ของสนามไฟฟ้าต่างๆ แสดงได้ดังสมการต่อไปนี้.

$$B_{j,k} = \frac{j}{j+1} \left\{ \frac{C_1 + C_2 \Gamma_{CF} - C_3 \Gamma_{FE} - C_4 \Gamma_{CE}}{C_1 + C_2 \Gamma_{CF} + C_2 \Gamma_{FE} + [j/(j+1)] C_4 \Gamma_{CE}} \right\} R^{2j+1} M_{j,k} \quad (3.4-16)$$

$$L_{j,k} = \frac{(2j+1)^2}{j+1} \left\{ \frac{1}{C_1 + C_2 \Gamma_{CF} + C_2 \Gamma_{FE} + [j/(j+1)] C_4 \Gamma_{CE}} \right\} R^{2j+1} M_{j,k} \quad (3.4-17)$$

$$N_{j,k} = \frac{(j+1) + j \Gamma_{CF}}{2j+1} L_{j,k} \quad (3.4-18)$$

$$O_{j,k} = \frac{j}{2j+1} (1 - \Gamma_{CF}) R^{2j+1} L_{j,k} \quad (3.4-19)$$

โดยที่ Γ_{AB} เป็นอัตราส่วนของสภาพนำ โดยมีนิยามเป็น $\Gamma_{AB} = \sigma_A / \sigma_B$ และ C_1 ถึง C_4 มีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} C_1 &= (j+1) + j \zeta^{2j+1} \\ C_2 &= j(1 - \zeta^{2j+1}) \\ C_3 &= (j+1)(1 - \zeta^{2j+1}) \\ C_4 &= j + (j+1) \zeta^{2j+1} \end{aligned}$$

สมการที่ (3.4-16) สามารถเขียนใหม่ในรูปของสมการที่ (3.4-4) ได้ โดยมีสภาพนำปรากฏแสดงได้ดังนี้.

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \frac{C_3 + C_4 \Gamma_{CF}}{C_1 + C_2 \Gamma_{CF}} \sigma_F \\ &= \frac{C_4 + C_3 \Gamma_{FC}}{C_1 + C_2 \Gamma_{CF}} \sigma_C \end{aligned} \quad (3.4-20)$$

เราสามารถเห็นได้จากสมการที่ (3.4-20) ว่า สมการนี้ลดรูปเป็นสมการที่ (3.4-10) เมื่อสภาพนำของแกนกลางเท่ากับอนันต์ และลดรูปเป็นสมการที่ (3.4-15) เมื่อสภาพนำของแกนกลางเท่ากับศูนย์.

ท้ายสุดนี้ มีข้อสังเกตที่สำคัญอีกประการหนึ่งว่า ในกรณีของสนามไฟฟ้าที่มีความถี่ ω เรายังสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีที่ได้แสดงมาทั้งหมดได้. ในกรณีนี้ เราจะแทนสภาพนำ σ ในสมการด้วยสภาพนำเชิงซ้อน $\hat{\sigma}$ ซึ่งนิยามโดย $\hat{\sigma} = \sigma + i\omega\epsilon$. ดังนั้น สำหรับกรณีของฉนวนไฟฟ้าสมบูรณ์(ทั้งแกนกลางและฟิล์ม) เราจะละเลยความนำไฟฟ้า σ และแทน σ ในสมการด้วย ϵ ทั้งหมด.

4. ผลการวิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงไดอิเล็กโตรโฟเรติกบนอนุภาคเนื้อเดียว

หัวข้อที่ 4 นี้กล่าวถึง ผลการวิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงไดอิเล็กโตรโฟเรติก(dielectrophoretic force) บนอนุภาคแบบเนื้อเดียว(ไม่มีชั้นฟิล์มเคลือบอยู่). ผลการศึกษาแบ่งออกเป็นส่วนใหญ่ๆ 4 ส่วนด้วยกันคือ

1. สนามไฟฟ้าบนอนุภาคที่เรียงตัวแบบสมมาตรรอบแกนหมุน
2. สนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคในกรณีทั่วไป (3 มิติ)
3. ผลของระนาบตัวนำที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรงในกรณี 3 มิติ โดยจำลองการเปลี่ยนแปลงลักษณะใช้อนุภาคแบบต่างๆ ภายใต้แรงภายนอก
4. ผลของรูปร่างอนุภาคซึ่งเบี่ยงเบนจากทรงกลม ที่มีต่อสนามไฟฟ้าบนอนุภาค.

เพื่อให้สามารถทำความเข้าใจกับลักษณะของสนามไฟฟ้าและแรงได้ง่าย ผลการศึกษาจะอธิบายจากพฤติกรรมพื้นฐานของแรงไดอิเล็กโตรโฟเรติกที่เกิดขึ้นบนอนุภาคก่อน . แล้วจึงกล่าวถึงผลที่ได้ในกรณีเฉพาะทั้ง 4 กรณีที่ได้กล่าวในข้างต้นต่อไป.

4.1 แรงไดอิเล็กโตรโฟเรติก

โดยนิยามแล้ว แรงไดอิเล็กโตรโฟเรติกคือแรงที่ถูกเหนี่ยวนำให้เกิดขึ้นบนวัตถุที่เกิดโพลารไรซ์ (แต่ไม่ได้รับประจุลัพธ์) เนื่องจากสนามไฟฟ้าที่ไม่สม่ำเสมอทางตำแหน่ง. แรงนี้เกิดขึ้นก็ต่อเมื่อวัตถุมีสภาพยอมต่างกับสภาพยอมของตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบ. ถ้าอนุภาคมีสภาพยอมสูงกว่าตัวกลางที่อยู่รอบ เราเรียกว่าเป็น *ไดอิเล็กโตรโฟเรซิสแบบบวก* (positive dielectrophoresis). สำหรับกรณีตรงกันข้าม เราจะเรียกว่าเป็น *ไดอิเล็กโตรโฟเรซิสแบบลบ*. ในกรณีแรก แรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากสนามไฟฟ้าดึงดูดวัตถุเข้าสู่บริเวณที่มีสนามไฟฟ้าสูงกว่า ส่วนกรณีหลัง แรงที่เกิดขึ้นดึงดูดวัตถุให้เคลื่อนที่สู่บริเวณที่มีสนามไฟฟ้าต่ำกว่า.

บนอนุภาคหนึ่งที่อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ E และถ้าอนุภาคนั้นอยู่ห่างจากอนุภาคอื่นและอิเล็กโตรดมากเพียงพอ เราสามารถประมาณแรงไดอิเล็กโตรโฟเรติกได้ด้วยโมเดลไดโพลแบบจุด [20].

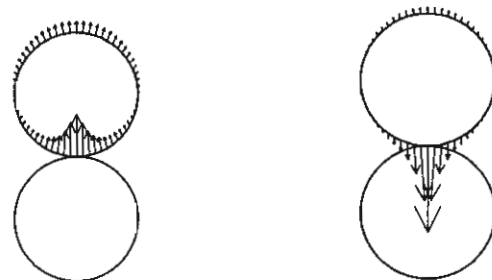
$$F = 2\pi\epsilon_E R^3 \beta \nabla E^2 . \quad (4.1-1)$$

ค่า ϵ_E ในสมการด้านบนคือ สภาพยอมของตัวกลางที่อยู่รอบอนุภาค, R คือรัศมีของอนุภาค และ β คือตัวประกอบของ Clausius-Mossotti ซึ่งนิยามเป็นฟังก์ชันของสภาพยอม ϵ_p ของอนุภาค

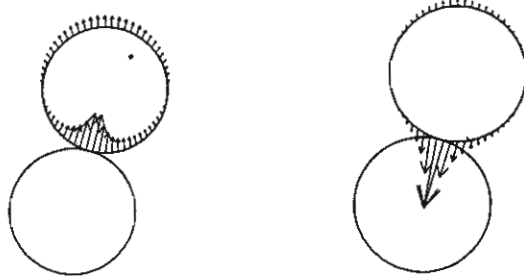
$$\beta = \frac{\epsilon_p - \epsilon_E}{\epsilon_p + 2\epsilon_E} . \quad (4.1-2)$$

จากสมการด้านบน เราเห็นได้ว่าแรงที่เกิดขึ้นจะมีค่าไม่เท่ากับศูนย์ ถ้า β ไม่เท่ากับศูนย์ และสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอ ($\nabla E^2 \neq 0$) เท่านั้น.

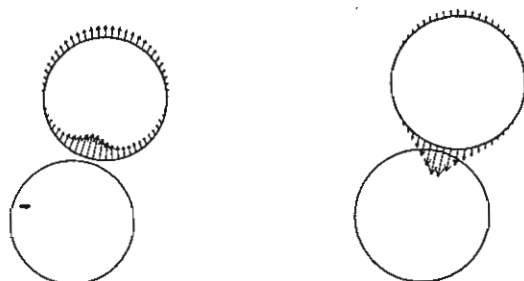
อย่างไรก็ตาม พฤติกรรมของแรงไดอิเล็กโตรโฟเรติกซับซ้อนขึ้นอย่างมาก ถ้าหากอนุภาคนั้นอยู่ใกล้กับอนุภาคอื่นๆ หรืออิเล็กโตรด. ในกรณีนี้ โมเดลไดโพลแบบจุดไม่สามารถประมาณค่าแรงที่เกิดขึ้นได้อย่างแม่นยำเพียงพอ โดยเราต้องพิจารณามัลติโพลที่มีอันดับสูงกว่าไดโพลขึ้นไปด้วย. รูปที่ 4.1-1 แสดงการกระจายสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคที่ประกอบด้วยอนุภาคสองตัว เมื่อโชนี้อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ และอนุภาคมีการเกิดไดอิเล็กโตรโฟเรซิสแบบบวก ($\beta = 1.5$).



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ 4.1-1 การกระจายของสนามไฟฟ้า(ซ้าย) และแรงไดโพลเล็กโตรโฟเรติก(ขวา) บนอนุภาคบนของไซออนูภาคที่ได้รับสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอทิศทางในแนวดิ่ง. ในรูป (ก) ไซออนูภาคเรียงตัวขนานกับสนามไฟฟ้า. ในรูป (ข) ไซ์ทำมุม 15 องศา กับสนามไฟฟ้า. ในรูป (ค) ไซ์ทำมุมกับสนามไฟฟ้าเหมือนกับรูป (ข) แต่มีระยะห่างระหว่างอนุภาคเล็กน้อย.

ในรูปที่ 4.1-1 (ก) เราสามารถเห็นสนามไฟฟ้าที่ไม่สม่ำเสมอสูงในบริเวณใกล้กับจุดสัมผัสระหว่างอนุภาคได้อย่างชัดเจน. สนามไฟฟ้าที่ไม่สม่ำเสมอสูงนี้เป็นต้นกำเนิดของแรงลัพธ์ที่เกิดขึ้นในรูปทางด้านขวามือ. ทั้งนี้ เนื่องจากแรง(ดูระหว่างอนุภาค)ที่เกิดขึ้นในบริเวณนี้มีค่าสูงกว่าแรง(ผลึก)ที่เกิดขึ้นบนส่วนอื่นๆ ของผิวอนุภาคนั่นเอง. เมื่ออนุภาคทำมุม 15 องศา กับสนามไฟฟ้า โดยที่อนุภาคยังคงอยู่ติดกันดังรูป (ข) เราสามารถเห็นผลของการเรียงตัวของไซ์ที่มีต่อแรงได้อย่างชัดเจน. นอกจากนี้ เมื่อมีระยะแคบเล็กๆ (ประมาณ 0.07 เท่าของรัศมีอนุภาค) ในรูป (ค) แรงที่เกิดขึ้นยังคงมีลักษณะคล้ายคลึงกับแรงในรูป (ข) แต่มีขนาดลดลงไป.

ในกรณีที่อนุภาคหรือตัวกลางที่อยู่รอบอนุภาคไม่ใช่ฉนวนสมบูรณ์ นั่นคือมีสภาพนำอยู่ การเกิดไดโพลโมเมนต์ไฟฟ้าขึ้นอยู่กับตัวประกอบเชิงซ้อน β ซึ่งรวมผลของสภาพนำ σ และความถี่เชิงมุม ω ของไฟฟ้า ดังนี้.

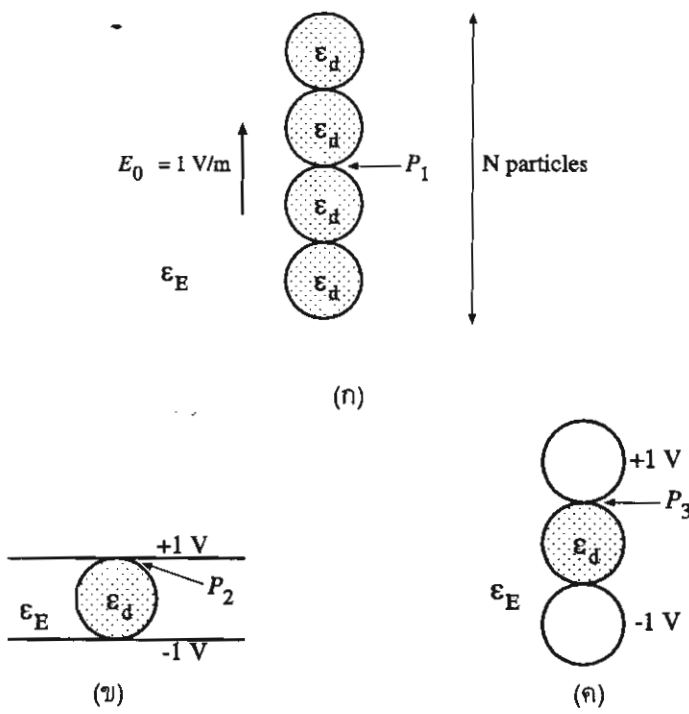
$$\beta = \frac{\dot{\epsilon}_p - \dot{\epsilon}_E}{\dot{\epsilon}_p + 2\dot{\epsilon}_E} \tag{4.1-3}$$

เมื่อสภาพยอมเชิงซ้อน $\dot{\epsilon} = \epsilon - i\sigma/\omega$.

4.2 สนามไฟฟ้าในการจัดเรียงแบบสมมาตรรอบแกนหมุน

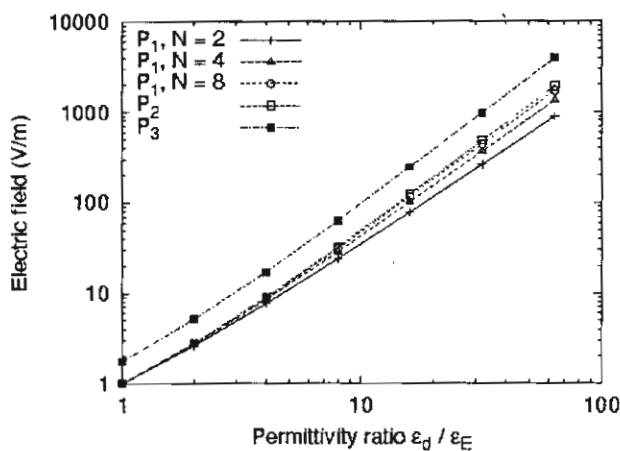
4.2.1 ผลการคำนวณด้วยวิธีแกมมาดิโพล

รูปที่ 4.2-1 แสดงลักษณะการจัดเรียงของอนุภาคที่มีการกระจายของสนามไฟฟ้าแบบสมมาตรรอบแกนหมุนในการศึกษา. การจัดเรียงของอนุภาคในรูปที่ 4.2-1(ก) และ 4.2-1(ข) เป็นอนุภาคจำนวน N ตัว และจำนวนอนันต์เรียงตัวขนานกับสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอขนาด 1 V/m . การจัดเรียงของอนุภาคในรูปที่ 4.2-1(ค) เป็นอนุภาคฉนวนที่ได้รับสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอระหว่างทรงกลมตัวนำทางด้านบนและด้านล่าง. กรณีนี้ผู้วิจัยได้กำหนดให้ขนาดของแรงดันทำให้ได้สนามไฟฟ้าเฉลี่ยเท่ากับ 1 V/m เพื่อให้สามารถเปรียบเทียบกับการจัดเรียงในสองแบบข้างต้นได้. กำหนดให้อนุภาคฉนวนในรูปมีสภาพยอม ϵ_d เป็น 1 ถึง 64 เท่าของสภาพยอมบริเวณภายนอก ϵ_E ในการคำนวณ. รัศมีของอนุภาคตัวนำและฉนวนกำหนดให้มีขนาดเท่ากับหนึ่งหน่วย (1 m).



รูปที่ 4.2-1 รูปแบบการจัดเรียงของอนุภาคในการคำนวณแบบสมมาตรรอบแกนหมุน.

รูปที่ 4.2-2 แสดงค่าสนามไฟฟ้าที่จุดสัมผัสระหว่างอนุภาคฉนวน หรือจุดสัมผัสระหว่างอนุภาคฉนวนกับตัวนำ. จุดสัมผัสดังกล่าวได้แก่ จุด P_1 ถึง จุด P_3 ซึ่งแสดงอยู่ในรูปที่ 4.2-1. สาเหตุที่แสดงค่าสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสในที่นี้ ก็เนื่องจากว่า โดยปกติแล้วสนามไฟฟ้าจุดมีค่าสูงสุดที่จุดสัมผัสนั่นเอง. จากรูปที่ 4.2-2 จะเห็นได้ว่า ในกรณีของการให้พลังงานด้วยสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ สนามไฟฟ้าที่จุดสัมผัสเพิ่มสูงขึ้นตามจำนวนของอนุภาคฉนวนจาก 2 ($P_1, N = 2$) เป็น 4 ($P_1, N = 4$), 8 ($P_1, N = 8$), และอนันต์ (P_2). อย่างไรก็ตาม อนุภาคจำนวนอนันต์ไม่ได้ทำให้สนามไฟฟ้ามีค่าเป็นอนันต์ที่จุดสัมผัส. สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสจะมีการอิ่มตัว ซึ่งจะต่ำกว่าในกรณีที่ได้รับการให้พลังงานด้วยสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอ (P_3). สำหรับผลของสภาพยอมของอนุภาคฉนวนนั้น สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสจะมีค่าสูงขึ้นอย่างมาก เมื่ออัตราส่วนของ ϵ_d / ϵ_E สูงขึ้น. รูปที่ 4.2-2 แสดงการเพิ่มขึ้นของสนามไฟฟ้าตามอัตราส่วนเชิงลอการิทึม. ความชันของกราฟสนามไฟฟ้าเพิ่มขึ้นที่น้อยเมื่อค่าอัตราส่วนสภาพยอมสูงขึ้น



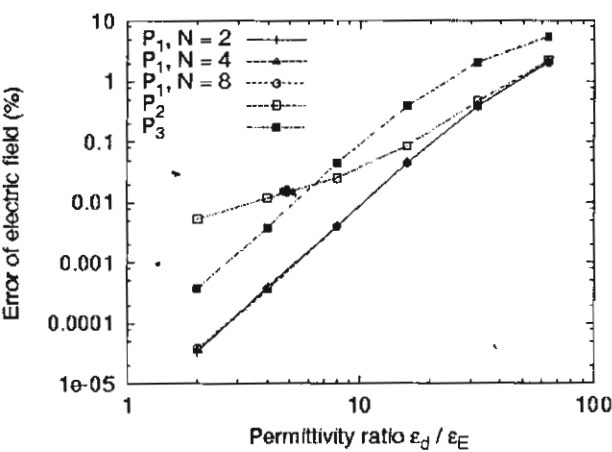
รูปที่ 4.2-2 สนามไฟฟ้าที่จุดสัมผัส (อ้างอิงตามรูปที่ 4.2-1).

4.2.2 ผลการคำนวณโดยวิธีเชิงเลข(วิธีขั้นประกอบขอบเขต)

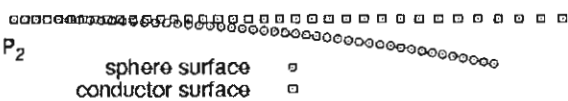
ผลการคำนวณโดยวิธีเชิงเลขแสดงอยู่ในรูปที่ 4.2-3 ซึ่งแสดงความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส. ความคลาดเคลื่อนในกราฟได้จากการเปรียบเทียบกับผลของวิธีเชิงวิเคราะห์. จากรูปที่ 4.2-3 เราเห็นได้ชัดเจนว่า ผลการคำนวณของวิธีขั้นประกอบขอบเขตสอดคล้องกับผลของวิธีเชิงวิเคราะห์อย่างดี. อย่างไรก็ตาม ความแม่นยำของผลการคำนวณลดลง เมื่อสภาพยอมของอนุภาคฉนวนมีค่าสูงขึ้น. นอกจากนี้ ความไม่สม่ำเสมอสูงของสนามไฟฟ้าในกรณีของตัวนำทรงกลมทำให้ความคลาดเคลื่อนสูงขึ้นด้วยเช่นกัน (P_3). ในกรณี P_2 ความคลาดเคลื่อนมีค่าสูงเมื่อเปรียบเทียบกับกรณีอื่นที่ค่าสภาพยอมต่ำๆ. รูปที่ 4.2-4 แสดงพื้นผิวของทรงกลมและตัวนำระนาบในการคำนวณด้วยวิธีขั้นประกอบขอบเขต. ระยะห่างระหว่างจุดในรูปแสดงถึงขนาดของขั้นประกอบในการคำนวณ. รูปนี้แสดงได้อย่างชัดเจนว่า พื้นผิวของอนุภาคฉนวนและตัวนำมีระยะห่างน้อยมาก ซึ่งเป็นสาเหตุที่ทำให้ผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงเลขมีความคลาดเคลื่อนสูง.

รูปที่ 4.2-3 ได้แสดงว่า ความคลาดเคลื่อนของการคำนวณด้วยวิธีเชิงเลขมีค่าระหว่างประมาณ 10^{-2} ถึง 10^{-4} จนถึงสูงกว่า 2% เมื่อสภาพยอมของอนุภาคเปลี่ยนแปลงจาก 2 ถึง 64. ข้อสังเกตประการหนึ่งเกี่ยวกับความคลาดเคลื่อนก็คือ ผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงเลขอาจมีความคลาดเคลื่อนสูงกว่านี้ได้ ถ้าหากขั้นประกอบที่

ใช้ในการคำนวณเป็นเส้นตรงไม่ใช่เส้นโค้ง หรือมีการแบ่งจำนวนชั้นประกอบบนผิวทรงกลมหยาบขึ้น. ผลการคำนวณที่แสดงในหัวข้อนี้ ได้จากการแบ่งผิวทรงกลมของแต่ละอนุภาคออกเป็นชั้นประกอบแบบเส้นโค้งอันดับที่ 2 จำนวน 360 ชั้นประกอบย่อย.



รูปที่ 4.2-3 ความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีชั้นประกอบขอบเขต.



รูปที่ 4.2-4 การแบ่งชั้นประกอบย่อยในบริเวณใกล้กับจุดสัมผัส P_2 .

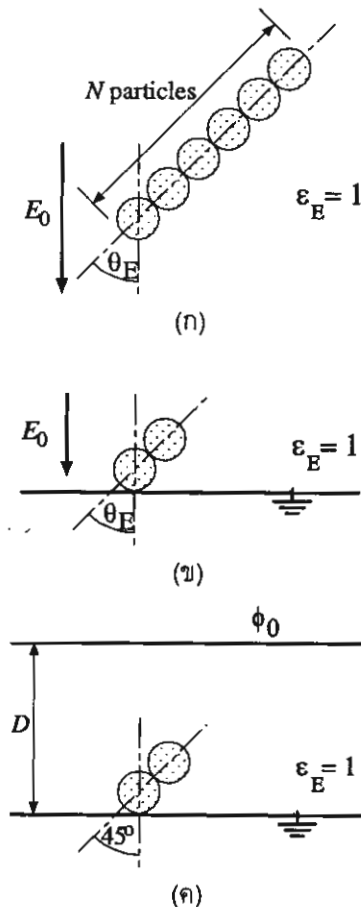
4.2.3 วิเคราะห์ผลการคำนวณที่ได้

เราสามารถเปรียบเทียบขั้นตอนและผลการคำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาคจำนวนในแง่ต่างๆ ดังนี้

ความแม่นยำ	วิธีเชิงวิเคราะห์มีความแม่นยำสูงกว่าวิธีเชิงเลข เนื่องจากไม่มีการประมาณพื้นผิวเข้ามาเกี่ยวข้อง. อย่างไรก็ตาม วิธีเชิงเลขก็สามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงเพียงพอได้ หากมีการแบ่งชั้นประกอบอย่างเหมาะสมในการคำนวณ.
การประยุกต์ใช้ได้	วิธีเชิงเลขมีประโยชน์อย่างยิ่งยวดในกรณีของการจัดเรียงอนุภาคที่ซับซ้อนมากขึ้น หรือในกรณีที่อนุภาคไม่ใช่ทรงกลม. วิธีเชิงวิเคราะห์มีค่าได้เปรียบในการจัดเรียงที่สนามไฟฟ้ามีค่าเป็นอนันต์หรือมีค่าสูงมากเฉพาะบริเวณ ซึ่งสามารถให้ค่าที่ถูกต้อง ไม่มีปัญหา.
เวลาการคำนวณ	สำหรับวิธีการคำนวณเชิงเลขโดยทั่วไป เวลาในการคำนวณเพิ่มขึ้นตาม $O(N_p^2)$ เมื่อ N_p เป็นจำนวนของปมที่ใช้ประมาณค่าศักย์และสนามไฟฟ้า แต่จะไม่เพิ่มขึ้นตามอัตราส่วน ϵ_d / ϵ_E . ลักษณะนี้มีความแตกต่างกับวิธีเชิงวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอมาก เพราะว่าวิธีเชิงวิเคราะห์ใช้เวลาการคำนวณมากขึ้น (จากการที่ต้องทำการคำนวณซ้ำเป็นจำนวนรอบมากขึ้น) เมื่อ ϵ_d / ϵ_E สูงขึ้น. ดังนั้นข้อเสนอในที่นี้ก็คือ กรณีที่อัตราส่วนของสภาพยอมสูง การใช้วิธีเชิงเลขจะทำให้ได้คำตอบที่รวดเร็วกว่า ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า ความแม่นยำของวิธีเชิงเลขได้ถูกตรวจสอบอย่างดีกับวิธีเชิงวิเคราะห์แล้ว.

4.3 สนามไฟฟ้าและแรงโคอิเล็กโตรโฟรีติกในการจัดเรียงทั่วไป

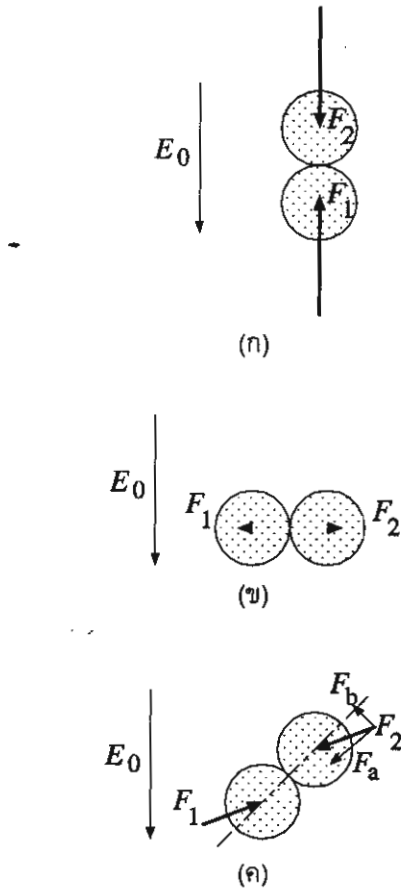
การคำนวณในกรณีที่สนามไฟฟ้าเป็นแบบ 3 มิติทั่วไป(ไม่จำเป็นต้องสมมาตรรอบแกนหมุน) ได้ทดลองทำกับรูปแบบการจัดเรียงอิเล็กโตรดตังแสดงในรูปที่ 4.3-1. การจัดเรียงในรูปประกอบด้วย อนุภาคคณวนในของเหลวคณวนซึ่งได้รับการกระตุ้นให้พลังงานด้วยอิเล็กโตรดแบบระนาบคู่ขนาน. แรงทางไฟฟ้าที่เกิดขึ้นได้ดึงดูดอนุภาคคณวนเข้าด้วยกัน ทำให้เกิดโซ่อนุภาคคณวนสร้างตัวขึ้นภายในของเหลว. ในที่นี้สมมติให้ โซ่อนุภาคในรูปปิดทำมุม θ_E กับสนามไฟฟ้าของระนาบคู่ขนาน. รูปที่ 4.3-1(ก) แสดงกรณีที่อนุภาคคณวนอยู่ห่างจากอิเล็กโตรดทั้งสองเป็นระยะห่างมากๆ จนเราสามารถละเลยผลของระนาบอิเล็กโตรดและประมาณว่าโซ่อนุภาคอยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอได้. ผู้วิจัยได้ทดลองคำนวณกับจำนวนอนุภาคต่างๆ โดยใช้ทำมุม θ_E กับสนามไฟฟ้าระหว่าง 0 ถึง 90 องศา. ในรูปที่ 4.3-1(ข) โซ่ที่ประกอบด้วยอนุภาค 2 ตัวสัมผัสอยู่กับอิเล็กโตรดหนึ่ง โดยสมมติให้ระนาบอิเล็กโตรดด้านบนอยู่ห่างออกไปมาก จึงสามารถละเลยได้. ท้ายสุด ในรูปที่ 4.3-1(ค) เราพิจารณากรณีที่ระนาบอิเล็กโตรดทั้งสองอยู่ไม่ไกลจากโซ่ของอนุภาค. ผลของระนาบอิเล็กโตรดที่มีต่อแรงและสนามไฟฟ้าถูกตรวจสอบในกรณี $\theta_E = 45^\circ$. ในการคำนวณทุกกรณี ขนาดของรัศมีอนุภาคสมมติให้มีขนาดหนึ่งหน่วย และสภาพยอมของอนุภาคและของเหลวที่อยู่รอบๆ มีค่าเป็น 4 และ 1 ตามลำดับ. ขนาดอัตราส่วน ϕ/D ในรูปที่ 4.3-1(ค) ถูกรักษาให้ได้ขนาดของสนามไฟฟ้าเท่ากับการจัดเรียงในรูปอื่นๆ ในขณะที่ไม่มีอนุภาคปรากฏอยู่. ในการแสดงผลการคำนวณแรงที่จะกล่าวถึงต่อไป ค่าของแรงถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย $F_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 R^2$.



รูปที่ 4.3-1 รูปแบบการจัดเรียงของอนุภาคและอิเล็กโตรดในการคำนวณกรณีสนามไฟฟ้าแบบ 3 มิติ.

4.3.1 ผลของมุม θ_E ที่มีต่อลักษณะของสนามไฟฟ้าและแรง

รูปที่ 4.3-2 แสดงแรงบนโซ่ของอนุภาคจำนวน 2 ตัวในรูปที่ 14a สำหรับมุม $\theta_E = 0^\circ, 90^\circ$ และ 45° ตามลำดับ. เวกเตอร์ F_1 และ F_2 แสดงถึงแรงที่ทำบนอนุภาคล่างและอนุภาคบนของโซ่ ตามลำดับ. รูปนี้แสดงให้เห็นว่า ขนาดและทิศทางของแรงไฟฟ้าบนโซ่จำนวนเปลี่ยนแปลงตาม θ_E อย่างมาก. ที่มุม $\theta_E = 0^\circ$ แรง F_1 และ F_2 เป็นแรงดึงดูด โดยมีขนาดเท่ากับ $6.352F_0$. ที่มุม $\theta_E = 90^\circ$ แรง F_1 และ F_2 เป็นแรงผลัก โดยมีขนาดเท่ากับ $0.828F_0$. ที่มุมค่าอื่นระหว่าง 0 ถึง 90 องศา แรงทั้งสองจะไม่ขนานกับโซ่อีกต่อไป ดังแสดงในรูปที่ 4.3-2(ค). แรงจะประกอบด้วยองค์ประกอบ 2 ส่วน คือ F_a ที่ขนานกับแนวโซ่ และ F_b ที่ตั้งฉากกับแนวโซ่. โน้ที่เรานิยามเครื่องหมายของ F_a และ F_b ในลักษณะที่ (1) F_a มีค่ามากกว่าศูนย์ถ้าเป็นแรงดูดและน้อยกว่าศูนย์ถ้าเป็นแรงผลัก (2) F_b มีค่าเป็นบวก ถ้าแรงพยายามเรียงอนุภาคตามแนวของสนามไฟฟ้าที่ได้รับ (ลดขนาดของ θ_E). รูปที่ 4.3-2 แสดงเป็นนัยว่า จะมีมุมๆ หนึ่งซึ่งแรงที่กระทำบนอนุภาคเปลี่ยนทิศทางจากแรงดึงดูดเป็นแรงผลัก. ขนาดของมุมวิกฤตนี้พบว่าเท่ากับ 70 องศาสำหรับอนุภาคที่เรียงตัวแบบนี้. สำหรับโซ่ที่ประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมากขึ้น ผลลัพธ์จะถูกกล่าวถึงในส่วนต่อไป.

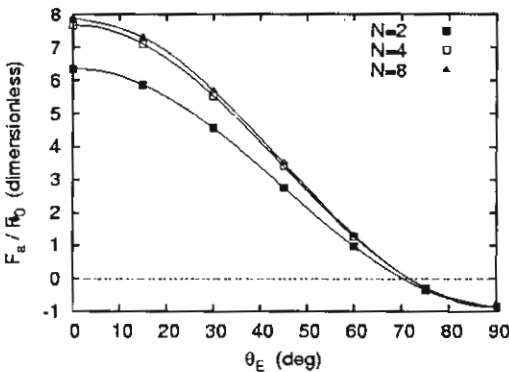


รูปที่ 4.3-2 การแปรผันของแรงบนอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอที่มุม θ_E ค่าต่างๆ.

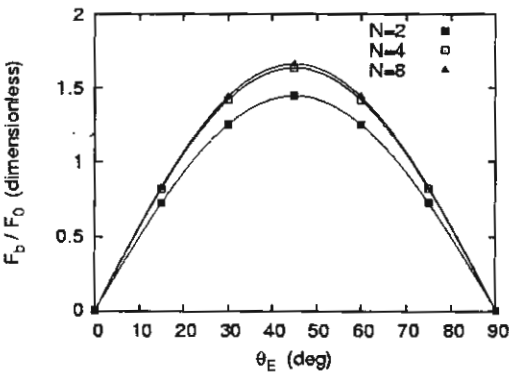
(ก) 0 องศา (ข) 90 องศา และ (ค) 45 องศา.

4.3.2 ผลของจำนวนอนุภาคที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรง

รูปที่ 4.3-3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างมุม θ_E กับแรง F_a และ F_b บนอนุภาคบนสุดและอนุภาคล่างสุดของโซ่อนุภาคในรูปที่ 4.3-1(ก). ในรูปนี้ F_a และ F_b แสดงไว้สำหรับกรณีที่จำนวนอนุภาคเท่ากับ 2, 4, และ 8. ในแต่ละกรณีของจำนวนอนุภาค แรง F_a เปลี่ยนจากแรงดึงดูดมาเป็นแรงผลักที่มุมประมาณ 70 ถึง 73 องศา. ในอีกทางหนึ่ง F_b ไม่มีการเปลี่ยนเครื่องหมาย ซึ่งหมายความว่า แรงนี้พยายามจัดเรียงอนุภาคให้ขนานกับสนามไฟฟ้าที่ได้รับไม่ว่า θ_E จะเป็นเท่าใดก็ตาม. แรง F_a มีค่าเป็นแรงดึงดูดสูงสุดที่มุม θ_E เท่ากับ 0 องศา และเป็นแรงผลักสูงสุดที่มุม 90 องศา. แรง F_b มีค่าสูงสุดที่มุม θ_E ประมาณ 45 องศา. มุมที่แรง F_a เปลี่ยนเครื่องหมายมีค่าสูงขึ้นเมื่อจำนวนอนุภาคมากขึ้น. การเพิ่มขึ้นของมุมวิกฤตนี้หมายถึงการที่โซ่อนุภาคสามารถมีเสถียรภาพอยู่ได้ในช่วงมุมกว้างขึ้น. อย่างไรก็ตาม ผลของจำนวนอนุภาคที่มีต่อค่ามุมวิกฤตมีน้อยมากเมื่อจำนวนอนุภาคเพิ่มสูงขึ้น. ขนาดแรงสูงสุดของ F_a และ F_b ก็เพิ่มขึ้นตามจำนวนอนุภาคเช่นกัน. รูปที่ 4.3-4 แสดงขนาดของแรงดึงดูด และขนาดของแรงผลักสูงสุด เมื่อจำนวนอนุภาคเพิ่มขึ้น. จากรูปเราจะเห็นได้ว่า แรงดึงดูดมีค่าเข้าสู่ภาวะอิ่มตัวที่จำนวนอนุภาคประมาณ 32 และแรงผลักเข้าสู่ภาวะอิ่มตัวที่จำนวนอนุภาคประมาณเท่ากับ 12. การอิ่มตัวของแรงนี้ได้มีการรายงานแล้วใน [21] แต่ก็เป็นเฉพาะกรณีของแรงดึงดูดเท่านั้น.

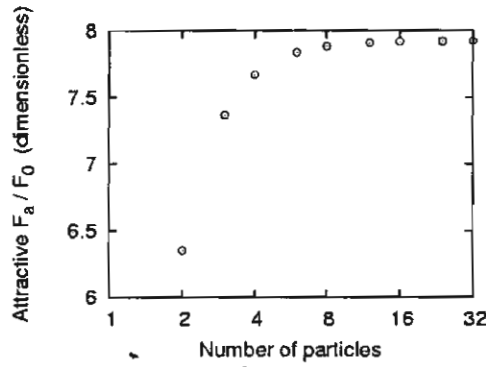


(ก)

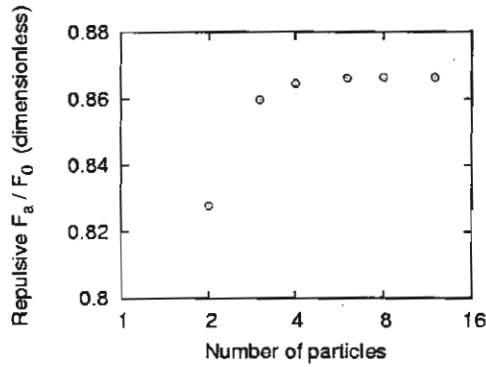


(ข)

รูปที่ 4.3-3 แรงบนอนุภาคบนสุดและอนุภาคล่างสุดบนโซ่อนุภาคในรูปที่ 4.3-1(ก). (ก) องค์ประกอบ F_a ซึ่งขนานกับทิศทางของโซ่ และ (ข) องค์ประกอบ F_b ซึ่งตั้งฉากกับทิศทางของโซ่.



(ก)



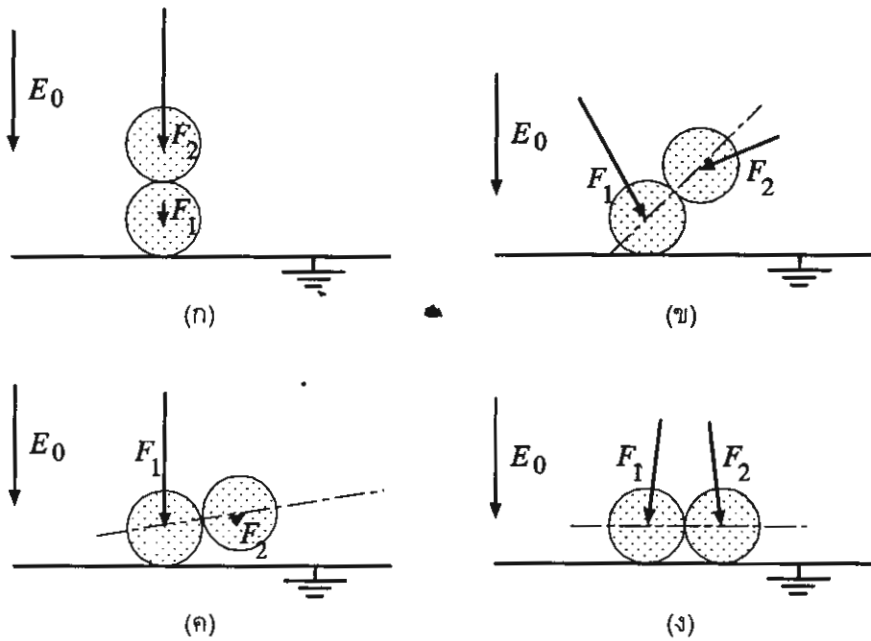
(ข)

รูปที่ 4.3-4 การแปรผันของแรงดึงดูดและแรงผลักรตามจำนวนของอนุภาคในโซ่.

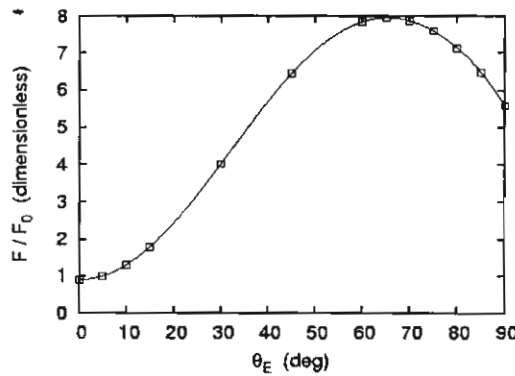
(ก) ขนาดของแรงดึงดูดสูงสุด และ (ข) ขนาดของแรงผลักรสูงสุด.

4.3.3 ผลของระนาบอิเล็กโตรดที่มีต่อแรง

รูปที่ 4.3-5 แสดงแรงไฟฟ้าที่มีต่อโซ่อนุภาคในรูปที่ 4.3-1(ข). ขนาดมุม θ_E ในรูปมีค่าเท่ากับ 0, 45, 80 และ 90 องศา ตามลำดับ. การแปรผันของแรง F_1 และ F_2 มีความแตกต่างจากรูปที่ 4.3-2 ในกรณีที่ไม่มียอิเล็กโตรดอย่างชัดเจน. ข้อแตกต่างประการแรกคือ แรง F_1 จะดึงดูดอนุภาคให้เกาะติดกับอิเล็กโตรดระนาบล่างตลอดเวลา. ขนาดของแรงเท่ากับ $0.888F_0$ ที่มุม θ_E เท่ากับ 0 องศา แต่ค่าแรงสูงขึ้นมากเมื่อมุม θ_E เพิ่มขึ้น. รูปที่ 4.3-6 แสดงถึงองค์ประกอบของ F_1 ในส่วนที่ขนานกับสนามไฟฟ้า ซึ่งดึงดูดอนุภาคให้ติดกับอิเล็กโตรดล่างซึ่งโซ่อนุภาควางตัวอยู่. ข้อแตกต่างประการที่สองคือ แรง F_2 แสดงถึงผลของอิเล็กโตรดระนาบ. เมื่อมุม θ_E สูงมากจนกระทั่งอนุภาคนั้นเข้าใกล้กับอิเล็กโตรดล่าง ผลของอิเล็กโตรดล่างจะชัดและทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงแรง F_2 อย่างฉับพลัน ดังแสดงในรูปที่ 4.3-5(ค) และ 4.3-5(ง). ความแตกต่างระหว่างแรงบนโซ่อนุภาคที่ไม่มีอิเล็กโตรดกับที่มีอิเล็กโตรดแสดงอยู่ในรูปที่ 4.3-7.

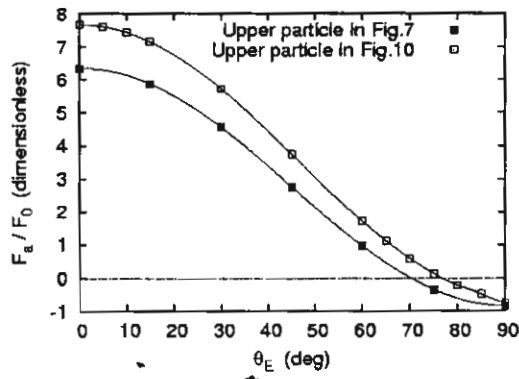


รูปที่ 4.3-5 แรงบนโซ่อนุภาคขนาดอนุภาคเล็กโตรดระนาบ ที่ค่ามุม θ_E ต่างๆ กัน.
(ก) 0 องศา (ข) 45 องศา (ค) 80 องศา และ (ง) 90 องศา.

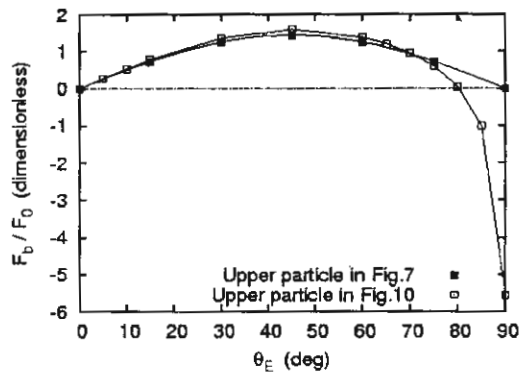


รูปที่ 4.3-6 ขนาดของแรงที่ดึงดูดอนุภาคกลางของโซ่ให้ติดกับระนาบอิเล็กโตรดด้านล่างในรูป 4.3-1(ข).

ตารางที่ 4.3-1 แสดงผลของอิเล็กโตรดบนที่มีต่อแรงบนโซ่อนุภาค โดยเปรียบเทียบแรงในกรณีที่มีอิเล็กโตรดด้านบนดังรูปที่ 4.3-1(ค) กับแรงในกรณีที่ไม่มีอิเล็กโตรดด้านบน $D/R = \infty$ ในรูปที่ 4.3-1 (ข). ดัชนีล่าง 1 และ 2 ของแรงในตารางระบุถึงอนุภาคล่างและอนุภาคบน ตามลำดับ. จากค่าความแตกต่างของแรง ΔF ที่แสดงอยู่ตาราง เราสามารถกล่าวได้ว่า ผลของอิเล็กโตรดบนทำให้แรงบนอนุภาคมีค่าสูงขึ้น. อย่างไรก็ดี ที่ขนาด $D/R = 4$ เท่ากับ 4 ซึ่งเป็นกรณีที่อนุภาคบนอยู่ห่างจากอิเล็กโตรดบนเพียง $0.879R$ ทั้ง ΔF_1 และ ΔF_2 ก็ยังคงมีค่าต่ำกว่า 6%. ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่า ผลของอิเล็กโตรดบนจำเป็นต่อการพิจารณาเมื่ออิเล็กโตรดบนอยู่ใกล้กับอนุภาคมากเท่านั้น.



(ก)



(ข)

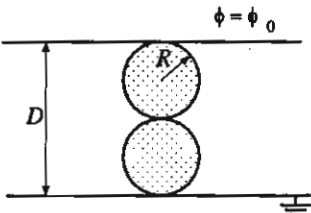
รูปที่ 4.3-7 เปรียบเทียบแรงบนอนุภาคบนของโซ่ในรูปที่ 4.3-2 (จุดสีดำ) และ 4.3-5 (จุดสีขาว).
(ก) แรง F_a และ (ข) แรง F_b .

ตารางที่ 4.3-1 แรงบนอนุภาคบนสำหรับค่า D/R ต่างๆ กัน.

D/R	อนุภาคล่าง		อนุภาคบน	
	F_1 / F_0	ΔF_1 (%)	F_2 / F_0	ΔF_2 (%)
∞	7.463	0.000	4.072	0.000
10	7.481	0.242	4.082	0.254
8	7.498	0.471	4.093	0.511
6	7.552	1.196	4.127	1.351
5	7.638	2.342	4.181	2.673
4	7.860	5.317	4.311	5.869

4.4 ผลของระนาบตัวนำที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรง เมื่อจำลองลักษณะใช้ในสภาวะต่าง ๆ

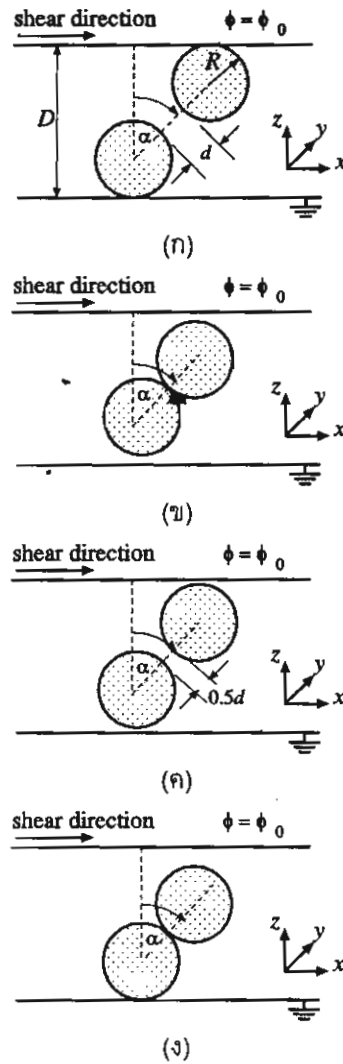
รูปแบบการจัดเรียงของอนุภาคเพื่อหาผลของอิเล็กโตรดแบบระนาบตัวนำคู่ขนานแสดงอยู่ในรูปที่ 4.4-1. การจัดเรียงประกอบด้วยอนุภาคจำนวนสองตัวอยู่ในฉนวนเหลว โดยระบบของไหล ER วางอยู่ระหว่างอิเล็กโตรดระนาบคู่ขนาน. เมื่ออิเล็กโตรดได้รับการกระตุ้นให้มีความต่างศักย์ ϕ_0 แล้ว สนามไฟฟ้าภายนอกที่อยู่ในแนวตั้งจะเหนี่ยวนำแรงไดอิเล็กโตรโฟรีติกบนอนุภาค. ถ้าหากแรงที่เหนี่ยวนำนี้มีค่าสูงพอ ก็จะสามารถเรียงอนุภาคให้อยู่ในรูปของโซ่ที่เชื่อมอิเล็กโตรดทั้งสองดังแสดงในรูปที่ 4.4-1 ได้. แม้ว่าในทางปฏิบัติ ของไหล ER ประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมากอยู่ภายใน ผลที่สำคัญที่สุดต่อแรงและสนามไฟฟ้าเกิดขึ้นเป็นของอนุภาคที่อยู่ติดกัน หรือเป็นผลของอิเล็กโตรดในกรณีที่มีอนุภาคอยู่ที่ขอบของโซ่. พฤติกรรมของสนามที่บริเวณปลายของโซ่สองอนุภาคในรูปแทนถึงพฤติกรรมของอนุภาคที่ปลายของโซ่ ในขณะที่พฤติกรรมของสนามที่บริเวณกลางระหว่างอนุภาคแทนถึงลักษณะที่อนุภาคบริเวณกลางโซ่นั้นเอง. ในการวิจัยนี้ เราสนใจสถานะการณ์ที่โซ่เริ่มเอียงตัวท่ามกับสนามไฟฟ้า. ในโมเดลการคำนวณ โซ่อนุภาคนี้ยังคงอยู่ใกล้กับอิเล็กโตรด และการคำนวณได้รวมผลของอิเล็กโตรดทั้งสองโดยไม่มีการประมาณใดๆ ทั้งสิ้น. ผู้วิจัยได้กำหนดให้ระยะห่าง D ระหว่างอิเล็กโตรดมีค่าเท่ากับ $4R$ ซึ่งทำให้ไม่มีช่องว่างระหว่างอนุภาคกับอิเล็กโตรดในสภาวะเริ่มต้นนั่นเอง.



รูปที่ 4.4-1 รูปแบบการจัดเรียงอนุภาคที่ใช้ศึกษาผลของอิเล็กโตรดต่อสนามไฟฟ้าและแรง.

ภายใต้แรงเฉือนจากภายนอก ระนาบอิเล็กโตรดบนในรูปจะเลื่อนไปในแนวระดับ ทำให้โซ่อนุภาคเริ่มเอียงออกจากแนวตั้ง. ผลที่ตามมาก็คือ สนามไฟฟ้าและแรงไดอิเล็กโตรโฟรีติกเปลี่ยนแปลงไป. ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้พิจารณาแบบการจัดเรียงทางเรขาคณิตของโซ่อนุภาคทั้งหมด 4 แบบ ดังต่อไปนี้

1. ในรูปที่ 4.4-2(ก) โซ่อนุภาคแยกออกจากกันด้วยระยะห่าง $d = 2R[(\cos \alpha)^{-1} - 1]$ แต่ยังคงติดอยู่กับอิเล็กโตรดทั้งสอง.
2. ในรูปที่ 4.4-2(ข) โซ่อนุภาคหมุน โดยที่อนุภาคทั้งสองยังคงอยู่ติดกัน แต่อนุภาคจะแยกห่างออกจากอิเล็กโตรด
3. ในรูปที่ 4.4-2(ค) โซ่อนุภาคแยกห่างออกจากและอิเล็กโตรด และอนุภาคก็แยกห่างออกจากกันด้วย. กรณีที่ 3 นี้พิจารณาว่าเป็นสภาวะการเปลี่ยนแปลงระหว่างสองกรณีแรก. ระยะห่างระหว่างอนุภาคกำหนดให้เท่ากับกึ่งหนึ่งของกรณีแรก.
4. ในรูปที่ 4.4-2(ง) โซ่อนุภาคหมุนโดยที่ยังคงติดอยู่กับอิเล็กโตรดด้านล่าง.



รูปที่ 4.4-2 การเปลี่ยนแปลงของไอออนบวกภายใต้แรงเฉือนภายนอกที่สมมติในงานวิจัยนี้.

สำหรับการจัดเรียงทั้งหมดในรูปที่ 4.4-2 นี้ การคำนวณสมมติให้อิออนบวกและของเหลวเป็นฉนวนสมบูรณ์ ไม่มีสภาพนำแต่อย่างใด และสภาพยอมของไอออนบวกและฉนวนเหลวมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับขนาดของสนามไฟฟ้า. เรากำหนดให้สภาพยอมของไอออนบวกและฉนวนเหลวแทนด้วยสัญลักษณ์ ϵ_p และ ϵ_L ตามลำดับ. การคำนวณทำในเงื่อนไขของ $0 \leq \alpha \leq 45^\circ$ และ ϵ_p / ϵ_L เท่ากับ 4, 8 และ 12.

4.4.1 การกระจายของสนามไฟฟ้าบนผิวอนุภาค

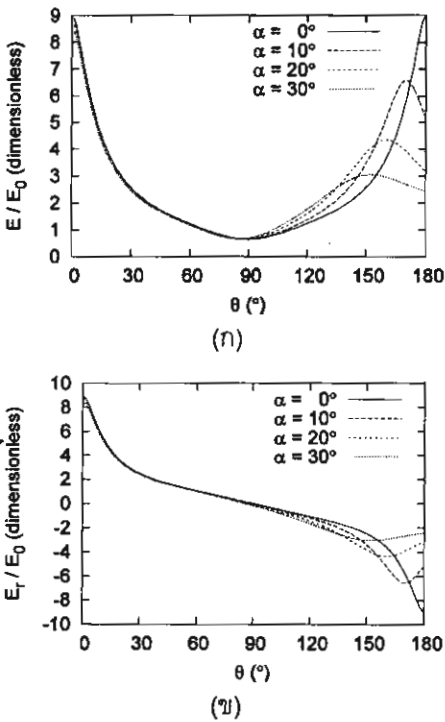
รูปที่ 4.4-3 แสดงการกระจายของสนามไฟฟ้าตามแนวเส้น $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, $\phi = 180^\circ$ บนอนุภาคตัวบนในรูปที่ 4.4-2(a) สำหรับอัตราส่วนสภาพยอม $\Gamma_\epsilon = \epsilon_p / \epsilon_L = 4$ และ α เท่ากับ 0, 10, 20 และ 30 องศา. สนามไฟฟ้าในรูปถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย $E_0 = \phi_0 / D$ ซึ่งเป็นสนามไฟฟ้าในสภาวะที่ไม่มีไอออนบวกอยู่. สำหรับการจัดเรียงไอออนบวกแบบนี้ สนามไฟฟ้ามีค่าสูงสุดที่ $\theta = 0$ ซึ่งเป็นจุดสัมผัสระหว่างอนุภาคและอิเล็กโตรดบน. นอกจากนี้ ยังมีสนามไฟฟ้าสูงสุดเฉพาะที่ ณ $\theta = 180 - \alpha$ องศา ซึ่งเป็นจุดที่ใกล้กับอนุภาคตัวล่างที่สุด. ค่าสนามไฟฟ้าสูงสุดค่อนข้างคงที่ ไม่แปรผันตามมุม α มากนัก. ในทางตรงกันข้าม ค่าสนามไฟฟ้าสูงสุดเฉพาะที่ลดลงอย่างมาก เมื่อมุม α กว้างมากขึ้น. เรายังสามารถสรุปจากรูปได้ว่า ใน

บริเวณสนามไฟฟ้าสูง องค์ประกอบในแนวตั้งฉากกับผิวอนุภาคมีค่าสูงกว่าองค์ประกอบในแนวสัมผัสมาก. สำหรับกรณีของอัตราส่วนสภาพยอมสูง เราพบว่าการกระจายของสนามไฟฟ้ายังคงคล้ายคลึงกับในรูป แต่สนามมีค่าสูงมากกว่าในบริเวณสนามสูง.

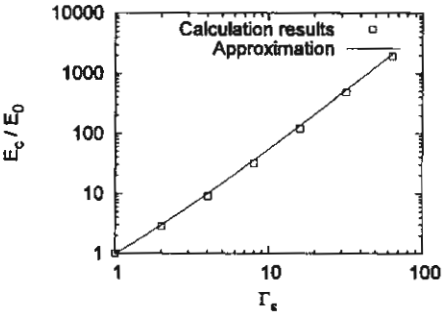
สำหรับกรณีที่ $\alpha = 0$ สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสที่ $\theta = 0$ และ 180 องศา มีค่าเท่ากัน เนื่องจากรูปแบบการจัดเรียงลดลงเป็นกรณีของอนุภาคจำนวนอนันต์ที่เรียงตัวขนานกับสนามไฟฟ้าภายนอก. สนามไฟฟ้าสัมผัส E_c สามารถประมาณเป็นฟังก์ชันของอัตราส่วนสภาพยอม Γ_ϵ ได้ดังสมการต่อไปนี้ [22].

$$E_c = \frac{\Gamma_\epsilon (\Gamma_\epsilon + 1)}{2} E_0 \tag{4.4-1}$$

รูปที่ 4.4-4 เปรียบเทียบการประมาณด้วยสมการดังกล่าว กับผลการคำนวณที่ได้ในงานวิจัยนี้. รูปที่ 4.4-4 แสดงความสอดคล้องระหว่างค่าประมาณและผลการคำนวณ สำหรับอัตราส่วนสภาพยอมตั้งแต่ 1 ถึง 64.



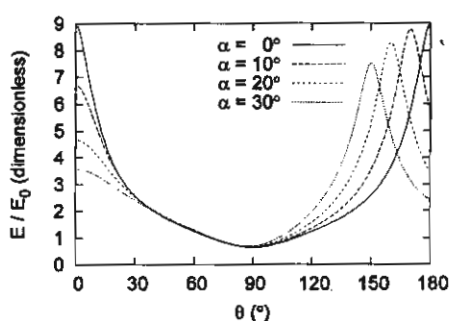
รูปที่ 4.4-3 การกระจายของสนามไฟฟ้าบนอนุภาคบนในรูปที่ 4.4-2(ก) เมื่อ $\Gamma_\epsilon = 4$.
(ก) สนามไฟฟ้ารวม และ (ข) สนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉากกับผิวอนุภาค.



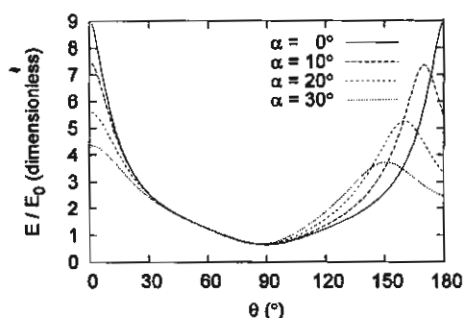
รูปที่ 4.4-4 สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส สำหรับกรณีที่ $\alpha = 0$.

รูปที่ 4.4-5 แสดงการกระจายของสนามรวมบนอนุภาคบน ในการจัดเรียงโซ่อนุภาคตามรูปที่ 4.4-2(ข). (สังเกตว่า สำหรับ $\alpha = 0$ สนามไฟฟ้าในรูปที่ 4.4-2 ทุกๆ การจัดเรียงที่พิจารณามีค่าเท่ากัน.) สนามไฟฟ้าในรูปที่ 4.4-5 มีค่าสูงสุดที่ $\theta = 180 - \alpha$ ซึ่งเป็นจุดสัมผัสระหว่างอนุภาค. สนามไฟฟ้ามีค่าสูงเฉพาะที่ที่ $\theta = 0$ ซึ่งเป็นจุดที่ใกล้กับอิเล็กโตรดบนมากที่สุด. การเปลี่ยนแปลงของค่าสนามไฟฟ้าสูงสุดต่างจากรูปที่ 4.4-3 มาก. ทั้งนี้ เราเห็นได้ว่า สนามไฟฟ้าสูงสุดแปรตาม α อย่างชัดเจน.

การจัดเรียงตามรูปที่ 4.4-2(ค) อาจเกิดขึ้นได้ ระหว่างการเปลี่ยนแปลงจากโซ่ในรูปที่ 4.4-2(ก) และ 4.4-2(ข). รูปที่ 4.4-6 แสดงการกระจายสนามบนอนุภาคตัวบนของโซ่. รูปนี้แสดงให้เห็นว่า สนามไฟฟ้าทั้งที่ $\theta = 0$ (จุดที่ใกล้กับอิเล็กโตรดที่ สุด) และ $\theta = 180 - \alpha$ (ใกล้กับอนุภาคตัวล่างที่ สุด) มีค่าลดลงอย่างมาก เมื่อ α เพิ่มขึ้น. สนามไฟฟ้าสูงสุดอยู่ที่ตำแหน่ง $\theta = 0$.

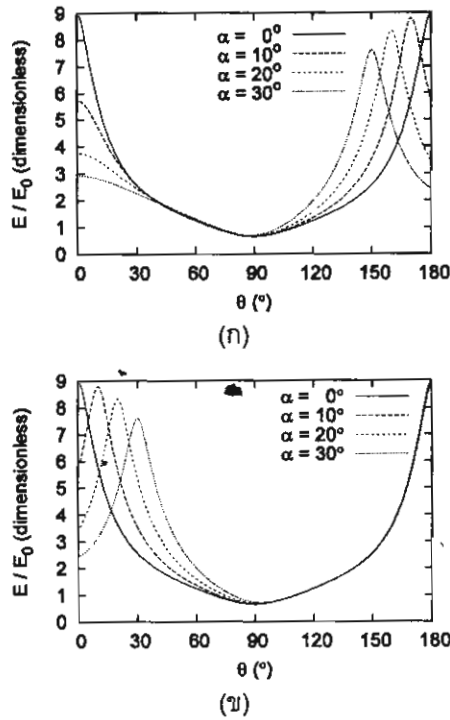


รูปที่ 4.4-5 การกระจายของสนามไฟฟ้าบนอนุภาคบนในรูปที่ 4.4-2(ข) เมื่อ $\Gamma_c = 4$.



รูปที่ 4.4-6 การกระจายของสนามไฟฟ้าบนอนุภาคบนในรูปที่ 4.4-2(ค) เมื่อ $\Gamma_c = 4$.

ในขณะที่ การจัดเรียงโซ่อนุภาคในรูปที่ 4.4-2(ก) ถึง (ค) มีลักษณะสมมาตรระหว่างอนุภาคตัวบนและตัวล่าง รูปที่ 4.4-2(ง) มีการกระจายสนามไฟฟ้าที่ไม่สมมาตรระหว่างอนุภาคทั้งสอง. สนามไฟฟ้าบนอนุภาคในการจัดเรียงแบบนี้แสดงอยู่ในรูปที่ 4.4-7 สำหรับ $\Gamma_c = 4$ โดยแสดงค่าสนามตามแนวเส้น $\varphi = 180$ องศาบนอนุภาคตัวบน และตามแนวเส้น $\varphi = 0$ องศาบนอนุภาคตัวล่าง. จากรูปที่ 4.4-7 เราเห็นได้ว่า สนามไฟฟ้าบนอนุภาคตัวบนคล้ายคลึงกับรูปที่ 4.4-5 แต่มีค่าต่ำกว่า. สนามไฟฟ้าบนอนุภาคตัวล่าง ตำแหน่ง $\theta = 0$ องศา ไม่เปลี่ยนแปลงตามมุม α มากนัก เนื่องจากว่าอนุภาคยังคงอยู่ติดกับอิเล็กโตรด. ค่าสนามไฟฟ้านี้มีค่าโดยประมาณเท่ากับค่าที่ $\theta = 0$ ของรูปที่ 4.4-3(ก).

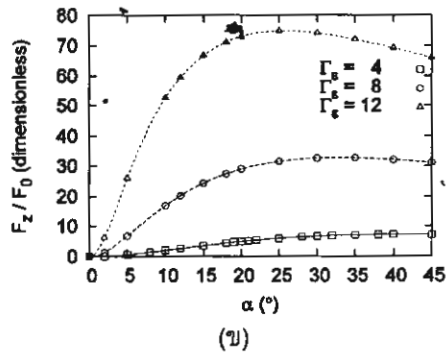
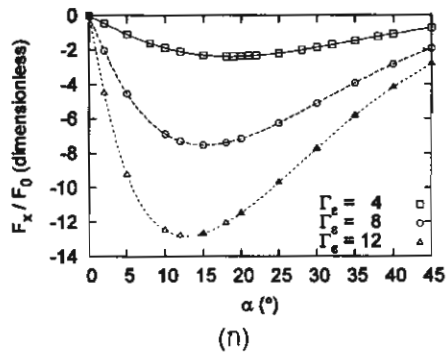


รูปที่ 4.4-7 การกระจายของสนามไฟฟ้าบนอนุภาคบนในรูปที่ 4.4-2(ง) เมื่อ $\Gamma_e = 4$.
(ก) อนุภาคด้านบน และ (ข) อนุภาคด้านล่าง.

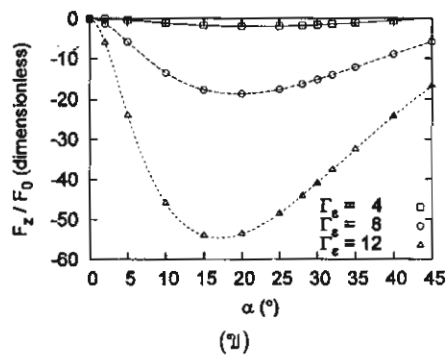
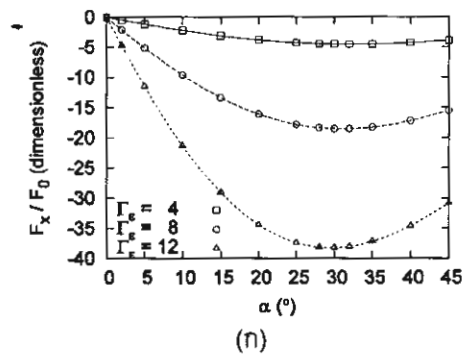
4.4.2 แรงไดโพลเล็กโตรโฟเรติกบนโซ่อนุภาค

เราจะพิจารณาแรง F_x ในแนวระดับ และแรง F_z ในแนวตั้งบนอนุภาค. เนื่องจากสมมาตรในการจัดเรียงอนุภาค เราสามารถสรุปได้ว่าแรงในแนวแกน y มีค่าเท่ากับศูนย์. การเปลี่ยนรูปของโซ่อนุภาคจากรูปที่ 4.4-1 ทำให้เกิดแรงลัพธ์ที่ไม่เท่ากับศูนย์บนอนุภาคแต่ตัว. แรงลัพธ์ในแนวระดับนี้ถูกเหนี่ยวนำขึ้นโดยปฏิกิริยาระหว่างอนุภาคด้านบนและด้านล่างเป็นส่วนใหญ่.

รูปที่ 4.4-7 แสดงการเปลี่ยนแปลงของ F_x และ F_z ตามมุม α บนอนุภาคด้านบนในการจัดเรียงตามรูปที่ 4.4-2 (ก). แรงในรูปที่ 4.4-7 ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานโดย $F_0 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 R^2$ ซึ่งเป็นแรงที่กระทำบนพื้นผิวสี่เหลี่ยมขนาด $R \times R$ ของอิเล็กโตรดในขณะที่ไม่อนุภาคปรากฏอยู่. ทิศทางของแรง F_x และ F_z เป็นไปตามแกนที่แสดงในรูปที่ 4.4-2. รูปที่ 4.4-8 แสดงว่า ในช่วง $0 < \alpha \leq 45^\circ$ แรง F_x มีทิศทางต้านแรงเฉือนภายนอกที่หักกับอิเล็กโตรดบน เนื่องจาก $F_x < 0$ และแรง F_z ดึงให้อนุภาคติดอยู่กับอิเล็กโตรดบน. มุม $\alpha_{\max F_x}$ และมุม $\alpha_{\max F_z}$ ที่แรง F_x และ F_z มีขนาดสูงสุดตามลำดับ แปรเปลี่ยนตามค่า Γ_e . ทั้งมุม $\alpha_{\max F_x}$ และ $\alpha_{\max F_z}$ มีแนวโน้มที่จะเล็กลง เมื่อ Γ_e เพิ่มขึ้น. ค่าแรงสูงสุดของ F_x และ F_z เพิ่มขึ้นตาม Γ_e แต่มีความสัมพันธ์เป็นแบบไม่เป็นเชิงเส้น.



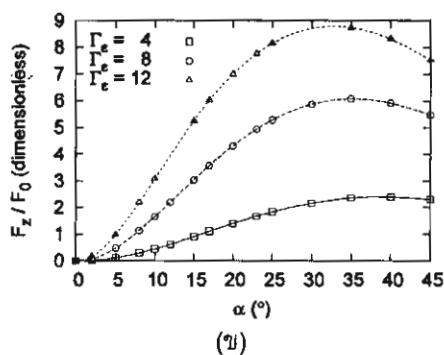
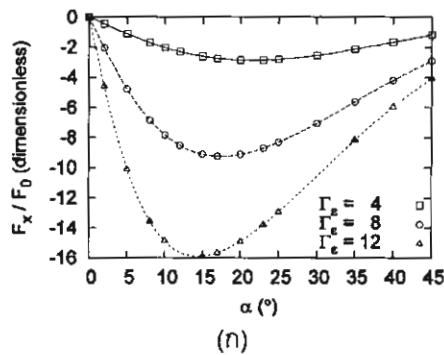
รูปที่ 4.4-7 แรงไดอิเล็กโตรโฟรีติกที่กระทำกับอนุภาคบนในรูปที่ 4.4-2(ก).
(ก) แรงในแนวระดับ และ (ข) แรงในแนวตั้ง.



รูปที่ 4.4-8 แรงไดอิเล็กโตรโฟรีติกที่กระทำกับอนุภาคบนในรูปที่ 4.4-2(ข).
(ก) แรงในแนวระดับ และ (ข) แรงในแนวตั้ง.

รูปที่ 4.4-8 แสดงแรง F_x และ F_z ตามมุม α บนอนุภาคตัวบนในการจัดเรียงตามรูปที่ 4.4-2 (ข). ในการจัดเรียงแบบนี้ อนุภาคได้ขยับออกห่างจากอิเล็กโตรด แต่ยังคงอยู่ติดกับอนุภาคอีกตัวหนึ่ง. สนามไฟฟ้าบนอนุภาคใกล้เคียง กับอิเล็กโตรดลดลงมากเมื่อมุม α กว้างขึ้น เมื่อเทียบกับการลดลงของสนามไฟฟ้า ณ บริเวณจุดสัมผัส. ทั้งนี้ เนื่องจากว่าอนุภาคอยู่ห่างจากอิเล็กโตรดมากขึ้นตามมุม α นั้นเอง. สนามไฟฟ้าในบริเวณใกล้เคียงอิเล็กโตรดทำให้เกิดแรงในทิศทางขึ้น ขณะที่สนามไฟฟ้าระหว่างอนุภาคใกล้เคียง จุดสัมผัสทำให้เกิดแรงในทิศลงและทิศทางซ้ายมือ. ดังนั้น สำหรับการจัดเรียงโซ่อนุภาคแบบนี้ เราได้แรงลัพธ์เป็นลบในแนวตั้งเกือบทุกค่ามุม α . อย่างไรก็ตาม F_z มีขนาดต่ำกว่าค่าในรูปที่ 4.4-7 เล็กน้อย. ในทางกลับกัน แรง F_x ในรูปที่ 4.4-8 สูงกว่าค่าในรูปที่ 4.4-7 มาก.

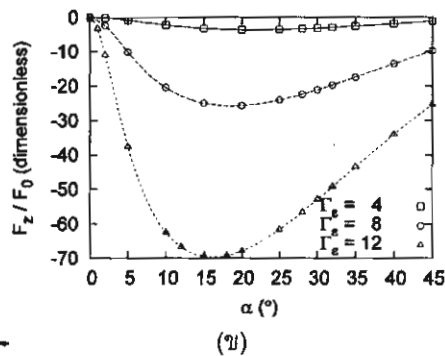
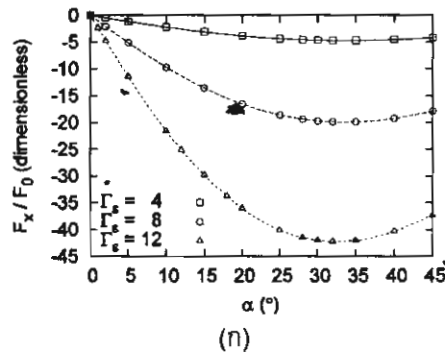
รูปที่ 4.4-9 แสดงแรง F_x และ F_z ตามมุม α บนอนุภาคตัวบนในการจัดเรียงตามรูปที่ 4.4-2 (ค). แรง ในรูปที่ 4.4-9(ก) แปรตามมุม α เหมือนในรูปที่ 4.4-7(ก) แต่ขนาดของแรง F_x มีค่าสูงกว่าในการจัดเรียงแบบนี้. แรง F_z ในรูป 4.4-9(ข) มีทิศทางขึ้น ดึงดูดอนุภาคเข้าสู่อิเล็กโตรดด้านบน. ขนาดของแรง F_z ต่ำกว่าค่าในรูปที่ผ่านมาทั้งสองกรณีมาก. เมื่อมุม α กว้างมากขึ้น แรงที่ดึงดูดอนุภาคเข้าสู่อิเล็กโตรดบนมีค่าลดลง เนื่องจากระยะระหว่างอนุภาคกับอิเล็กโตรดมากขึ้น. ในทางกลับกัน แรงเนื่องจากปฏิกิริยาระหว่างอนุภาคมีค่าต่ำลงด้วยสาเหตุสองประการ. สาเหตุประการแรกได้แก่ การที่อนุภาคมีระยะห่างกันมากขึ้น และสาเหตุประการที่สองได้แก่ การลดลงของสนามไฟฟ้าในแนวขนานกับโซ่อนุภาค. รูปที่ 4.4-9(ข) แสดงเป็นนัยว่า การจัดเรียงของโซ่อนุภาคแบบนี้ไม่เสถียร ขึ้นอยู่กับค่า Γ_e . อนุภาคตัวบนจะถูกบังคับให้เคลื่อนที่ขึ้นไปด้วยแรง F_z จนกว่าจะสัมผัสกับระนาบอิเล็กโตรดบน.



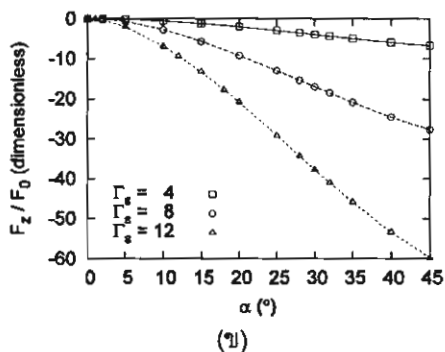
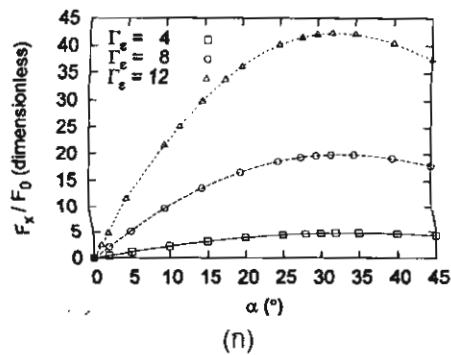
รูปที่ 4.4-9 แรงไดอิเล็กโตรโฟรีติกที่กระทำกับอนุภาคบนในรูปที่ 4.4-2(ค).

(ก) แรงในแนวระดับ และ (ข) แรงในแนวตั้ง.

รูปที่ 4.4-10 และ 4.4-11 แสดงแรงที่เกิดขึ้นบนอนุภาคตัวบนและอนุภาคตัวล่างของการจัดเรียงในรูปที่ 4.4-2(ง) ตามลำดับ. ในรูปที่ 4.4-10 แรงแม่เหล็กจะคล้ายกับแรงในรูปที่ 4.4-8 ซึ่งเป็นการจัดเรียงแบบ 4.4-2 (ข) แต่ว่าแรงทั้งในแนวระดับและแนวตั้งมีขนาดสูงกว่าเล็กน้อย. ในการจัดเรียงทั้งหมดที่พิจารณาในที่นี้ การจัดเรียงแบบนี้ทำให้เกิดค่าสูงสุดของแรง F_x และ F_z ที่มีขนาดสูงที่สุด. แรงแม่เหล็กบนอนุภาคตัวล่างคล้ายคลึงกับแรงที่ทำกับอนุภาคตัวบน แต่มีเครื่องหมายตรงกันข้าม. แรงแม่เหล็กบนอนุภาคตัวล่างมีทิศทางลง. สำหรับการจัดเรียงทั้งหมด แรงแม่เหล็กที่ทำกับอนุภาคตัวบน มีทิศทางด้านแรงเฉือนภายนอก.



รูปที่ 4.4-10 แรงแม่เหล็กในแนวระดับ(ก) และแนวตั้ง(ข) ที่ทำกับอนุภาคตัวบนในรูปที่ 4.4-2(ง).



รูปที่ 4.4-11 แรงแม่เหล็กในแนวระดับ(ก) และแนวตั้ง(ข) ที่ทำกับอนุภาคตัวล่างในรูปที่ 4.4-2(ง).

4.4.3 วิเคราะห์ผลของอิเล็กโตรดต่อแรงไดอิเล็กโตรโฟเรติก

ค่าสูงสุดของแรงในแนวระดับ $\max\{F_x\}$ บนโซ่อนุภาคที่อยู่ติดกันถูกนำมาใช้หาค่าความเค้นครากเฉือน (shear yield stress) ของของไหล ER ในงานวิจัยหลายชิ้น. โดยส่วนใหญ่แล้ว $\max\{F_x\}$ คำนวณจากแรง $F_{\alpha 0}$ ที่ทำกับโซ่ ขณะที่โซ่อนุภาคขนานกับสนามไฟฟ้าภายนอก E_0 ที่ได้รับ. อย่างไรก็ตาม การคำนวณหา $F_{\alpha 0}$ มีอยู่ด้วยกันหลายวิธี. $F_{\alpha 0}$ อาจคำนวณหาจากกรณีของโซ่ที่ประกอบด้วยอนุภาคสองตัว [23, 24] หรืออาจหาจากกรณีโซ่ที่มีอนุภาคจำนวนอนันต์ [25, 26]. สำหรับในกรณีหลัง ซึ่งแรงลัพธ์บนอนุภาคเท่ากับศูนย์ $F_{\alpha 0}$ หาจากผลรวมของแรงที่ทำบนครึ่งบนหรือล่างของอนุภาคแต่ละตัวในโซ่อนุภาค.

เมื่อโซ่อนุภาคถูกบิดให้ทำมุม α กับสนามไฟฟ้า ดังแสดงในรูปที่ 4.4-12 มีการใช้สมมติฐานต่อไปนี้สำหรับคำนวณหาแรง $F_{\alpha 0}$:

- องค์ประกอบ $E_0 \cos \alpha$ ของสนามไฟฟ้าภายนอกเท่านั้น ที่มีผลต่อแรง.
- ถือว่าผลของอิเล็กโตรดสามารถละเลยได้.

ภายใต้สมมติฐานข้างต้นนี้ เราสามารถหาความสัมพันธ์ของสนามไฟฟ้า E และสนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉาก E_n ณ จุดใดๆ บนผิวของอนุภาคได้เป็น

$$\frac{E_\alpha}{E_{\alpha 0}} = \frac{E_{n,\alpha}}{E_{n,\alpha 0}} = \cos \alpha \tag{4.4-2}$$

เมื่อตั้งนี้ล่าง $\alpha 0$ และ 0 บ่งชี้ค่าในกรณีของ $\alpha = 0$ และ α ใดๆ ตามลำดับ. แรง F_α ในรูปที่ 4.4-12 สามารถเขียนในรูปของอินทิกรัลบนผิวอนุภาคได้เป็น

$$\mathbf{F}_\alpha = \iint \left(\epsilon_L \mathbf{E}_\alpha E_{n,\alpha 0} - \frac{1}{2} \epsilon_L E_\alpha^2 \mathbf{n} \right) ds \tag{4.4-3}$$

เมื่อ $\mathbf{n}$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากชนิดหนึ่งหน่วยบนผิวของอนุภาค. จากสมการที่ (4.4-2) และ (4.4-3) เราสามารถสรุปได้ว่า $F_\alpha = F_{\alpha 0} \cos^2 \alpha$. สำหรับอนุภาคที่ทำมุม α กับสนามไฟฟ้าในรูปที่ 4.4-12 แรงแนวระดับสามารถประมาณได้เป็น [24]

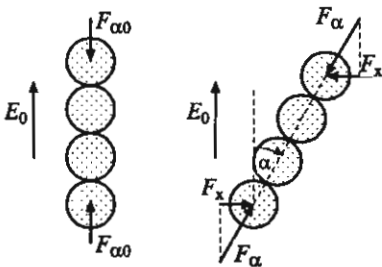
$$F_x(\alpha) = F_{\alpha 0} \cos^2 \alpha \sin \alpha. \tag{4.4-4}$$

ดังนั้น ค่าสูงสุด $\max\{F_x\}$ นิยามโดย

$$\begin{aligned} \max\{F_x\} &= \max\{F_{\alpha 0} \cos^2 \alpha \sin \alpha\} \\ &= F_{\alpha 0} \times \max\{\cos^2 \alpha \sin \alpha\} \end{aligned} \tag{4.4-5}$$

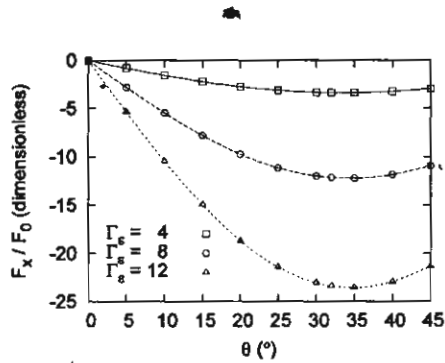
จากสมการที่ (4.4-5) มุม $\alpha_{\max F_x}$ ซึ่งทำให้เกิดแรงสูงสุดในแนวระดับมีค่าประมาณ 35.3 องศา ไม่ขึ้นกับค่าของ Γ_e และได้

$$\max\{F_x\} \approx 0.385 F_{\alpha 0}. \tag{4.4-6}$$



รูปที่ 4.4-12 โซ่อนุภาคเดี่ยวภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก.

เมื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณที่ได้แสดงในหัวข้อที่แล้ว (หัวข้อที่ 4.4.2) เราพบว่า ถ้าอนุภาคมีการเปลี่ยนแปลงการจัดเรียงตามรูปที่ 4.4-2(ก) หรือ 4.4-2(ค) ค่า $\alpha_{\max F_x}$ ต่ำกว่า 35.3 องศา และยิ่งขึ้นกับ Γ_e อีกด้วย. สำหรับโซ่ในรูปที่ 4.4-2(ข) หรือ 4.4-2(ง) มุม $\alpha_{\max F_x}$ มีค่าอยู่ระหว่าง 30 ถึง 35 องศาใกล้เคียงการประมาณ. รูปที่ 4.4-13 แสดงค่า F_x บนโซ่อนุภาคที่ทำมุมต่างๆ กับสนามไฟฟ้า โดยไม่คิดผลของอิเล็กโตรด. ค่ามุม $\alpha_{\max F_x}$ ในรูปสอดคล้องกับการประมาณอย่างดี. เราจึงสามารถกล่าวได้ว่า สนามไฟฟ้าในแนวตั้งฉากกับโซ่อนุภาคไม่มีผลต่อแรงบนอนุภาคมากนัก. เมื่อเปรียบเทียบกับรูปที่ 4.4-13 กับรูปที่ 4.4-8 (ก) และ 4.4-10(ก) เราสามารถเห็นผลของอิเล็กโตรดที่อยู่ห่างจากโซ่อนุภาคเป็นระยะเล็กๆ. การมีอิเล็กโตรดมีผลต่อมุม $\alpha_{\max F_x}$ เล็กน้อย แต่มีผลต่อขนาดของแรงสูงสุดอย่างมาก.



รูปที่ 4.4-13 แรงในแนวระดับที่ทำกับอนุภาคตัวบนของโซ่สองอนุภาคโดยไม่คิดผลของระนาบ.

จากผลการคำนวณในหัวข้อที่ผ่านมา เราทราบได้อย่างชัดเจนว่า แรงที่กระทำกับอนุภาคขึ้นอยู่กับ การจัดเรียงของอนุภาคอย่างมาก. เราจะวิเคราะห์ต่อถึงการประมาณค่า $\max\{F_x\}$ โดยใช้ $F_{\alpha 0}$ ในสมการที่ (4.4-6). ผู้วิจัยได้ทดลองคำนวณ $\max\{F_x\}$ จากค่า $F_{\alpha 0}$ ที่ทำกับอนุภาคบนโซ่เดี่ยวซึ่งประกอบด้วยอนุภาคจำนวน 2, 32 และอนันต์ ตามลำดับ. ตารางที่ 4.4-1 แสดงผลการคำนวณที่ได้. สาเหตุที่ผู้วิจัยพิจารณากรณีของอนุภาคมากกว่าสองในที่นี้ ก็เนื่องจากว่า ด้วยวิธีเงาประจุแล้ว อนุภาคที่อยู่ภายใต้อิเล็กโตรดคู่ขนานมีสนามไฟฟ้าเหมือนกับอนุภาคจำนวนอนันต์ที่ได้รับสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ.

จากตารางที่ 4.4-1 เราเห็นได้ว่าค่าของแรงที่ได้ขึ้นอยู่กับโมเดลของโซ่อนุภาคที่ใช้เป็นอย่างมาก. โซ่ที่ประกอบด้วยสองอนุภาคให้ค่าแรงต่ำที่สุด สำหรับแต่ละค่าของ Γ_e . ค่าของโซ่ที่ประกอบด้วย 32 อนุภาคแทนกรณีของค่าแรงอิมิตัวที่เกิดขึ้น เมื่ออนุภาคในโซ่มีจำนวนมากเพียงพอ. ความแตกต่างระหว่างแรงที่ได้ในกรณีทั้งสองมีค่ามากขึ้น เมื่อ Γ_e สูงขึ้น. แรงที่ได้เมื่อพิจารณาอนุภาคจำนวนอนันต์มีขนาดใหญ่มากกว่ากรณีที่เหลืออย่างมาก. ข้อเท็จจริงนี้หมายความว่า แม้ว่าโซ่อนุภาคจะประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมากก็ตาม การประมาณแรงโดยพิจารณาอนุภาคจำนวนอนันต์ยังคงไม่เหมาะสม.

ตารางที่ 4.4-1 ขนาดของแรงสูงสุดในแนวระดับที่เกิดขึ้น เมื่อพิจารณาจำนวนอนุภาคในโซ่ต่างๆ กัน.

จำนวนอนุภาค	Γ_e		
	4	8	12
2	2.45	9.96	20.4
32	3.05	14.0	31.3
อนันต์	9.24	28.3	57.9

ตารางที่ 4.4-2 เสนอค่าแรงสูงสุดในแนวระดับที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีจางมัลติโพล ซึ่งแสดงในหัวข้อที่ผ่านมา. แรงในตารางนี้หาจากค่าสูงสุดของแรงที่คำนวณได้ในช่วง $0 < \alpha \leq 45^\circ$. สำหรับการจัดเรียงในรูปที่ 4.4-2(ข) และ (ง) แรงสูงสุดเพิ่มตามขนาดของอัตราส่วนสภาพยอมเป็นฟังก์ชันของ $(\Gamma_\epsilon - 1)^{1.7}$ โดยประมาณ. เมื่อพิจารณาตารางที่ 4.4-1 และ 4.4-2 เราพบว่า ไม่มีโมเดลโซ่อนุภาคเดี่ยวใดที่สามารถประมาณค่าแรงสูงสุดได้ทุกค่าของ Γ_ϵ . ในกรณีที่ Γ_ϵ มีค่าต่ำ โมเดลโซ่แบบสองอนุภาคประมาณค่าแรงในรูปที่ 4.4-2 (ก) และ (ค) ได้ค่อนข้างดี แต่ความคลาดเคลื่อนมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Γ_ϵ มีขนาดใหญ่ขึ้น. เมื่อเปรียบเทียบกับ การจัดเรียงทุกรูปแบบที่ได้พิจารณาในที่นี้ ผู้วิจัยพบว่า โมเดลของโซ่ที่ประกอบด้วยอนุภาคจำนวนอนันต์ให้ค่าแรงที่สูงกว่าแรงที่คำนวณได้อย่างมาก แม้ว่าความแตกต่างเมื่อเทียบกับแรงในการจัดเรียงแบบ 4.4-2(ง) ลดลง เมื่อ Γ_ϵ เพิ่มขึ้นก็ตาม.

ตารางที่ 4.4-2 ขนาดของแรงสูงสุดในแนวระดับที่เกิดขึ้นของโซ่อนุภาคในรูปที่ 4.4-2.

การจัดเรียงในรูปที่	Γ_ϵ		
	4	8	12
4.4-2(ก)	2.38	7.53	12.8
4.4-2(ข)	4.55	18.5	38.3
4.4-2(ค)	2.86	9.24	15.7
4.4-2(ง)	4.70	19.9	42.3

4.5 ผลของรูปร่างของอนุภาคที่มีต่อสนามไฟฟ้า

การศึกษาผลของรูปร่างอนุภาคในที่นี้เป็นการศึกษาขั้นเริ่มต้น โดยพิจารณาผลของรูปร่างที่เบี่ยงเบนไปจากทรงกลมต่อสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นบนอนุภาค. รูปร่างของอนุภาคที่พิจารณาเป็นทรงกระบอกที่มีหน้าตัดเป็นวงรี หรือเป็นทรงรี ดังรูปที่ 4.5-1 โดยแยกพิจารณาเป็นกรณี 2 มิติ และกรณีสามมิติรอบแกนหมุน. อนุภาคทรงรีในรูปวางตัวอยู่บนระนาบตัวนำที่ต่อลงดิน และได้รับสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ E_0 . การศึกษาเน้นที่ค่าสนามไฟฟ้า ณ จุด p ที่อนุภาคสัมผัสกับระนาบตัวนำด้วยมุมสัมผัส 0 องศา. ผลการวิเคราะห์สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสมุมศูนย์ ได้มีการนำเสนอมาบ้างแล้วในอดีต แต่ก็โดยเฉพาะกรณีที่พื้นผิวสัมผัสเป็นระนาบหรือเป็นผิวทรงกลม(วงกลม)เท่านั้น. หัวข้อนี้กล่าวถึงผลการวิเคราะห์สนามไฟฟ้าที่ได้ เมื่อพื้นผิวสัมผัสมีการเปลี่ยนแปลงความโค้ง (curvature) แตกต่างกันไป. การเปลี่ยนแปลงความโค้งในที่นี้ กำหนดจากอัตราส่วนของความยาวแกนโท (a) ต่อความยาวแกนเอก (b) ในรูปที่ 4.5-1. ผู้วิจัยได้ใช้วิธีขึ้นประกอบขอบเขต ในการคำนวณสนามไฟฟ้าในหัวข้อนี้.

ผลการคำนวณและการวิเคราะห์ค่าสนามไฟฟ้า

การปรากฏอยู่ของอนุภาคนำไฟฟ้าทำให้สนามในบริเวณรอยต่อระหว่างฉนวนกับตัวกลางที่อยู่รอบๆ มีค่าสูงสุดแม้ในสถานะที่ไม่มีระนาบตัวนำอยู่ก็ตาม. ถ้าปราศจากระนาบตัวนำ สนามไฟฟ้าสูงสุด E_{c0} ที่เกิดขึ้นในตัวกลางที่อยู่รอบอนุภาค ณ จุด p มีค่าเท่ากับ

$$\frac{E_{c0}}{E_0} = \Gamma \left[\frac{a/b + 1}{\Gamma a/b + 1} \right] \tag{4.5-1}$$

สำหรับการเน็สองมิติ และ

$$\frac{E_{c0}}{E_0} = \frac{\Gamma}{1 + (\Gamma - 1)\alpha} \tag{4.5-2}$$

สำหรับการเน็สมมาตรรอบแกนหมุน. ค่า Γ ในสมการทั้งสองเป็นอัตราส่วนของค่าคงตัวทางไฟฟ้า(สภาพยอมหรือสภาพนำ)ของอนุภาคต่อค่าของตัวกลางภายนอก. ตัวแปร α ในสมการที่ (4.5-2) เป็นฟังก์ชันของ β

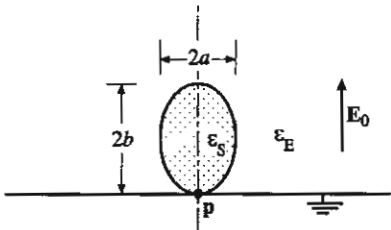
โดย
$$\beta = \sqrt{1 - (a/b)^2}$$

และ

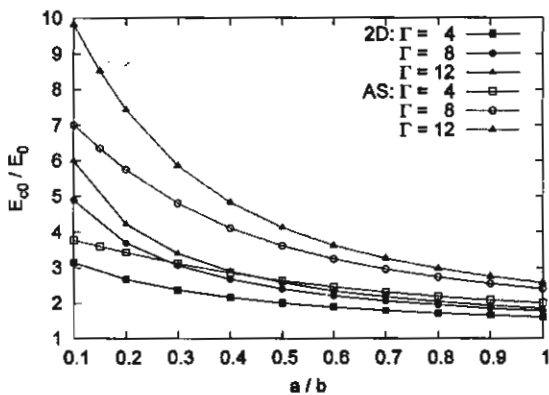
$$\alpha = \frac{1 - \beta^2}{2\beta^3} \left[\ln \frac{1 + \beta}{1 - \alpha} - 2\beta \right].$$

เพื่อให้สามารถเข้าใจขนาดของสนามไฟฟ้าได้ง่าย รูปที่ 4.5-2 แสดงค่าของสนามไฟฟ้า E_{c0} เมื่อ $a/b = 0.1$ ถึง 1.0 และ $\Gamma = 4, 8$ และ 12. จากรูปที่ 4.5-2 เราเห็นได้ว่า E_{c0} เพิ่มขึ้น เมื่อลดค่า a/b หรือเพิ่ม Γ . สำหรับรูปอนุภาคทรงกระบอกและทรงกลม E_{c0} เท่ากับ $2E_0$ และ $3E_0$ ตามลำดับ.

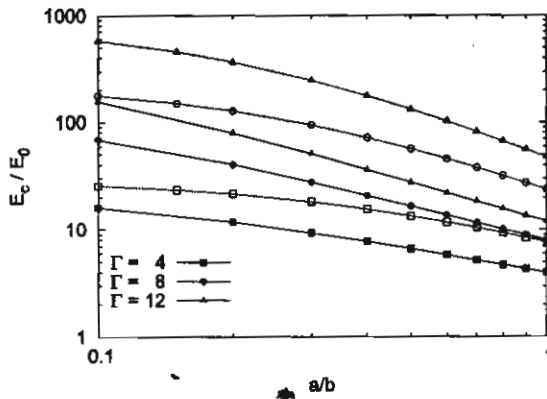
เมื่อมีระนาบตัวนำดังแสดงในรูปที่ 4.5-1 สนามไฟฟ้า E_c ณ จุดสัมผัส (ในตัวกลางด้านนอก) จะมีค่าสูงขึ้นกว่าเดิมอย่างมาก. รูปที่ 4.5-3 แสดงค่าสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสนี้ โดยทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วยสนามไฟฟ้าภายนอก E_0 . รูปที่ 4.5-3 แสดงว่า เมื่ออัตราส่วนของความยาวแกน a/b ลดลงจากหนึ่ง (เบี่ยงเบนไปจากทรงกลมหรือทรงกระบอกที่มีหน้าตัดเป็นวงกลม) การเพิ่มขึ้นของสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสมีระดับสูงขึ้น และผลของ Γ ที่มีต่อสนามไฟฟ้าก็มีความเด่นชัดมากขึ้น. รูปที่ 4.5-3 ยังแสดงเป็นนัยว่า เราไม่สามารถแสดงสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสนี้ ในรูปแบบง่ายของ $f_1(a/b) \cdot f_2(\Gamma)$ ได้ นั่นคือผลของ a/b และ Γ มีความสัมพันธ์ซึ่งกันและกัน. สังเกตว่า สนามไฟฟ้ามีค่าสูงกว่าในกรณีสมมาตรรอบแกนหมุน ที่ค่า a/b และ Γ เดียวกัน.



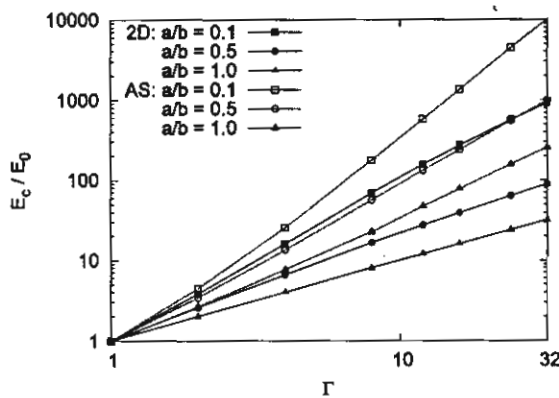
รูปที่ 4.5-1 รูปแบบการจัดเรียงที่ใช้ในการวิเคราะห์.



รูปที่ 4.5-2 สนามไฟฟ้าสูงสุดที่เกิดขึ้น เมื่อไม่มีระนาบตัวนำ.



รูปที่ 4.5-3 สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสเป็นฟังก์ชันของอัตราส่วนความยาวแกน a/b . สนามไฟฟ้าของกรณี 2 มิติและกรณีสมมาตรรอบแกนหมุนแสดงด้วยจุดทึบและจุดโปร่ง ตามลำดับ.



รูปที่ 4.5-4 สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสเป็นฟังก์ชันของ Γ .

รูปที่ 4.5-4 นำเสนอความสัมพันธ์ระหว่าง E_c กับ Γ ที่อัตราส่วนความยาวแกน a/b ต่างๆ กัน. สนามไฟฟ้าในรูปที่ 4.5-4 ดูเหมือนว่าแปรเป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลังของ Γ . อย่างไรก็ตาม หลังจากที่ได้ตรวจสอบอย่างละเอียดแล้ว เราพบว่า ความชันของเส้นกราฟแต่ละเส้นไม่คงที่ แต่จะแปรค่าเล็กน้อยตาม Γ . ถ้าหากเราพิจารณาในกรณีระบบที่ประกอบด้วยฉนวนทั่วไป และมีผลของสภาพยอมเด่นกว่าสภาพนำแล้ว ค่า Γ จะอยู่ในช่วงประมาณ 2 ถึง 8. ในช่วงนี้ของ Γ เราสามารถประมาณขนาดของสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสได้ โดยอาศัยสมการต่อไปนี้.

กรณีสนามแบบสองมิติ

$$\frac{E_c}{E_0} = \Gamma^k. \quad (4.5-3)$$

กรณีสนามแบบสมมาตรรอบแกนหมุน

$$\frac{E_c}{E_0} = \frac{1}{2} \Gamma (\Gamma^{k-1} + 1). \quad (4.5-4)$$

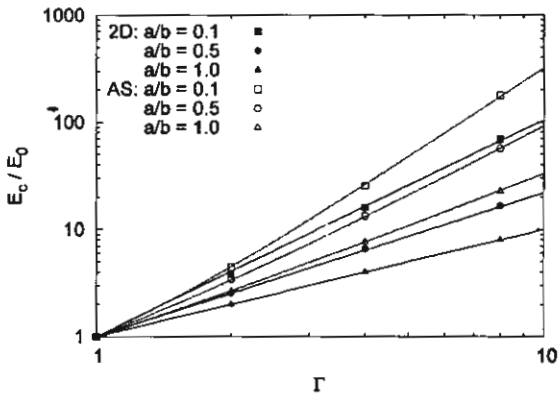
ในสมการทั้งสอง k เป็นค่าคงที่ที่หาได้จากผลการคำนวณ. การประมาณในสมการที่ (4.5-4) ได้นำเสนอมาก่อนแล้วสำหรับอนุภาคทรงกลม. ในที่นี้ เราได้ค่า k ประมาณ 1.75 สำหรับทรงกลม. ในกรณีของสนามแบบสองมิตินั้น เราพบว่า k เท่ากับ 1.0 ในกรณีของอนุภาคแบบทรงกระบอกที่มีหน้าตัดเป็นทรงกลม.

รูปที่ 4.5-5 เปรียบเทียบสนามไฟฟ้าที่ได้จากการประมาณด้วยสมการที่นำเสนอในที่นี้ กับผลการคำนวณด้วยวิธีขึ้นประกอบขอบเขต. ในรูปที่ 4.5-5 ค่าที่ได้จากสมการที่ (4.5-3) และ (4.5-4) แสดงด้วยเส้นตรงและเส้นประ ตามลำดับ ในขณะที่ผลการคำนวณด้วยวิธีขึ้นประกอบขอบเขตแทนด้วยจุด. เราสามารถเห็นได้จากรูปที่ 4.5-5 ว่า การประมาณให้ค่าที่เหมาะสมดี สำหรับช่วงอัตราส่วนความยาวแกน $0.1 \leq a/b \leq 1.0$ และอัตราส่วนสภาพยอม $1 \leq \Gamma \leq 8$. ความแตกต่างระหว่างสนามไฟฟ้าที่ได้จากการประมาณและจากวิธีขึ้นประกอบขอบเขตมีค่าไม่เกิน 6.6%.

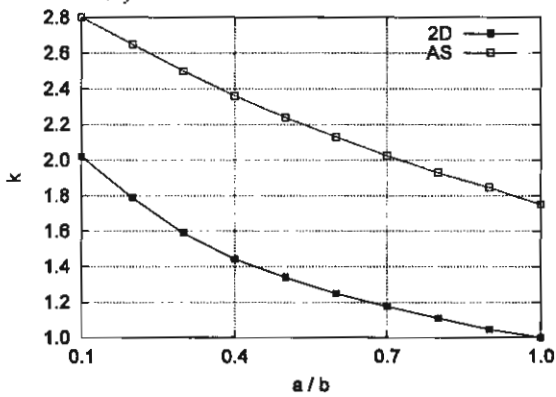
รูปที่ 4.5-6 นำเสนอค่า k เป็นฟังก์ชันของอัตราส่วนความยาวแกน. เมื่ออัตราส่วนความยาวแกนลดลงจาก 1.0 เป็น 0.1 ค่าของ k เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอจาก 1.0 เป็น 2.02 ในกรณีสองมิติ และจาก 1.75 เป็น 2.80 ในกรณีสมมาตรรอบแกนหมุน. ในอดีต ได้มีการเสนอว่า k จะมีค่าต่ำกว่า 2.0 สำหรับสนามไฟฟ้าที่เกิดจากผิวดวงกลางที่เป็นเส้นโค้งสัมผัสกับตัวนำที่ 0 องศา. อย่างไรก็ตาม ผลการศึกษาในที่นี้แสดงว่า k สามารถสูงกว่า 2.0 ได้อย่างมาก เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงความโค้งที่ต่างไปจากผิวของทรงกลม หรือทรงกระบอก. สำหรับสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสในกรณีที่ Γ มีค่าสูงขึ้นไปกว่าช่วงของสมการการประมาณ เราอาจแสดงสนามเป็นฟังก์ชันแบบง่ายของ

$$\frac{E_c}{E_0} \propto \Gamma^k \tag{4.5-5}$$

สำหรับทั้งกรณีสองมิติและกรณีสมมาตรรอบแกนหมุน. ค่าคงตัว k สำหรับ $\Gamma > 8$ เล็กกว่าค่าในกรณีของ $1 \leq \Gamma \leq 8$ ในเกือบทุกกรณีที่ได้ศึกษา ยกเว้นกรณีของ $a/b < 0.2$ ในรูปแบบสมมาตรรอบแกนหมุน.



รูปที่ 4.5-5 เปรียบเทียบสนามไฟฟ้าจากสมการประมาณกับค่าที่ได้จากการคำนวณด้วย BEM.



รูปที่ 4.5-6 ค่าคงตัว k สำหรับการประมาณสนามไฟฟ้าในช่วง $1 \leq \Gamma \leq 8$.

5. ผลของความนำไฟฟ้าที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคฉนวน

หัวข้อนี้กล่าวถึง ผลของความนำไฟฟ้าที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรงไดอิเล็กโตรโฟรีติกบนอนุภาคฉนวนในของไหล ER. ความนำไฟฟ้าที่พิจารณาในที่นี้ เกิดจากชั้นฟิล์มที่เคลือบอยู่บนผิวของอนุภาคฉนวน หรืออาจเกิดจากการที่อนุภาคฉนวนดูดซับความชื้นที่อยู่โดยรอบ ทำให้เกิดชั้นความชื้นที่นำไฟฟ้าบนตัวมันได้. การวิเคราะห์อ้างอิงสมการของวิธีเจาเมลดิโพลที่ได้แสดงไว้ในหัวข้อที่ 3.4.

5.1 ลักษณะสมบัติของค่าสภาพนำปรากฏ

เราเริ่มการวิเคราะห์จาก ค่าสภาพนำปรากฏ (ดูหัวข้อที่ 3.4) ของอนุภาคฉนวนที่มีโครงสร้างประกอบด้วยแกนกลาง และชั้นผิว(ฟิล์ม). ในกรณีทั่วไปแล้ว ถ้าสนามไฟฟ้าภายนอกมีองค์ประกอบที่มีอันดับแตกต่างกัน ผลตอบสนองของอนุภาคฉนวนจะซับซ้อนขึ้น และไม่สามารถมองเป็นอนุภาคเนื้อเดียวที่มีสภาพนำเท่ากับสภาพนำปรากฏได้. ข้อยกเว้นในกรณีพิเศษก็คือ เมื่อสนามไฟฟ้าภายนอกประกอบด้วยองค์ประกอบที่มีอันดับเดียวกันทั้งหมด เช่น สนามไฟฟ้าภายนอกแบบสม่ำเสมอ. อย่างไรก็ตาม แม้ในกรณีที่สนามไฟฟ้าภายนอกเป็นสนามแบบสม่ำเสมอ ถ้ามีอนุภาคจำนวนสองตัวขึ้นไปอยู่ใกล้ๆ กัน สนามไฟฟ้าภายนอกสำหรับแต่ละอนุภาคจะเท่ากับสนามไฟฟ้าภายนอกจริง รวมกับสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นเนื่องจากประจุที่อยู่ในอนุภาคอื่น. ดังนั้น องค์ประกอบทั้งหมดของสนามไฟฟ้าสำหรับแต่ละอนุภาคจะไม่อยู่ในอันดับเดียวกัน.

พิจารณาผลของชั้นฟิล์มหนา t ที่มีต่อสภาพนำปรากฏในสมการที่ (3.4-10) และ (3.4-15). สำหรับ $t = R$ เราได้ $\zeta = 0$ และสมการทั้งสองลดรูปเป็น

$$\sigma_j = \sigma_F. \quad (5.1-1)$$

ถ้าความหนาอยู่ในช่วงของ $0 < t < R$ (หรือ $0 < \zeta < 1$) เมื่อเพิ่มความหนา t เราได้ว่าสภาพนำปรากฏของอนุภาคแกนตัวนำเพิ่มขึ้น แต่ค่าของอนุภาคแกนฉนวนลดลง. ถ้าไม่มีชั้นฟิล์มอยู่เลย ($t = 0$ และ $\zeta = 1$) เราได้ว่า

$$\sigma_j = \infty \text{ สำหรับอนุภาคแกนตัวนำ แต่}$$

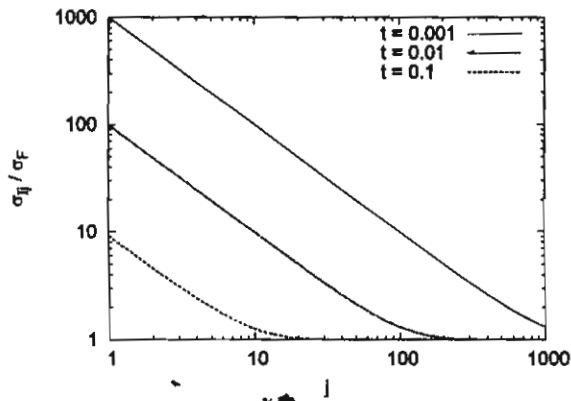
$$\sigma_j = 0 \text{ สำหรับอนุภาคแกนฉนวน.}$$

สิ่งที่น่าสนใจยิ่งขึ้นไปอีกก็คือ ลักษณะการแปรผันของสภาพนำปรากฏเมื่อความหนาของชั้นฟิล์มเปลี่ยนแปลง. สำหรับกรณีของ $j = 1$ ซึ่งเป็นสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ สภาพนำปรากฏเขียนได้เป็น

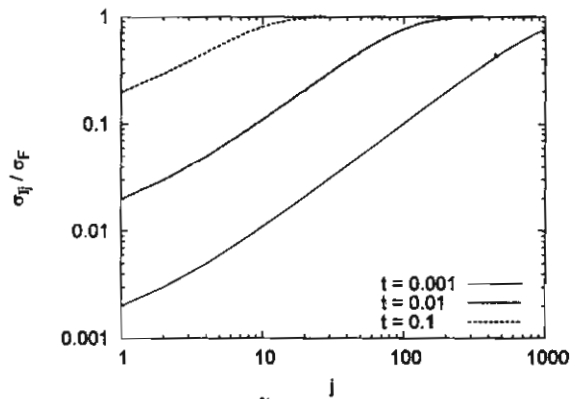
$$\sigma_j = \frac{1+2\zeta^3}{1-\zeta^3} \sigma_F > \sigma_F \text{ สำหรับอนุภาคแกนตัวนำ และ}$$

$$\sigma_j = \frac{1-\zeta^3}{1+(1/2)\zeta^3} \sigma_F < \sigma_F \text{ สำหรับอนุภาคแกนฉนวน.}$$

เมื่อความหนา t ของฟิล์มมากขึ้น สภาพนำปรากฏ σ_j มีค่าต่ำลงสำหรับอนุภาคแกนตัวนำ แต่สูงขึ้นสำหรับอนุภาคแกนฉนวน. รูปที่ 5.1-1 และ 5.1-2 แสดงการเปลี่ยนแปลงของสภาพนำปรากฏ (แสดงด้วยสัญลักษณ์ σ_j ในรูป) ของอนุภาคแกนตัวนำและอนุภาคแกนฉนวน ตามลำดับ. รูปทั้งสองบ่งบอกว่า เมื่อ j มีค่าสูงพอ สภาพนำปรากฏของอนุภาคทั้งสองลู่เข้าสู่ σ_F โดยไม่ขึ้นกับชนิดของแกนกลาง. นอกจากนี้เรายังสังเกตได้ว่า สภาพนำปรากฏของอนุภาคที่มีชั้นฟิล์มบางกว่าลู่เข้าสู่ σ_F ที่ค่า j สูงกว่า.



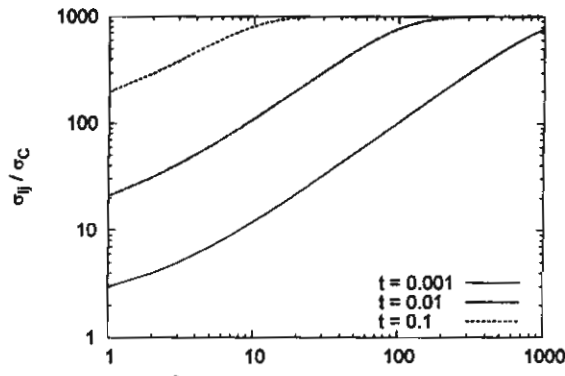
รูปที่ 5.1-1 การแปรผันของสภาพนำปรากฏ(แกนตั้ง)ของอนุภาคแกนตัวนำ ตามอันดับ j ของสนามไฟฟ้า.



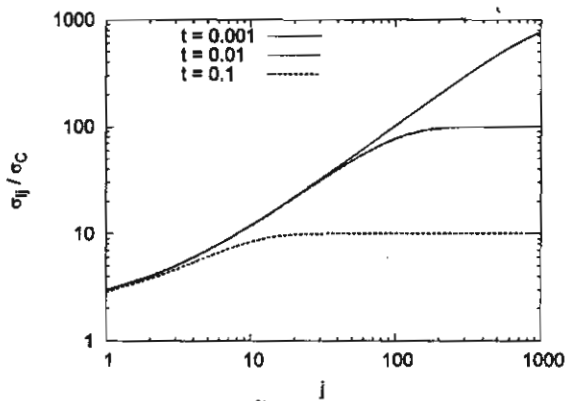
รูปที่ 5.1-2 การแปรผันของสภาพนำปรากฏ(แกนตั้ง)ของอนุภาคแกนฉนวน ตามอันดับ j ของสนามไฟฟ้า.

นอกจากนี้ รูปที่ 5.1-1 และ 5.1-2 ยังแสดงให้เห็นว่า ที่ค่า j ต่ำๆ สภาพนำปรากฏของอนุภาคแกนตัวนำ และอนุภาคแกนฉนวน ถูกกำหนดลักษณะสมบัติด้วยตัวประกอบ σ_F / t และ $\sigma_F t$ ตามลำดับ. ในการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเชิงเลข ชั้นฟิล์มที่บางมากๆ ทำให้การคำนวณให้ได้ความแม่นยำสูงเป็นไปได้ยาก. แนวทางปฏิบัติที่นิยมใช้อยู่เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว ก็คือ การมองชั้นฟิล์มเป็นองค์ประกอบที่ไม่มีความหนา และใช้พารามิเตอร์ที่เรียกว่า *สภาพนำเชิงผิว* (surface conductivity) ในการคำนวณแทน. สภาพนำเชิงผิว σ_s นิยามเป็น $\sigma_s = \sigma_F t$. อย่างไรก็ตาม การวิเคราะห์ในที่นี้แสดงให้เห็นว่า การประมาณด้วยพื้นผิวที่ไม่มีความหนาและใช้สภาพนำเชิงผิวดังกล่าว เหมาะสมกับสถานะที่สภาพนำของชั้นผิวฟิล์มเด่นกว่าสภาพนำของแกนกลางอย่างเพียงพอ. อย่างไรก็ตาม แม้แต่กรณีของอนุภาคแกนฉนวน เราพบว่าสภาพนำปรากฏ ณ สนามไฟฟ้าภายนอกอันดับ $(j-1)$ สูงมีค่าประมาณ σ_F ไม่ใช่ $\sigma_F t$.

รูปที่ 5.1-3 และ 5.1-4 แสดงค่าของสภาพนำปรากฏในกรณีทั่วไป โดยแกนกลางมีสภาพนำค่าหนึ่งที่ไม่เท่ากับศูนย์อยู่. รูปที่ 5.1-3 แสดงการเปลี่ยนแปลงของสภาพนำปรากฏของอนุภาคที่มีความหนาของชั้นฟิล์มต่างกัน โดยค่าอัตราส่วนสภาพนำ Γ_{FC} เท่ากับ 1000. เราสามารถเห็นได้จากรูปที่ 5.1-3 ว่า สภาพนำปรากฏ [ซึ่งเป็นไปตามสมการที่ (3.4-20)] แปรจาก σ_1 (σ , เมื่อ $j = 1$) เข้าสู่ σ_F เมื่อค่า j สูงเพียงพอ. สภาพนำปรากฏมีค่าอยู่ระหว่าง σ_C และ σ_F เสมอ. อนุภาคที่มีความหนาของชั้นฟิล์มน้อยลง จะให้สภาพนำปรากฏต่ำกว่า และสภาพนำปรากฏของอนุภาคจะเข้าสู่ σ_F ช้ากว่า.



รูปที่ 5.1-3 การแปรผันของสภาพนำปรากฏ(แกนตั้ง)ของอนุภาคที่แกนกลางมีสภาพนำเท่ากับ σ_c ตามอันดับ / ของสนามไฟฟ้า. อัตราส่วนสภาพนำของฟิล์มต่อแกนกลางเท่ากับ 1000.



รูปที่ 5.1-4 การแปรผันของสภาพนำปรากฏ(แกนตั้ง)ของอนุภาคแกนฉนวน ตามอันดับ / ของสนามไฟฟ้า. รูปนี้พิจารณาให้อัตราส่วนของสภาพนำเชิงผิวต่อสภาพนำของแกนกลางมีค่าคงที่.

รูปที่ 5.1-4 เปรียบเทียบ σ_s / σ_c ระหว่างอนุภาคที่มีความหนาของชั้นฟิล์มแตกต่างกัน แต่กำหนดให้มีค่าของ σ_s / σ_c เท่ากัน โดย $\sigma_s = \sigma_f t$ ($\sigma_s / \sigma_c = 1$ m). ถ้าสภาพนำไฟฟ้าของแกนกลางคงที่ เราสามารถเห็นได้จากรูปว่า สภาพนำปรากฏมีขนาดเท่ากันโดยประมาณสำหรับทุกอนุภาค ที่ค่า γ / σ_c ต่ำๆ. อย่างไรก็ตาม ที่ค่า γ / σ_c สูงขึ้น สภาพนำปรากฏของอนุภาคที่มีความหนาของชั้นฟิล์มต่างกันก็เริ่มแตกต่างกันออกไป. การเบี่ยงเบนออกจากกันนี้เกิดขึ้นที่ค่า γ / σ_c ต่ำกว่า สำหรับอนุภาคที่มีชั้นฟิล์มหนากว่า. การเบี่ยงเบนนี้แสดงถึงผลตอบสนองของอนุภาคที่แตกต่างกันภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก. ดังนั้น เราสามารถกล่าวได้ว่า ความเหมาะสมในการแทนชั้นฟิล์มด้วยพื้นผิวที่มีสภาพนำเชิงผิว σ_s ที่ไม่มีความหนา นอกจากจะขึ้นอยู่กับสภาพนำและความหนาของชั้นฟิล์มแล้ว ยังขึ้นอยู่กับความไม่สม่ำเสมอของสนามไฟฟ้าภายนอกอีกด้วย.

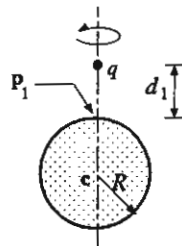
5.2 เปรียบเทียบสนามไฟฟ้าและแรงที่เกิดขึ้นบนอนุภาคที่มีชั้นฟิล์มอยู่

ผู้วิจัยได้คำนวณสนามไฟฟ้าและแรงบนการจัดเรียง 2 รูปแบบ เพื่อแสดงผลของชั้นฟิล์มที่มีต่อสนามและแรง. การจัดเรียงรูปแบบแรกเป็นอนุภาคทรงกลมที่อยู่ห่างจากประจุไฟฟ้า q เป็นระยะเท่ากับ d_1 ดังแสดงในรูปที่ 5.2-1. การจัดเรียงรูปแบบที่สองเป็นอนุภาคทรงกลมสองตัว ที่อยู่ห่างกันเท่ากับ d_2 ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ E_2 . รูปที่ 5.2-2 แสดงการจัดเรียงในรูปแบบที่สอง. การจัดเรียงแบบแรกถูกใช้เพื่อหาลักษณะ

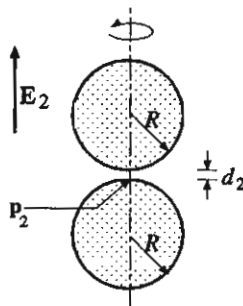
ผลตอบสนองพื้นฐานของอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอ ซึ่งในกรณีนี้เป็นสนามไฟฟ้าที่เกิดจากประจุ. ในอีกทางหนึ่ง ปฏิกริยาที่เกิดขึ้นในการจัดเรียงแบบที่สองมีความซับซ้อนมากกว่า เนื่องจากสำหรับอนุภาคแต่ละตัวแล้ว สนามไฟฟ้าภายนอกที่มันได้รับเป็นผลรวมระหว่างสนามไฟฟ้า E_2 กับสนามไฟฟ้าที่เกิดจากการมีอยู่ของอนุภาคอีกตัวหนึ่ง. สำหรับการวิเคราะห์ที่นี้ ผู้วิจัยกำหนดให้รัศมีของอนุภาคคงที่เท่ากับหนึ่งหน่วย และแปรค่าระยะห่าง d_1 และ d_2 ในการคำนวณ.

ในแต่ละการจัดเรียง ผู้วิจัยได้ทำการคำนวณกับกรณีของอนุภาค 3 ชนิดคือ อนุภาคเนื้อเดียว(ไม่มีชั้นฟิล์ม) อนุภาคแกนตัวนำ และอนุภาคแกนฉนวน. อนุภาคเนื้อเดียวถูกกำหนดให้มีค่าของสภาพนำ $\sigma_I = 10\sigma_E$. อนุภาคแกนตัวนำและอนุภาคแกนฉนวนถูกกำหนดให้ชั้นฟิล์มมีความหนาอยู่ระหว่าง $0.001R$ และ $0.02R$ ซึ่งเป็นขนาดที่พบในทางปฏิบัติของอนุภาคที่มีรัศมีอยู่ในช่วงไมโครเมตร. ในแต่ละคู่พารามิเตอร์ของชนิดแกนกลางและความหนาชั้นฟิล์ม เพื่อให้สามารถเปรียบเทียบได้อย่างเหมาะสม การคำนวณได้ใช้ค่าของ σ_F ที่ทำให้ได้ $\sigma_1 = \sigma_I = 10\sigma_E$. นั่นคือ ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ อนุภาคทั้งสามชนิดให้ผลตอบสนองเหมือนกันทุกประการ.

ผู้วิจัยได้คำนวณสนามไฟฟ้าบนอนุภาคในทั้งสองรูปแบบของการจัดเรียงด้วยวิธีเจามัลติโพล โดยมีสมการการคำนวณแสดงอยู่ในหัวข้อที่ 3.4. การวิเคราะห์มุ่งความสนใจอยู่ที่ค่าสนามไฟฟ้าสูงสุดและแรงที่เกิดขึ้นบนผิวอนุภาค. ขนาดของสนามไฟฟ้าสูงสุดเกิดขึ้นที่จุด p_1 ในการจัดเรียงแบบแรก และจุด p_2 ในการจัดเรียงแบบที่สอง. ข้อสังเกตอีกประการหนึ่งสำหรับการคำนวณก็คือ เนื่องจากการจัดเรียงทั้งสองรูปแบบทำให้สนามไฟฟ้ามีลักษณะสมมาตรรอบแกนหมุน เราจึงสามารถลดรูปสมการการคำนวณ และลดเวลาที่ใช้ในการคำนวณได้.



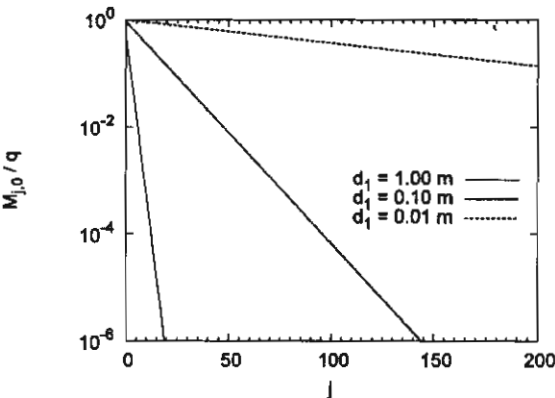
รูปที่ 5.2-1 อนุภาคทรงกลมและจุดประจุ q .



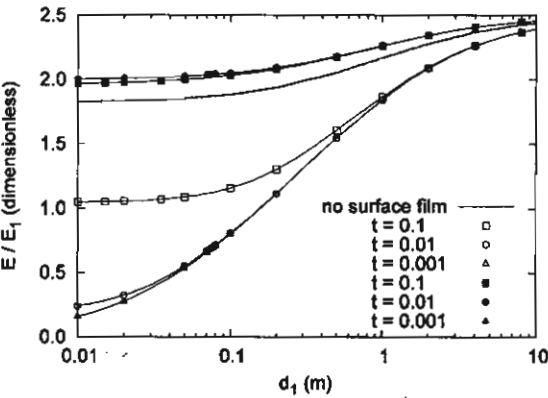
รูปที่ 5.2-2 อนุภาคทรงกลมสองตัวภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ E_2 .

5.2.1 อนุภาคทรงกลมและจุดประจุ

ผลการคำนวณในกรณีนี้แสดงในรูปที่ 5.2-3 ถึง 5.2-5. รูปที่ 5.2-3 แสดงค่าสัมประสิทธิ์ $M_{j,0}$ ของศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากจุดประจุที่ได้ เมื่อกระจายพจน์ของศักย์ไฟฟ้าใหม่ โดยให้มีจุดศูนย์กลางการกระจายอยู่ที่อนุภาค. รูปที่ 5.2-3 ทำให้ทราบถึงการแปรผันของ $M_{j,0}$ เมื่อระยะห่าง d_1 เปลี่ยนแปลง. ($M_{j,k}$ เท่ากับศูนย์ ถ้าหาก $k \neq 0$ เนื่องจากลักษณะของสนามที่สมมาตรรอบแกนหมุน.) จากรูปที่ 5.2-3 เราเห็นได้อย่างชัดเจนว่า $M_{j,0}$ ลดลงอย่างรวดเร็ว เมื่อ j เพิ่มขึ้น สำหรับระยะห่าง d_1 ที่มากเพียงพอ. เมื่อระยะห่าง d_1 มีค่าเล็กลง ศักย์ไฟฟ้าภายนอกและสนามไฟฟ้าภายนอกเนื่องจากจุดประจุจะมีองค์ประกอบอันดับสูงซึ่งไม่สามารถละเลยได้.



รูปที่ 5.2-3 ขนาดของสัมประสิทธิ์ $M_{j,0}$ ของการกระจายศักย์ไฟฟ้า สำหรับ j เท่ากับ 0 ถึง 200.

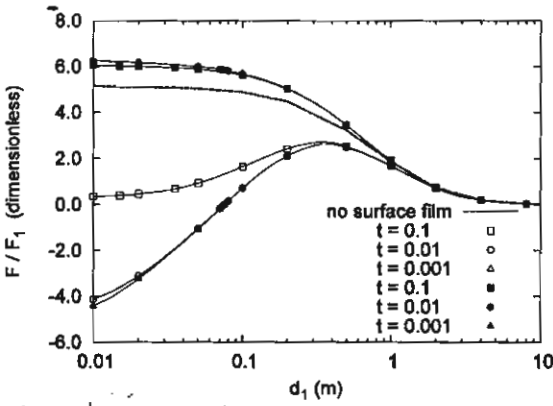


รูปที่ 5.2-4 สนามไฟฟ้า ณ จุด p_1 ในการจัดเรียงแบบแรก (รูปที่ 5.2-1). จุดที่บแสดงผลการคำนวณของอนุภาคแกนฉนวน และจุดโปร่งแสดงผลการคำนวณของอนุภาคแกนตัวนำ.

รูปที่ 5.2-4 แสดงสนามไฟฟ้าที่จุด p_1 เป็นฟังก์ชันของระยะห่าง d_1 ระหว่างจุดประจุและอนุภาค. รูปนี้นำเสนอสนามไฟฟ้าเป็นอัตราส่วนต่อค่า $E_1 = q/(4\pi d_1^2)$ ซึ่งเป็นสนามไฟฟ้า ณ จุด p_1 เมื่อสมมติให้ปราศจากอนุภาค. เราสามารถเห็นได้จากรูปที่ 5.2-5 ว่า ถ้า d_1 มีขนาดมากเพียงพอ อนุภาคทุกชนิดมีสนามไฟฟ้า ณ จุดที่กำลังสนใจอยู่เท่ากัน. เมื่อระยะ d_1 ลดลงเรื่อยๆ อนุภาคแกนฉนวนมีค่าสนามไฟฟ้าสูงขึ้นกว่า ในขณะที่อนุภาคแกนตัวนำมีสนามไฟฟ้าต่ำกว่า เมื่อเปรียบเทียบกับอนุภาคเนื้อเดียวที่ไม่มีชั้นฟิล์ม. ผลของความหนาก็ยังแตกต่างกันออกไปตามชนิดของแกนกลาง. อนุภาคแกนตัวนำที่มีอัตราส่วนของ

ความหนา t/R ต่ำกว่า มีค่าสนามไฟฟ้าสูงกว่า. แนวโน้มของสนามตามความหนาเป็นตรงกันข้าม สำหรับกรณีของอนุภาคแกนฉนวน. อย่างไรก็ตาม การแปรผันของสนามไฟฟ้ารูปมีน้อยลง เมื่อความหนาของชั้นฟิล์มเพิ่มมากขึ้น. โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ความแตกต่างระหว่างกรณี $t/R = 0.01$ และกรณี 0.001 ของอนุภาคแกนฉนวนแทบจะไม่สามารถสังเกตได้ในรูปที่ 5.2-4. สังเกตว่า ที่ค่า d_1 ต่ำๆ สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นมีค่าต่ำกว่า E_1 สำหรับอนุภาคแกนตัวนำที่มี $t/R = 0.01$ และ 0.001 .

รูปที่ 5.2-5 แสดงการเปลี่ยนแปลงของแรงไดโพลเล็กโตรโฟรีติกตามระยะห่าง d_1 . ในลักษณะเดียวกันกับสนามไฟฟ้า เราได้ทำให้แรงเป็นบรรทัดฐานด้วย $F_1 = \frac{1}{2} \epsilon_E E_1^2 R^2$ เมื่อ ϵ_E เป็นสภาพยอมของตัวกลางที่อยู่รอบอนุภาค. แรงถูกคำนวณโดยใช้อินทิกรัลของความเค้นรอบผิวของอนุภาค [14]. (วิธีการคำนวณอีกวิธีหนึ่งก็คือ การหาจากแรงลัพท์ที่ทำกับเงามลติโพลซึ่งได้จากการคำนวณ.) สำหรับการคำนวณแรงบนอนุภาคที่มีคาร์คมีโดจ เราสามารถใช้ค่าแรงที่ทำให้เป็นบรรทัดฐานในรูปที่ 5.2-5 ณ ตำแหน่ง d_1 ที่ต้องการ แล้วปรับค่าด้วยตัวประกอบฐาน F_1 ได้. รูปที่ 5.2-5 แสดงให้เห็นว่า พฤติกรรมของแรงมีความแตกต่างกันไปอย่างชัดเจน ขึ้นอยู่กับชนิดของอนุภาค. เมื่อระยะ d_1 ลดลง แรงดึงดูดที่เกิดขึ้นบนอนุภาคแกนฉนวนจะค่อยๆ มีค่าสูงขึ้นมากกว่าอนุภาคเนื้อเดียว. แรงที่เกิดขึ้นกับอนุภาคแกนตัวนำแสดงลักษณะที่ค่อนข้างซับซ้อน เมื่อมีการเปลี่ยนแปลง d_1 . เมื่อลดระยะห่าง d_1 ในตอนแรก แรงที่เกิดขึ้นมีค่าเพิ่มขึ้น แต่หลังจากที่แรงเพิ่มถึงค่าสูงสุดแล้ว แรงก็จะลดลงเมื่อ d_1 ลดลง. ถ้าหากว่าความหนาของชั้นฟิล์มน้อยเพียงพอ เราสามารถเห็นแรงเปลี่ยนเป็นแรงผลักรที่ค่า d_1 ต่ำๆ เช่นที่ระยะประมาณ 0.07 m สำหรับ $t/R = 0.01$ และ 0.001 ในรูป.

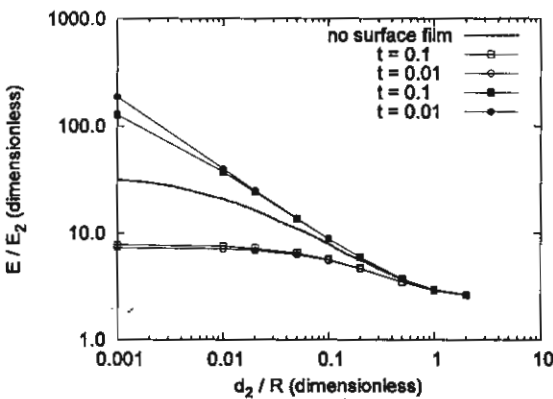


รูปที่ 5.2-5 แรงบนอนุภาคในรูปที่ 5.2-1. จุดทึบแสดงผลการคำนวณของอนุภาคแกนฉนวน และจุดโปร่งแสดงผลการคำนวณของอนุภาคแกนตัวนำ.

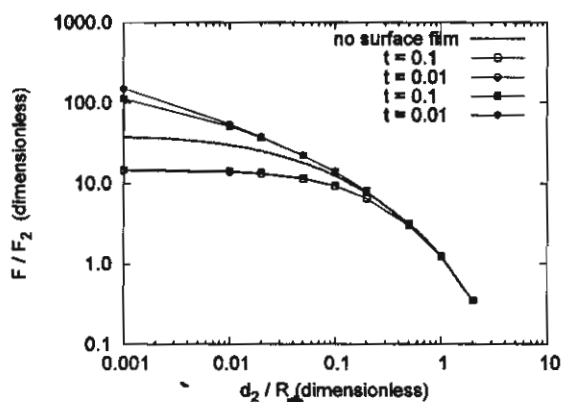
5.2.2 อนุภาคฉนวนทรงกลมสองตัวภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

ในการจัดเรียงรูปแบบนี้ สนามไฟฟ้าบนแต่ละอนุภาคมีค่าสูงขึ้นเนื่องจากตัวอนุภาคนั้นเอง และเนื่องจากการปรากฏอยู่ของอีกอนุภาคหนึ่ง. รูปที่ 5.2-6 แสดงค่าสนามไฟฟ้า ณ จุด p_2 เป็นฟังก์ชันของระยะห่าง d_2 . เราสามารถเห็นได้ว่าการลดลงของระยะห่าง d_2 ทำให้สนามไฟฟ้ามีค่าสูงขึ้นบนอนุภาคทุกชนิดที่พิจารณา. ในลักษณะที่คล้ายคลึงกับการจัดเรียงแบบแรก สนามไฟฟ้าบนอนุภาคแกนตัวนำมีค่าต่ำกว่า และสนามบนอนุภาคแกนฉนวนมีค่าสูงกว่า เมื่อเทียบกับอนุภาคเนื้อเดียว. การลดลงของชั้นฟิล์มทำให้สนามไฟฟ้าบนอนุภาคแกนตัวนำลดลง แต่ทำให้สนามไฟฟ้าบนอนุภาคแกนฉนวนสูงขึ้น. สังเกตว่า สนามไฟฟ้าสำหรับ $t/R = 0.001$ ถูกละเลย ไม่แสดงในรูป เนื่องจากสนามมีค่าใกล้กับกรณีของ $t/R = 0.01$ มาก.

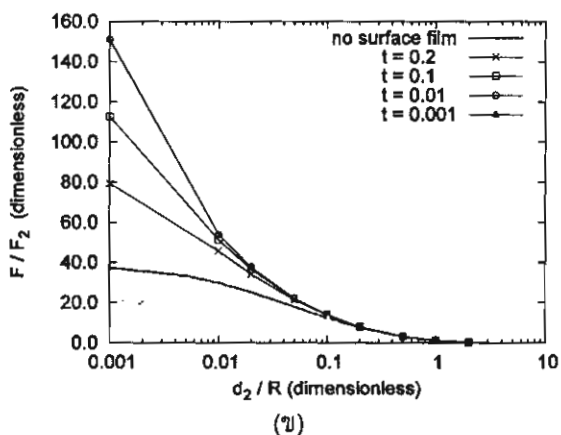
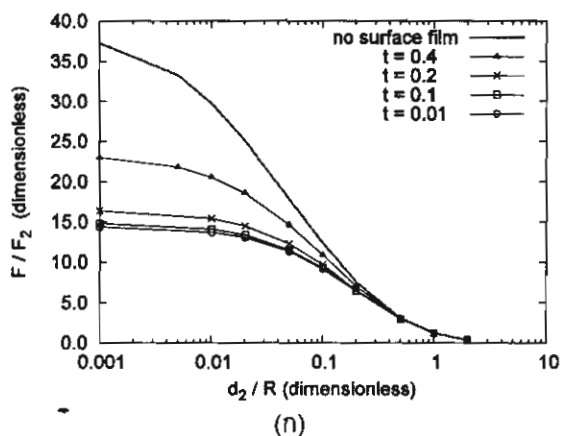
รูปที่ 5.2-7 เปรียบเทียบแรงไดโพลไฟฟ้ากับอนุภาคทั้งสามชนิด ที่ระยะแยก d_2 ระหว่างอนุภาคต่างๆ. เราเห็นได้ว่า แรงมีขนาดสูงขึ้นเมื่อลดระยะแยก สำหรับอนุภาคทุกชนิด. เมื่อเปรียบเทียบกับอนุภาคเนื้อเดียวที่ไม่มีชั้นฟิล์ม แนวโน้มของแรงบนอนุภาคมีลักษณะเดียวกับของสนามไฟฟ้าในรูปที่ 5.2-6. แรงในการจัดเรียงแบบนี้เป็นแรงดึงดูดเสมอ โดยมีแนวโน้มที่จะลดระยะแยก. การแปรผันของแรงกับความหนาของฟิล์มแสดงให้เห็นอย่างชัดเจนมากขึ้นในรูปที่ 5.2-8 ซึ่งแสดงขนาดของแรงแยกตามชนิดของอนุภาค. ค่าอิมิตีวของแรงเมื่อ $t/R \rightarrow 0$ และ $d_2/R \rightarrow 0$ สามารถเห็นได้ในรูปที่ 5.2-8(ก) สำหรับอนุภาคตัวนำ แต่ไม่สามารถเห็นได้ในรูปที่ 5.2-8(ข) สำหรับอนุภาคฉนวน. ทั้งนี้เนื่องจากว่า ด้วยเงื่อนไขที่ค่า σ_1 คงที่เมื่อ t ลดลง สภาพนำของฟิล์ม σ_F ลู่เข้าสู่ศูนย์ในกรณีของอนุภาคตัวนำ แต่ลู่เข้าสู่นันต์ในกรณีของอนุภาคฉนวน. การเพิ่มของสภาพนำของชั้นฟิล์มนำไปสู่สนามไฟฟ้าและแรงค่าสูงมาก. ดังนั้น เราจะได้จากรูปที่ 5.2-8(ข) ว่า แรงเพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอเมื่อลดค่า d_2 ที่ความหนาของชั้นฟิล์มน้อยๆ.



รูปที่ 5.2-6 สนามไฟฟ้า ณ จุด p_2 ในการจัดเรียงของรูปที่ 5.2-2. จุดที่บแสดงผลการคำนวณของอนุภาคแกนฉนวน และจุดปแสดงผลการคำนวณของอนุภาคแกนตัวนำ.



รูปที่ 5.2-7 แรงบนอนุภาคในรูปที่ 5.2-2. จุดที่บแสดงผลการคำนวณของอนุภาคแกนฉนวน และจุดป้รงแสดงผลการคำนวณของอนุภาคแกนตัวนำ.

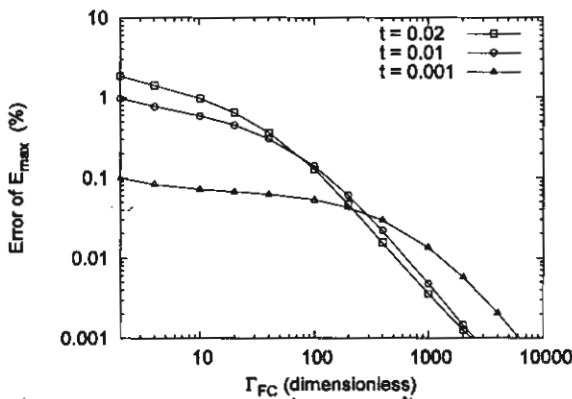


รูปที่ 5.2-8 การแปรผันแรงบนอนุภาคในรูปที่ 5.2-2 ตามความหนาของชั้นฟิล์ม.
(ก) อนุภาคแกนตัว และ (ข) อนุภาคแกนฉนวน.

5.3 ผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงเลขโดยใช้สภาพนำเชิงผิวเป็นพารามิเตอร์

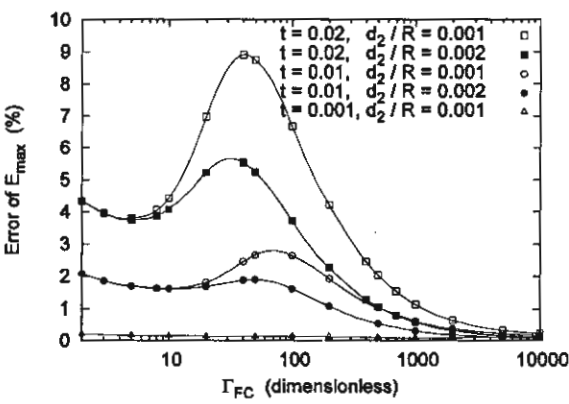
ในการคำนวณด้วยวิธีเชิงเลขต่างๆ ชั้นฟิล์มมักถูกจำลองด้วยพื้นผิวที่ไม่มีความหนา แต่มีสภาพนำเชิงผิวเท่ากับ σ_s . หัวข้อนี้เปรียบเทียบผลการคำนวณด้วยวิธีเงาประจุ ซึ่งเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์ กับผลการคำนวณด้วยวิธีเชิงเลขที่ใช้สภาพนำเชิงผิวในการคำนวณ. วิธีเชิงเลขที่ใช้ในที่นี้คือ วิธีชั้นประกอบขอบเขต ซึ่งเป็นวิธีประเภทแบ่งขอบเขต. หลักการคำนวณด้วยสภาพนำเชิงผิวด้วยวิธีชั้นประกอบขอบเขต มีรายละเอียดอยู่ในเอกสารอ้างอิงที่ [27] และ [28]. ผู้วิจัยได้ใช้วิธีชั้นประกอบขอบเขตคำนวณสนามไฟฟ้าในการจัดเรียงแบบที่สอง (รูปที่ 5.2-2) โดยให้ $\sigma_C = \sigma_E = 1$ และแปรค่าความหนา t ของชั้นฟิล์ม และสภาพนำ(เชิงปริมาตร) σ_F ของชั้นฟิล์ม เพื่อดูผลของพารามิเตอร์ทั้งสองนี้. การคำนวณด้วยวิธีชั้นประกอบขอบเขตใช้ลักษณะสมมาตรรอบแกนหมุน และลักษณะสมมาตรในแนวตั้งระหว่างอนุภาคทั้งสอง เพื่อเพิ่มความแม่นยำในการคำนวณ. การคำนวณได้แบ่งเอลิเมนต์บนผิวของอนุภาคอย่างละเอียด โดยมี 480 เอลิเมนต์กำลังสองผิวโค้ง ตั้งแต่ช่วงมุม θ ของระบบพิกัดทรงกลมเท่ากับ 0 ถึง 180 องศา เพื่อลดความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการจำลองพื้นผิวและการแบ่งช่วงศักย์และสนามไฟฟ้า. ด้วยเหตุนี้ เราจึงพิจารณาว่า ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในผลการคำนวณ เกิดจากผลของความไม่เหมาะสมในการแทนพื้นผิวฟิล์มจริงด้วยพื้นผิวที่มีความหนาเป็นศูนย์.

รูปที่ 5.3-1 แสดงความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าที่คำนวณได้จากวิธีชั้นประกอบขอบเขต เมื่ออนุภาคอยู่ห่างกันมากๆ. ความคลาดเคลื่อนสนามไฟฟ้าหาที่จุดที่มีค่าสนามไฟฟ้าสูงสุด (จุด p_2 ในรูปที่ 5.2-2). เราสามารถเห็นได้จากรูปว่า ความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลงเมื่ออัตราส่วนสภาพนำของฟิล์มต่อแกนกลาง Γ_{FC} เพิ่มขึ้น. การลดลงของความคลาดเคลื่อนนี้รวดเร็วมากขึ้น เมื่อสภาพนำของฟิล์มมีความเด่นต่อค่าสนามไฟฟ้า. การเปลี่ยนแปลงความชันเกิดขึ้นที่ Γ_{FC} ต่ำกว่า สำหรับอนุภาคที่มีความหนาของฟิล์มมากกว่า. สำหรับ Γ_{FC} ค่าต่ำ ความคลาดเคลื่อนมีค่าสูงบนอนุภาคที่มีฟิล์มหนากว่า. อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่มีสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ ความคลาดเคลื่อนในทุกกรณีมีค่าต่ำ โดยไม่เกิน 2% ในรูป.



รูปที่ 5.3-1 ความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าสูงสุดที่ได้จากวิธีชั้นประกอบขอบเขต เมื่ออนุภาคทั้งสองอยู่ห่างกันมาก.

รูปที่ 5.3-2 แสดงความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้า เมื่ออนุภาคทั้งสองอยู่ใกล้กัน. เราสามารถเห็นได้อย่างชัดเจนว่า ความคลาดเคลื่อนสูงกว่าอย่างมาก เมื่อเทียบกับกรณีของอนุภาคที่อยู่ห่างกันในรูปที่ผ่านมา. รูปที่ 5.3-2 แสดงว่า ความหนาของชั้นฟิล์มทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนสูงขึ้น เมื่อพิจารณาที่ Γ_{FC} และระยะห่างเดียวกัน. การแปรผันของความคลาดเคลื่อนตาม Γ_{FC} มีความซับซ้อนในกรณีของอนุภาคที่อยู่ใกล้กัน. การเพิ่มขึ้นของ Γ_{FC} ทำให้ความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าสูงขึ้น เนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอกประกอบด้วยองค์ประกอบที่มีอันดับสูงขึ้น แต่ก็มีผลลดความคลาดเคลื่อนด้วย เนื่องจากผลของสภาพนาของชั้นฟิล์มเด่นมากขึ้น ซึ่งทำให้การประมาณด้วยสภาพนาเชิงผิวเหมาะสมขึ้น. ด้วยเหตุนี้ ความคลาดเคลื่อนในรูปที่ 5.3-2 จึงอาจลดลง หรือเพิ่มขึ้นตามค่า Γ_{FC} ก็ได้. อย่างไรก็ตาม ที่ Γ_{FC} สูงมากๆ ความคลาดเคลื่อนลดลงต่ำกว่า 1%. นอกจากนี้ ถ้าหากว่าความหนาของชั้นฟิล์มเล็กเพียงพอ (เช่น 0.001 ในรูป) เราได้ความคลาดเคลื่อนที่ต่ำมาก โดยไม่ขึ้นกับ Γ_{FC} มากนัก.



รูปที่ 5.3-2 ความคลาดเคลื่อนของสนามไฟฟ้าสูงสุดที่ได้จากวิธีชั้นประกอบขอบเขต เมื่ออนุภาคทั้งสองอยู่ใกล้กัน.

6. สรุปผลการศึกษาที่ได้จากโครงการวิจัย

ผลการวิจัยที่ได้ในโครงการนี้สามารถสรุปเป็นหมวด ตามเนื้อหาในหัวข้อที่ 3, 4 และ 5 ได้ดังนี้

6.1 เทคนิคการวิเคราะห์สนามไฟฟ้า

งานวิจัยนี้ได้นำเสนอวิธีแก้มัลติโพล ซึ่งเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์ใหม่ โดยเป็นวิธีที่ให้ความแม่นยำสูง ทั้งในกรณีทีสนามไฟฟ้ามีลักษณะสมมาตรรอบแกนหมุน และในกรณีที่สนามไฟฟ้าแบบ 3 มิติทั่วไป. วิธีที่นำเสนอนี้มีข้อดีเหนือกว่าวิธีที่มีอยู่ ในแง่ของความสามารถที่คำนวณได้กับการจัดเรียงของอนุภาคที่หลากหลายกว่า และยังใช้หน่วยความจำในการคำนวณน้อยกว่าด้วย. วิธีวิเคราะห์นี้ได้ถูกนำมาใช้ประเมินความแม่นยำในแง่ต่างๆ ของวิธีขึ้นประกอบขอบเขต ซึ่งเป็นวิธีเชิงเลข.

6.2 สนามไฟฟ้าในระบบอนุภาคแบบสมมาตรรอบแกนหมุน

ผลการศึกษากับโซ่อนุภาคที่มีการจัดเรียงรูปแบบต่างๆ พบว่า สนามไฟฟ้าสูงสุดบนอนุภาคเพิ่มขึ้นตามจำนวนของอนุภาค สภาพยอม(ค่าคงตัวทางไฟฟ้า)ของอนุภาค และระดับความไม่สม่ำเสมอของสนามไฟฟ้าภายนอกที่กระทำกับโซ่อนุภาค. สนามไฟฟ้าสูงสุดนี้สามารถประมาณได้ด้วยสมการรูปแบบง่ายๆ ที่ได้นำเสนอในงานวิจัย.

6.3 สนามไฟฟ้าและแรงในระบบอนุภาคแบบ 3 มิติทั่วไป

ผลการศึกษากับโซ่อนุภาคที่มีการจัดเรียงตัวแบบ 3 มิติทั่วไป (ไม่จำเป็นต้องมีลักษณะสมมาตรรอบแกนหมุน) พบว่า แรงที่กระทำกับโซ่อนุภาคขึ้นอยู่กับมุมระหว่างสนามไฟฟ้าภายนอกและแนวทิศทางของโซ่อย่างมาก. ขนาดของแรงดึงดูดและแรงผลักสูงสุดของอนุภาคในโซ่เพิ่มขึ้นอย่างเล็กน้อย ตามจำนวนของอนุภาคในโซ่นั้น และจะลู่เข้าสู่ค่าอิมิตัวของแรงเมื่ออนุภาคมีจำนวนมากเพียงพอ. การศึกษาบนโซ่ของอนุภาคสองตัวที่อนุภาคตัวล่างอยู่ติดกับระนาบอิเล็กโตรดแสดงให้เห็นว่า แรงที่กระทำกับอนุภาคตัวล่างดึงดูดอนุภาคเข้ากับระนาบอิเล็กโตรด. ระนาบอิเล็กโตรดทำให้โซ่อนุภาคมีเสถียรภาพในช่วงมุม θ_E (ระหว่างโซ่กับสนามไฟฟ้า) ที่กว้างขึ้น. นอกจากนี้ โซ่ยังถูกดึงดูดด้วยแรงที่มากกว่าในกรณีที่ไม่มีระนาบตัวนำ สำหรับเกือบทุกค่ามุม θ_E . การศึกษาผลของระนาบอิเล็กโตรดบนโซ่ที่มีต่อแรงบนโซ่อนุภาคพบว่า ผลของระนาบอิเล็กโตรดนี้มีไม่มากและสามารถละเลยได้ เว้นแต่โซ่อนุภาคจะอยู่ใกล้กับระนาบอิเล็กโตรดบนมากๆ.

6.4 ผลของอิเล็กโตรดต่อแรงบนโซ่อนุภาค

ผู้วิจัยได้ศึกษาสนามไฟฟ้าและแรงบนโซ่ของอนุภาค ที่วางตัวอยู่ในระบบอิเล็กโตรดแบบระนาบคู่ขนาน โดยได้กำหนดรูปแบบการจัดเรียงของโซ่ต่างกัน 4 รูปแบบ. ผลการคำนวณแสดงว่า สนามไฟฟ้าสูงสุดที่เกิดขึ้นบนจุดสัมผัสระหว่างอนุภาคสามารถประมาณได้ด้วยสมการในรูปแบบง่าย. แรงไดอิเล็กโตรโฟรีติกบนโซ่อนุภาคขึ้นอยู่กับอย่างมากกับ รูปแบบการเรียงตัวของเรขาคณิตของโซ่ เมื่อได้รับแรงเฉือนจากภายนอก. อย่างไรก็ตาม แรงในแนวนอนที่ทำกับอนุภาคด้วยของโซ่มีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศของแรงเฉือนภายนอกเสมอ. มุมเอียงระหว่างโซ่กับอนุภาคซึ่งทำให้เกิดแรงแนวนอนสูงสุดขึ้นอยู่กับ รูปแบบการเรียงตัวของโซ่เช่นเดียวกัน และยังขึ้นกับอัตราส่วนของสภาพยอมของอนุภาคต่อสภาพยอมของของเหลวที่อยู่รอบอนุภาคด้วย. การศึกษานี้พบว่า วิธีการประมาณแรงในแนวนอนสูงสุดที่ได้มีการนำเสนอ ให้ค่าแรงที่ไม่สอดคล้องกับผลการคำนวณในที่นี้. นอกจากนี้ การประมาณแรงโดยใช้โซ่จำนวนอนันต์ให้ค่าแรงที่สูงกว่าค่าที่เกิดขึ้นจริง.

6.5 ผลของรูปร่างอนุภาคต่อสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส

การคำนวณสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสระหว่างอนุภาคทรงรีหรือทรงกระบอกที่มีหน้าตัดเป็นวงรี กับระนาบอิเล็กโตรดพบว่า ค่าสนามไฟฟ้าเพิ่มขึ้นเมื่ออัตราส่วนความยาวแกนโทต่อแกนเอกของอนุภาคลดลง. สนามไฟฟ้าเพิ่มขึ้นตามอัตราส่วนของค่าคงตัวทางไฟฟ้าของอนุภาคต่อของเหลวที่อยู่รอบ. ความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าที่จุดสัมผัส กับอัตราส่วนความยาวแกนและอัตราส่วนค่าคงตัวทางไฟฟ้า มีความซับซ้อน ไม่สามารถประมาณเป็นฟังก์ชันแบบง่ายได้. สำหรับช่วงอัตราส่วนค่าคงตัวทางไฟฟ้าระหว่าง 1 ถึง 8 เราใช้สมการประมาณ 2 สมการคำนวณหาสนามไฟฟ้าที่จุดสัมผัสได้ โดยมีความคลาดเคลื่อนของผลการประมาณที่ประมาณ 6.6% หรือต่ำกว่า. สำหรับค่าอัตราส่วนค่าคงตัวทางไฟฟ้าที่สูงขึ้น สนามไฟฟ้าเพิ่มเป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลังอันดับ k ของอัตราส่วนค่าคงตัวทางไฟฟ้า.

6.6 ผลของความนำไฟฟ้าต่อแรงและสนามไฟฟ้าบนอนุภาค

ผู้วิจัยได้นำเสนอแนวความคิดเกี่ยวกับ *สภาพนำปรากฏ* ของอนุภาคที่ประกอบด้วยแกนกลางและชั้นฟิล์ม. การใช้สภาพนำปรากฏมาวิเคราะห์ลักษณะสมบัติของอนุภาค ทำให้สามารถเปรียบเทียบผลตอบสนองของอนุภาคต่อสนามไฟฟ้าภายนอกได้อย่างชัดเจน. การศึกษาแสดงให้เห็นว่า ผลตอบสนองของอนุภาคที่มีชั้นฟิล์มเคลือบอยู่ มีลักษณะเฉพาะซึ่งไม่สามารถแทนได้ด้วยอนุภาคแบบเนื้อเดียว ยกเว้นกรณีพิเศษบางกรณีเท่านั้น. สภาพนำปรากฏแปรผันกับอันดับของสนามไฟฟ้า โดยมีลักษณะการแปรผันที่ต่างกัน ระหว่างอนุภาคแกนตันและอนุภาคแกนฉนวน. ผลการศึกษากับตัวอย่างการจัดเรียงสองรูปแบบทำให้ทราบถึงความแตกต่างระหว่างอนุภาคชนิดต่างๆ เมื่อได้รับสนามไฟฟ้าภายนอก. เมื่อเปรียบเทียบกับอนุภาคเนื้อเดียว สนามไฟฟ้าและแรงมีค่าต่ำกว่าบนอนุภาคแกนตัน แต่สูงกว่าบนอนุภาคแกนฉนวน. การคำนวณเชิงเลขที่มองชั้นฟิล์มเป็นชั้นความหนาเท่ากับศูนย์ที่มีสภาพนำเชิงผิวอาจไม่เหมาะสมในบางกรณี โดยขึ้นอยู่กับความหนาของฟิล์ม สภาพนำของฟิล์ม และขึ้นอยู่กับลักษณะของสนามไฟฟ้าภายนอกด้วย.

7. เอกสารอ้างอิง

- [1] T.C. Jordan and M.T. Shaw, IEEE Trans. Electr. Insulat. **24**, 849 (1989).
- [2] K.O. Havelka and C.F. Filisk (Eds.), *Progress in electrorheology* (Plenum Press, New York and London, 1995).
- [3] G. Bossis (Ed.), Proceedings of the 8th International Conference on Electrorheological Fluids and Magnetorheological Suspensions (2001).
- [4] X. Tang, C. Wu, and H. Conrad, J. Appl. Phys. **78**, 4183 (1995).
- [5] C.W. Wu and H. Conrad, J. Appl. Phys. **81**, 383 (1997).
- [6] C.W. Wu and H. Conrad, J. Appl. Phys. **81**, 8057 (1997).
- [7] P. Atten, C. Boissy, and J.N. Foulc., J. Electrostat. **40-41**, 3 (1997)
- [8] B. Liu, S.A. Boggs, and M.T. Shaw, IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insulat. **8**, 173 (2001).
- [9] D.M. Taylor and P.E. Secker, *Industrial electrostatics* (John Wiley, New York, 1994).
- [10] J. Robertson and B.R. Varlow, Proceedings of the 7th International Conference on Properties and Applications of Dielectric Materials (2003), 761.
- [11] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, and L.C. Wrobel, *Boundary element techniques: theory and applications in engineering* (Springer-Verlag, 1984).
- [12] C.A. Brebbia, *The boundary element method for engineering* (Pentech Press, 1984).
- [13] R. Ingarden and J. Jamiolkowski, *Classical electrodynamics* (Elsevier, Amsterdam, 1985).
- [14] D.J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics* (Englewood Cliffs, NJ, 1989).
- [15] P.M. Morse and H. Feshbach, *Method of theoretical physics* (McGraw-Hill, 1953).
- [16] M. Washizu and T.B. Jones, IEEE Trans. Ind. Appl. **95**, 1586 (2004).
- [17] L. Greengard and V. Rokhlin, Acta Numerica **6** (1997)
- [18] A. Sihvola and J.A. Kong, IEEE Trans. Geosci. Remote Sens. **GE-26**, 420 (1988).
- [19] A.H. Sihvola and I.V. Lindell, Proceedings of the Antenna and Propagation Society International Symposium (1988), 388.
- [20] T.B. Jones, *Electromechanics of particles* (Cambridge University Press, New York, 1995).
- [21] Y. Nakajima and T. Matsuyama, J. Inst. Electrostat. Jpn. **25**, 215 (2001).
- [22] T. Takuma, IEEE Trans. Electr. Insul. **26**, 500 (1991).
- [23] L.C. Davis, J. Appl. Phys. **81**, 1985 (1997).
- [24] P. Gonon, et al., J. Appl. Phys. **86**, 7160 (1999).
- [25] C.W. Wu and H. Conrad, J. Appl. Phys. **81**, 383 (1997).
- [26] C.W. Wu and H. Conrad, J. Appl. Phys. **81**, 8057 (1997).
- [27] A. Nicolas, J.L. Rasolonjanahary and L. Krahenbuhl, IEEE Trans. Magn. **28**, 1473 (1992).
- [28] B. Techaumnat, S. Hamada, and T. Takuma, J. Electrostat. **56**, 67 (2002).