



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ

แบบจำลองเชิงตัวเลขของการไหลแบบพัลส์ภายใน ท่อที่ยืดหยุ่นได้

โดย

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ยศธนา คุณาทร

รองศาสตราจารย์ ตะวัน สุจริตกุล

มิถุนายน พ.ศ. 2549

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ

แบบจำลองเชิงตัวเลขของการไหลแบบพัลส์ภายใน
ท่อที่ยืดหยุ่นได้

คณะผู้วิจัย

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ยศธนา คุณาทร มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

รองศาสตราจารย์ ตะวัน สุจริตกุล มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

สนับสนุนโดยทบวงมหาวิทยาลัย และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย ทบวงฯ และ สกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

คำนำ

โครงการวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากทบวงมหาวิทยาลัย และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย ภายใต้สัญญาเลขที่ MRG4680142 โดยโครงการวิจัยนี้ ได้ทำการพัฒนาแบบจำลองเชิงตัวเลขของการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ ซึ่งจะมีความซับซ้อนอยู่ที่การเกิดปฏิสัมพันธ์ระหว่างท่อ และของไหลภายในท่อ โดยที่โครงการนี้ได้ใช้เทคนิค Finite Volume Method ในการพัฒนาแบบจำลอง จากนั้นได้ทำการศึกษาพฤติกรรมของการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ เพื่อสร้างองค์ความรู้พื้นฐานระหว่างความสัมพันธ์ ของความดัน และการกระจายตัวของความเร็วไว้ประยุกต์ใช้ในการไหลที่เกี่ยวข้องเช่น การไหลภายในเส้นเลือด ต่อไป

เนื่องจากงานวิจัยนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการไหลที่ขึ้นอยู่กับเวลา การนำเสนอด้วยภาพเคลื่อนไหวจึงจะสามารถทำให้เข้าใจได้ง่ายและชัดเจน แต่การนำเสนอผลในรูปแบบดังกล่าวไม่สามารถทำได้ในรายงานฉบับนี้ ผู้วิจัยจึงได้นำเสนอผลวิจัยแบบสรุป เพื่อที่จะให้เข้าใจในผลได้ดีและกระชับที่สุด

ผู้วิจัยหวังว่าผลการวิจัยนี้จะสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานด้านวิศวกรรม และสาขาอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องให้เกิดประโยชน์ได้ต่อไป

คณะผู้วิจัย

มิถุนายน 2549

กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณทบวงมหาวิทยาลัย และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัยที่อุดหนุนทุนวิจัยสำหรับดำเนินโครงการวิจัยนี้ ตลอดจนอำนวยความสะดวกทุกอย่าง จนโครงการวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี นอกจากนี้ คณะผู้วิจัยขอขอบคุณคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ และมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ที่อำนวยความสะดวกในเรื่องเอกสาร และการใช้ทรัพยากรของหน่วยงาน

ผู้วิจัยขอขอบคุณ รศ. ตะวัน สุจริตกุล ที่ให้ความกรุณาเป็นนักวิจัยพี่เลี้ยง และให้คำปรึกษาที่ดีตลอดมาจนทำให้งานวิจัยนี้ประสบผลสำเร็จตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้

บทคัดย่อ

การศึกษาการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในศาสตร์สาขาอื่น ๆ ได้มากมาย โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การไหลเวียนโลหิตในร่างกายของมนุษย์ ประสิทธิภาพของการไหลประเภทนี้จะมีควมซับซ้อนมากกว่าการไหลภายในท่อแข็งเกร็งเนื่องจาก ของไหลมีการเคลื่อนที่ทั้งในแนวรัศมี และในแนวทิศทางการไหล ดังนั้นความดันตกคร่อมที่ทำให้เกิดการไหลจะทำให้เกิดการเคลื่อนตัวของของไหล และผนังท่อ ณ จุดใดจุดหนึ่งก่อนที่จะกระจายการเคลื่อนที่ดังกล่าวลงไปตามทิศทางการไหลในลักษณะของคลื่น ซึ่งการศึกษาในเรื่องนี้จะทำให้เรามีความเข้าใจเกี่ยวกับการปฏิสัมพันธ์ระหว่างของไหลและผนังท่อที่ดีขึ้น ซึ่งจะสามารถนำเอาองค์ความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในการวินิจฉัยโรคหลอดเลือดต่อไปได้ในอนาคต

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างแบบจำลองเชิงตัวเลข 2 มิติ ของการไหลในท่อที่ยืดหยุ่นได้ เพื่อศึกษาถึงพฤติกรรมของการไหลแบบพัลส์ภายในท่อประเภทนี้ โดยในระยะแรกจะมุ่งศึกษาการไหลแบบพัลส์ภายในท่อเกร็งก่อน เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง และเพื่อสร้างองค์ความรู้พื้นฐานไว้สำหรับศึกษาเกี่ยวกับท่อยืดหยุ่นได้ต่อไป แบบจำลองเชิงตัวเลขในงานวิจัยนี้ถูกสร้างขึ้นโดยใช้วิธีไฟไนต์วอลุ่ม และคำนวณหาคำตอบด้วยวิธีซิมเพลก (SIMPLEC) สหามความเร็วและความดันที่คำนวณได้จากแบบจำลองได้ถูกนำไปวิเคราะห์ และเปรียบเทียบกับผลทางทฤษฎี ผลจากแบบจำลองแสดงให้เห็นว่า อัตราการไหล ขึ้นอยู่กับความถี่ของคลื่นความดันที่ทำให้เกิดการไหล โดยอัตราการไหลจะมีค่าใกล้เคียงกับอัตราการไหลของการไหลแบบคงตัวที่ความดันขั้วเท่ากัน และมีเฟสของคลื่นความเร็วใกล้เคียงกับเฟสของคลื่นความดัน และเมื่อความถี่ของคลื่นความดันเพิ่มขึ้น อัตราการไหลจะลดลง และเฟสของความเร็วจะตามหลังเฟสของความดันมากขึ้นเนื่องจากความเฉื่อยของของไหลที่ไม่สามารถตอบสนองต่อความถี่ได้ทัน หากกระตุ้นการไหลด้วยความดันที่สูงมาก อัตราการไหลจะลดลงจนเป็นศูนย์

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาการไหลแบบคงตัวภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ทั้งทางด้านแบบจำลองและการทดลองโดยศึกษาในช่วงของ ตัวเลขเรย์โนลด์ตั้งแต่ 800 ถึง 1400 ผลการเสียรูปที่ได้จากแบบจำลองสอดคล้องกับผลที่ได้จากการทดลอง อย่างไรก็ตามความคลาดเคลื่อนของผลระหว่างแบบจำลองและการทดลองเพิ่มขึ้นตามความยาวของท่อ ซึ่งเป็นผลมาจากการโก่งตัวและการเสียรูปที่ไม่เป็นรูปวงกลมของท่อในการทดลอง ผลดังกล่าวนี้จะไม่เกิดในแบบจำลองเนื่องจากสมมติฐานกำหนดให้ท่อเกิดการเสียรูปในลักษณะสมมาตรเป็นวงกลม

การศึกษาการไหลแบบพัลส์ภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ผ่านแบบจำลองเชิงตัวเลขสองมิติที่พัฒนาขึ้นนั้นกระทำที่อัตราการไหล ความถี่ และค่ายังโมดูลัสต่าง ๆ โดยการศึกษาผลกระทบของตัวแปรเหล่านี้กระทำในช่วงของตัวเลขไวเมอร์สลีย์ ตั้งแต่ 3.36 ถึง 6.67 และตัวเลขเรย์โนลด์ตั้งแต่ 800 ถึง 1400 ผลจากการศึกษาพบว่าความยาวของท่อไม่มีผลกระทบต่อการกระจายตัวของความดัน และการกระจายตัวของสหามความเร็วจะเกิดขึ้นทั้งในแนวรัศมี และในแนวทิศทางการไหลของท่อ โดยจะเกิดการเคลื่อนที่ของคลื่นความดันและคลื่นความเร็วไปในทิศทางการไหล ค่าความแตกต่างระหว่างเฟสของความดันและความเร็วจะมีค่าเพิ่มขึ้นตามความถี่ของความดัน ที่ค่าความยืดหยุ่นต่ำๆจะมีผลทำให้ท่อเกิดการขยายตัวมากกว่าที่ค่าความยืดหยุ่นสูงๆ ความเค้นที่เกิดขึ้นกับผนังท่อจะเกิดขึ้นมากเมื่อท่ออยู่ภายใต้ความดันสูงหรือที่ค่า อัตราการไหลสูง และในการไหลแบบออสซิลลาทอรีพบว่าเฟสของความเร็วจะตามหลังเฟสของความดันอยู่ 45 องศาเนื่องจากความเฉื่อยของของไหลและที่ความถี่ต่ำๆนั้นค่าของการเปลี่ยนแปลงของความเร็วตามแนวรัศมีจะมีค่ามากและค่อยๆลดลง

แบบจำลองเชิงตัวเลขของการไหลแบบพัลส์ภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ ค

ขนาดของความเร็วสูงสุดที่ลดลงจะแปรผันตามความถี่ของความดัน การศึกษานี้ได้ทำให้เราทราบพฤติกรรม
พื้นฐานของการปฏิสัมพันธ์ระหว่างท่อกับของไหล ซึ่งจะสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับงานที่เกี่ยวข้องต่อไปใน
อนาคตได้

Abstract

The study of pulsatile flow through a compliant tube has multiple applications especially within human body. This phenomenon is more complex than flow inside a rigid tube. Because of the motion of the tube wall, the fluid radial velocity at the wall is no longer zero. Thus, the driving pressure changes cause local movements of the fluid and tube wall, which then propagate downstream in the form of a wave. This study will provide us a better understanding role of the flow-wall interaction and can be applied with the vascular disease diagnostic in the future.

The objective of this research is to study the behavior of pulsatile flow in a compliant tube using two-dimensional numerical model. The first stage of this study focused on the pulsatile in a rigid tube in order to develop a fundamental understanding before moving on to the pulsatile flow in a compliant tube. The numerical modeling was built by using the finite volume method and solved with SIMPLEC technique. The velocity field and pressure distribution was analyzed and compared with the linear theoretical solution. The numerical result shows that amplitude of flow rate depends on the frequency of applied pressure. For low frequency pressure, the amplitude velocity field is close to steady flow velocity and maximum velocity is almost in-phase with the pressure. As the pressure frequency increases, the maximum velocity magnitude decreases. Also the lag of velocity phase can be observed because of the fluid inertia. If the excited frequency is too high, the fluid is unable to response the change, and the maximum velocity magnitude approaches zero.

The steady flow in a compliant also studied numerically and experimentally. Flow rate was varied based on the Reynolds number from 800 to 4100. The tube deformation of the numerical model matched well with the experimental and the theoretical result. However, difference between the numerical result and the experimental model increases as the length of the tube increased. This difference caused by bulking and non-circular deformation in the experimental model. This effect was not found in the numerical model due to the assumption of circumferential symmetrical flow.

The study of pulsatile flow through a compliant tube was studied through the developed 2-D numerical model at various flow rates, frequencies and young modulus. The parametric study of pulsatile flow were setup by using the Womersley number, which were set from 3.34-6.67, and Reynolds numbers, which were set from 800 to 4100. The solutions of numerical model presented that changing of pressure was non-proportional to the tube's length. The velocity distribution varies in both radial and longitudinal direction and propagates downstream along with the pressure wave with a certain amount of phase lag. The tube's dimension also decreases by increase Reynolds number and wall stress was increase by increase the pressure. The difference between velocity phase and pressure phase increases as the pressure frequency increase. The magnitude of velocity also

decreases as the pressure frequency increase. This study will provide us a better understanding role of the flow-wall interaction and can be applied related applications in the future.

บทสรุปผู้บริหาร (Executive Summary)

1. ชื่อโครงการ แบบจำลองเชิงตัวเลขของการไหลแบบพัลส์ภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้
Numerical Modelling of Pulsatile Flow in a Compliant Tube

2. คณะผู้วิจัย

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ยศธนา คุณาธาร
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
อ.เมือง จ.เชียงใหม่ 50200
โทรศัพท์ 0-5394-4146 ต่อ ดี โทรสาร 0-5394-4145
อีเมลล์ yottana@chiangmai.ac.th

รองศาสตราจารย์ ตะวัน สุจริตกุล
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
อ.เมือง จ.เชียงใหม่ 50200
โทรศัพท์ 0-5394-4146 ต่อ ดี โทรสาร 0-5394-4145
อีเมลล์ thawan@dome.eng.cmu.ac.th

3. สาขาวิชาที่ทำการวิจัย วิศวกรรมเครื่องกล

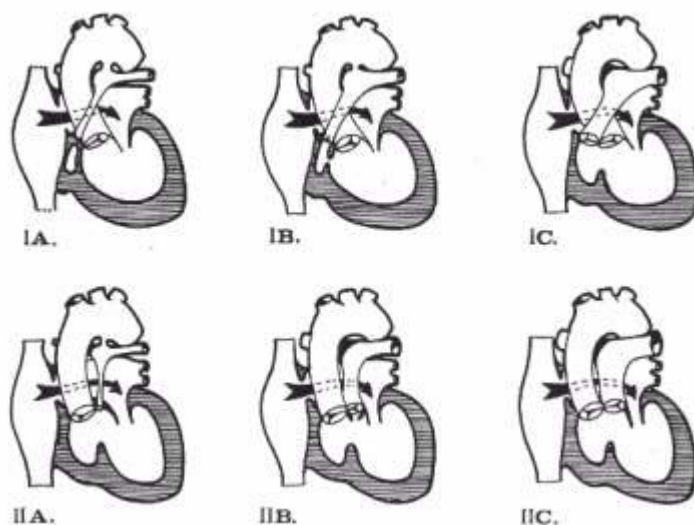
4. งบประมาณทั้งโครงการ 480,000 บาท

5. ระยะเวลาดำเนินงาน 2 ปี

1. ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ประเทศไทยมีเด็กที่เป็นโรคหัวใจพิการแต่กำเนิด (Congenital Heart Disease) ประมาณ 5,000 คนต่อปี หรือคิดเป็น 0.8 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนเด็กที่เกิดทั้งหมด¹ ซึ่งผู้ป่วยที่เป็นโรคหัวใจพิการจะต้องรักษาโดยการผ่าตัด หรือการให้ยา ผู้ป่วยโรคหัวใจพิการแต่กำเนิดบางชนิด อาจมีชีวิตอยู่ได้ถ้าหากมีรูรั่วระหว่างห้องหัวใจบนซ้ายและขวา (atrial septal defect (ASD)) เช่น ในรายที่เป็น transposition of great vessels (TGV), tricuspid atresia (TA), hypoplastic right ventricle, total anomalous pulmonary venous connection

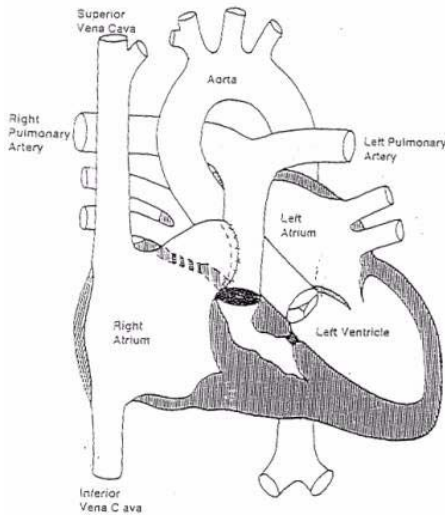
¹ มูลนิธิเพื่อสนับสนุนการผ่าตัดหัวใจเด็ก, สถาบันโรคหัวใจ กรมการแพทย์



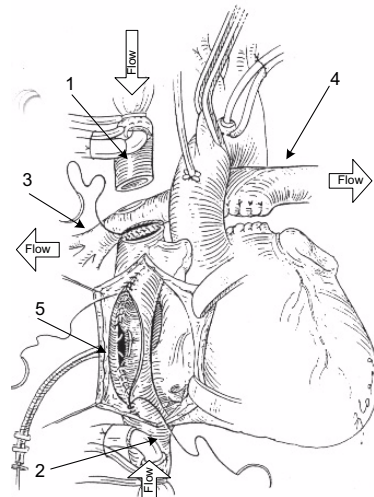
รูปที่ 1 แผนภาพแสดงลักษณะของโรคหัวใจพิการประเภท univentricular heart defect

การผ่าตัด Fontan Operation [Fontan and Baudet, 1971] เป็นการผ่าตัดหัวใจที่แก้ไขโรคหัวใจพิการประเภท univentricular heart defect เช่น tricuspid atresia (TA) โดยจะทำการผ่าตัดเลี้ยงหัวใจห้องล่างขวาด้วยการต่อเส้นเลือดดำ inferior vena cava (IVC) และ superior vena cava (SVC) เข้ากับเส้นเลือดแดงที่นำเลือดจากหัวใจห้องล่างขวาไปยังปอด (Pulmonary Artery) โดยไม่ผ่านหัวใจห้องล่างซึ่งการผ่าตัด Fontan Operation ยังสามารถแบ่งออกได้เป็นสองวิธี

1. Atrio-Pulmonary Connection (APC) เป็นการผ่าตัด Fontan แบบดั้งเดิมโดยที่ยังใช้หัวใจห้องบนขวาเป็นตัวช่วยสูบฉีดเลือดไปยังปอด ดังนั้นจึงผ่าตัดเลี้ยงเฉพาะหัวใจห้องล่างขวาโดยการต่อหัวใจห้องขวากับ Pulmonary Artery ดังแสดงในรูป 2(ก) แต่จากการศึกษาโดยใช้หลักการทางพลศาสตร์ของไหลในภายหลัง [Low et al., 1993 และ Kim et al., 1995] พบว่าหัวใจห้องขวามันไม่ได้มีส่วนช่วยในการสูบฉีดเลือดแต่ยังทำให้เกิดการสูญเสียพลังงานมากขึ้นอีก
2. Total Cavopulmonary Connection (TCPC) เป็นการผ่าตัดเลี้ยงหัวใจข้างขวาทั้งสองห้องด้วยการต่อ IVC และ SVC เข้ากับ PA โดยตรงดังแสดงในรูป 2 (ข) Sharma et al. (1996) และ Lardo et al. (1999) ได้ทำการทดลองแล้วคำนวณการสูญเสียพลังงานโดยใช้ทฤษฎีด้านพลศาสตร์ของของไหลแล้วพบว่า TCPC มีการสูญเสียพลังงานน้อยกว่า APC



(ก)



(ข)

รูปที่ 2 การผ่าตัด Fontan Operation

(ก) Atrio-Pulmonary Connection (ข) Total Cavopulmonary Connection

ผู้ป่วยที่ผ่านการผ่าตัดนี้จะเหลือเพียงแต่หัวใจห้องข้างซ้ายที่ทำหน้าที่สูบฉีดเลือดไปเลี้ยงร่างกาย ดังนั้นการเลือกตำแหน่งของการต่อเส้นเลือด รวมทั้งลักษณะการต่อเส้นเลือดในการผ่าตัดจึงมีผลอย่างยิ่งต่อการสูญเสียพลังงานในการไหลของเลือด [van Haedonck et al., 1995, Sharma et al., 1996, Migiliavacca, 1996, Dubini et al., 1996, de Leval, 1996, Ryu et al., 2001 และ Khunatorn et al., 2002] ซึ่งมีผลกระทบโดยตรงต่อประสิทธิภาพของการผ่าตัด และผลลัพธ์ในระยะยาวหลังการผ่าตัดอีกด้วย [Humes et al., 1976, Mayer, 1998, Stamm et al., 2001, Mair et al., 2001] เนื่องจากอัตราการเสียชีวิตของผู้ป่วยที่ได้รับการผ่าตัด Fontan มีสาเหตุส่วนใหญ่มาจาก จังหวะการเต้นผิดปกติของหัวใจ การอุดตันของเส้นเลือด Morgan et al. (1998) ได้นำเสนอว่าการอุดตันของเส้นเลือดมีผลมาจากตำแหน่งและลักษณะการต่อเส้นเลือดในการผ่าตัด สำหรับในประเทศไทย อัตรารอดชีวิตเกิน 5 ปีของผู้ป่วยที่ได้รับการผ่าตัด Fontan คือ 83% [Soonswang et al., 2000]

ถึงแม้ว่าการผ่าตัดจะสามารถรักษาหรือแก้ไขให้ผู้ป่วยกลับเป็นปกติได้ แต่ผู้ป่วยบางส่วนก็มี อาการแทรกซ้อนอย่างอื่นเช่น Pulmonary Hypertension (PHT) คือ อาการของการมีแรงต้านในหลอดเลือดของปอด (Pulmonary Vascular Resistance, PVR) สูง ซึ่งเป็นตัวแปรสำคัญที่จะบอกถึงความร้ายแรง ของโรคหัวใจพิการทั้งก่อนและหลังการผ่าตัด การทำการรักษา PHT ในปัจจุบันสามารถทำได้ด้วยการให้ยา แต่การจ่ายชนิดและปริมาณยาให้เหมาะสม นั้น จำเป็นจะต้องอาศัยการวัดค่า PVR ที่แม่นยำ วิธีการวัดค่า PVR ที่เป็นมาตรฐานในปัจจุบันทำได้โดยวิธีตรวจสวนหัวใจเพื่อวัดอัตราการไหลและอ่านค่าความดันใน Main Pulmonary Artery (MPA) และ Pulmonary Arteries (PA's) แล้วจึงสามารถคำนวณค่าแรงต้านในหลอดเลือดของปอดได้ การตรวจสวนหัวใจนี้อาจมีอันตรายได้โดยเฉพาะ ในเด็กเล็ก ถึงแม้ว่าจะมีวิธีอื่นซึ่งเป็นอันตรายน้อยกว่า เช่น การตรวจคลื่นเสียงสะท้อนหัวใจ (Echocardiography) และ Ultrasound Doppler แต่ผลที่ได้ก็ไม่สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างผลที่ได้กับค่า PVR ได้โดยตรง

ดังนั้นการศึกษาและทำความเข้าใจพื้นฐานในพฤติกรรมและคุณลักษณะของการไหลแบบพัลส์ภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ไม่เพียงแต่จะเสริมความเข้าใจของระบบการไหลเวียนโลหิตให้ดีขึ้นและเป็นแนวทางทำให้ผ่าตัดมีประสิทธิภาพสูงขึ้นเท่านั้น ยังสามารถนำไปสู่การพัฒนาการคำนวณหาค่า PVR ที่แม่นยำและไม่เป็นอันตรายกับผู้ป่วยได้ และยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ และศึกษา ปัญหาเกี่ยวกับ ระบบการไหลเวียน

แบบจำลองเชิงตัวเลขของการไหลแบบพัลส์ภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ ณ

โลหิตอื่นๆ ได้นอกจากนั้นยังสามารถนำความรู้ความเข้าใจพื้นฐานนี้ไปใช้ในการออกแบบ อุปกรณ์หรือเครื่องมือทางการแพทย์ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

นอกจากนี้ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้จากงานวิจัยนี้ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับงานทางด้านอื่นที่เกี่ยวข้องนอกจากระบบการไหลเวียนโลหิตอีกด้วย

2. วัตถุประสงค์

1. เพื่อสร้างแบบจำลองเชิงตัวเลขสองมิติของการไหลแบบพัลส์ในท่อที่ยืดหยุ่นได้
2. ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการไหล เช่น ความดัน ความเร็ว กับ การเปลี่ยนแปลงรูปร่างและความเค้นเฉือน (Shear Stress) ของผนังท่อ
3. ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างคลื่นความดันและคลื่นความเร็วที่เกิดจากพัลส์ของการไหล

3 ขอบเขตของการวิจัย

1. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และ/หรือพลศาสตร์ของไหลที่สร้างขึ้นในโครงการนี้จะเป็นเพียงแบบจำลองเบื้องต้นเท่านั้นและอยู่ภายใต้สมมุติฐานที่ของไหลเป็นของไหลแบบอัดตัวไม่ได้และเป็นของไหลแบบ นิวโตเนียน (Newtonian Fluid)
2. แบบจำลองนี้เป็นแบบจำลองแบบสองมิติในระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinate)
3. คุณสมบัติของผนังท่อยืดหยุ่นได้ไม่ขึ้นกับทิศทางและพิกัดอ้างอิง (Isentropic Material)

4 ประโยชน์ที่ได้รับจากโครงการวิจัย

1. ได้โปรแกรมที่สามารถจำแนกเม็ดเลือดขาวในภาพเซลล์เดียวได้
2. นำไปสู่ความร่วมมือของนักวิจัยสายประยุกต์ และสายทฤษฎีที่ใช้คณิตศาสตร์ขั้นสูง
3. นำไปสู่ความร่วมมือของนักวิจัยสายวิทยาศาสตร์เทคโนโลยี และวิทยาศาสตร์สุขภาพในประเทศไทยในอนาคต
4. เป็นพื้นฐานในการนำไปสร้างเป็นระบบจริงที่สามารถนำไปใช้งานในทางการแพทย์ได้ในอนาคต
5. ได้ผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์เผยแพร่ อีกทั้งได้ถ่ายทอดองค์ความรู้ให้กับองค์กรต่างๆ จากการได้รับเชิญเป็นวิทยากรทั้งภายในประเทศและต่างประเทศ

5. สรุปโครงการวิจัย

การศึกษาการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในศาสตร์สาขาอื่น ๆ ได้มากมายโดยเฉพาะอย่างยิ่ง การไหลเวียนโลหิตในร่างกายของมนุษย์ ปรากฏการณ์ของการไหลประเภทนี้มีความซับซ้อนมากกว่าการไหลภายในท่อแข็งเกร็งเนื่องจาก ของไหลมีการเคลื่อนที่ทั้งในแนวรัศมี และในแนวทิศทางการไหล ดังนั้นความดันตกคร่อมที่ทำให้เกิดการไหลจะทำให้เกิดการเคลื่อนตัวของของไหล และผนังท่อ ณ จุดใดจุดหนึ่งก่อนที่จะกระจายการเคลื่อนที่ดังกล่าวลงไปตามทิศทางการไหลในลักษณะของคลื่น ซึ่งการศึกษาในเรื่องนี้จะทำให้เรามีความเข้าใจเกี่ยวกับการปฏิสัมพันธ์ระหว่างของไหลและผนังท่อที่ดีขึ้น ซึ่งจะสามารถนำเอาองค์ความรู้ที่ได้นี้ไปประยุกต์ใช้ในการวินิจฉัยโรคหลอดเลือดต่อไปได้ในอนาคต

แบบจำลองเชิงตัวเลขของการไหลแบบพัลส์ภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ ณ

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาสร้างแบบจำลองเชิงตัวเลข 2 มิติ ของการไหลในท่อที่ยืดหยุ่นได้ เพื่อศึกษาถึงพฤติกรรมของการไหลแบบพัลส์ภายในท่อประเภทนี้ แบบจำลองเชิงตัวเลขสร้างขึ้นด้วยวิธีไฟไนต์วอลุ่ม และคำนวณหาคำตอบด้วยวิธีซิมเพลก (SIMPLEC) โดยในระยะแรกจะมุ่งศึกษาการไหลแบบพัลส์ภายในท่อเกร็งก่อน เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลอง และเพื่อสร้างองค์ความรู้พื้นฐานไว้สำหรับศึกษาเกี่ยวกับท่อที่ยืดหยุ่นได้ต่อไป สันนามความเร็วและความดันที่คำนวณได้จากแบบจำลองได้ถูกนำไปวิเคราะห์ และเปรียบเทียบกับผลทางทฤษฎี จากนั้นได้ทำการเปรียบเทียบการไหลแบบคงตัวภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ระหว่างแบบจำลองกับการทดลอง สุดท้ายจึงเป็นการศึกษาพฤติกรรมของการไหลแบบพัลส์ภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้

ผลจากแบบจำลองแสดงให้เห็นว่า อัตราการไหล ขึ้นอยู่กับความถี่ของคลื่นความดันที่ทำให้เกิดการไหล โดยอัตราการไหลจะมีค่าใกล้เคียงกับอัตราการไหลของการไหลแบบคงตัวที่ความดันขั้วเท่ากัน และมีเฟสของคลื่นความเร็วใกล้เคียงกับเฟสของคลื่นความดัน และเมื่อความถี่ของคลื่นความดันเพิ่มขึ้น อัตราการไหลจะลดลง และเฟสของความเร็วจะตามหลังเฟสของความดันมากขึ้นเนื่องจากความเฉื่อยของของไหลที่ไม่สามารถตอบสนองต่อความถี่ได้ทัน หากกระตุ่นการไหลด้วยความดันที่สูงมาก อัตราการไหลจะลดลงจนเป็นศูนย์

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาการไหลแบบคงตัวภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ทั้งทางด้านแบบจำลองและการทดลองโดยศึกษาที่ช่วงของ ตัวเลขเรย์โนลด์ตั้งแต่ 800 ถึง 1400 ผลการเสียรูปที่ได้จากแบบจำลองสอดคล้องกับผลที่ได้จากการทดลอง อย่างไรก็ตามความคลาดเคลื่อนของผลระหว่างแบบจำลองและการทดลองเพิ่มขึ้นตามความยาวของท่อ ซึ่งเป็นผลมาจากการโก่งตัวและการเสียรูปที่ไม่เป็นรูปวงกลมของท่อในการทดลอง ผลดังกล่าวนี้จะไม่เกิดในแบบจำลองเนื่องจากสมมติฐานกำหนดให้ท่อเกิดการเสียรูปในลักษณะสมมาตรเป็นวงกลม

การศึกษาการไหลแบบพัลส์ภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ผ่านแบบจำลองเชิงตัวเลขสองมิติที่พัฒนาขึ้นนั้น กระทำที่อัตราการไหล ความถี่ และค่ายังโมดูลัสต่าง ๆ โดยการศึกษาผลกระทบของตัวแปรเหล่านี้กระทำในช่วงของตัวเลขไวเมอร์สลิย์ ตั้งแต่ 3.36 ถึง 6.67 และตัวเลขเรย์โนลด์ตั้งแต่ 800 ถึง 1400 ผลจากการศึกษาพบว่าความยาวของท่อไม่มีผลกระทบต่อการกระจายตัวของความดัน และการกระจายตัวของสนามความเร็วจะเกิดขึ้นทั้งในแนวรัศมี และในแนวทิศทางการไหลของท่อ โดยจะเกิดการเคลื่อนที่ของคลื่นความดันและคลื่นความเร็วไปในทิศทางการไหล ค่าความแตกต่างระหว่างเฟสของความดันและความเร็วจะมีค่าเพิ่มขึ้นตามความถี่ของความดัน ที่ค่าความยืดหยุ่นต่ำๆจะมีผลทำให้ท่อเกิดการขยายตัวมากกว่าที่ค่าความยืดหยุ่นสูงๆ ความเค้นที่เกิดขึ้นกับผนังท่อจะเกิดขึ้นมากเมื่อท่ออยู่ภายใต้ความดันสูงหรือที่ค่า อัตราการไหลสูง และในการไหลแบบออสซิลลาทอรีพบว่าเฟสของความเร็วจะตามหลังเฟสของความดันอยู่ 45 องศาเนื่องจากความเฉื่อยของของไหลและที่ความถี่ต่ำๆนั้นค่าของการเปลี่ยนแปลงของความเร็วตามแนวรัศมีจะมีค่ามากและค่อยๆลดลง ขนาดของความเร็วสูงสุดที่ลดลงจะแปรผันตามความถี่ของความดัน การศึกษานี้ได้ทำให้เราทราบพฤติกรรมพื้นฐานของการปฏิสัมพันธ์ระหว่างท่อกับของไหล ซึ่งจะสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับงานที่เกี่ยวข้องต่อไปในอนาคตได้

5. ผลงานวิจัยที่ได้จากโครงการ

1. การนำเสนอบทความวิชาการ เรื่อง **Two Dimensional Numerical Model of Flow in a Compliant Tube**, The 4th National Meeting on Biomedical Engineering, August 25-26, 2005
2. การนำเสนอโปสเตอร์งานวิจัย เรื่อง **Numerical Modeling of Oscillatory Flow within a Compliant Tube**, US-Thai Biomedical Engineering Symposium 2005, Chulalongkorn University, THAILAND
3. ได้รับเชิญไปเป็นวิทยากรในการบรรยายพิเศษในหัวข้อ **Computational Study in Cardiovascular Engineering**, US-Thai Biomedical Engineering Symposium 2005, Chulalongkorn University, THAILAND
4. ได้รับเชิญไปเป็นวิทยากรในการบรรยายพิเศษในหัวข้อ **Biomedical Engineering Activities at Faculty of Engineering, Chiang Mai University, Thailand** บรรยาย ณ Department of Biomedical Engineering, Columbia University, New York, USA

สารบัญ

	หน้า
คำนำ	ก
กิตติกรรมประกาศ	ข
บทคัดย่อ	ค
Abstract	จ
บทสรุปผู้บริหาร (Executive Summary)	ช
สารบัญ	ฐ
สารบัญตาราง	ฒ
สารบัญภาพ	ณ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการ	4
1.3 ขอบเขตของการวิจัย	4
1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากโครงการวิจัย	4
บทที่ 2 งานวิจัยและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	5
2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	5
2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง	12
บทที่ 3 การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์	
32	
3.1 ขั้นตอนก่อนการประมวลผล (Pre-Processing)	32
3.2 ขั้นตอนการประมวลผล (Processing)	38
3.3 ขั้นตอนหลังการประมวลผล (Post-Processing)	39
บทที่ 4 การทดลองการไหลแบบคงตัวภายในท่อที่ยืดหยุ่น	40
4.1 แนวคิดในการออกแบบชุดทดลอง	40
4.2 อุปกรณ์ควบคุมในระบบทดสอบประสิทธิภาพเซลล์เชื้อเพลิง	43
บทที่ 5 ผลการวิจัยและการวิเคราะห์ผล	45
5.1 การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองเชิงตัวเลข	45
5.2 เปรียบเทียบการทดลองกับแบบจำลอง	49
5.3 กรณีศึกษาเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรในการไหลแบบออสซิลลาทอรี	54
บทที่ 6 สรุปผลการวิจัย	67

6.1	สรุปผลการวิจัย	67
6.2	ข้อเสนอแนะ	68
เอกสารอ้างอิง		69
ภาคผนวก		
ภาคผนวก ก	การนำเสนอบทความ งานประชุมนักวิจัยรุ่นใหม่ สกว. พ.ศ. 2548	72
ภาคผนวก ข	บทความวิจัย	84
ภาคผนวก ค	โปสเตอร์เผยแพร่ผลงานวิจัย และเอกสารประกอบการบรรยาย	86
ภาคผนวก ง	วิทยากรบรรยายพิเศษ	101
ประวัติและประสบการณ์ผู้วิจัย		

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
3.1	แสดงเวลาและค่าของ t ในการให้ค่ากับแบบจำลองของท่อทั้ง 3	37
3.2	แสดงความดันเริ่มต้น ในการให้ค่ากับแบบจำลอง	37
4.1	ข้อมูลการไหลของเลือดในหลอดเลือดต่างๆ	41
5.1	ขนาดและคุณสมบัติของท่อที่ยืดหยุ่นได้ที่ใช้ในการทดลอง	49

สารบัญภาพ

รูปที่	หน้า
1.1 แผนภาพแสดงลักษณะของโรคหัวใจพิการประเภท univentricular heart defect	2
1.2 การผ่าตัด Fontan Operation (ก) Atrio-Pulmonary Connection (ข) Total Cavopulmonary Connection	3
2.1 ทิศทางและความเร็วในแนวแกนของระบบพิกัดอ้างอิงทรงกระบอก	8
2.2 ลักษณะรูปแบบของความเร็วของของไหลที่เกิดขึ้นภายในท่อแข็งเกร็ง	11
2.3 การไหลแบบราบเรียบผ่านท่อกลม	11
2.4 การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับผนังและแรงภายนอก (a) การเปลี่ยนแปลงที่ผนังท่อ (b) วิเคราะห์ ชั้นส่วนของผนัง (c) วิเคราะห์ความเค้นที่เกิดขึ้นกับชั้นส่วนของผนัง	15
2.5 ท่อยืดหยุ่นที่ไม่มี การไหลเกิดขึ้น	17
2.6 พฤติกรรม การไหลของของไหลภายในท่อยืดหยุ่นที่เกิดขึ้น	17
2.7 แสดงการไหลของของไหลแบบพัลส์ภายในท่อยืดหยุ่นได้	20
2.8 การใช้ พิกัดอ้างอิงที่เป็นเส้นโค้งตัดกันไปมาเป็นรูปสี่เหลี่ยม	25
2.9 การใช้ Structured Grid	26
2.10 การใช้ Structured Grid แบบ H-Grid	26
2.11 การใช้ Structured Grid แบบ O-Grid	27
2.12 การใช้ Structured Grid แบบ C-Grid	27
2.13 การใช้ Block - Structured Grid	27
2.14 การใช้ Unstructured Grid	28
2.15 การกำหนดตำแหน่งของการดิสครีไท	29
2.16 แผนภูมิการคำนวณด้วยวิธีซิมเพล็กซ์	31
3.1 ภาพสเกตช์ ของท่อแข็งเกร็งไม่คิดความหนาของผนังท่อ	32
3.2 ภาพสเกตช์ของท่อยืดหยุ่นได้ที่พิจารณาความหนาของผนังท่อ	33
3.3 การกำหนดช่วง กริด และการแบ่งปริมาตรในการคำนวณ	34
3.4 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของแบบจำลอง	35
3.5 แสดงการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นของแบบจำลอง	36
3.6 การกำหนดคุณลักษณะของส่วนต่าง ๆ ในการคำนวณแบ่งเป็นส่วนของไหลและผนังท่อ	38
3.7 การแก้ปัญหาคู่ควบระหว่างพลศาสตร์ของไหลกับการเคลื่อนที่ของผนัง (Coupling between fluid dynamics and wall motion)	39
4.1 ภาพร่างประกอบชุดทดสอบ	41
4.2 การติดตั้งอุปกรณ์การทดลองการไหลของของไหลภายในท่อยืดหยุ่น	42

4.3	ส่วนของห้องทดสอบที่มีการบรรจุน้ำเพื่อรักษาความดันภายนอกท่อที่ทำการทดสอบ	42
4.4	ช่วงการพิจารณาของท่ออย่างอ่อน	43
4.5	แสดงตำแหน่งและการวัดขนาดของท่อทดลอง	44
5.1	เปรียบเทียบความดันภายในท่อแข็งเกร็งที่อัตราการไหล 1-5 ลิตรต่อนาที ($Re = 835 - 4067$)	46
5.2	เปรียบเทียบเส้นรูปร่างความเร็วภายในท่อแข็งเกร็งที่อัตราการไหล 1-5 ลิตรต่อนาที	46
5.3	เปรียบเทียบความเค้นเฉือนภายในท่อแข็งเกร็งที่อัตราการไหล 1-5 ลิตรต่อนาที	47
5.4	แสดงการกระจายความเร็ว และการเปลี่ยนแปลงรัศมีของท่อในการไหลแบบคงตัวผ่านท่อที่ยึดหยุ่นได้	48
5.5	การเปรียบเทียบความดันตามความยาวท่อระหว่างแบบจำลองกับทฤษฎีของ Fung	48
5.6	การเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อจากแบบจำลองกับทฤษฎีของ Fung	49
5.7	การยึดตำแหน่งปลายท่อ และการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่เกิดจากการไหล	50
5.8	เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่ 1 ตามความยาวที่อัตราการไหลต่างๆ	51
5.9	เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่ 2 ตามความยาวที่อัตราการไหลต่างๆ	51
5.10	เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่ 3 ตามความยาวที่อัตราการไหลต่างๆ	52
5.11	เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงความดันภายในท่อที่ 1 ตามความยาวที่อัตราการไหลต่างๆ	53
5.12	เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงความดันภายในท่อที่ 2 ตามความยาวที่อัตราการไหลต่างๆ	53
5.13	เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงความดันภายในท่อที่ 3 ตามความยาวที่อัตราการไหลต่างๆ	54
5.14	เปรียบเทียบความดันและความเร็วภายในท่อแข็งเกร็งที่ค่าความถี่ ต่างๆ	55
5.15	ผังแสดงตัวแปรควบคุมที่สนใจศึกษาในงานวิจัยนี้และค่าตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการไหลที่จะทำการวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้	56
5.16	การเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อและการกระจายตัวของความเร็วตามแนวการไหลท่อที่เฟสต่างๆ	57
5.17	เปรียบเทียบความดันและความเร็วที่ค่าความถี่ต่างๆ ของการไหลแบบออสซิลลาทอรีภายในท่อที่ยึดหยุ่นได้	58
5.18	การเปรียบเทียบอัตราการไหลที่ค่าความถี่ต่างๆ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางความยาวของท่อ	59
5.19	การเปลี่ยนแปลงความเค้นเฉือนที่ค่าความถี่ ต่างๆ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางความยาวของท่อ	59
5.20	การเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่ค่าความถี่ต่างๆ ของการไหลแบบออสซิลลาทอรีภายในท่อที่ยึดหยุ่นได้	60
5.21	เปรียบเทียบระหว่างความดันและความเร็วที่ Reynolds number ทั้งหมดหาค่าคือ 835 1670 2450 3250 และ 4064 ของการไหลที่ Womersley number เท่ากับ 3.3483	61
5.22	อัตราการไหลตามแนวการไหลของท่อที่ Womersley number เท่ากับ 3.34 และค่ายังโมดูลัสเท่ากับ 22 kN/m^2	62
5.23	ความเค้นเฉือน ณ ผนังท่อที่อัตราการไหลต่างๆ	62
5.24	การเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อ ที่ Reynolds number ทั้งหมดหาค่าคือ 835 1670 2450 3250 และ 4064 ของการไหลที่ Womersley number เท่ากับ 3.34	63
5.25	เปรียบเทียบความดันและความเร็วที่ยังโมดูลัส 22 50 100 และ 1000 kN/m^2	64
5.26	การเปลี่ยนแปลงอัตราการไหลที่ค่ายังโมดูลัสต่างๆ	65
5.27	การเปลี่ยนแปลงขนาดของความเค้นเฉือนที่ยังโมดูลัสต่างๆ	65

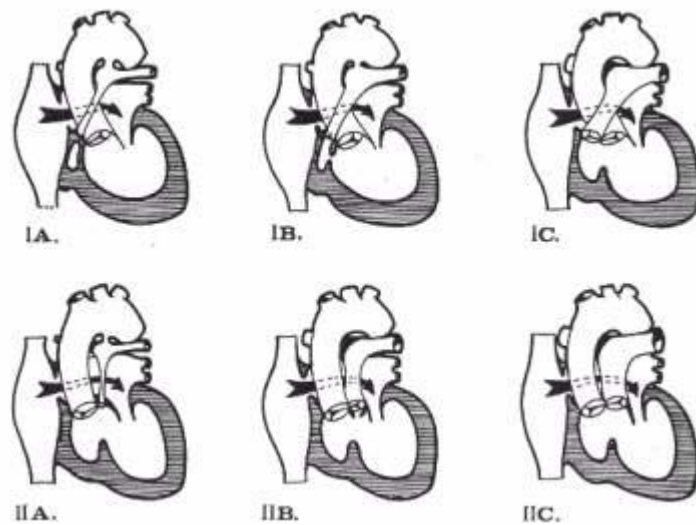
บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมา

ปรากฏการณ์ของการไหลแบบพัลส์ภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้สามารถพบได้ในระบบต่าง ๆ มากมายในชีวิตประจำวันโดยเฉพาะอย่างยิ่ง การไหลของเลือดภายในเส้นเลือด และการไหลเวียนของเลือดภายในหัวใจ โดยปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในการไหลประเภทนี้จะมีปฏิสัมพันธ์กันระหว่างผนังที่ยืดหยุ่น และของไหลที่ไหลอยู่ภายใน ทำให้เกิดเป็นความซับซ้อนของปัญหา รวมไปถึงการหาคำตอบของปัญหาประเภทนี้ อาทิ การกระจายตัวของความดัน และความเร็ว อีกทั้งความเค้นที่เกิดขึ้นบนผนัง การไหลลักษณะนี้โดยทั่วไปแล้วจะเกิดได้ในสองลักษณะคือ การไหลที่เกิดจากข้อบังคับของโครงสร้าง (structure driven) เป็นการเปลี่ยนแปลงของโครงสร้างทำให้เกิดการไหลขึ้น อาทิ หัวใจบีบตัวทำให้เกิดการไหลไปตามเส้นเลือดหรือการบีบตัวของท่อทำให้น้ำไหลไปข้างหน้า และ การขับเคลื่อนที่เกิดจากของไหลทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของท่อ (fluid driven) การไหลของน้ำผ่านท่อทำให้ท่อขยายตัวหรือหดตัว ความสัมพันธ์ระหว่างลักษณะการกระจายตัวของความเร็วของไหลที่เกิดขึ้น ขนาดของผนังท่อที่เปลี่ยนแปลงไปรวมถึงการเปลี่ยนแปลงความดันตกคร่อม และค่าความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นภายในท่อ จะสามารถใช้เป็นองค์ความรู้ที่เป็นประโยชน์อย่างมากใน ด้านวิศวกรรมและในศาสตร์การแพทย์ที่เกี่ยวข้อง

ประเทศไทยมีเด็กที่เป็นโรคหัวใจพิการแต่กำเนิด (Congenital Heart Disease) ประมาณ 7,000-8,000 คนต่อปี หรือคิดเป็น 0.8 เปอร์เซ็นต์ของจำนวนเด็กที่เกิดทั้งหมด (มูลนิธิเพื่อสนับสนุนการผ่าตัดหัวใจเด็ก, สถาบันโรคหัวใจ กรมการแพทย์, 2546) ซึ่งผู้ป่วยที่เป็นโรคหัวใจพิการจะต้องรักษาโดยการผ่าตัด หรือการให้ยา ผู้ป่วยโรคหัวใจพิการแต่กำเนิดบางชนิด อาจมีชีวิตรอดอยู่ได้ถ้าหากมีรูรั่วระหว่างห้องหัวใจในบั้นซ้ายและขวา (atrial septal defect (ASD)) เช่น ในรายที่เป็น transposition of great vessels (TGV), tricuspid atresia (TA), hypoplastic right ventricle, total anomalous pulmonary venous connection

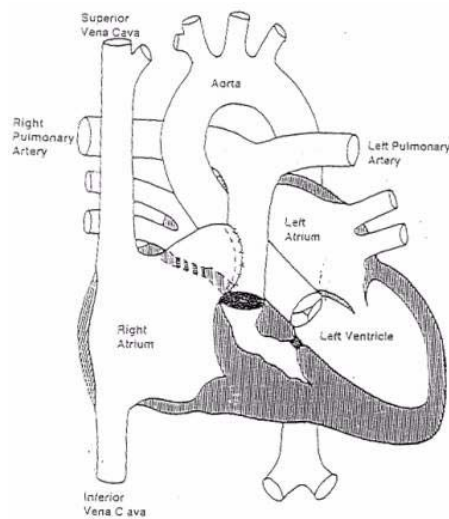


รูปที่ 1.1 แผนภาพแสดงลักษณะของโรคหัวใจพิการประเภท univentricular heart defect

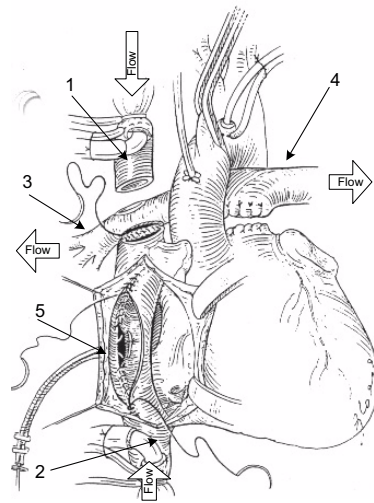
การผ่าตัด Fontan Operation [Fontan and Baudet, 1971] เป็นการผ่าตัดหัวใจที่แก้ไขโรคหัวใจพิการประเภท univentricular heart defect เช่น tricuspid atresia (TA) โดยจะทำการผ่าตัดเลี้ยงหัวใจห้องล่างขวาด้วยการต่อเส้นเลือดดำ inferior vena cava (IVC) และ superior vena cava (SVC) เข้ากับเส้นเลือดแดงที่นำเลือดจากหัวใจห้องล่างขวาไปยังปอด (Pulmonary Artery) โดยไม่ผ่านหัวใจห้องล่างซึ่งการผ่าตัด Fontan Operation ยังสามารถแบ่งออกได้เป็นสองวิธี

Atrio-Pulmonary Connection (APC) เป็นการผ่าตัด Fontan แบบดั้งเดิมโดยที่ยังใช้หัวใจห้องบนขวาเป็นตัวช่วยสูบฉีดเลือดไปยังปอด ดังนั้นจึงผ่าตัดเลี้ยงเฉพาะหัวใจห้องล่างขวาโดยการต่อหัวใจห้องขวากับ Pulmonary Artery ดังแสดงในรูป 2(ก) แต่จากการศึกษาโดยใช้หลักการทางพลศาสตร์ของไหลในภายหลัง [Low et al., 1993 และ Kim et al., 1995] พบว่าหัวใจห้องขวบนไม่ได้มีส่วนช่วยในการสูบฉีดเลือดแต่ยังทำให้เกิดการสูญเสียพลังงานมากขึ้นอีก

Total Cavopulmonary Connection (TCPC) เป็นการผ่าตัดเลี้ยงหัวใจข้างขวาทั้งสองห้องด้วยการต่อ IVC และ SVC เข้ากับ PA โดยตรงดังแสดงในรูป 2 (ข) Sharma et al. (1996) และ Lardo et al. (1999) ได้ทำการทดลองแล้วคำนวณการสูญเสียพลังงานโดยใช้ทฤษฎีด้านพลศาสตร์ของของไหลแล้วพบว่า TCPC มีการสูญเสียพลังงานน้อยกว่า APC



(ก) Atrio-Pulmonary Connection



(ข) Total Cavopulmonary Connection

รูปที่ 1.2 การผ่าตัด Fontan Operation

ผู้ป่วยที่ผ่านการผ่าตัดนี้จะเหลือเพียงแค่หัวใจห้องข้างซ้ายที่ทำหน้าที่สูบฉีดเลือดไปเลี้ยงร่างกาย ดังนั้นการเลือกตำแหน่งของการต่อเส้นเลือด รวมทั้งลักษณะการต่อเส้นเลือดในการผ่าตัดจึงมีผลอย่างยิ่งต่อการสูญเสียพลังงานในการไหลของเลือด [van Haedonck et al., 1995, Sharma et al., 1996, Migiliavacca, 1996, Dubini et al., 1996, de Leval, 1996, Ryu et al., 2001 และ Khunatorn et al., 2002] ซึ่งมีผลกระทบโดยตรงต่อประสิทธิภาพของการผ่าตัด และผลลัพธ์ในระยะยาวหลังการผ่าตัดอีกด้วย [Humes et al., 1976, Mayer, 1998, Stamm et al., 2001, Mair et al., 2001] เนื่องจากอัตราการเสียชีวิตของผู้ป่วยที่ได้รับการผ่าตัด Fontan มีสาเหตุส่วนใหญ่มาจาก จังหวะการเต้นผิดปกติของหัวใจ การอุดตันของเส้นเลือด Morgan et al. (1998) ได้นำเสนอว่าการอุดตันของเส้นเลือดมีผลมาจากตำแหน่งและลักษณะการต่อเส้นเลือดในการผ่าตัด สำหรับในประเทศไทย อัตรารอดชีวิตเกิน 5 ปีของผู้ป่วยที่ได้รับการผ่าตัด Fontan คือ 83% [Soonswang et al., 2000]

ถึงแม้ว่าการผ่าตัดจะสามารถรักษาหรือแก้ไขให้ผู้ป่วยกลับเป็นปกติได้ แต่ผู้ป่วยบางส่วนก็มี อาการแทรกซ้อนอย่างอื่นเช่น Pulmonary Hypertension (PHT) คือ อาการของการมีแรงต้านในหลอดเลือดของปอด (Pulmonary Vascular Resistance, PVR) สูง ซึ่งเป็นตัวแปรสำคัญที่จะบอกถึงความร้ายแรง ของโรคหัวใจพิการทั้งก่อนและหลังการผ่าตัด การทำการรักษา PHT ในปัจจุบันสามารถทำได้ด้วยการให้ยา แต่การจ่ายชนิดและปริมาณยาให้เหมาะสม นั้น จำเป็นจะต้องอาศัยการวัดค่า PVR ที่แม่นยำ วิธีการวัดค่า PVR ที่เป็นมาตรฐานในปัจจุบันทำได้โดยวิธีตรวจสวนหัวใจเพื่อวัดอัตราการไหลและอ่านค่าความดันใน Main Pulmonary Artery (MPA) และ Pulmonary Arteries (PA's) แล้วจึงสามารถคำนวณค่าแรงต้านในหลอดเลือดของปอดได้ การตรวจสวนหัวใจนี้อาจมีอันตรายได้โดยเฉพาะ ในเด็กเล็ก ถึงแม้ว่าจะมีวิธีอื่นซึ่งเป็นอันตรายน้อยกว่า เช่น การตรวจคลื่นเสียงสะท้อนหัวใจ (Echocardiography) และ Ultrasound Doppler แต่ผลที่ได้ก็ไม่สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างผลที่ได้กับค่า PVR ได้โดยตรง

ดังนั้นการศึกษาและทำความเข้าใจพื้นฐานในพฤติกรรมและคุณลักษณะของการไหลแบบพัลส์ภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ไม่เพียงแต่จะเสริมความเข้าใจของระบบการไหลเวียนโลหิตให้ดีขึ้นและเป็นแนวทางทำให้ผ่าตัด

มีประสิทธิภาพสูงขึ้นเท่านั้น ยังสามารถนำไปสู่การพัฒนาการคำนวณค่า PVR ที่แม่นยำและไม่เป็นอันตรายกับผู้ป่วยได้ และยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการวิเคราะห์ และศึกษา ปัญหาเกี่ยวกับ ระบบการไหลเวียนโลหิตอื่นๆ ได้นอกจากนั้นยังสามารถนำความรู้ความเข้าใจพื้นฐานนี้ไปใช้ในการออกแบบ อุปกรณ์หรือเครื่องมือทางการแพทย์ให้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการ

สร้างแบบจำลองเชิงตัวเลขสองมิติของการไหลแบบพัลส์ในท่อที่ยืดหยุ่นได้ และศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการไหล เช่น ความดัน ความเร็ว กับ การเปลี่ยนแปลงรูปร่างและความเค้นเฉือน (Shear Stress) ของผนังท่อ รวมไปถึงความสัมพันธ์ระหว่างคลื่นความดันและคลื่นความเร็วที่เกิดจากพัลส์ของการไหล

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สองมิติในระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinate) และพลศาสตร์ของไหลที่สร้างขึ้นในโครงการนี้เป็นเพียงแบบจำลองเบื้องต้นเท่านั้น โดยจะอยู่ภายใต้สมมุติฐานที่ของไหลเป็นของไหลแบบอัดตัวไม่ได้และเป็นของไหลแบบ นิวโตเนียน (Newtonian Fluid) และคุณสมบัติของผนังท่อที่ยืดหยุ่นได้ไม่ขึ้นกับทิศทางและพิกัดอ้างอิง (Isentropic Material)

1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจากโครงการวิจัย

1. ได้แบบจำลองเชิงตัวเลขสองมิติของการไหลแบบพัลส์ในการไหลที่ยืดหยุ่นได้
2. ได้แบบจำลองของผนังยืดหยุ่นที่เหมาะสมกับการนำไปประยุกต์ใช้กับงานจริงที่เกี่ยวข้องกับท่อที่ยืดหยุ่นได้แบบต่าง ๆ
3. ทราบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการไหล เช่น ความดัน ความเร็ว กับ การเปลี่ยนแปลงรูปร่างและความเค้นเฉือน (Shear Stress) ของผนังท่อ
4. ทราบความสัมพันธ์ระหว่างคลื่นความดันและคลื่นความเร็วที่เกิดจากพัลส์ของการไหล

บทที่ 2

งานวิจัยและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยเกี่ยวกับการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้มีมาเป็นเวลากว่าสิบปีแล้ว (1985 - 2005) Zhao และคณะ (1998a และ 1998b) ได้แบ่งกลุ่มงานวิจัยออกได้เป็นสองกลุ่มหลักคือ กลุ่มที่หนึ่งมุ่งศึกษาทางด้านแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเส้นเลือด และพฤติกรรมของผนังเส้นเลือด กลุ่มที่สองมุ่งศึกษาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการปฏิสัมพันธ์ระหว่างของไหล และของแข็ง ณ ผนังเส้นเลือด โดยกลุ่มแรกได้เริ่มทำการศึกษานี้ในปี ค.ศ. 1950 และผลของการวิจัยได้ถูกนำมาใช้โดยกลุ่มที่สองในปี ค.ศ. 1980

Lambert และคณะ (1958) ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของของไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้แบบไม่เป็นเชิงเส้น พบว่าผลของแบบจำลองที่ไม่เป็นเชิงเส้นสามารถแสดงผลคลื่นความดันได้ดีกว่าแบบจำลองแบบเชิงเส้น Whirlow และคณะ (1965) ได้วิเคราะห์การไหลในท่อที่ผนังเป็นแบบ viscoelastic โดยทำการแก้ระบบสมการควบคุมการไหลคู่ควบกันสมการการเคลื่อนที่ของของแข็งแบบ elastic พบความแตกต่างของผลของคลื่นความดันระหว่างการไหลในท่อแบบ elastic และผลทางทฤษฎีของการไหลในท่อเกร็งที่ได้จากงานของ Womersley (1957) น้อยมาก อย่างไรก็ตามผลการทดลองของ Whirlow และคณะก็สอดคล้องกับการทดลองของ McDonald (1960) ต่อมา Atabek และคณะ (1966) ได้ทำการวิเคราะห์ทางทฤษฎีของการแพร่ของคลื่นความดันในการไหลของของไหลอัดตัวไม่ได้ (incompressible fluid) ภายในท่อที่มีความเค้นเริ่มต้น ผลการวิเคราะห์พบว่าผลการแพร่ และการส่งผ่านของคลื่นความดันขึ้นอยู่กับค่าความเค้นของผนังท่อ Mirsky (1967) ได้ศึกษาการแพร่ของคลื่นความดันของการไหลภายในท่อ elastic แบบ orthotropic โดยใช้แบบจำลองเชิงตัวเลข พบว่าความสามารถในการแพร่ของคลื่นความดันขึ้นอยู่กับค่า tangential modulus of elasticity ของผนังเป็นหลัก ต่อมาในปี ค.ศ. 1968 Atabek พัฒนาแบบจำลองของการไหลภายในท่อ elastic แบบ orthotropic ที่มีความเค้นเริ่มต้น พบว่าคลื่นความเร็วขึ้นอยู่กับอัตราส่วนระหว่างค่า longitudinal modulus และ ค่า circumferential modulus ในปี ค.ศ. 1972 Ling และคณะ (1972) ได้ทำการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์แบบจำลองที่ไม่เป็นเชิงเส้นของการไหลแบบพัลส์ที่มีการคำนึงถึงผลของเสียรูปของผนังภายในเส้นเลือดแดง (arteries) กับการทดลองพบว่าแบบจำลองสามารถนำเสนอผลได้เช่นเดียวกับการทดลอง Cancelli และคณะ (1985) พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับท่อที่ยืดหยุ่นได้ที่ประกอบด้วยแรงดึงตามความยาวของผนัง และการสูญเสียพลังงานในการเกิดการแยกตัวของชั้นของไหล ผลงานวิจัยพบว่าการเกิดการกระตุ้นตัวเองให้เกิดออสซิลเลชันขึ้นเมื่อความเร็วของของไหลสูงกว่าความเร็วของการแพร่ของคลื่นยาว Wu และคณะ (1989) พัฒนาแบบจำลองทางทฤษฎีของการแพร่ของคลื่นแบบไม่เป็นเชิงเส้นขึ้นโดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นที่ผนังท่อ ความเค้นของของไหล และการเคลื่อนที่ของผนังเส้นเลือด

Wu และคณะ (1984) ได้ทำการวิเคราะห์ผลของแบบจำลองที่ไม่เป็นเชิงเส้นพบว่าผลที่ได้สอดคล้องกับงานวิจัยทางทฤษฎีของ Green และ Adkin (1960) ในปี ค.ศ. 1992 Dutta และคณะ (1992) ทำการจำลองการไหลแบบพัลส์ และออสซิลลาทอรีในท่อแบบ elastic โดยอาศัยสมมติฐานของ Ling และ Atabek (1972) พบว่า

ค่าความเค้นเฉือน และสนามการไหลอ่อนไหวต่อมุมเฟสระหว่างความดัน และการไหล Perktold และคณะ (1993) ศึกษาผลของการไหลแบบพัลส์ของของไหลแบบ non-Newtonian คู่ควบกับความยืดหยุ่นได้ของผนังภายในทางแยกของเส้นเลือดที่มีการโป่งพอง ผลการศึกษาพบว่าค่าความเค้นเฉือนจากผนังท่อที่ยืดหยุ่นได้ไม่มีความแตกต่างกับผนังท่อเกร็ง อย่างไรก็ตามการเคลื่อนไหวยังคงมีผลต่อการแยกชั้นของของไหลและขนาดของความเค้นเฉือน Lou และคณะ (1993) ได้ใช้แบบจำลองเชิงตัวเลขแบบสองมิติศึกษาพลศาสตร์ของการไหลภายในผนังท่อยืดหยุ่นได้พบว่าการเคลื่อนที่ของผนังทำให้เกิดการไหลย้อนกลับของของไหลและค่าความเค้นของผนังที่ยืดหยุ่นได้มีค่าน้อยกว่าผนังเกร็ง 10 เปอร์เซ็นต์ Steinman และคณะ (1994) นำเสนอการศึกษาผลการยืดตัวของผนังในแบบจำลองสองมิติของการไหลแบบ ปลาย-ต่อ-ข้าง (end-to-side anastomoses) พบว่าผลการยืดตัวมีผลต่อค่าความเค้นเฉือนน้อยมาก Hofer และคณะ (1996) ได้ทำการศึกษาพลศาสตร์ของของไหลภายในการไหลแบบ ปลาย-ต่อ-ข้าง (end-to-side anastomoses) ด้วยวิธีการเชิงตัวเลขพบว่าการจัดของท่อและการเปลี่ยนแปลงค่าความเค้นเฉือนเกิดขึ้นสูงสุดที่รอยต่อของท่อ และความยืดหยุ่นได้ของท่อทำให้เกิดการหมุนวนของการไหล และการไหลย้อนกลับลดลง Downing และคณะ (1997) พัฒนาแบบจำลองเชิงตัวเลขหนึ่งมิติของท่อที่ยืดหยุ่นได้เพื่อศึกษาผลของการสูญเสียเนื่องจากแรงเสียดทาน และการไหลแบบพัลส์ภายในเส้นเลือดตีบ ผลการศึกษาพบว่า การสูญเสียเนื่องจากแรงเสียดทานมีผลต่อขนาดของการตีบตัวของท่อ Greenshields และคณะ (1999) นำเสนอวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับการปฏิสัมพันธ์ระหว่างของไหลและโครงสร้างของท่อ เพื่อศึกษาการแพร่ของคลื่นของการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ ผลการศึกษาพบว่าวิธีการเชิงตัวเลขให้ผลสอดคล้องกับทฤษฎี และการทดลอง Tang และคณะ (2000) ศึกษาการไหลแบบพัลส์ภายในท่อตีบที่มีแรงดันภายนอกกระทำต่อผนังท่อ ผลการวิจัยพบว่าผลของการตีบมีผลต่อการขยายตัวและหดตัวอย่างรุนแรงของท่อ Qiu และคณะ (2000) ทำการวิจัยเกี่ยวกับการไหลแบบพัลส์ในแบบจำลองของเส้นเลือดหัวใจที่ยืดหยุ่นได้โดยศึกษาความโค้งและการเคลื่อนที่ในแนวรัศมีของท่อ ผลการวิจัยพบว่าความเค้นเฉือนของผนังด้านในมีค่าน้อยกว่า แต่มีการออสซิลเลชันสูงกว่า ซึ่งอาจทำให้มีผลต่อการอุดตันของเส้นเลือดได้ Rosar และคณะ (2001) นำเสนอแบบจำลองสามมิติของท่อที่ยืดหยุ่นได้ที่พันด้วยไฟเบอร์ ผลการศึกษาพบว่าเมื่อความดันภายนอกมีค่าสูงกว่าที่ปลายทางการไหลจะเกิดการยุบตัวของท่อขึ้น และมีความเป็นไปได้ที่จะเกิดการยุบตัวมากกว่าหนึ่งตำแหน่ง Khunatorn (2002) ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการเคลื่อนที่ของของไหล ในการประยุกต์ใช้กับปัญหาทางด้านของหลอดเลือดหัวใจ เปรียบเทียบผลการหาคำตอบทางทฤษฎีกับผลเชิงตัวเลขของการไหลเมื่อค่าสัมประสิทธิ์ของการยุบตัวมีค่ามากขึ้น ทำให้รัศมีลดลงไปตามความยาวที่เพิ่มขึ้น การหาคำตอบนี้สอดคล้องกับทฤษฎีแต่ผลที่ได้ไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งต้องมีการศึกษาในรายละเอียดต่อไป Lee and Xu (2002) ได้สร้างแบบจำลองการไหลและพฤติกรรมของผนังภายในท่อตีบ ด้วยการจำลองท่อทรงกระบอกที่มีการตีบ 45 เปอร์เซ็นต์ โดยพื้นที่และให้การไหลภายในเป็นการไหลแบบคลื่น โดยสมมติให้ของไหลเป็นแบบอัดตัวไม่ได้และของไหลเป็นแบบ นิวโตเนียน ผนังตีบมีความหนาไม่สามารถอัดตัวได้ และผนังเปลี่ยนแปลงสมมาตรกันทุกด้านโดยมีการแยกการคำนวณการไหลและการเคลื่อนที่ของผนังจากโปรแกรม CFX 4.2TM และ ABAQUS7TM แล้วรวมผลกระทบและการปฏิสัมพันธ์ในภายหลังยืนยันผลของการไหลภายในท่อแข็งเกร็งและผนังท่อยืดหยุ่นได้ พบว่าความเร็วตามแนวแกนจากการทำนายและการวัดค่าได้แตกต่างกัน 7 เปอร์เซ็นต์ และความเค้นในแนวเส้นรอบวงของท่อต่างกัน 5 เปอร์เซ็นต์ ความเค้นเฉือนที่ผนังของท่อที่ยืดหยุ่น น้อยกว่า 7.2 เปอร์เซ็นต์ การจำลองเฉพาะท่อภายใต้ความดันสม่ำเสมอและการจำลอง การคู่ควบกันระหว่างของไหลและผนังท่อที่มีการไหลแบบพัลส์ มีลักษณะคล้ายกันโดยการไหลแบบพัลส์ทำให้ความเค้นในแนวเส้นรอบวงเพิ่มขึ้น 13 เปอร์เซ็นต์ในขณะเดียวกัน ความเค้นในแนวรัศมีลดลง 31 เปอร์เซ็นต์ และ 8 เปอร์เซ็นต์ ในแนวแกน Koji et

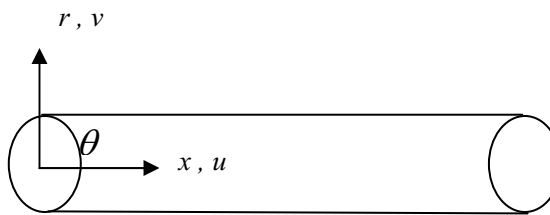
al. (2003) ได้ศึกษาผลกระทบของ 3 องค์ประกอบที่มีผลต่อการไหลเวียนของเลือดอันได้แก่การไหลแบบพัลส์ คุณสมบัติของไหลที่เป็น นอน-นิวโตรเนียน และท่อยืดหยุ่นด้วยการ ทดลองโดยใช้น้ำผสมแป้งไหลผ่านท่อซิลิโคน วัดความดันตกคร่อมและวิเคราะห์ลักษณะท่อพบว่าผลกระทบที่เกิดขึ้นกับท่อจะมากเมื่อลดแรงเสียดทานลงและสัมประสิทธิ์ความเสียดทานของท่อยืดหยุ่นจะน้อยกว่าท่อแข็งเกร็ง ของไหลที่เป็น นอน-นิวโตรเนียน และท่อยืดหยุ่นมีผลกระทบโดยตรงเมื่อลดความหนืดของท่อและ Maerzo et al. (2003) ได้สร้างแบบจำลอง 3 มิติของการไหลแบบคงตัวภายในท่อยืดหยุ่นหาค่าโดยใช้โปรแกรมทางด้าน ไฟไนต์อีลิเมนต์ (FIDAPTM) และได้เปรียบเทียบผลของการไหลทางข้อมูลเชิงตัวเลขและการทดลอง พบว่าผลที่ได้สอดคล้องกันจากโปรแกรมซึ่งจำลองการไหลผ่านท่อที่มีความหนาต่างกัน เมื่อนำไปเปรียบเทียบกับผลการทดลองด้วยการพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างความดันกับพื้นที่หน้าตัดการจำลองด้วยแบบจำลองเชิงตัวเลข สามารถยืนยันผลกับการทดลองได้ Bassiouny and Neal (2004) ได้สร้างแบบจำลองทางด้านไฟไนต์อีลิเมนต์ในการวิเคราะห์การไหลของน้ำยาทำความเย็นและการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อยืดหยุ่นในช่วงสั้นๆ โดยใช้สารทำความเย็น R-22 (ซึ่งรักษาอุณหภูมิน้ำยาช่วงช่วง 16.7 องศาเซลเซียส) และไหลผ่านท่อที่ยืดหยุ่นได้ (ท่อดำโมดูลัสของความยืดหยุ่นจาก 5513-9889 กิโลปาสกาล) เปรียบเทียบกับผลการทดลองพบว่า การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับท่อมีลักษณะลาดเอียงเหมือนคอคอดของหัวฉีด ท่อที่มีโมดูลัสน้อยกว่าจะมีมุมการลาดเอียงตรงทางเข้ามากกว่า และความดันตกคร่อมตามความยาวของท่อมากกว่าเนื่องจากการหดตัวสูงกว่า ผลที่ได้พบว่าถ้าความดันเพิ่มขึ้น 45 เปอร์เซ็นต์ พื้นที่ตัดขวางของการไหลลดลงเกือบ 60 เปอร์เซ็นต์ จากการคำนวณพบว่าอัตราการไหลโดยมวลของแบบจำลองมากกว่า การทดลองอยู่ 14 เปอร์เซ็นต์ Hoekstra (2004) ได้สร้างแบบจำลอง 2 มิติ ของการไหลที่ไม่คงตัวภายในท่อยืดหยุ่นได้ด้วยวิธีทางด้านโครงร่างที่มีลักษณะเป็นตาข่าย (LBGK) เปรียบเทียบผลกับ การคำนวณทางทฤษฎีของท่อขนาด 30 มิลลิเมตร ยาว 200 มิลลิเมตร ไม่คิดความหนาของท่อด้วยค่าตัวเลขวอเมอส์เลย์ต่างๆ พบว่าที่ค่าตัวเลขวอเมอส์เลย์ (Womersley Number) สูงๆ ค่าที่ได้สอดคล้องกันมากคือ คลื่นของความดันลดลงตามความยาวของท่อ ส่วนที่ค่าตัวเลขวอเมอส์เลย์ต่ำๆ จะมีความคลาดเคลื่อนสูง จากการศึกษาจากเอกสารอ้างอิงไว้ในข้างต้นนั้น เป็นการศึกษาถึงภาพรวมของผลของความสัมพันธ์ระหว่างการไหลกับการเปลี่ยนแปลงของท่อ แต่อย่างไรก็ตามความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรพื้นฐานต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการไหล เช่น ความดัน ความเร็ว กับการเปลี่ยนแปลงขนาดรูปร่าง และความเค้นเฉือนของผนังท่อยังไม่ได้มีการศึกษาในเชิงลึก ซึ่งจะได้ทำการศึกษาและวิเคราะห์โดยละเอียดในงานวิจัยนี้

2.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษาการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้จำเป็นต้องใช้ความรู้พื้นฐาน ด้านพลศาสตร์ของของไหลและกลศาสตร์ความแข็งแรงของวัสดุ ในการสร้างแบบจำลองเชิงตัวเลขนั้นจำเป็นต้องใช้องค์ความรู้เพิ่มเติมทางด้านการทำดิสครีไทเซชัน (discretization) เพื่อทำการแปลงสมการควบคุมที่อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปของสมการพีชคณิต ซึ่งจะทำให้การคำนวณหาผลเฉลยได้โดยวิธีการเชิงตัวเลขซึ่งจะได้แสดงในรายละเอียดต่อไป นอกจากนี้ในการสร้างแบบจำลองเรขาคณิตของรูปทรงปัญหายังต้องใช้องค์ความรู้เพิ่มเติมโดยเฉพาะในการสร้างเพื่อให้ผลเฉลยที่ได้จากแบบจำลองมีความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด ดังนั้นในบทนี้จึงได้แบ่งการนำเสนอหลักการและทฤษฎีที่ใช้ในงานวิจัยนี้ออกเป็นแต่ละส่วนตามลำดับดังนี้

2.2.1 สมการควบคุมการไหล (Governing Equations)

การอธิบายหรือการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการไหลของของไหลโดยทั่วไปแล้วจะใช้ระบบสมการควบคุมที่เรียกว่าระบบสมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes Equations) ที่ประกอบไปด้วยสมการความต่อเนื่อง (Continuity Equation) สมการโมเมนตัม (Momentum Equation) และสมการอนุรักษ์พลังงาน (Energy Equation) รูปแบบของสมการดังกล่าวข้างต้น จะขึ้นอยู่กับระบบพิกัดอ้างอิงที่ใช้ เนื่องจากการไหลที่ศึกษาในงานวิจัยนี้เป็นกรไหลภายในท่อทรงกระบอก ดังนั้นระบบสมการควบคุมดังกล่าวจึงจะได้ถูกนำเสนอในระบบพิกัดอ้างอิงทรงกระบอก (Cylindrical Coordinate) ดังแสดงในรูป 2.1



รูปที่ 2.1 ทิศทางและความเร็วในแนวแกนของระบบพิกัดอ้างอิงทรงกระบอก

2.2.1.1 สมการความต่อเนื่อง (Continuity Equation)

พิจารณา สมการความต่อเนื่องของปริมาตรควบคุมใด ๆ สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.1)$$

สมการ (2.1) แสดงให้อยู่ในพิกัดทรงกระบอกจะได้ว่า

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (\rho v)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} \right] = 0 \quad (2.2)$$

ของไหลอัดตัวไม่ได้ นั่นคือ เมื่อความหนาแน่นมีค่าคงที่ ($\rho = \text{constant}$) จากสมการที่ผ่านมาในข้างต้นจะได้ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (2.3)$$

2.2.1.2 สมการโมเมนตัมหรือกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's Second Law)

อัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมภายในปริมาตรควบคุมใด ๆ ภายในระบบปิดทรงกระบอกสามารถแสดงได้ดังนี้

พิจารณาสมการในแนวแกน x

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial r} \quad (2.4)$$

พิจารณาสมการในแนวรัศมี r

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \quad (2.5)$$

สมการอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมหรือเรียกอีกอย่างว่า สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes Equation) ในรูปแบบอนุพันธ์ โดยตั้งสมมติฐานว่าของไหลเป็นของไหลแบบนิวโตเนียน (newtonian fluid) กล่าวคือ สามารถนำกฎความเสียดทานของสโตกส์ (Stokes's Law) ซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเครียดภายในของไหลมาประยุกต์ใช้ได้ดังนี้

$$\sigma_x = -\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.6)$$

$$\sigma_r = -\frac{2}{3}\mu \nabla \cdot \vec{V} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial r} \quad (2.7)$$

$$\tau_{rx} = \tau_{xr} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \quad (2.8)$$

จากชุดของสมการ (2.6) – (2.8) แทนค่าใน (2.4) และจัดรูปใหม่จะได้สมการดังนี้

แนวแกน x

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.9)$$

และแนวรัศมี r

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (2.10)$$

โดยที่

u	คือ	ความเร็วของของไหล ในแนวแกน x , m/s
v	คือ	ความเร็วของของไหล ในแนวรัศมี r , m/s
p	คือ	ความดันของของไหล, N/m ²
ρ	คือ	ความหนาแน่นของของไหล, m ³ /kg
μ	คือ	สัมประสิทธิ์ความหนืดจลน์ (Dynamic Viscosity) ของของไหล, kg/m-s
r	คือ	รัศมีของท่อ, m

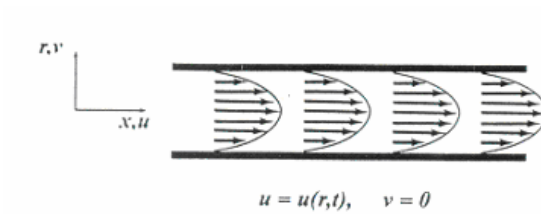
ระบบสมการควบคุมข้างต้นใช้ในการอธิบายพฤติกรรมของการไหลของของไหลในรูปของความเร็ว และความดัน ณ เวลา และตำแหน่งใด ๆ ภายในพื้นที่ที่สนใจ และสามารถประยุกต์ใช้กับการไหลได้เกือบทุกประเภท โดยเฉพาะการไหลภายในท่อเกร็ง และท่อที่ยืดหยุ่นได้ที่จะทำการศึกษาในงานวิจัยนี้

2.2.2 การไหลภายในท่อแข็งเกร็ง

การไหลที่เกิดภายในท่อแข็งเกร็งที่พิจารณาในงานวิจัยนี้มี 2 แบบคือ การไหลแบบคงตัวและการไหลแบบออสซิลลาทอรี

2.2.2.1 การไหลแบบคงตัว ภายในท่อแข็งเกร็ง (Steady Flow in Rigid Tube)

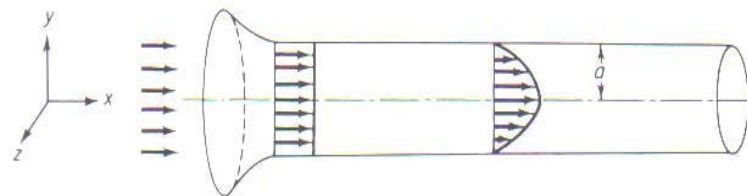
การไหลแบบราบเรียบและคงตัวภายในท่อแข็งเกร็ง ของไหลจะมีลักษณะการไหลที่แบ่งออกเป็นชั้นๆ และมีการไหลขนานกันไปตลอดทั้งชั้นโดยไม่มีการไหลข้ามชั้นกัน ลักษณะรูปร่างความเร็วในแต่ละพื้นที่หน้าตัดจะเป็นแบบพาราโบลาที่มีความเร็วสูงสุดเกิดขึ้น ณ จุดกึ่งกลางของท่อดังแสดงในรูป 2.2



รูปที่ 2.2 ลักษณะรูปแบบของความเร็วของของไหลที่เกิดขึ้นภายในท่อแข็งเกร็ง (Zamir, 1998)

พิจารณาการไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) ผ่านท่อกลมในแนวระดับที่มีรัศมีของท่อเท่ากับ a ดังแสดงในรูป 2.3 จะพบว่าสมการโมเมนต์ที่ควบคุมการไหลสามารถแสดงได้ดังสมการ (2.11)

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \quad (2.11)$$



รูปที่ 2.3 การไหลแบบราบเรียบผ่านท่อกลม (Fung, 1997)

และจากเงื่อนไขขอบเขตที่ไม่มีไหลของของไหลที่ผนังท่อ (no-slip) และการไหลสมมาตรรอบเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{at } r = a \\ \frac{du}{dr} &= 0 \quad \text{at } r = 0 \end{aligned}$$

จากสมการ (2.11) และเงื่อนไขควบคุมที่กำหนดข้างต้น ความเร็ว ณ ตำแหน่งต่างๆ ภายในท่อสามารถคำนวณได้ ดังนี้

$$u = -\frac{1}{4\mu} (a^2 - r^2) \frac{dp}{dx} \quad (2.12)$$

จากสมการ (2.12) เราจะได้อัตราการไหลผ่านท่อโดยการอินทิเกรตสมการ (2.13)

$$\dot{Q} = 2\pi \int_0^a u r dr \quad (2.13)$$

จะได้อัตราการไหลเท่ากับ

$$\dot{Q} = -\frac{\pi a^4}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (2.14)$$

จากอัตราการไหลผ่านท่อต่อพื้นที่หน้าตัดจะสามารถคำนวณหาค่าความเร็วเฉลี่ยของของไหลได้ดังสมการ (2.15)

$$u_m = -\frac{a^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (2.15)$$

ความเค้นเฉือนบนผนังท่อสามารถคำนวณได้จากอัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็ว ณ ผนังท่อ

$$\text{Shear stress at the wall} = -\mu \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=a} \quad (2.16)$$

จะได้ว่า

$$\text{Shear stress at the wall} = \frac{4\mu}{\pi a^3} \dot{Q} = 4\mu \frac{u_m}{a}$$

2.2.2.2 การไหลแบบออสซิลลาทอรีภายในท่อเกร็ง (Oscillatory Flow in a Rigid Tube)

การไหลภายในท่อเกร็ง ที่มีการไหลที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา สมการโมเมนตัมของการไหลจะแสดงได้ดังสมการ (2.18)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.18)$$

ถ้าหากการเปลี่ยนแปลงการไหลต่อเวลาที่เกิดขึ้นนี้เกิดจากความดันที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาในลักษณะเป็นแบบฟังก์ชันคาบ (periodic function) ดังแสดงในสมการ (2.19)

$$P(t) = Pe^{i\omega t} = P \left(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \right) \quad (2.19)$$

โดยที่ P คือ ความดันตกคร่อมสูงสุดที่เกิดขึ้นในหนึ่งคาบการไหล เมื่อแทนค่าสมการ (2.19) ลงในสมการ (2.18) จะพบว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{P}{\mu} e^{i\omega t} \quad (2.20)$$

พิจารณารูปแบบของสมการข้างต้นจะสังเกตได้ว่าความเร็วของของไหลก็จะอยู่ในรูปของ $u = Ue^{i\omega t}$ โดยที่ U คือความเร็วเฉลี่ยในแนวแกน ดังนั้นจากการคำนวณสมการ (2.20) ความเร็วของการไหลแบบออสซิลลาทอรีภายในท่อเกร็งสามารถเขียนได้ดังนี้ (Zamir, 1997)

$$u(r, t) = \frac{ia^2}{\mu\Omega^2} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{J_0(\zeta)}{J_0(\Lambda)} \right) e^{i\omega t} \quad (2.21)$$

เมื่อ	J_0	คือ	Bessel Function of the first kind, of order zero
	$\Omega = \sqrt{\frac{\rho\omega}{\mu}} a$	คือ	ค่า Womersley number
	$\Lambda = \left(\frac{i-2}{\sqrt{2}} \right) \Omega$		
	$\zeta(r) = \Lambda \frac{r}{a}$		

โดยที่ **Womersley number** คือ อัตราส่วนระหว่างความเฉื่อยของการไหล และความหนืดของการไหลในการไหลแบบเป็นคาบ ส่วนอัตราการไหลสุทธิ (net flow rate) ภายในช่วงเวลาหนึ่งคาบการไหลของการไหลแบบออสซิลลาทอรีจะมีค่าเป็นศูนย์เสมอ และ อัตราการไหลของของไหล ณ เวลาใดๆ มีค่าเท่ากับ

$$\dot{q}(t) = \frac{i\pi a^4}{\mu\Omega^2} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{2J_1(\Lambda)}{\Lambda J_0(\Lambda)} \right) e^{i\omega t} \quad (2.22)$$

เมื่อ J_1 คือ Bessel Function of the first kind, of the first order

ค่าความเค้นเฉือนที่ผนังท่อสามารถคำนวณได้จากสมการ

$$\begin{aligned}\tau(t) &= -\mu \left(\frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \right)_{r=a} \\ &= \frac{a}{\Lambda} \frac{dp}{dx} \left(\frac{J_1(\Lambda)}{J_0(\Lambda)} \right) e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (2.23)$$

ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการไหลทั้งหมดภายในท่อเกร็งที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ ซึ่งจะได้นำไปประยุกต์ใช้กับการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของผนังท่อดังจะกล่าวในรายละเอียดต่อไป

2.2.3 ท่อผนังบาง

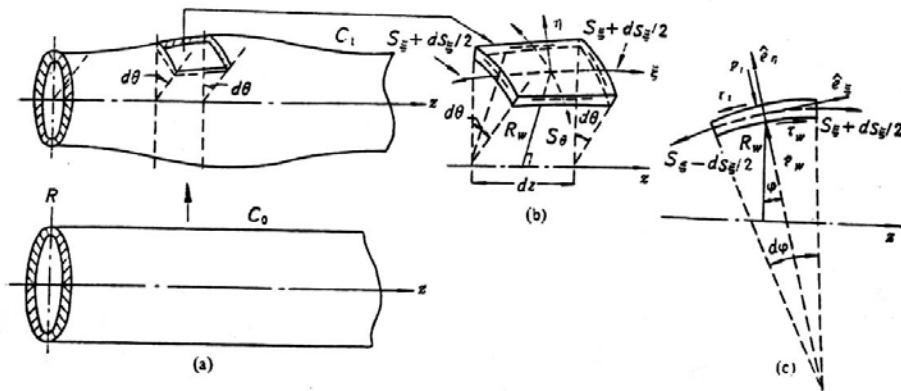
ในส่วนนี้จะเป็นการนำเสนอทฤษฎีเกี่ยวกับพฤติกรรมของท่อที่จะนำไปพิจารณาร่วมกับการไหลในลักษณะต่างๆ ดังที่ได้กล่าวไปแล้วในข้างต้น ซึ่งจะประกอบไปด้วยสมการที่อธิบายการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อ ความเค้นความเครียดที่กระทำกับผนังท่อ เมื่อถูกแรงภายนอกกระทำ สำหรับท่อผนังบางจะมีสมมติฐานคือ ความหนาของผนังท่อต่อรัศมีมีค่าน้อยมากๆ เกือบเข้าใกล้ศูนย์ซึ่งมีลักษณะแสดงได้ดังรูป 2.4 ดังนั้นสมการอธิบายการเปลี่ยนแปลง และการเคลื่อนที่ของผนังในระบบพิกัดอ้างอิงทรงกระบอกสามารถแสดงได้ดังนี้

แนวแกน x

$$\rho_e a_x = \frac{I}{h\sqrt{I+(\partial R_w/\partial x)^2}} \left[(p_t - p_w) \frac{\partial R_w}{\partial x} + \tau_w - \tau_t + \frac{h}{R_w} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_\xi R_w}{\sqrt{I+(\partial R_w/\partial x)^2}} \right) \right] \quad (2.24)$$

แนวรัศมี r

$$\rho_e a_r = \frac{I}{h\sqrt{I+(\partial R_w/\partial x)^2}} \left[p_w - p_t + (\tau_w - \tau_t) \frac{\partial R_w}{\partial x} + \frac{h}{R_w} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{S_\xi R_w}{\sqrt{I+(\partial R_w/\partial x)^2}} \left(\frac{\partial R_w}{\partial x} \right) \right) \right] \quad (2.25)$$



รูปที่ 2.4 การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับผนังและแรงภายนอก (a) การเปลี่ยนแปลงที่ผนังท่อ (b) วิเคราะห์ชิ้นส่วนของผนัง (c) วิเคราะห์ความเค้นที่เกิดขึ้นกับชิ้นส่วนของผนัง (Wu ,1989)

โดยที่	R_w	คือ	รัศมีตรงกึ่งกลางพื้นผิวของท่อ, m
	S_x	คือ	ความเค้นตามความยาวของท่อ, N/m^2
	S_θ	คือ	ความเค้นตามแนวเส้นรอบวงของท่อ, N/m^2
	p_w	คือ	ความเค้นของ ของไหลที่ตั้งฉากกับผนังท่อ, N/m^2
	p_t	คือ	ความเค้นของ พื้นผิวที่ตั้งฉากกับผนังท่อ, N/m^2
	τ_w	คือ	ความเค้นเฉือนของ ของไหลที่ผนังท่อ, N/m^2
	τ_t	คือ	ความเค้นเฉือนที่พื้นผิวของ ผนังท่อ, N/m^2
	h	คือ	ความหนาของผนังท่อ, m
	a_x	คือ	ความเร่งในแนวแกน, m/s^2
	a_r	คือ	ความเร่งในแนวรัศมี, m/s^2
	ρ_o	คือ	ความหนาแน่นของผนังท่อ, N/m^2

จากสมการ (2.24) และ (2.25) คือความเร่งในแนวแกนและแนวรัศมีเกิดขึ้นดังนั้นทำให้เราสามารถหาความสัมพันธ์ของสมการในรูปของ การขจัดของผนังท่อที่เปลี่ยนแปลงไปได้ ซึ่งความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและความเร่งที่ผนังอธิบายได้ด้วยการกำหนดให้ผนังท่อเป็นวัตถุที่มีความต่อเนื่อง และกำหนดให้ x_x คือ การเปลี่ยนแปลงระยะที่เกิดขึ้นในแนวแกน และ r_r คือ การเปลี่ยนแปลงระยะที่เกิดขึ้นในแนวรัศมี จะได้ว่า

$$r_r = R_w - R^* \quad (2.26)$$

เมื่อ R^* คือ รัศมีของท่อภายใต้สภาวะสมดุลหรือรัศมีคงที่ เพราะฉะนั้นในการไหลที่สมมาตรตามแนวแกนความเร็วที่เกิดขึ้นเป็นดังนี้

$$u = \frac{\partial x_x}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial r_r}{\partial t} \quad (2.27)$$

ความเร่งในแนวแกนและแนวรัศมีของท่อผนังบางเป็นดังสมการ

แนวแกน

$$a_x = \frac{\partial^2 x_x}{\partial t^2} + \frac{\partial x_x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x_x}{\partial t} \right) \quad (2.28)$$

แนวรัศมี

$$a_r = \frac{\partial^2 r_r}{\partial t^2} + \frac{\partial x_x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial r_r}{\partial t} \right) \quad (2.29)$$

เมื่อผนังท่อถูกกระทำภายใต้ความดันจะเกิดความเค้นและความเครียดขึ้นซึ่งสามารถอธิบายได้ด้วยสมการ

$$S_i = -p + A_i^j E_i + B_i^{jk} E_j E_k \quad (2.30)$$

เมื่อ	i	คือ	ดัชนีบ่งบอกมีค่า 1-3
	p	คือ	ความดันสถิตย, N/m^2
	S_i	คือ	เทนเซอร์ของความเค้น
	E_j	คือ	ความเครียด
	A_i^j, B_i^{jk}	คือ	ค่าคงที่ความยืดหยุ่นของลามเ (Lame's elastic constants)

สำหรับท่อผนังบางความเครียดหาค่าได้ดังนี้

$$E_1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{I}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.31)$$

$$E_2 = \frac{v}{r} + \frac{I}{2} \left(\frac{v}{r} \right)^2 \quad (2.32)$$

และภายใต้เงื่อนไขของของไหลอัดตัวไม่ได้จะได้ความสัมพันธ์ของ E_3 ดังนี้

$$(I + 2E_1) + (I + 2E_2) + (I + 2E_3) = I \quad (2.33)$$

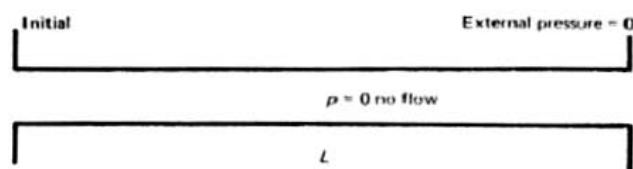
เมื่อพิจารณาการไหลของของไหลผ่านท่อที่ยืดหยุ่นที่มีความดันตกคร่อมของของไหลเกิดขึ้นทำให้ท่อเกิดการยุบและขยายตัวส่งผลให้เกิดความเค้นและความเครียดขึ้นกับท่อดังได้กล่าวไปแล้วในตอนต้น ในส่วนต่อไปจะเป็นการพิจารณาทฤษฎีอธิบายการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้

2.2.3 การไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้

การไหลที่เกิดขึ้นภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ที่ทำการศึกษาในงานวิจัยนี้จะแบ่งออกเป็น 2 แบบคือ การไหลแบบคงตัวและการไหลแบบออสซิลลาทอรี ดังนี้

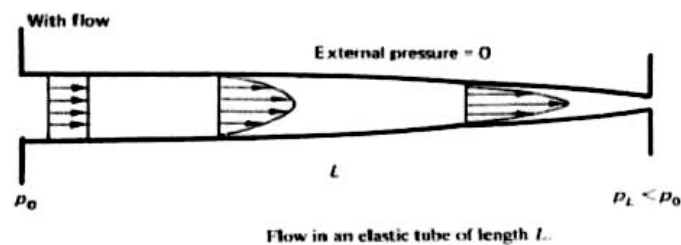
2.2.3.1 การไหลแบบคงตัว ภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ (Steady Flow in a Compliant Tube)

พิจารณาการไหลของของไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ โดยขณะเริ่มต้นความดันภายในและความดันภายนอกท่อกันค่าเท่ากันดังนั้นท่อจึงไม่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของท่อดังรูป 2.5 เนื่องจากความดันที่ทางเข้าท่อกันค่าเท่ากับความดันที่ทางออก จึงไม่เกิดการไหลเกิดขึ้น



รูปที่ 2.5 ท่อที่ยืดหยุ่นที่ไม่มี การไหลเกิดขึ้น (Fung, 1997)

เมื่อเกิดความดันตกคร่อมของไหลภายในท่อ จะเกิดการไหลขึ้นโดยจะไหลไปทางด้านที่มีความดันต่ำในขณะเดียวกันที่ความดันภายใน และ ภายนอกท่อไม่เท่ากันก็จะทำให้เกิดการเสียรูปของท่อขึ้นดังแสดงในรูป 2.6



รูปที่ 2.6 พฤติกรรม การไหลของของไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นที่เกิดขึ้น (Fung, 1997)

ความสัมพันธ์ระหว่างความดันต่าง (transmural pressure) และอัตราการไหลที่เกิดขึ้นสามารถแสดงได้ดังนี้ (Fung, 1997)

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{8\mu}{\pi r^4} Q \quad (2.34)$$

โดยที่ Q คือ อัตราการไหล, m^3/s

ถ้าสมมติว่า การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของท่อทำให้ พื้นที่หน้าตัดเป็นรูปวงกลมตลอดเวลา ดังนั้นพื้นที่หน้าตัดของท่อที่ยืดหยุ่นแปรผัน ตามความดันตกคร่อมระหว่างความดันทางเข้าและความดันทางออก สามารถเขียนได้ดังนี้

$$p(x) = p(0) - \frac{8\mu}{\pi} Q \int_0^x \frac{1}{[r(x)]^4} dx \quad (2.35)$$

พิจารณาค่าเฉลี่ยความเค้นในแนวเส้นรอบวงที่ผนังสามารถคำนวณได้โดย

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{p(x)r(x)}{h} \quad (2.36)$$

เมื่อ h คือ ความหนาของผนัง ถ้าหากให้ความยาวตามแนวแกนและแรงดึงมีค่าคงที่ การหาค่าความเครียดสามารถหาได้โดยสมการของฮุก (Hook's Law) ดังนี้

$$e_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{\theta\theta}}{E} \quad (2.37)$$

โดยที่ E คือค่ายังโมดูลัส ของวัสดุที่ใช้ทำผนัง ความเครียด ($e_{\theta\theta}$) ที่เกิดขึ้นในด้านขวามือ ของสมการ (2.36) ประกอบไปด้วย 2 ส่วนคือความเครียดตามแนวแกนและตามแนวรัศมีดังสมการ

$$\frac{1}{E}(\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr})$$

โดยที่ ν คือ อัตราส่วน Poisson สำหรับท่อผนังบางค่า σ_{rr} จะมีค่าน้อยมาก ส่วนใหญ่ การเปลี่ยนแปลงความเครียดจึงเกิดจาก $\sigma_{\theta\theta}$ การหาความเครียดอีกกรณีนั้นมาจากการเปลี่ยนแปลงของรัศมีหารด้วยรัศมีเริ่มต้น r_0

$$e_{\theta\theta} = \frac{r(x) - r_0}{r_0} = \frac{r(x)}{r_0} - 1 \quad (2.38)$$

รวมสมการ (2.38), (2.37) และ (2.36) เข้าด้วยกันจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีท่อและความดัน

$$r(x) = r_0 \left[1 - \frac{r_0}{Eh} p(x) \right]^{-1} \quad (2.39)$$

แทนค่าสมการ (2.39) ลงในสมการ (2.34) จะได้ผลความสัมพันธ์ของความดันและอัตราการไหลดังนี้

$$\left(1 - \frac{r_0}{Eh} p\right)^{-4} dp = -\frac{8\mu}{\pi r_0^4} \dot{Q} dx \quad (2.40)$$

เมื่อมีการกำหนด เงื่อนไขที่ขอบ (boundary conditions) ให้ $p = p_0$ เมื่อ $x=0$ และ $p = p_L$ เมื่อ $x=L$ การอินทิเกรตสมการ (2.39) จาก p_0 ถึง p_L ทางด้านซ้ายมือของสมการและทางด้านขวามือจะได้การไหลที่ไม่เป็นเชิงเส้นกับความดันที่ลดลง $p_0 - p_L$ โดยความสัมพันธ์กับอัตราการไหลดังนี้

$$\frac{Eh}{3r_0} \left\{ \left[1 - \frac{r_0}{Eh} p(L) \right]^{-3} - \left[1 - \frac{r_0}{Eh} p(0) \right]^{-3} \right\} = -\frac{8\mu}{\pi r_0^4} L \dot{Q} \quad (2.41)$$

การพิจารณาการไหลในข้างต้นนั้น เป็นการหาค่าของความสัมพันธ์ระหว่างความดันและอัตราการไหลที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างรัศมีกับความดันมีลักษณะที่เป็นเชิงเส้นจะได้ดังสมการ

$$r = r_0 + \alpha p/2$$

เมื่อ	r_0	คือ	รัศมีของท่อ
	α	คือ	ค่าคงที่ของความยืดหยุ่นของท่อ

ดังนั้นความดันแตกต่างระหว่างภายในและภายนอกท่อเป็นศูนย์

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dr} \frac{dr}{dx} = \frac{2}{\alpha} \frac{dr}{dx} \quad (2.42)$$

แทนค่าสมการ (2.42) ใน (2.35) จัดเรียงเทอมใหม่จะได้

$$r^4 \frac{dr}{dx} = \frac{1}{5} \frac{dr^5}{dx} = -\frac{4\mu\alpha}{\pi} Q \quad (2.43)$$

ทางด้านขวามือค่าคงที่อิสระกับ x จะได้ผลของการอินทิเกรต

$$(r(x))^5 = -\frac{20\mu\alpha}{\pi} Q x + const \quad (2.44)$$

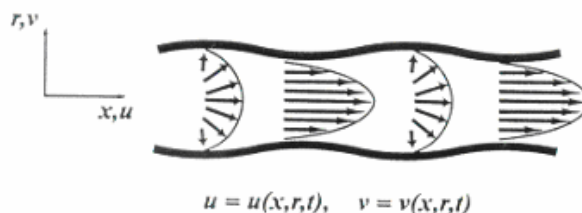
เมื่อมีการกำหนดขอบเขต $x = 0, r(x) = a(0)$ ดังนั้นค่าคงที่ เท่ากับ $r(0)^5$ เมื่อแทนค่า $x = L$ ในสมการ (2.44) จะได้ผลดังนี้

$$\frac{20\mu\alpha L}{\pi} Q = [r(0)]^5 - [r(L)]^5 \quad (2.45)$$

จะเห็นได้ว่าการไหลแบบคงตัวภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ สามารถคำนวณได้จากสมการ (2.41) และ (2.45) โดยในสมการ (2.41) เมื่อต้องการหาความสัมพันธ์ของความดันและอัตราการไหลที่ไม่เป็นเชิงเส้นและสมการ (2.45) เป็นการหา ความสัมพันธ์ของรัศมี กับ อัตราการไหลที่เป็นเชิงเส้น โดยที่การเปลี่ยนแปลงของอัตราการไหลที่เกิดขึ้นเป็นผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงทางด้านของรัศมียกกำลังห้า นั่นเอง (Fung, 1997)

2.2.3.2 การไหลแบบออสซิลลาทอรีภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ (Oscillatory Flow in a Compliant Tube)

การไหลของของไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ ที่มีรูปแบบของความเร็วที่เกิดขึ้น ดังรูป 2.7 เป็นลักษณะรูปแบบความเร็วของของไหลที่เกิดขึ้นภายในท่อที่ยืดหยุ่น ลักษณะรูปแบบความเร็วที่เกิดขึ้นในแต่ละช่วงระยะตามแนวแกน x จะมีขนาดไม่เท่ากันทั้งนี้ขึ้นอยู่กับ การเปลี่ยนแปลงขนาดของรัศมีท่อ



รูปที่ 2.7 แสดงการไหลของของไหลแบบพัลส์ภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้

ความเร็วที่เกิดขึ้นภายในท่อยืดหยุ่นนั้นจะเกิดขึ้นได้ทั้งในแนวแกนและในแนวรัศมี การที่ความเร็วของการไหลเกิดขึ้นจากความดันตกคร่อมที่มีลักษณะเป็นคลื่น และมีช่วงคาบที่แน่นอน ยกตัวอย่างเช่นคลื่นไซน์ (sine wave) และคลื่นโคไซน์ (cosine wave) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเอ็กโปเนนเชียล (exponentials) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} p(x, r, t) &= P(r)e^{i\omega(t-x/c)} \\ u(x, r, t) &= U(r)e^{i\omega(t-x/c)} \\ v(x, r, t) &= V(r)e^{i\omega(t-x/c)} \end{aligned} \quad (2.46)$$

เมื่อ ω คือความถี่ของการออสซิลเลท เมื่อการออสซิลเลทภายในท่อมีความถี่เหมือนกันทำให้ง่ายในการวิเคราะห์ในรูปแบบทางเอ็กโปเนนเชียล แทนค่าลงในสมการควบคุม (2.9) และ (2.10) จะได้

$$\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} - \frac{i\rho\omega}{\mu} U = -\frac{i\omega}{\mu c} p \quad (2.47)$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\rho\omega}{\mu} \right) V = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dr} \quad (2.48)$$

$$\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} - \frac{i\omega}{c} U = 0 \quad (2.49)$$

จะเห็นได้ว่า 2 เทอมแรกของสมการ อยู่ในรูปของสมการเบสเซิล ซึ่งหาค่าได้จากเบสเซิลฟังก์ชันเพื่อให้สมการอยู่ในรูปแบบมาตรฐานได้มีการกำหนดค่าตัวแปรต่างๆ ขึ้นมา ดังแสดงในสมการ (2.50) เพื่อแทนในสมการ (2.47), (2.48) และ (2.49)

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho\omega}{\mu}} a, \Lambda = \left(\frac{i-1}{\sqrt{2}} \right) \Omega, \zeta = \Lambda \frac{r}{a} \quad (2.50)$$

ด้วยการแทนค่าให้อยู่ในเทอมของ ζ สมการควบคุมทั้ง 3 กลายเป็น

$$\frac{d^2U}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dU}{d\zeta} + U = \frac{1}{\rho c} p \quad (2.51)$$

$$\frac{d^2V}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{dV}{d\zeta} + \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) V = \frac{i\Lambda dp}{\rho a \omega d\zeta} \quad (2.52)$$

$$\frac{dV}{d\zeta} + \frac{V}{\zeta} - \frac{i\omega a}{c\Lambda} U = 0 \quad (2.53)$$

จากสมการเงื่อนไขขอบเขตเมื่อความเร็วที่ผนังเป็นศูนย์ ที่จุดกึ่งกลางของท่อจะมีความเร็วมาก ถ้ากำหนดให้รัศมีมีค่าเท่ากับ a สมการขอบเขตให้ไว้ดังนี้

$$r = a, \zeta = A, \\ U(a), V(a) = 0$$

$$r = 0, \zeta = 0 \\ U(0), V(0) = \text{finite}$$

คำตอบของสมการจากเงื่อนไขขอบเขตที่ให้จะได้ดังนี้

$$U(r) = AJ_0(\zeta) + B \frac{a\gamma}{\mu(i\Omega^2 + \gamma^2)} J_0\left(\frac{\gamma}{\Lambda} \zeta\right) \quad (2.54)$$

$$V(r) = A \frac{\gamma}{\Lambda} J_1(\zeta) + B \frac{a\gamma}{\mu(i\Omega^2 + \gamma^2)} J_1\left(\frac{\gamma}{\Lambda} \zeta\right) \quad (2.55)$$

$$P(r) = BJ_0\left(\frac{r}{a}\right) \quad (2.56)$$

โดยที่ A และ B เป็นตัวแปรที่เป็นค่าคงที่และเมื่อกำหนดค่าคงที่ γ

$$\gamma = \frac{i\omega a}{c}$$

และการหาคำตอบด้วยการแทนค่า

$$\frac{a}{L} \ll 1 \\ J_0\left(\frac{r}{a}\right) \approx 1 \\ J_1\left(\frac{r}{a}\right) \approx \frac{1}{2} \frac{r}{a}$$

จะได้ค่าของคำตอบโดยการประมาณลดรูปลงเหลือ

$$U(r) = AJ_0(\zeta) + B\left(\frac{1}{\rho c}\right) \quad (2.57)$$

$$V(r) = A \frac{i\omega a}{c\Lambda} J_1(\zeta) + B \left(\frac{i\omega r}{2\rho c^2} \right) \quad (2.58)$$

$$P(r) = B(\text{constant}) \quad (2.59)$$

เมื่อของไหลอัดตัวไม่ได้ มีการไหลเป็นแบบ fully develop และมีค่าแฟคเตอร์ของความยืดหยุ่นกำหนดเป็น G ซึ่งเป็นตัวแปรไร้มิติ (Zamir, 2000)

$$G = \frac{2 + z(2\nu - 1)}{z(2\nu - g)} \quad (2.60)$$

จะเห็นว่ามีความสัมพันธ์จากสมการ (2.60) ที่มีผลต่อแฟคเตอร์ของความยืดหยุ่นคือ z ซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อนหาได้จาก

$$z = \frac{E_\nu h}{\rho a c^2} \quad (2.61)$$

จำนวนเชิงซ้อน z ขึ้นอยู่กับค่าความเร็วคลื่น c ในเทอมของ ของไหลและผนังท่อ ถ้าของไหลไหลผ่านท่อที่ไม่มีความหนืดความเร็วของคลื่นหาได้จาก

$$c_0^2 = \frac{Eh}{2\rho a} \quad (2.62)$$

จะได้ค่า z ที่สัมพันธ์กับความเร็วคลื่นดังนี้

$$z = \frac{E_\nu h}{\rho a c^2} = \frac{2}{1 - \nu^2} \left(\frac{c_0}{c} \right)^2 \quad (2.63)$$

ความเร็วคลื่น c ที่มีความหนืดหาได้จาก

$$c = \sqrt{\frac{2}{(1 - \nu^2)z}} c_0 \quad (2.64)$$

และ g คือ ตัวแปรไร้มิติกำหนดดังนี้

$$g = \frac{2J_1(\Lambda)}{\Lambda J_0(\Lambda)} \quad (2.65)$$

เมื่อหาค่าความสัมพันธ์ของการไหลในรูปของความเร็วในปริมาณที่ไร้มิติจะได้ ความเร็วตามแนวแกนต่อความเร็วสูงสุด u_r ในการไหลแบบคงตัวคือ

$$\frac{u(x, r, t)}{u_s} = -\frac{4}{\Lambda^2} \left[1 - G \frac{J_0(\zeta)}{J_0(\Lambda)} \right] e^{i\omega(t-x/c)} \quad (2.66)$$

และในทำนองเดียวกันจะได้ความเร็วตามแนวรัศมีต่อความเร็วสูงสุด u_s ในการไหลแบบคงตัว คือ

$$\frac{v(x, r, t)}{u_s} = \frac{2a\omega}{i\Lambda^2 c} \left[\frac{r}{a} - Gg \right] e^{i\omega(t-x/c)} \quad (2.67)$$

และถ้าที่ผนังท่อเมื่อ $r=a$ จะได้เป็น

$$\frac{v(x, r, t)}{u_s} = \frac{2a\omega}{i\Lambda^2 c} [1 - Gg] e^{i\omega(t-x/c)} \quad (2.68)$$

การหาอัตราการไหลในรูปของปริมาณที่วัดได้ สามารถหาได้จากอัตราการไหลต่ออัตราการไหลแบบคงตัว q_s ดังนี้

$$\frac{q(x, t)}{q_s} = -\frac{8}{\Lambda^2} [1 - Gg] e^{i\omega(t-x/c)} \quad (2.69)$$

การแก้ปัญหการไหลแบบพัลส์จะจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปของ สมการเบซเซล ซึ่งหาค่าได้จาก เบซเซลฟังก์ชัน หาค่าคำตอบของ ความเร็วคลื่นที่เกิดขึ้นและเมื่อความถี่ของการออสซิลเลทเปลี่ยนไปจะมีผลต่อความเร็ว หรือ อัตราการไหล และ ความดันตกคร่อมอย่างไรมีการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลง สิ่งที่จะนำมาพิจารณาต่อไปคือการสร้างแบบจำลองของการไหลชนิดนี้

2.2.4 การเลือกใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Selection Criteria of Mathematical Model)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ คือระบบสมการควบคุม หรือ รูปแบบของสมการควบคุมที่ถูกทำให้ง่ายขึ้นแล้วซึ่ง การพิจารณาในทางพลศาสตร์ของไหล โดยทั่วไปจะแบ่งได้ตามประเภทของการไหล เช่น

- การไหลของของไหลแบบอัดตัวไม่ได้ (incompressible flow) หมายถึง การไหลชนิดที่เมื่อความดันเปลี่ยนแปลง ปริมาตรจะเกิดการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก จนสามารถที่จะไม่คำนึงถึงได้ หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ การไหลของของไหล ประเภทที่มีค่าความหนาแน่นคงที่ โดยปกติการไหลของของเหลวจัดว่าเป็นการไหลของของไหลประเภทที่ยึดตัวไม่ได้

- การไหลของของไหลแบบไม่มีความหนืด (inviscid flow) หมายถึง ของไหลที่มีความเสียดทานหรือมีความหนืดเป็นศูนย์หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าของไหลในจินตนาการ

- การไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow) หมายถึง การไหลของ ของไหลชนิดที่อนุภาคของของไหลเคลื่อนที่ในลักษณะหรือทิศทางไม่แน่นอน มีการเคลื่อนที่ขึ้นลงและมีการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมจากส่วนหนึ่งของ ของไหลไปยังส่วนอื่น ๆ ลักษณะการไหลของ ของไหลเกือบ 95 เปอร์เซ็นต์จะเป็นการไหลแบบนี้ ตัวอย่างเช่นการไหลของน้ำตามแม่น้ำลำคลอง การไหลของอากาศในท่อลม เป็นต้น

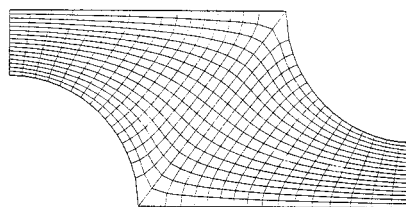
- การไหลแบบสองมิติ (2D) หรือ สามมิติ (3D) การไหล 2 มิติ หมายถึง การไหลชนิดที่เส้นการไหลเคลื่อนที่ไปบนระนาบอันเดียวกันแต่มีการเคลื่อนที่ขึ้นลงได้ ตัวอย่างของการไหล 2 ทิศทางเช่น การไหลของน้ำที่ล้นเขื่อนหรือการไหลของอากาศผ่านปีกของเครื่องบิน เป็นต้น การไหล 2 ทิศทางนี้ความเร็ว ความดัน เปลี่ยนแปลงไปตามจุดที่พิจารณา ส่วนการไหล 3 มิติ หมายถึงเส้นของการไหลเปลี่ยนแปลงไปใน 3 ทิศทางเมื่อมองเส้นการไหลจะออกมาในรูปของวงแหวน ลักษณะการเกิดการไหลใน 3 ทิศทาง เช่นบริเวณที่ของไหลกำลังไหลเข้าสู่ท่อหรือเมื่อของไหลปะทะวัตถุที่ขวางทิศทางของการไหลเช่น อากาศปะทะลูกปืน เป็นต้น

จากการไหลประเภทต่าง ๆ ดังที่ได้กล่าวมานั้นในการคำนวณเชิงตัวเลขจะมีวิธีการและสมการควบคุมเฉพาะที่เหมาะสมกับปัญหาการไหลนั้นๆและจะต้องมีการระบุตำแหน่งหรือพิกัดอ้างอิงซึ่งสามารถแบ่งได้หลักๆดังนี้

2.2.4.1 ระบบพิกัดอ้างอิง

รูปแบบของสมการควบคุมโดยส่วนมากจะแตกต่างกันเนื่องจากระบบพิกัดอ้างอิง รูปที่ 2.8 เป็นตัวอย่างของการใช้พิกัดอ้างอิง

- Cartesian Coordinate หมายถึง พิกัดฉากเป็นพิกัดอ้างอิงของแกนตั้งฉากซึ่งกันและกัน
- Cylindrical Coordinate หมายถึงพิกัดอ้างอิงของทรงกระบอกซึ่งบ่งบอกแกนเป็นความยาว รัศมี และมุม
- Spherical Coordinate หมายถึงพิกัดอ้างอิงของทรงกลม
- Curvilinear Orthogonal หมายถึงพิกัดอ้างอิงของเส้นโค้งที่ตัดกันไปมาเป็นสี่เหลี่ยม
- Non-Orthogonal หมายถึงพิกัดอ้างอิงตัดกันไม่เป็นสี่เหลี่ยม



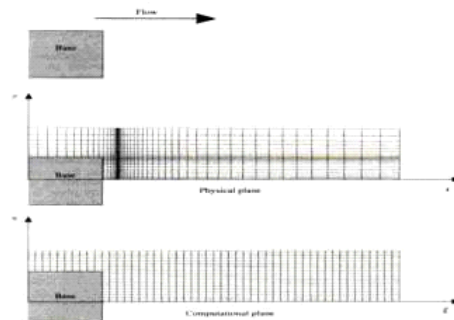
รูปที่ 2.8 การใช้ พิกัดอ้างอิงที่เป็นเส้นโค้งตัดกันไปมาเป็นรูปสี่เหลี่ยม

การเลือกใช้พิกัดอ้างอิงขึ้นอยู่กับ ลักษณะการไหลซึ่งในงานวิจัยนี้เป็นท่อทรงกระบอกจึงเลือกใช้พิกัดอ้างอิงทรงกระบอก (cylindrical coordinate) นอกเหนือจากพิกัดอ้างอิงแล้วสิ่งที่จำเป็นในการคำนวณ คือ การแบ่งช่วงของการคำนวณดังนี้

2.2.4.2 กริดเชิงตัวเลข (Numerical Grid)

การใช้กริดจะมีการแบ่งโดเมนการคำนวณออกเป็นส่วนๆ มีการคำนวณตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการไหลในตำแหน่งต่างๆ เหล่านี้ชนิดของกริด สามารถแบ่งย่อยได้ดังนี้

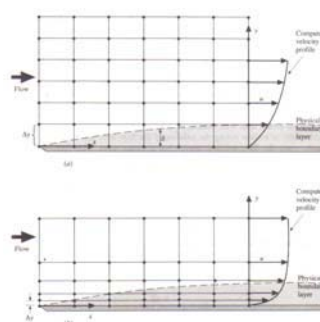
- Structured grid หรือกริดแบบโครงสร้าง ประกอบด้วยกลุ่มของกริด (แนวตั้งและแนวนอน) ที่สมาชิกภายในกลุ่มไม่ตัดกันเอง แต่จะตัดกับสมาชิกแต่ละตัวของกลุ่มอื่นเพียงหนึ่งครั้ง ดังแสดงในรูป 2.9 กริดแบบนี้จะมีข้อดีโดยส่วนมากจะเทียบได้กับ กริด คาร์ทีเซียน ซึ่งแต่ละจุดจะมีจุดข้างเคียง 4 จุด สำหรับสองมิติ และ 6 จุดสำหรับสามมิติ เป็นกริดที่ง่ายที่สุดสะดวกในการเขียนโปรแกรม และ เมตริกของระบบสมการพีชคณิต (algebraic equation) เป็นโครงสร้างที่มีแบบแผนมีการหาคำตอบที่มีประสิทธิภาพอยู่มากใช้ได้ดีกับรูปร่างที่ไม่ซับซ้อน แต่ก็มีข้อเสียคือ ควบคุมการกระจายตัวของกริดได้ยาก และหากทำการกระจายตัวกริดไม่เหมาะสมจะทำให้การหาคำตอบมีความคลาดเคลื่อนหรือ ทำให้การแก้ปัญหาไม่ลู่เข้า (diverge)



รูปที่ 2.9 การใช้ Structured Grid

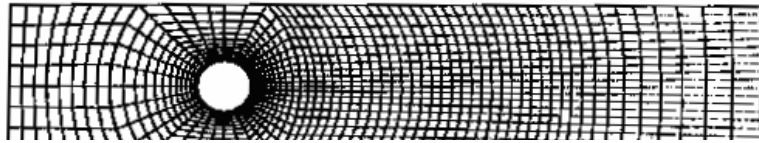
กริดแบบโครงสร้างนี้ยังมีการแบ่งย่อยออกได้เป็น 3 ประเภท คือ

H-grid เป็นกริดที่มีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยมที่มีด้านแยกชัดเจนดังแสดงในรูป 2.10



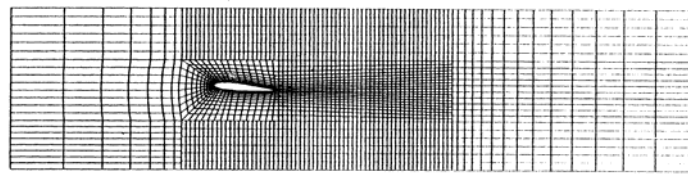
รูปที่ 2.10 การใช้ Structured Grid แบบ H-Grid

O-grid เป็นกริดที่นิยมใช้ในลักษณะเป็นวงกลมที่ไม่จำเป็นต้องสนใจจุดปลายของกริดดังแสดงในรูป



รูปที่ 2.11 การใช้ Structured Grid แบบ O-Grid

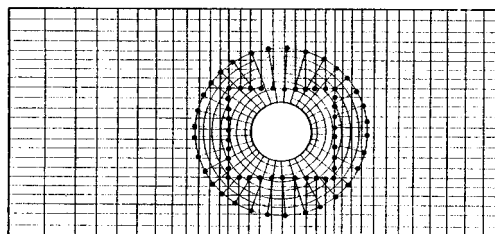
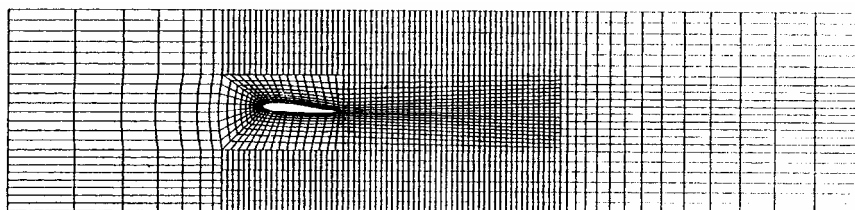
C-grid เป็นกริดที่มักใช้กับวัตถุที่มีขอบแหลมซึ่งมีกริดอยู่หนึ่งเส้นที่มีจุดซ้อนกันดังรูป 2.12



รูปที่ 2.12 การใช้ Structured Grid แบบ C-Grid

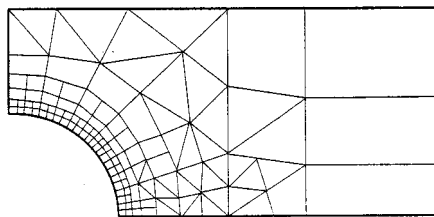
นอกเหนือจากกริดที่เป็นแบบโครงสร้างแล้วยังมี

- Block-structured grid เป็นกริดที่จัดเป็นกลุ่มซ้อนกันภายในโดเมน ส่วนที่มีการเหลื่อมกันมีชื่อเรียกอีกอย่างว่า composite grids หรือ chimera grids ดังรูป 2.13 ซึ่งกริดประเภทนี้มีข้อดีคือมีโดเมนย่อยมากกว่าสองโดเมนภายในโดเมนของการคำนวณและแต่ละโดเมนย่อยไม่จำเป็นต้องมีความละเอียดเท่ากัน ต้องมีการคำนวณเพิ่มเติม ณ บริเวณรอยต่อของแต่ละโดเมน มีความยืดหยุ่นมากกว่ากริดแบบ โครงสร้างและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับ รูปร่างที่ซับซ้อนหรือวัตถุที่เคลื่อนที่ได้แต่ยังมีข้อเสียคือเขียนโปรแกรมยาก และยากในการนำมาใช้กับกฎการอนุรักษ์จึงไม่เป็นที่นิยม



รูปที่ 2.13 การใช้ Block - Structured Grid

- Unstructured grid หรือกริดที่ไม่เป็นโครงสร้างเป็นกริดที่ใช้กับการเปลี่ยนแปลงที่ไม่เป็นรูปแบบกับโครงสร้างที่ซับซ้อนดังแสดงในรูป 2.14 กริดแบบนี้มีข้อดีคือใช้กับรูปร่างซับซ้อนได้ดีและสามารถใช้กับ discretization แบบไหนก็ได้ แต่นิยมกับวิธี FVM และ FEM ซึ่งใช้กับปริมาตรหรือชิ้นส่วนที่มีรูปร่างแบบไหนก็ได้ และไม่มีข้อจำกัดในเรื่องของจำนวนจุดข้างเคียงโดยทั่วไปจะเป็นกริดแบบสามเหลี่ยมหรือ สี่เหลี่ยมในงานสองมิติ และห้าหรือหกเหลี่ยม ในงานสามมิติมี algorithm ที่สามารถใช้สร้างกริดโดยอัตโนมัติสามารถปรับความละเอียดของกริดในเฉพาะที่ได้ง่ายมีระบบสมการพีชคณิตที่ใช้ในการคำนวณไม่เป็นแบบแผน มีข้อเสียคือต้องมีการเก็บตำแหน่งของแต่ละจุด และตำแหน่งข้างเคียงแยกต่างหาก ทำให้การสร้างกริด และขบวนการ pre-processing มีความยุ่งยากการคำนวณหาคำตอบช้า



รูปที่ 2.14 การใช้ Unstructured Grid

2.2.5 การทำดิสครีไทเซชัน (Discretization Method)

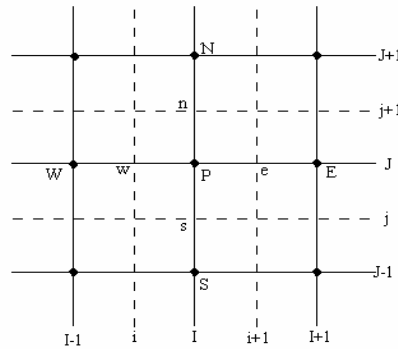
การทำ discretization จะต้องเลือกวิธีให้เหมาะสมกับรูปแบบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งมีวิธีที่นิยมใช้ดังนี้

1. วิธีทางด้านไฟไนต์ ดิฟเฟอเรนซ์ (Finite Difference Method ; FDM) ใช้สำหรับการไหลเฉพาะอย่างที่อาศัยความแตกต่างของจุดอ้างอิงที่ต่อเนื่อง (spectral method) ในการคำนวณ (computational domain) จะถูกแบ่งออกเป็นพื้นที่กริด คำตอบของสมการควบคุมในรูปของระบบสมการอนุพันธ์จะถูกประมาณจากค่าของจุดที่ต้องการคำตอบและจุดใกล้เคียง มีข้อดีคือง่ายในการนำไปใช้งานและนิยมใช้กับกริดแบบโครงสร้าง ข้อเสียคือไม่สามารถใช้กับงานที่รูปร่างซับซ้อนได้
2. วิธีทางด้านไฟไนต์ วอลุ่ม (Finite Volume Method; FVM) ใช้พิจารณากับการไหลตลอดทั้งปริมาตรโดยพิจารณาทางด้านของขอบเขตเป็นหลัก (boundary element method) คำตอบที่ได้จะมาจากสมการควบคุมที่อยู่ในรูปอินทิเกรต (control volume approach) และเป็นคำตอบที่ตำแหน่งกึ่งกลางของปริมาตรควบคุม ข้อดีคือใช้กับรูปร่างที่ซับซ้อนได้และรูปร่างของกริดไม่ขึ้นกับพิกัดอ้างอิง แต่มีข้อเสียคือยากในการนำไปประยุกต์ใช้สำหรับงาน 3 มิติได้และยังยากในการพัฒนา ความแม่นยำ
3. วิธีทางด้านไฟไนต์ อิลิเมนต์ (Finite Element Method; FEM) ใช้พิจารณากับการไหลโดยแบ่งส่วนพิจารณาออกเป็นชิ้นย่อยๆ (Cellular Automata) คล้ายกับ FV โดยที่แบ่งพื้นที่เป็น Volume คำตอบจะถูกคำนวณโดยอาศัย รูปร่างซึ่งส่วนมากใช้กับ กริดที่ไม่เป็นโครงสร้างใช้ได้ดีกับงานที่มีรูปร่างซับซ้อน แต่ยากในการหาวิธีคำนวณผลลัพธ์ที่มีประสิทธิภาพ

ถ้ากริดมีความละเอียดมากๆ การทำ Discretization แต่ละวิธีจะให้คำตอบเหมือนกัน สำหรับปัญหาการไหลแบบเดียวกัน จากการเลือกใช้ฟังก์ชันกริดและวิธีดิสครีไทซ์ดังกล่าวข้างต้นแล้ว การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขสามารถทำได้โดยขบวนการเชิงตัวเลขดังกล่าวต่อไปนี้

2.2.6 วิธีซิมเพล็กซ์ (SIMPLEC Method: Semi-Implicit Method for Pressure-Link Equations – Consistent ;Van Doormal and Raithby (1984))

เป็นวิธีหนึ่งที่ใช้ในการคำนวณหาคำตอบ ของแบบจำลองเชิงตัวเลขโดยการเดาค่าเริ่มต้นและคำนวณหาค่าเพื่อให้ได้คำตอบที่แท้จริง ใช้หลักการของกริดเข้ามาเกี่ยวข้อง เช่น การแทนค่าเริ่มต้นด้วยค่าของความดัน หาค่าความเร็ว ตามแนวแกน u และความเร็วตามแนวรัศมี v นำคำตอบของความดันที่ได้ย้อนแทนค่าจนได้คำตอบที่แท้จริงของความดันและความเร็วตามแนวแกนและแนวรัศมี โดยจากสมการควบคุม (2.9) และ(2.10) ในส่วนของสมการโมเมนตัม ที่ไม่คิดแรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วง และกำหนดตำแหน่งต่างๆดังแสดงในรูป 2.15 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการดิสครีไท (discretized form) ได้ดังนี้



รูปที่ 2.15 การกำหนดตำแหน่งของการดิสครีไท

$$a_{i,j}u_{i,j} = \sum a_{nb}u_{nb} + (p_{I-1,J} - p_{I,J})A_{i,j} \quad (2.70)$$

$$a_{I,j}v_{I,j} = \sum a_{nb}v_{nb} + (p_{I,J-1} - p_{I,J})A_{I,j} \quad (2.71)$$

1. กำหนดค่า p^* เริ่มต้น
2. หาค่า จากสมการ u^* และ v^* จากสมการข้างล่าง

$$a_{i,j}u_{i,j}^* = \sum a_{nb}u_{nb}^* + (p_{I-1,J}^* - p_{I,J}^*)A_{i,j} + b_{i,j} \quad (2.72)$$

$$a_{I,j}v_{I,j}^* = \sum a_{nb}v_{nb}^* + (p_{I,J-1}^* - p_{I,J}^*)A_{I,j} \quad (2.73)$$

แทนค่า (2.72) และ (2.73) ใน (2.70) และ (2.71) จะได้

$$a_{i,j}(u_{i,j} - u_{i,j}^*) = \sum a_{nb}(u_{nb} - u_{nb}^*) + [(p_{I-1,J} - p_{I-1,J}^*) - (p_{I,J} - p_{I,J}^*)]A_{i,j} \quad (2.74)$$

$$a_{I,j}(v_{I,j} - v_{I,j}^*) = \sum a_{nb}(v_{nb} - v_{nb}^*) + [(p_{I,J-1} - p_{I,J-1}^*) - (p_{I,J} - p_{I,J}^*)]A_{I,j} \quad (2.75)$$

3. ใช้ค่าความดัน p' แก้ไข ค่าความดันเริ่มต้น p^* เริ่มต้น

$$p = p^* + p' \quad (2.76)$$

4. ใช้ค่าความเร็วแก้ไขเพื่อให้ได้ความเร็วที่แท้จริง u', v'

$$\begin{aligned} u &= u^* + u' \\ v &= v^* + v' \end{aligned} \quad (2.77)$$

5. ใช้ค่าแก้ไขของความดันย้อนแทนค่าในสมการความเร็ว

$$a_{i,j}u'_{i,j} = \sum a_{nb}u'_{nb} + (p'_{I-1,J} - p'_{I,J})A_{i,j} \quad (2.78)$$

$$a_{I,j}v'_{I,j} = \sum a_{nb}v'_{nb} + (p'_{I,J-1} - p'_{I,J})A_{I,j} \quad (2.79)$$

ทำให้ $\sum a_{nb}u'_{nb}$ และ $\sum a_{nb}v'_{nb}$ หหมดไป จะทำให้สมการการปรับค่าของความเร็วเหลือ

$$u'_{i,j} = d_{i,j}(p'_{I-1,J} - p'_{I,J}) \quad (2.80)$$

$$v'_{I,j} = d_{I,j}(p'_{I,J-1} - p'_{I,J}) \quad (2.81)$$

โดยที่

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j} - \sum a_{nb}} \quad (2.82)$$

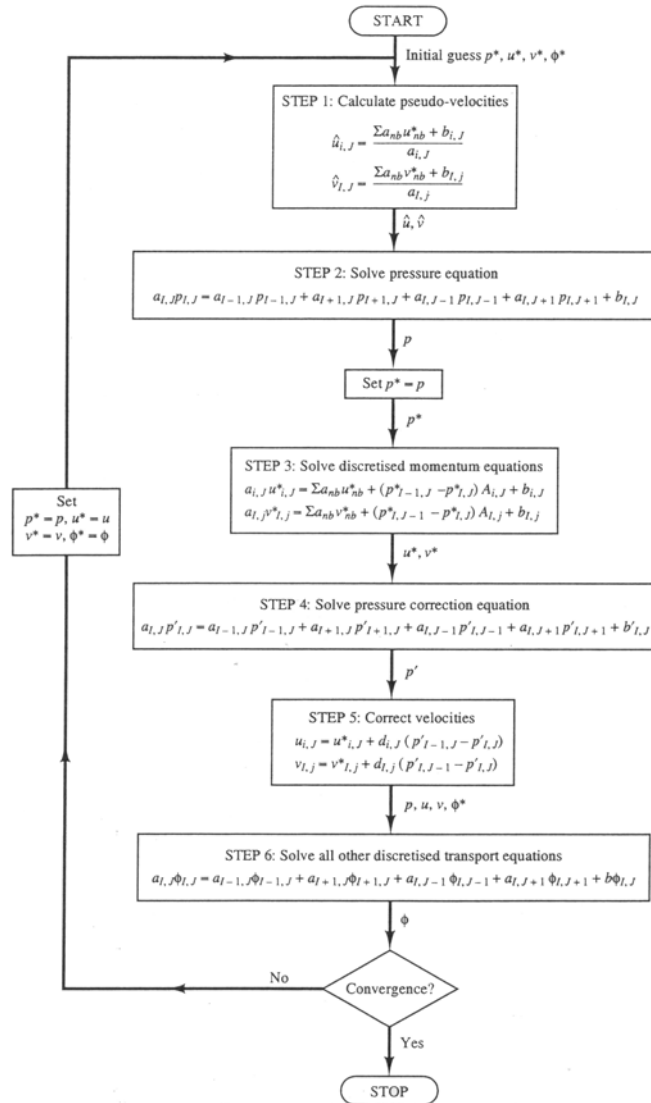
$$d_{I,j} = \frac{A_{I,j}}{a_{I,j} - \sum a_{nb}} \quad (2.83)$$

โดยใช้ตัวแก้ค่าของความเร็วจะได้ค่าของความเร็วที่แท้จริงดังสมการ

$$u_{i,j} = u_{i,j}^* + d_{i,j}(p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) \quad (2.84)$$

$$v_{i,j} = v_{i,j}^* + d_{i,j}(p'_{i,j-1} - p'_{i,j}) \quad (2.85)$$

การคำนวณโดยรวมด้วยวิธีการทำซิมเพล็กซ์ สามารถเขียนอีกครั้งในลักษณะแผนภาพดังรูป 2.16 การแก้ปัญหาการไหลภายในท่อที่ยึดหยุ่นได้จะเป็นการแก้ปัญหาระหว่าง การไหลและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างพร้อมๆ กันซึ่งจะต้องใช้ในการวิจัยนี้ จะมีความดันที่เป็นตัวแปรสำคัญ ในการแก้ปัญหาร่วมกันระหว่างการไหลและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของท่อ



รูปที่ 2.16 แผนภูมิการคำนวณด้วยวิธีซิมเพล็กซ์

บทที่ 3

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

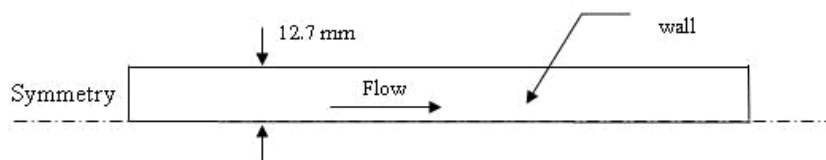
การสร้างแบบจำลองเชิงตัวเลขนั้นเป็นการนำเอาสมการคณิตศาสตร์ที่กล่าวไปในบทที่ 2 มาคำนวณหาคำตอบด้วยวิธีการเชิงตัวเลข ซึ่งจะมีขั้นตอนหลักๆอยู่ทั้งหมด 3 ขั้นตอน คือ ขั้นตอนก่อนการประมวลผล (pre-processing) ขั้นตอนการประมวลผล (processing) และขั้นตอนหลังการประมวลผล (post-processing) ในส่วนของขั้นตอนก่อนการประมวลผล จะเป็นการสร้างแบบจำลองทางกายภาพของปัญหา การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต เงื่อนไขเริ่มต้น และคุณสมบัติของระบบกายภาพ ขั้นตอนของการประมวลผลที่ใช้วิธีการเชิงตัวเลขเข้ามาคำนวณหาคำตอบจากสมการควบคุม ผลของการคำนวณที่ได้จะถูกนำมาแสดงและวิเคราะห์เพิ่มเติมในขั้นตอนหลังการประมวลผล

3.1 ขั้นตอนก่อนการประมวลผล (Pre-Processing)

การแก้ปัญหาของท่อยืดหยุ่นได้ โดยการจำลองสภาพทางกายภาพของท่อแล้วกำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตต่างๆเพื่อแก้ปัญหาดังนี้

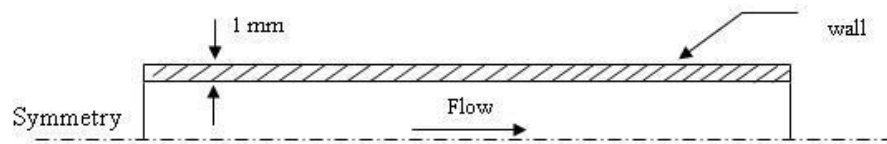
3.1.1 การสร้าง Geometry Model

การสร้างแบบจำลองในการศึกษานี้มี 2 ส่วนคือ การสร้างแบบจำลองของการไหลของของไหลภายในท่อแข็งเกร็งและภายในท่อยืดหยุ่น โดยการทำหนดขนาดของท่อนั้นอ้างอิงจากขนาดของเส้นเลือดใหญ่ซึ่งมีการขยายสเกลโดยกำหนดให้ท่อกว้างขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 25.4 มิลลิเมตร (1 นิ้ว) ยาว 200 มิลลิเมตร (วัดหนา, 2524) ซึ่งมีความหนาของท่อ 2 ขนาด คือ ท่อหนา 1 มิลลิเมตร และ 1.1 มิลลิเมตร การไหลภายในท่อที่พิจารณาในงานวิจัยนี้มีลักษณะท่อกลมที่มีการไหลเป็นแบบสมมาตรรอบเส้นผ่านศูนย์กลาง ดังนั้นการกำหนดเงื่อนไขที่สมมาตรจะช่วยให้ทำการคำนวณได้รวดเร็วขึ้น ฉะนั้นการสร้างแบบจำลอง 2 มิติของการไหลผ่านท่อแข็งเกร็งนั้นจึงมีการสร้างเพียงครึ่งเดียว ดังรูป 3.1



รูปที่ 3.1 ภาพสเก็ทช์ ของท่อแข็งเกร็งไม่คิดความหนาของผนังท่อ

ส่วนแบบจำลองของท่อยืดหยุ่นได้นั้น จะพิจารณาในส่วนของผนังท่อร่วมกับการไหลที่เกิดขึ้นภายในท่อจึงมีการกำหนดความหนาของท่อ ซึ่งให้ท่อมีความหนา 2 ขนาด คือ ท่อหนา 1 มิลลิเมตร และ 1.1 มิลลิเมตร แบบจำลองของท่อยืดหยุ่นได้แสดงดังรูป 3.2

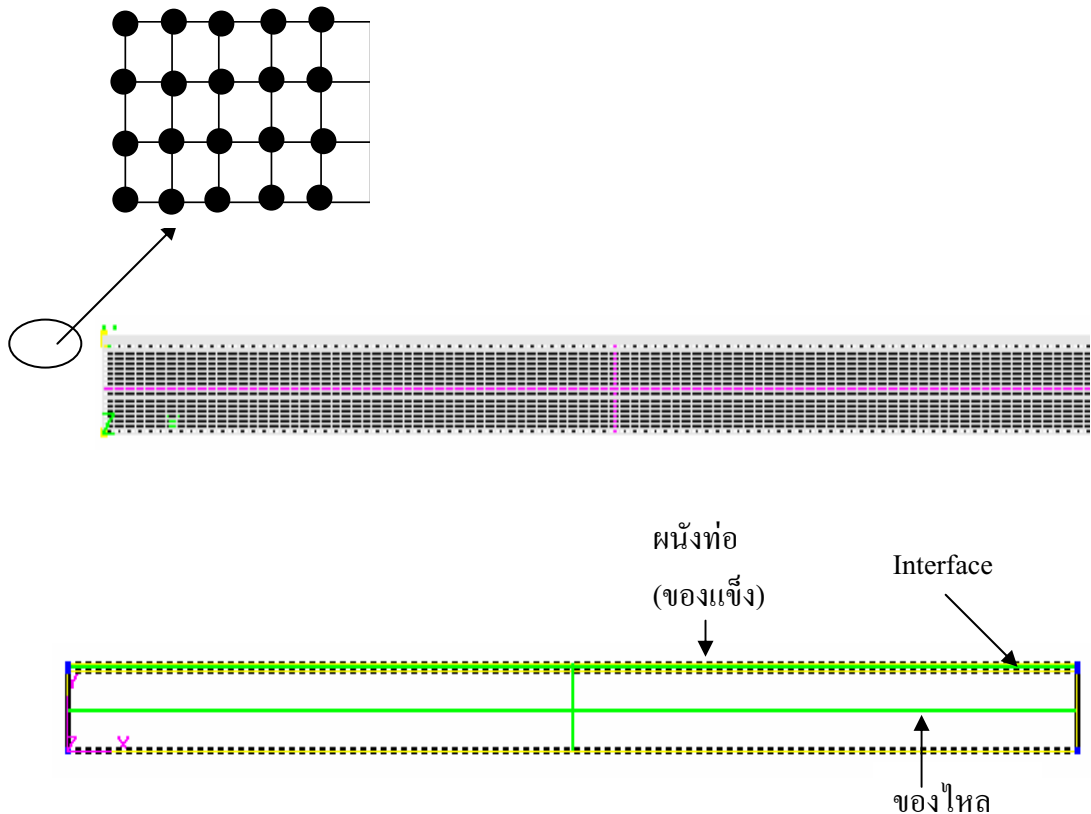


รูปที่ 3.2 ภาพสเก็ทซ์ของท่อยืดหยุ่นได้ที่พิจารณาความหนาของผนังท่อ

3.1.2 การเลือกใช้กริดสำหรับการคำนวณ

จากการสร้างแบบจำลองทางกายภาพของท่อ ดังกล่าวไปแล้วข้างต้นในการวิเคราะห์เพื่อหาคำตอบจากสมการควบคุมด้วยวิธีการเชิงตัวเลขจะต้องแบ่งโดเมนการคำนวณออกเป็นส่วนๆ ด้วยวิธีดิสครีไทเซชัน (discretization) โดยแบ่งโดเมนการคำนวณตำแหน่งต่างๆ ด้วยกริดแบบโครงสร้างดังแสดงในรูป 3.3 และผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณจะเป็นผลเฉลย ณ ตำแหน่งจุดที่เกิดขึ้นในโดเมนของการคำนวณ เนื่องจากพฤติกรรมการไหลและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของท่อในงานวิจัยนี้มีขนาดไม่มากนักก็ยังคงยังเป็นแบบ 2 มิติ ดังนั้นการใช้ กริดแบบโครงสร้าง (structured grid) ซึ่งเป็นลักษณะกริด ที่เหมาะสมและง่ายต่อการคำนวณและการนำมาวิเคราะห์ผลภายหลัง

งานวิจัยนี้มีการแบ่ง กริด เป็นสี่เหลี่ยม ในส่วนของ ของไหลแบ่งกริดตามแนวแกน x เท่ากับ 100 เซล และ ตามแนวแกน y เท่ากับ 20 เซล ส่วนที่เป็นผนังท่อนั้น แบ่ง กริด ตามแนวแกน x เท่ากับ 100 เซล และ ตามแนวแกน y เท่ากับ 5 เซล

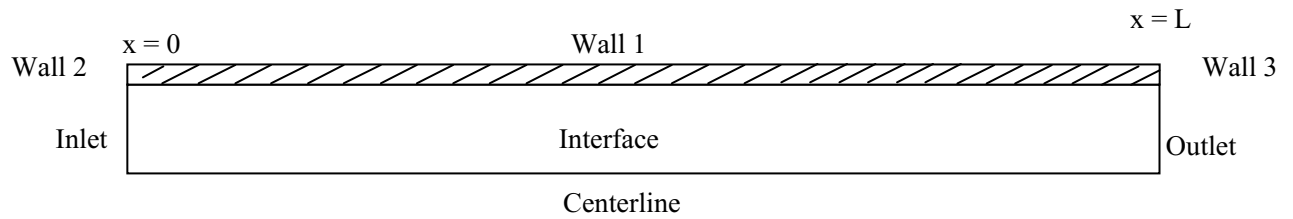


รูปที่ 3.3 การกำหนดช่วง กริด และการแบ่งปริมาตรในการคำนวณ

เนื่องจากแบบจำลองเชิงตัวเลขที่สร้างขึ้นมีการปฏิสัมพันธ์ระหว่าง การไหลของของไหลกับการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของท่อ จึงจำเป็นต้องมีการกำหนดส่วนของปริมาตรที่จะใช้ในการคำนวณออกเป็น 2 ปริมาตรโดยกำหนดเป็น ส่วนที่เป็นของแข็งซึ่งก็คือส่วนที่เป็นผนังที่ยึดหยุ่นได้ และ ส่วนที่เป็นของไหลในที่นี้ระบุเป็นน้ำซึ่งมีการกำหนดค่าความหนาแน่นและความหนืดให้ในแบบจำลองส่วนที่เป็นผนังท่อจะกำหนดค่ายังไม่ดูลิส

3.1.3 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต

ในการที่จะคำนวณหาคำตอบเฉพาะจากสมการควบคุมนั้น นอกจากการกำหนดเงื่อนไขปริมาตรของแบบจำลองแล้วเงื่อนไขขอบเขตยังเป็นค่าที่สำคัญในการบอกถึงผลเฉลยของปัญหา รูป 3.4 แสดงการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของแบบจำลองของงานวิจัยนี้



รูปที่ 3.4 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของแบบจำลอง

การกำหนดขอบเขตสามารถอธิบายได้โดยละเอียดดังนี้

ก. เงื่อนไขขอบเขต ที่ทางเข้า (Inlet) การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ที่ทางเข้าเป็น การกำหนดค่าที่เกี่ยวข้องกับการไหลจัดให้อยู่ในรูปของความดันหรือความเร็วในขาเข้าของท่อเพื่อให้คำนวณหาคำตอบที่ต้องการ ในการไหลที่มีลักษณะเป็นคาบนั้นจะมีการกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขตที่ทางเข้าอ้างอิงดังสมการ

$$p = P \cos(\omega t)$$

เป็นการให้ค่าความดันที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาที่ทางเข้าในลักษณะเป็นคลื่นทางด้านโคไซน์ที่มีอัตราเร็วเชิงมุมเท่ากับ ω

ข. เงื่อนไขขอบเขตที่ทางออก (Outlet) การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ทางออกเป็น การให้ค่าของตัวแปรที่ทางออกของท่อในงานวิจัยนี้จะกำหนดค่า

$$p = 0$$

ค. เงื่อนไขขอบเขตที่ผนัง (Wall) ในการพิจารณาผนังท่อยึดหยุ่นได้โดยแบ่งออกเป็น 3 ด้าน คือ ด้านต้นทาง ด้านปลายทางและด้านบน โดยมีรายละเอียดการกำหนดด้วย การขจัดของความเร็วที่ผนังท่อยึดหยุ่นได้ต้นทางและปลายทางเป็นศูนย์ ดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตที่ต้นทางและปลายทางเป็น

$$u = v = 0$$

ส่วนด้านบนนั้นที่ผนังท่อยึดหยุ่นได้ไม่มีการเปลี่ยนแปลงในแนวแกน มีแต่การเปลี่ยนแปลงในแนวรัศมีของท่อเท่านั้นดังนั้นเงื่อนไขขอบเขตสามารถกำหนดเป็น

$$u = 0 \quad v \neq 0$$

ง. เงื่อนไขขอบเขต ที่พื้นผิวร่วม (Interface) การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ที่พื้นผิวร่วม โดยมีการรับแรงกระทำโดยส่งผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลง ขนาดของท่อมีความเร็วในแนวรัศมีของท่อเกิดขึ้นดังนั้น

$$u = 0 \quad v \neq 0$$

ที่พื้นผิวร่วมนี้มีการรับแรงดันภายในท่อร่วมด้วย โดยการกำหนดเป็นแรงดันภายนอกที่กระทำต่อผนังท่อนี้ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง

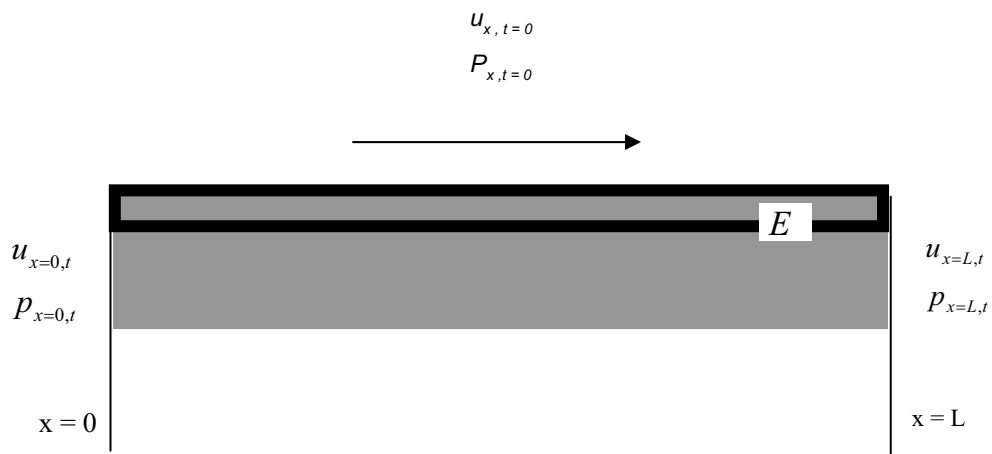
จ. เงื่อนไขขอบเขตสมมาตร (Symmetry) ตรงตำแหน่งกึ่งกลางของท่อ มีการสมมาตรรอบแนวแกนสามารถกำหนดได้ด้วยสมการคือ

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

3.1.4 การกำหนดค่าเริ่มต้น

การกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นจะต้องกำหนดทั้งความเร็วและความดันก่อนดังแสดงในรูป 3.5 รวมไปถึงรูปร่างของท่อก่อนทำการคำนวณเนื่องจากปัญหาที่พิจารณา ในงานวิจัยนี้เป็นปัญหาที่ขึ้นอยู่กับเวลาดังนั้นสภาวะเริ่มต้นจึงมีความสำคัญในการคำนวณหาคำตอบ ณ เวลาใดๆ

เงื่อนไขเริ่มต้น



รูปที่ 3.5 แสดงการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นของแบบจำลอง

สำหรับการกำหนดค่าเริ่มต้นให้กับปัญหาในกรณีศึกษาการไหลแบบบอสซิลลาทอรี โดยพิจารณาความถี่ ซึ่งอ้างอิงจากซาเมียร์ (Zamir, 1998) ที่ 3.34 4.74 5.78 และ 6.67 เป็นช่วงของความถี่จากต่ำไปสูงที่ครอบคลุมในการพิจารณากับการใช้งานที่มีการไหลของเลือดภายในหลอดเลือด ซึ่งใช้เวลาในการทำงานและค่าของ Δt แสดงได้ดังตาราง 3.1

ตารางที่ 3.1 แสดงเวลาและค่าของ Δt ในการให้ค่ากับแบบจำลองของท่อทั้ง 3

Womersley Ω	ω	T	$\Delta t(s)$
3.34	0.0692	90.751	5.672
4.74	0.1393	45.083	2.818
5.78	0.20713	30.319	1.895
6.67	0.2758	22.768	1.423

ท่อที่ 1 และ 2

Womersley Ω	ω	T	$\Delta t(s)$
3.34	0.0692	86.977	5.436
4.74	0.1393	43.186	2.699
5.78	0.20713	29.043	1.815
6.67	0.2758	21.809	1.363

ท่อที่ 3

การกำหนดค่าของความดันเริ่มต้นที่ทางเข้าท่อที่ทำให้เกิดอัตราการไหลที่คงตัวค่าต่างๆ จาก $p = P \cos(\omega t)$ ค่า P ที่อัตราการไหลต่างๆดังแสดงในตาราง 3.2

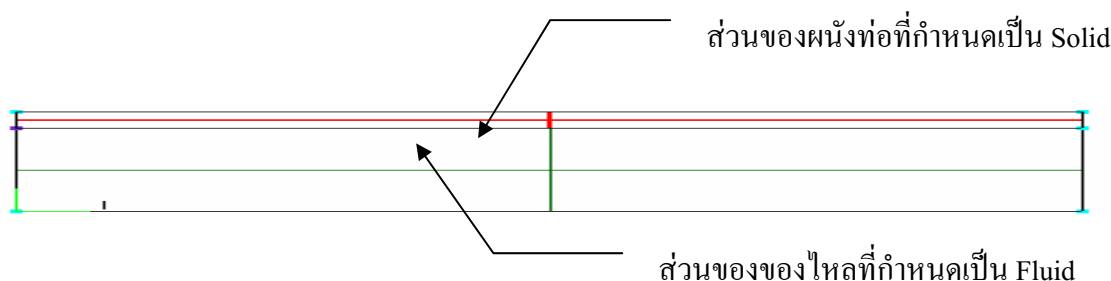
ตาราง 3.2 แสดงความดันเริ่มต้น ในการให้ค่ากับแบบจำลอง

Q	P	Re
1L/min	0.326	835
2L/min	0.653	1670
3L/min	0.979	2450
4L/min	1.423	3250
5L/min	1.779	4064

3.1.5 สมมติฐานและการกำหนดคุณสมบัติของท่อและของไหล

การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการไหลภายในท่อยืดหยุ่นได้มีสมมติฐานคือท่อยืดหยุ่นมีการสมมาตรทุกด้านและความยาวของท่อไม่เปลี่ยนแปลง ท่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 25.4 มิลลิเมตรหนา 1 มิลลิเมตร 2 ท่อ มีค่ายังโมดูลัส $E = 3.825 \text{ MN/m}^2$ และ 5.148 MN/m^2 และท่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 24.86 มิลลิเมตร หนา 1.1 มิลลิเมตร 1 ท่อมีค่า $E = 4.544 \text{ MN/m}^2$ การแบ่งส่วนในการคำนวณแสดงดังรูป 3.6 การกำหนดคุณลักษณะของส่วนต่าง ๆ ในการคำนวณ มีของไหลภายในท่อ

ถ้าพิจารณาความสัมพันธ์ของค่าความเค้นเฉือนที่กระทำกับของไหลและอัตราการเสียรูปเชิงมุมของของไหล (ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าความชันของความเร็วต่อระยะห่าง) ที่เกิดขึ้นในลักษณะเป็นเชิงเส้นของไหลที่มีพฤติกรรมดังกล่าวนี้จะถูกเรียกว่าของไหลนิวโตเนียน (สมศักดิ์, 2547) อ้างอิงจากเส้นเลือดวีนา คาวาโดยเลือดจะพิจารณาให้มีพฤติกรรมเป็นของไหลแบบนิวโตเนียน เฉพาะในบริเวณที่มีอัตราความเค้นเฉือนสูง ($>100 \text{ sec}^{-1}$) ดังนั้นการไหลภายในเส้นเลือดใหญ่ที่มีค่าอัตราความเค้นเฉือนมากกว่า 100 sec^{-1} โดยมีค่า ความหนืดของเลือดเท่ากับ 3.5 cP ($0.0349 \text{ dyn sec/cm}^2$) ในกรณี queพิจารณาเส้นเลือดฝอยที่มีค่าอัตราความเค้นเฉือนต่ำมาก ๆ เลือดจะพิจารณาให้เป็น non-Newtonian fluid (Wiener *et al.*, 1966) ดังนั้นในการพิจารณาของไหลที่ให้กับแบบจำลองจึงคิดเป็น นิวโตเนียน และของไหลนั้นไม่สามารถอัดตัวได้ซึ่งใช้เป็นน้ำความหนาแน่น ρ คงที่ 1000 kg/m^3 ความหนืดสัมบูรณ์ μ 0.001 kg/m-s อัตราการไหลของ ของไหลภายในท่อ 1 – 5 ลิตรต่อนาทีการไหลเป็นแบบสม่ำเสมอ และแบบออสซิลลาทอรีในกรณีศึกษา

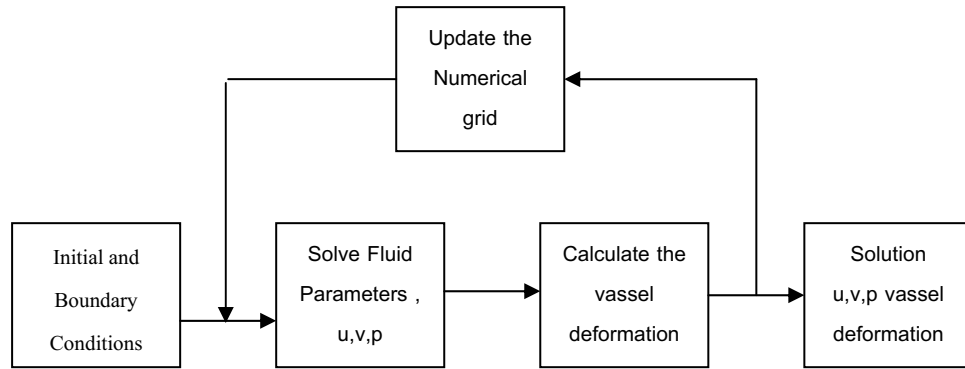


รูปที่ 3.6 การกำหนดคุณลักษณะของส่วนต่าง ๆ ในการคำนวณแบ่งเป็นส่วนของไหลและผนังท่อ

3.2 ขั้นตอนการประมวลผล (Processing)

การไหลของ ของไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ จะมีการปฏิสัมพันธ์กันระหว่างของไหลและผนังท่อ การเกิดความดันตกคร่อมทำให้เกิดการไหล ซึ่งในขณะเดียวกันความดันที่แตกต่างระหว่างภายในท่อและภายนอกท่อก็จะทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดขึ้น ดังนั้นขั้นตอนการคำนวณจึงมีลักษณะแสดงในรูป 3.7 โดยเริ่มจากการกำหนดสถานะเริ่มต้นและขอบเขตที่ใช้ในการคำนวณทั้งของไหลและท่อยืดหยุ่นได้ ต่อจากนั้นเป็นการทำงานภายในโปรแกรมโดยการคำนวณหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ได้แก่ ความเร็วและความดัน

ของของไหลภายในท่อ ผลของความเร็วและความดันที่ได้มีผลกระทบต่อการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อ ซึ่งการคำนวณจะแปรผลของความเร็วและความดันของของไหล เป็นการเปลี่ยนรูปร่างของผนังท่อและแก้ไขกริดไปด้วยจนได้ผลของคำตอบของความเร็ว ความดันและการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่แท้จริง



รูปที่ 3.7 การแก้ปัญหาคู่ควบระหว่างพลศาสตร์ของไหลกับการเคลื่อนที่ของผนัง
(Coupling between fluid dynamics and wall motion)

3.3 ขั้นตอนหลังการประมวลผล (Post-Processing)

คำตอบที่ได้จากแบบจำลองเชิงตัวเลขนั้นได้แก่ค่า ความดัน ความเร็ว การเปลี่ยนแปลงขนาดของผนังท่อ และค่าความเค้นเฉือนของของไหลที่กระทำกับท่อ เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของค่าที่ได้มานั้นจะต้องมีการนำไปเปรียบเทียบกับทฤษฎีก่อนนำเอาผลการคำนวณไปวิเคราะห์ในกรณีต่างๆต่อไปโดยเปรียบเทียบผลแบ่งเป็นกรณีดังนี้

1. การเปรียบเทียบผลของการไหลแบบคงตัว โดยการเปรียบเทียบผลของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของการไหลของ ของไหลภายในท่อยืดหยุ่นได้ แบบคงตัวกับทฤษฎีการคำนวณของฟังก์ ด้วย การเปรียบเทียบผลที่ได้ จากแบบจำลองภายใต้เงื่อนไขขอบเขต ที่อัตราการไหลเดียวกัน

2. การเปรียบเทียบผลของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ของการไหลของของไหลภายในท่อยืดหยุ่นได้กับผลการทดลองเป็นการเปรียบเทียบผลของการ เปลี่ยนแปลงความดัน และการเปลี่ยนแปลงขนาดของรัศมีท่อ ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตและคุณสมบัติของวัสดุใกล้เคียงกัน การวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของแต่ละตัวแปรและการนำเอาความเร็ว ความดันที่ได้ไปวิเคราะห์หาความเค้นเฉือนต่อไป

บทที่ 4

การทดลองการไหลแบบคงตัวภายในท่อที่ยืดหยุ่น

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จำเป็นจะต้องมีการตรวจสอบความถูกต้องเสมอในงานวิจัยนี้ได้จัดทำทดลองการไหลแบบคงตัวภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้เพื่อใช้ในการยืนยันผล ในการทดลองได้มีการควบคุมตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการไหลดังนี้คือ อัตราการไหล ความดัน และการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อ โดยจะได้กล่าวถึงการสร้างชุดทดลองและการเก็บข้อมูลโดยละเอียดต่อไป

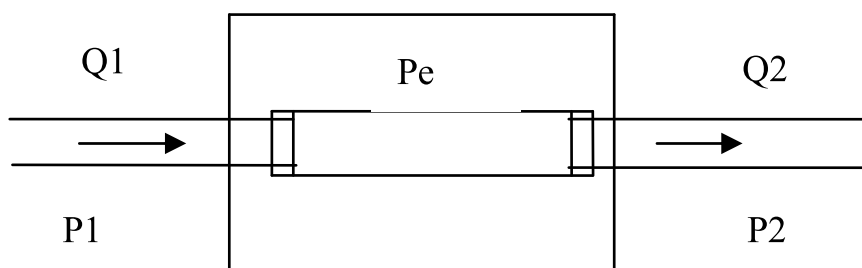
4.1 แนวคิดในการออกแบบชุดทดลอง

การพิจารณาเลือกขนาดของท่อโดยกำหนดขนาดจากหลอดเลือดวีนา คาวา ตามตารางที่ 4.1 ทำการขึ้นรูปของยางเพื่อนำมาใช้เป็นวัสดุทดสอบพบปัญหาการขึ้นรูปของยางที่ใช้ทำท่อที่ยืดหยุ่นได้ตามขนาดที่ต้องการจึงได้พิจารณาท่อที่มีอยู่แล้วโดยเลือกใช้ท่อจากยางในรถจักรยานโดยขยายสเกลจากหลอดเลือดวีนา คาวาเป็น 2 เท่าได้เลือกท่อที่มีขนาดใกล้เคียงดังนี้ท่อเส้นผ่านศูนย์กลาง 25.4 มิลลิเมตร (1 นิ้ว) ยาว 200 มิลลิเมตร 2 ท่อ และขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 24.86 มิลลิเมตร 1 ท่อ จากการอ้างอิงการไหลของเลือดภายในหลอดเลือดวีนา คาวาซึ่งมีการไหลของเลือดในช่วงนี้ด้วยอัตราการไหล 4 ลิตรต่อนาทีค่าเรย์โนลด์ส์สูงถึง 4600 แต่การเปรียบเทียบการทดลองจะทำการไหลแบบคงตัวจึงใช้การไหลกำหนดค่าคล่อมช่วง 4 ลิตรต่อนาทีโดยกำหนดอัตราการไหล 1-5 ลิตรต่อนาทีเป็นช่วงของค่าเรย์โนลด์ 835 - 4064 คร่อมระหว่างช่วงการไหลแบบคงตัวจนถึงการไหลแบบปั่นป่วน

ในการทดลองจะมีส่วนชุดทดสอบดังรูปที่ 4.1 และรูปที่ 4.2 โดยยึดปลายท่อที่ต้องการทดสอบทั้งสองข้างเข้ากับท่อ PVC ซึ่งอยู่ในห้องทดลองที่มีน้ำบรรจุอยู่ภายใต้แรงกดดันนี้ ท่อที่ยืดหยุ่นได้จะยุบตัวเพื่อที่จะให้ท่อเกิดการขยายตัว จำต้องให้ความดันภายในท่อมากกว่าความดันภายนอกจึงได้มีการนำปั๊มขนาดเล็กมาใช้เพื่อสร้างแรงดันโดยในที่นี้มีการควบคุม อัตราการไหล 1-5 ลิตรต่อนาที จึงทำการติดตั้งเครื่องมือวัดอัตราการไหล (flow meter) ที่ทางออกของปั๊ม ขณะเดียวกันจะต้องวัดความดันของน้ำเข้าและออกชุดทดลองจึงมีการติดตั้งอุปกรณ์วัดความดันที่บริเวณทางเข้าและทางออกของท่อ

ตารางที่ 4.1 ข้อมูลการไหลของเลือดในหลอดเลือดต่างๆ (วัฒนา, 2524)

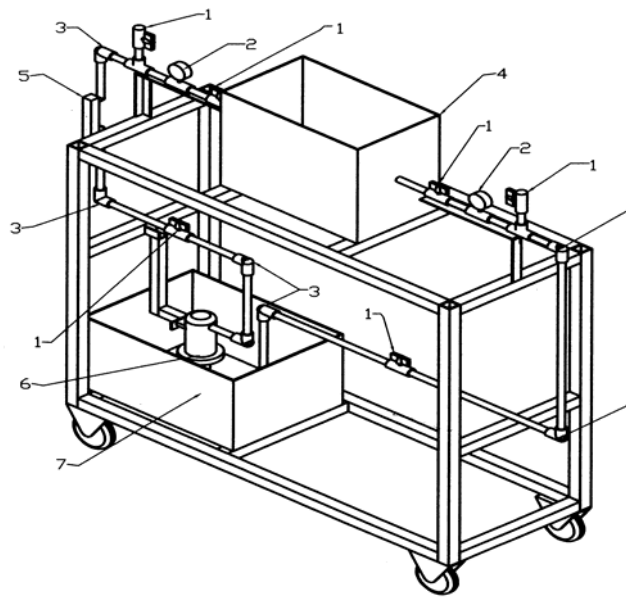
หลอดเลือด	ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเฉลี่ย (มม.)	จำนวน	พื้นที่หน้าตัดรวม(ตร. ซม.)	ความเร็วเฉลี่ยของเลือด(ซม./วินาที)	ความยาว (ซม.)	เวลาเฉลี่ยที่เลือดอยู่ในส่วนนั้น (วินาที)
เอออร์ตา	10	1	0.8	83	41	0.5
หลอดเลือดแดงขนาดใหญ่	3	40	3	22	20	0.9
หลอดเลือดแดงขนาดกลาง	1	600	5	13	10	0.8
หลอดเลือดแดงขนาดเล็ก	0.6	1800	5	13	1	0.08
หลอดเลือดแดงฝอย	0.02	4×10^7	125	0.5	0.2	0.4
หลอดเลือดฝอย	0.008	12×10^8	600	0.1	0.1	1
หลอดเลือดดำฝอย	0.03	8×10^7	570	0.1	0.2	2
หลอดเลือดดำขนาดเล็ก	1.5	1800	30	2.2	1	0.5
หลอดเลือดดำขนาดกลาง	2.4	600	27	2.5	10	4
หลอดเลือดดำขนาดใหญ่	6	40	11	6	20	3.3
วีนา คาวา	12.5	1	1.2	56	40	0.7



รูปที่ 4.1 ภาพร่างประกอบชุดทดสอบ

หมายเลข

1. วาล์วเปิด-ปิด
2. เกจวัดความดัน
3. ข้องอ
4. ห้องทดลอง
5. เครื่องมือวัดอัตราการไหล
6. ปั๊มน้ำ
7. อ่างเก็บน้ำไหลกลับ



รูปที่ 4.2 การติดตั้งอุปกรณ์การทดลองการไหลของของไหลภายในท่อยืดหยุ่น

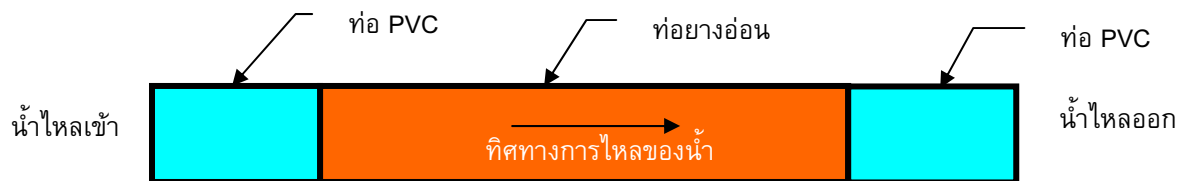
ในส่วนของห้องทดสอบนั้นทำขึ้นจากพลาสติกใสใช้สำหรับเป็นภาชนะบรรจุน้ำเพื่อรักษาสมดุลของท่ออย่างและยังเป็นส่วนที่ใช้ในการเก็บข้อมูลการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของท่อที่ใช้ในการทดลองและใช้น้ำเป็นตัวกลางในการปรับความดันที่กระทำกับท่อ



รูปที่ 4.3 ส่วนของห้องทดสอบที่มีการบรรจุน้ำเพื่อรักษาความดันภายนอกท่อที่ทำการทดสอบ

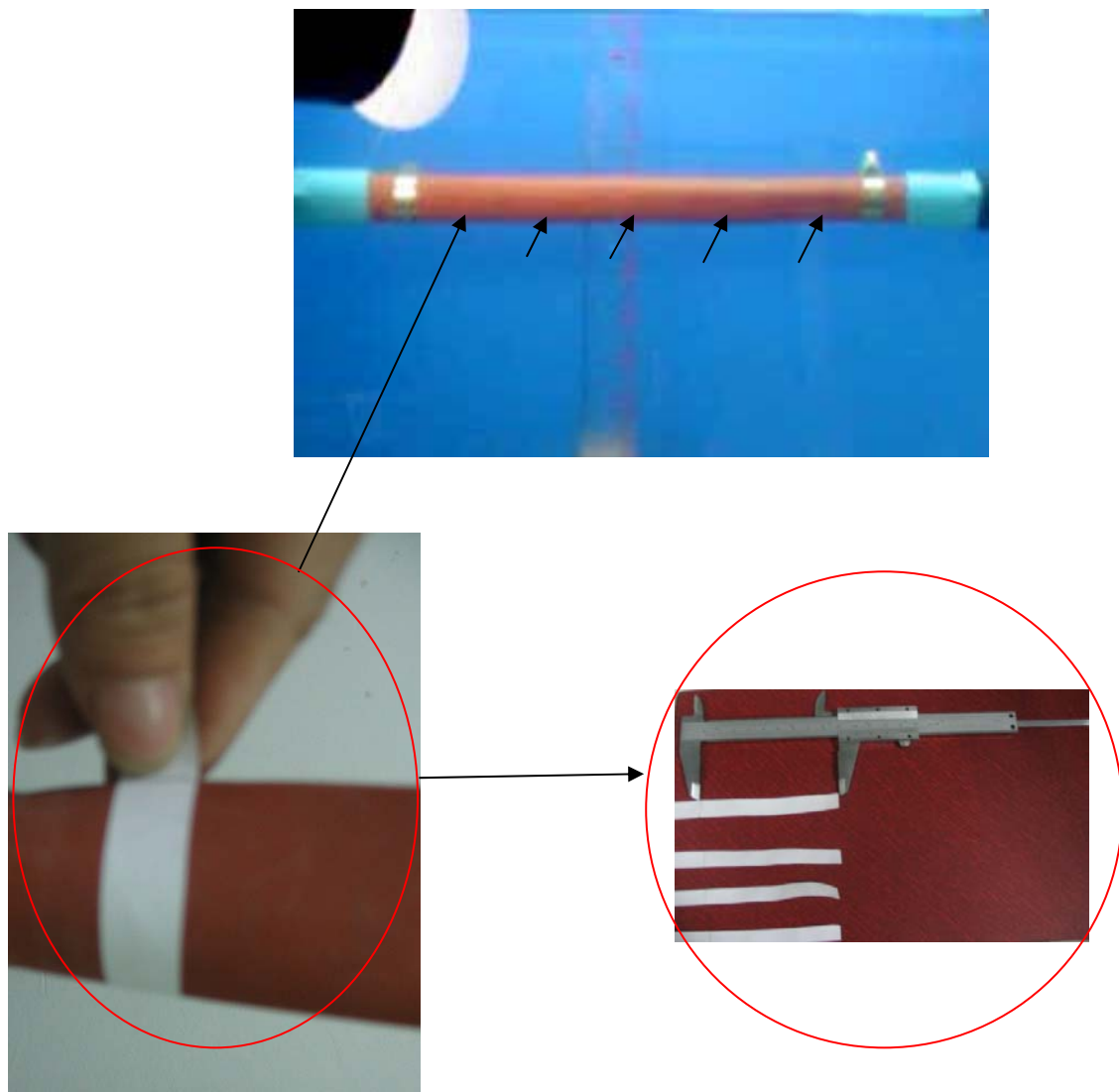
4.2 ขั้นตอนการทดลองและการเก็บข้อมูล

ในการทดลองโดยใช้ท่อทดลอง 3 ท่อ ที่มีขนาดดังได้กล่าวไปแล้วนั้นทดลองโดยมีค่าที่ต้องการวัด และทำการเปรียบเทียบ ในที่นี้คือการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่อัตราการไหลตั้งแต่ 1- 5 ลิตรต่อนาที โดยให้น้ำไหลผ่านท่อทางเข้า ด้วยอัตราการไหลควบคุม เริ่มจาก 1 ลิตรต่อนาที ทำการวัดความดันตรงทางเข้าและทางออกชุดทดลอง และวัดการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อ 5 จุด ที่แบ่งเอาไว้ตามลูกศรดังรูป 4.4



รูปที่ 4.4 ช่วงการพิจารณาของท่อยางอ่อน

โดยการวัดขนาดนั้นจะวัดการเปลี่ยนแปลงขนาดของเส้นรอบวงดังรูป 4.5 ด้วยเทปใสแล้วใช้อุปกรณ์ในการวัดขนาดที่ละเอียดโดยเวอร์เนียแล้วนำค่าที่ได้นั้นไปคำนวณหาค่าขนาดของท่ออีกครั้งในการวัดแต่ละจุดนั้นจะทำการวัดด้วยกันทั้งหมด 5 ครั้งแล้วหาค่าเฉลี่ยต่อจากนั้นเปลี่ยนอัตราการไหลจนครบทุกค่าและเปลี่ยนขนาดท่อที่ใช้ทดลองจนครบทั้ง 3 ท่อ นำค่าที่วัดได้ไปเปรียบเทียบในตำแหน่งและขนาดของการเปลี่ยนแปลงกับแบบจำลองเชิงตัวเลข 2 มิติ ของการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้เพื่อตรวจสอบความถูกต้องก่อนนำไปพิจารณาในกรณีศึกษาดังจะได้กล่าวถึงรายละเอียดในบทต่อไป



รูปที่ 4.5 แสดงตำแหน่งและการวัดขนาดของท่อทดลอง

บทที่ 5

ผลการวิจัยและการวิเคราะห์ผล

ดังที่กล่าวไปข้างต้นแล้วว่าการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้นั้นจะมีการปฏิสัมพันธ์ในแบบคู่ควบระหว่างสภาวะการไหลและการเปลี่ยนแปลงขนาดรูปร่างของท่อ ในบทนี้จะได้นำเสนอผลการศึกษาวิจัยของความสัมพันธ์ดังกล่าว โดยจะได้นำเสนอการยืนยันผลการคำนวณที่ได้ที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ กับการคำนวณทางทฤษฎี และผลการทดลองก่อน จากนั้นจึงจะเป็นการนำเสนอการวิเคราะห์ ด้านการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของท่อ กับสภาวะการไหลที่เกิดขึ้นภายในท่อต่อไป

5.1 การตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองเชิงตัวเลข

ในการพัฒนา และแบบจำลองเชิงตัวเลขจะต้องมีการตรวจสอบความถูกต้อง และความสามารถที่จะนำไปใช้งานได้ ก่อนนำไปใช้งานจริงเสมอ เพราะฉะนั้นในงานวิจัยนี้จึงได้ทำการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองเชิงตัวเลข กับการคำนวณทางทฤษฎี เพื่อยืนยันความถูกต้อง และได้ทำการตรวจสอบความสามารถในการนำเอาแบบจำลองเชิงตัวเลขที่พัฒนาขึ้นไปใช้ในการวิเคราะห์ การไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ โดยการเปรียบเทียบผลกับการทดลอง ดังจะได้กล่าวในรายละเอียดต่อไป

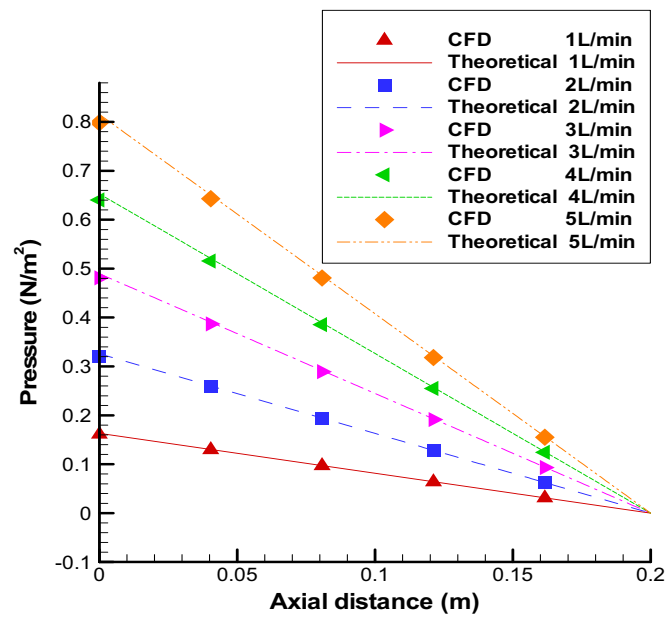
5.1.1 การตรวจสอบโดยเปรียบเทียบการไหลแบบคงตัวกับทฤษฎี

เพื่อยืนยันความถูกต้องของแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นได้มีการเปรียบเทียบการไหลแบบคงตัวทางทฤษฎีแยกออกเป็นสองกรณีดังนี้

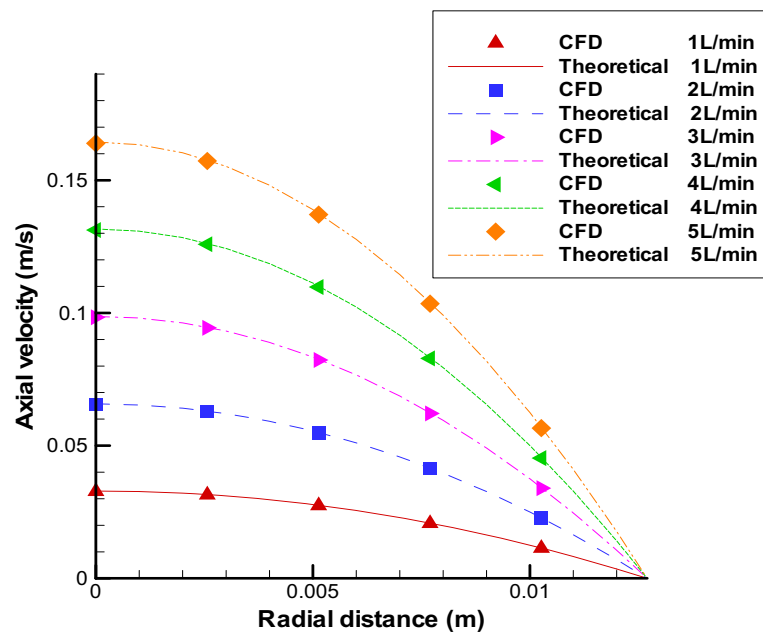
กรณีที่ 1 เปรียบเทียบแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นด้วยการไหลแบบราบเรียบภายในท่อแข็งเกร็ง ที่มีเส้นรูปร่างความเร็วตามแนวรัศมี แสดงได้ดังสมการ

$$u = -\frac{1}{4\mu}(a^2 - r^2)\frac{dp}{dx} \quad (5.1)$$

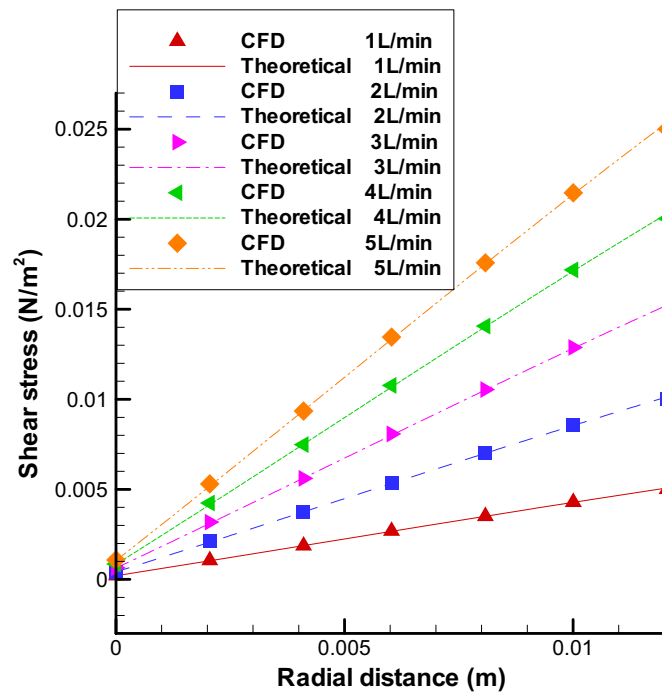
เพื่อเป็นการยืนยันคำตอบในเบื้องต้น โดยการเปรียบเทียบผลการทดลองการไหลของของไหลภายในท่อที่ Reynolds number เท่ากับ 800 ถึง 4100 ซึ่งอยู่ในช่วงเดียวกันกับการไหลภายใน Pulmonary Artery โดยแบบจำลองเชิงตัวเลขได้ใช้วิธีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตด้วยความเร็วที่ทางเข้าและกำหนดความดัน ณ ปากทางออก ผลของการเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองกับทฤษฎีแสดงในรูป 5.1 และ รูปที่ 5.3 ตามลำดับ โดยที่รูปที่ 5.1 เป็นการเปรียบเทียบความดันที่ตกคร่อมช่วงการไหล รูปที่ 5.2 เป็นแสดงการเปรียบเทียบเส้นรูปร่างของความเร็วที่เกิดขึ้นที่อัตราการไหลต่างๆ และรูปที่ 5.3 เป็นการเปรียบเทียบความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นของของไหลภายในท่อ



รูปที่ 5.1 เปรียบเทียบความดันภายในท่อเชิงเกร็งที่อัตราการไหล 1-5 ลิตรต่อนาที ($Re = 835 - 4067$)



รูปที่ 5.2 เปรียบเทียบเส้นรูปร่างความเร็วภายในท่อเชิงเกร็งที่อัตราการไหล 1-5 ลิตรต่อนาที



รูปที่ 5.3 เปรียบเทียบความเค้นเฉือนภายในท่อแข็งเกร็งที่อัตราการไหล 1-5 ลิตรต่อวินาที

จากการพิจารณาและเปรียบเทียบผลของการลดลงของความดัน และการกระจายตัวของความเร็วในแนวนอน พบว่าผลการคำนวณจากแบบจำลองมีความสอดคล้องกับ ผลการคำนวณทางทฤษฎี และมีความคลาดเคลื่อน ระหว่างผลการเปรียบเทียบสูงสุดไม่เกิน 2 เปอร์เซ็นต์ การกระจายตัวของความเร็วภายในท่อที่นำเสนอข้างต้น สามารถที่จะนำไปคำนวณหาความเค้นเฉือนตามสมการที่ (2.16) จากค่าที่ได้แสดงให้เห็นว่าเมื่อความเร็ว สูงขึ้นจะส่งผลให้ความเค้นเฉือนของของไหลที่กระทำกับผนังท่อสูงขึ้นในลักษณะเป็นเชิงเส้นดังรูป 5.3 และ สอดคล้องกับผลทางทฤษฎี

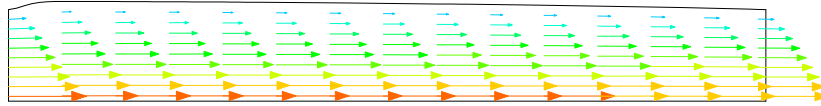
จากการเปรียบเทียบในภาพรวมพบว่าแบบจำลองเชิงตัวเลขที่พัฒนาขึ้น สามารถใช้อธิบายผลการไหล ภายในท่อแข็งเกร็งได้ อย่างไรก็ตามยังต้องมีการตรวจสอบการทำงานของแบบจำลองในกรณีของการไหล ภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้เพื่อยืนยันผลของแบบจำลองอีกครั้งก่อนนำไปใช้กับกรณีศึกษาต่อไป

กรณีที่ 2 เปรียบเทียบแบบจำลองของท่อที่ยืดหยุ่นได้ กับการคำนวณทางทฤษฎีของการไหลแบบคงตัว ภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ (Fung 1996) โดยที่ทฤษฎีนี้มีสมมติฐานให้ของไหลเป็นนิวโตเนียนไหลผ่านท่อด้วยการ ไหลแบบราบเรียบและไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา ไม่มีการรบกวนที่ทางเข้าและทางออกของท่อ มีการยึดปลายท่อ ไม่ให้เปลี่ยนขนาดที่ต้นทางเพียงข้างเดียว และการเปลี่ยนแปลงของท่อเกิดขึ้นอย่างสมมาตรในแนวนอนเท่านั้น ทำให้ ความสัมพันธ์ระหว่างความดัน อัตราการไหลและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างสามารถ แสดงได้ดังนี้

$$\frac{Eh}{3r_0} \left\{ \left[1 - \frac{r_0}{Eh} p(L) \right]^{-3} - \left[1 - \frac{r_0}{Eh} p(0) \right]^{-3} \right\} = -\frac{8\mu}{\pi r_0^4} L \dot{Q} \quad (5.2)$$

$$\frac{20\mu_0\mu}{\pi} \dot{Q} = [r(0)]^5 - [r(L)]^5 \quad (5.3)$$

การเปรียบเทียบในส่วนนี้ทดสอบด้วยการไหลที่มี Reynolds number เท่ากับ 800 ถึง 4100 ภายในท่อกลมที่มีอัตราส่วนระหว่างความยาวต่อเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับ 8 ผลการกระจายตัวความเร็ว และการเปลี่ยนแปลงรัศมีจากแบบจำลองเชิงตัวเลขแสดงได้ดังรูปที่ 5.4

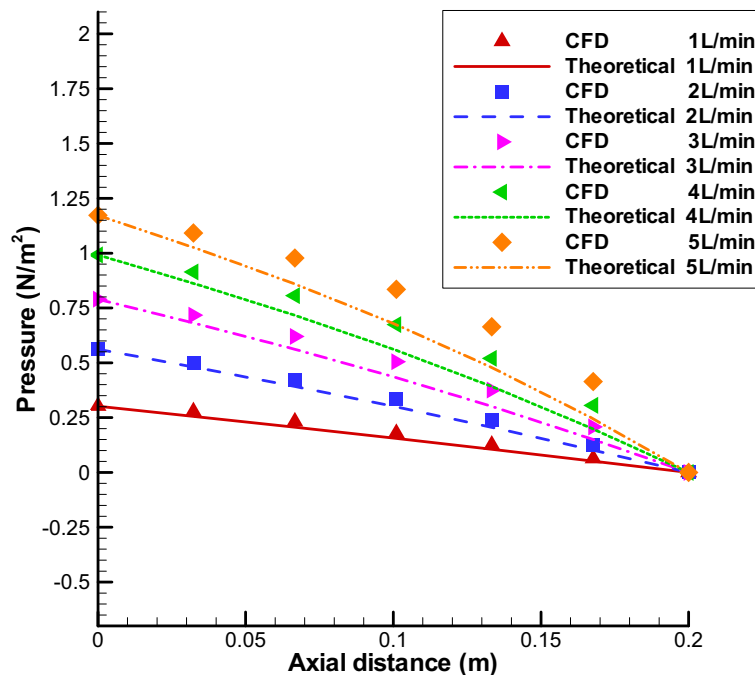


รูปที่ 5.4 แสดงการกระจายความเร็ว และการเปลี่ยนแปลงรัศมีของท่อในการไหลแบบคงตัวผ่านท่อที่ยืดหยุ่นได้

การเปรียบเทียบแบบจำลองของท่อที่ยืดหยุ่นได้กับการคำนวณทางทฤษฎีสามารถแยกพิจารณาในส่วนของความดันและการเปรียบเทียบขนาดของท่อ โดยมีรายละเอียดดังนี้

1. การเปรียบเทียบความดัน

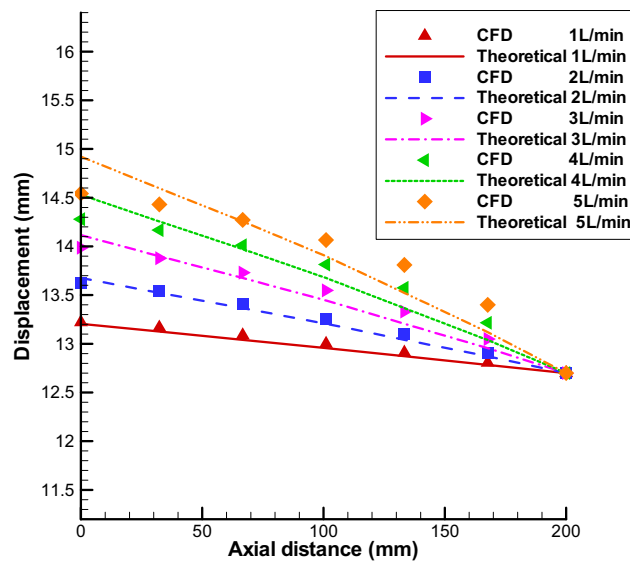
รูปที่ 5.5 แสดงการเปรียบเทียบความดันตกคร่อมของการไหลที่สภาวะเดียวกันกับ ทฤษฎีของฟังก์ โดยที่แกนตั้งเป็นความดันแตกต่างระหว่างนอกท่อกับความดันภายในท่อ (transmural pressure) ที่กระทำกับท่อและแกนนอนนั้นเป็นระยะทางตามแนวความยาวของท่อ จากรูปแสดงให้เห็นว่า ผลของความดันจากแบบจำลองเชิงตัวเลขมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากทฤษฎี โดยที่ค่าความคลาดเคลื่อนจากแบบจำลองจะแปรผันตามอัตราการไหล โดยที่ค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุดประมาณ 12 เปอร์เซ็นต์



รูปที่ 5.5 การเปรียบเทียบความดันตามความยาวท่อระหว่างแบบจำลองกับทฤษฎีของ Fung(1996)

2. การเปรียบเทียบขนาดของท่อ

ในการไหลภายในท่อที่ยึดหยุนได้นั้นขนาดของท่อจะเกิดการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากความดันที่แตกต่างระหว่างภายใน กับ ภายนอกท่อ ซึ่งในกรณีเปรียบเทียบนี้ขนาดของท่อจะโป่งพองขึ้นและค่อยๆ ลดลงจนไม่มีการเปลี่ยนแปลงที่ปลายทางของท่อ อีกทั้งการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่เกิดขึ้นนั้นจะแปรผันตรงกับความดันที่เปลี่ยนแปลงไป ดังแสดงในรูปที่ 5.6 การเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อ จะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ และจะมีความคลาดเคลื่อนสูงขึ้น ที่อัตราการไหลสูงขึ้นที่ 5 ลิตรต่อนาที ขนาดการเปลี่ยนแปลง จะมีความคลาดเคลื่อนสูงสุดที่ 2.6 เปอร์เซ็นต์



รูปที่ 5.6 การเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อจากแบบจำลองกับทฤษฎีของ Fung(1996)

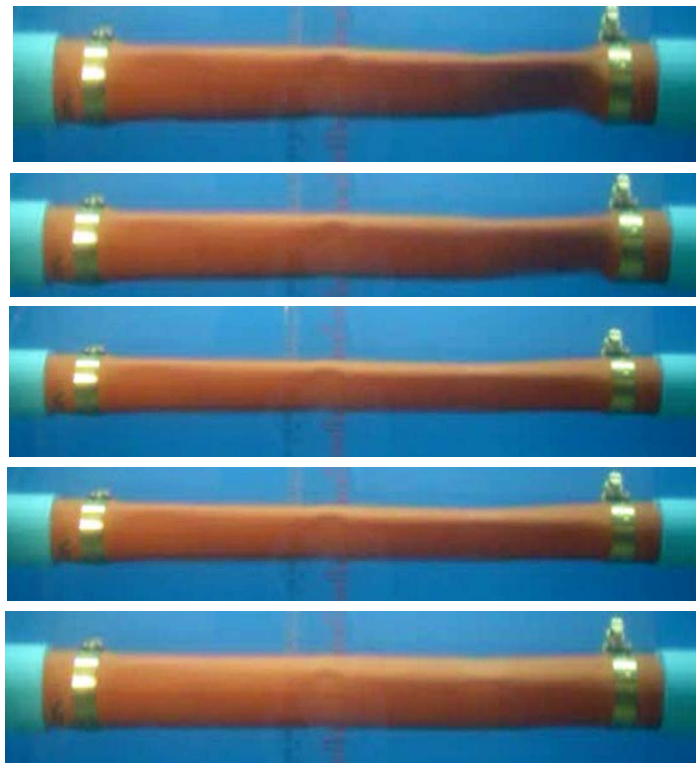
5.2 เปรียบเทียบการทดลองกับแบบจำลอง

นอกเหนือจากการยืนยันผลของแบบจำลองที่สร้างขึ้นกับผลทางทฤษฎีดังกล่าวข้างต้นไปแล้วนั้น งานวิจัยนี้ยังได้ทำการทดลองการไหลแบบคงตัวภายในท่อที่ยึดหยุนได้นี้ เพื่อทดลองเปรียบเทียบหาความแตกต่างระหว่างผลทางทฤษฎี และพฤติกรรมที่เกิดขึ้นจริงจากการทดลอง โดยได้ทำการทดลองกับท่อที่มีขนาดแตกต่างกันสามขนาดที่มีคุณสมบัติแตกต่างกันดังนี้คือ

ตารางที่ 5.1 ขนาดและคุณสมบัติของท่อที่ยึดหยุนได้ที่ใช้ในการทดลอง

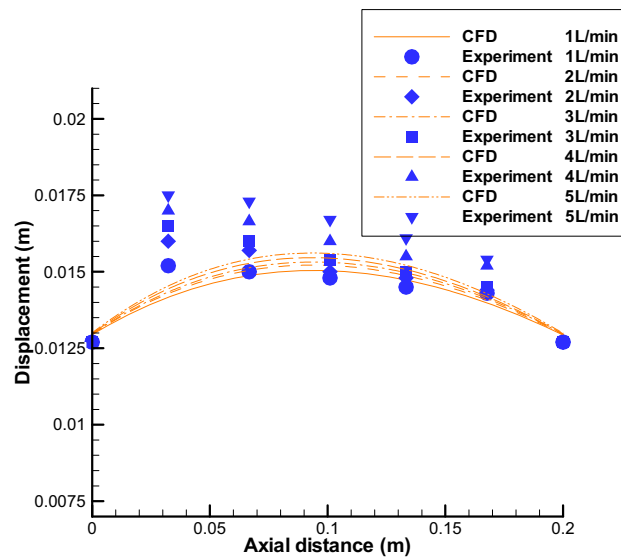
	เส้นผ่านศูนย์กลาง (mm)	ยาว (mm)	หนา (mm)	Young Modulus
1	25.4	200	1.0	3.825 MN/m ²
2	25.4	200	1.0	3.825 MN/m ²
3	24.9	200	1.1	4.544 MN/m ²

การทดลองนี้ใช้น้ำไหลผ่านท่อด้วยอัตราการไหล 1-5 ลิตรต่อวินาที ซึ่งจะทำให้ได้การไหลที่มี Reynolds number อยู่ในช่วง 800 ถึง 4100 โดยทำการยึดที่ต้นทางและปลายทางของท่อไว้ดังแสดงในรูปที่ 5.7 และในส่วน of พื้นที่ทดลองได้ทำการควบคุมความดันภายนอกท่อเพื่อให้เกิดการยุบตัวของท่อด้วยน้ำดังได้ไว้ในบทที่ 4 เมื่อเกิดการไหลท่อทั้งสามจะเกิดการเปลี่ยนแปลงในลักษณะเดียวกันคือ เมื่อของไหลเริ่มผ่านเข้าท่อจะเกิดการยุบตัวจากต้นทางของท่อค่อยๆ ขยับไปจนกระทั่งถึงปลายทางดังแสดงในรูปที่ 5.7 เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของท่อไม่สมมาตร ดังนั้นการเปรียบเทียบจะทำการเปรียบเทียบระหว่างเส้นผ่านศูนย์กลางเทียบเท่าของผลการทดลอง และ เส้นผ่านศูนย์กลางที่เปลี่ยนแปลงไปจากแบบจำลองเชิงตัวเลข โดยที่แบบจำลองเชิงตัวเลขจะถูกสร้างให้มีลักษณะเดียวกัน และกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ให้เป็นเช่นเดียวกับการทดลอง



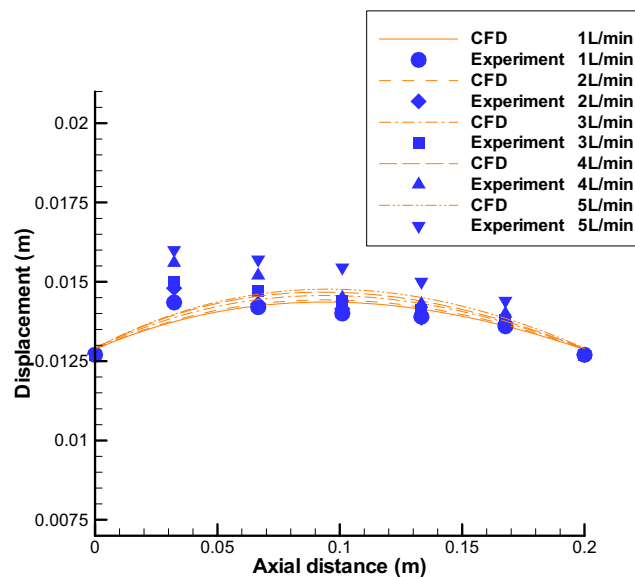
รูปที่ 5.7 การยึดตำแหน่งปลายท่อ และการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่เกิดจากการไหล

รูปที่ 5.8 - 5.10 แสดงผลการเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่เกิดขึ้น รูปที่ 5.8 เป็นการเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับท่อที่ 1 พบว่าท่อจะขยายตัวตามอัตราการไหลที่เพิ่มขึ้น และจะค่อยๆ ลดลงตามความยาวของท่อ ซึ่งการขยายตัวของท่อที่เกิดขึ้นจะแปรผันตามอัตราการไหล จากการวัดการขยายตัวของท่อทดลองเทียบกับแบบจำลองพบว่าค่าจากการทดลองที่อัตราการไหล 5 ลิตรต่อวินาที จะสูงที่สุด และเกิดในช่วงห่างจากทางเข้าท่อเล็กน้อยค่าความคาดเคลื่อนสูงถึง 15 เปอร์เซ็นต์



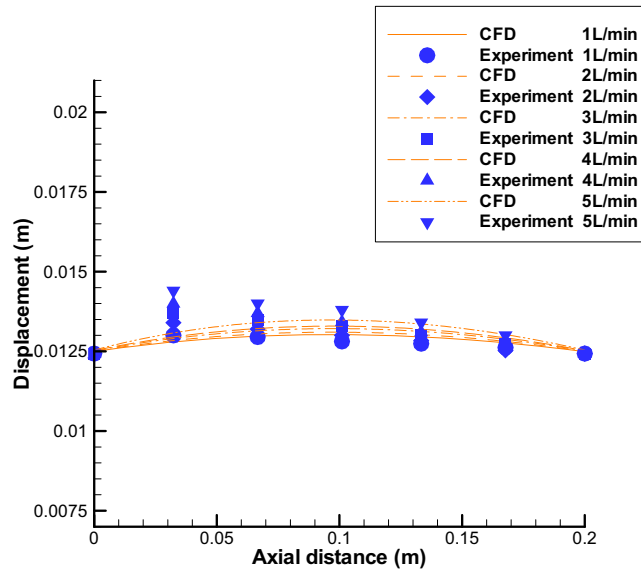
รูปที่ 5.8 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่ 1 ตามความยาวที่อัตราการไหลต่างๆ

จากการเปรียบเทียบระหว่างท่อที่ 1 กับท่อที่ 2 พบว่าท่อที่มีขนาด และ ความหนาเดียวกัน แต่การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นนั้นจะไม่เท่ากันคือ ท่อที่ 2 จะมีการยืดหรือโป่งพองน้อยกว่าท่อที่ 1 ทั้งนี้เป็นผลมาจากค่ายังโมดูลัสของผนังท่อ ค่ายังโมดูลัสมากจะทำให้ท่อขยายตัวลดลงดังแสดงในรูป 5.9 ซึ่งกล่าวโดยสรุปได้ว่า การเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่เกิดขึ้นจะแปรผกผันกับค่ายังโมดูลัส



รูปที่ 5.9 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่ 2 ตามความยาวที่อัตราการไหลต่างๆ

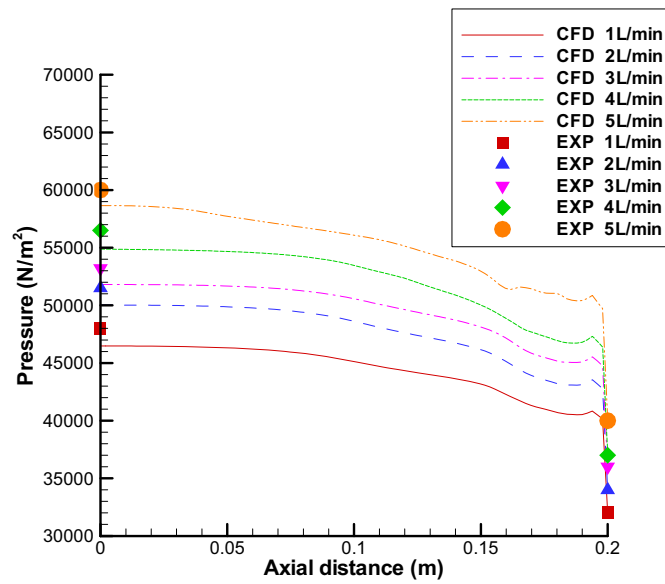
การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับท่อที่ 2 จะมีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าท่อที่ 1 การทดลองจะสูงกว่า 11 เปอร์เซ็นต์ ท่อที่ 3 ภายใต้อัตราการไหลเดียวกันแต่ขนาดท่อเล็กกว่าสองท่อแรก การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นจะมีลักษณะคล้ายๆกัน คือการเปลี่ยนแปลงของท่อจะค่อยๆลดลงตามความยาวของท่อดังในรูป 5.10 การเปลี่ยนแปลงของท่อที่ 3 น้อยกว่าค่าความคลาดเคลื่อนสูงประมาณ 8 เปอร์เซ็นต์



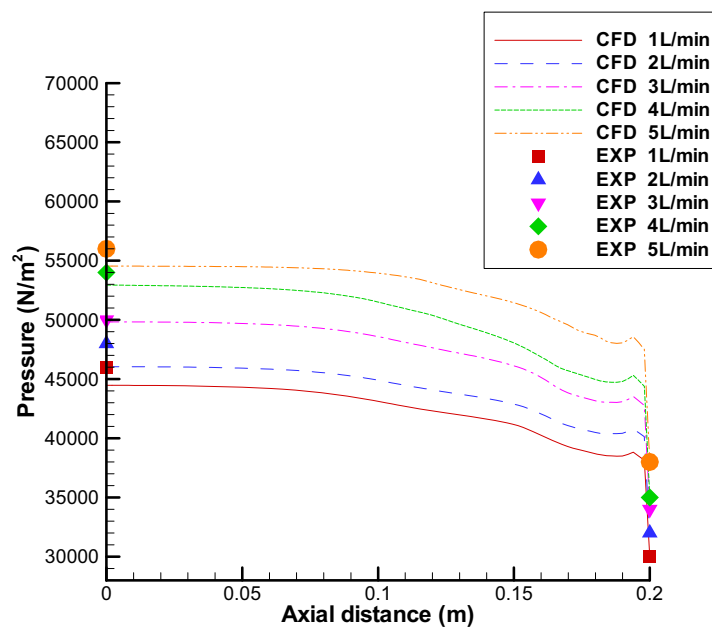
รูปที่ 5.10 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่ 3 ตามความยาวที่อัตราการไหลต่างๆ

จากการทดลองจะเห็นได้ว่าท่อทั้งสามจะมีการเปลี่ยนแปลงที่ต่างกันออกไป ตามแรงลัพท์ที่กระทำ อันเนื่องมาจากความดันแตกต่าง (transmural pressure) และนอกเหนือจากนั้นค่ายังโมดูลัส (Young's modulus ; E) ของผนังท่อ จะมีผลกระทบโดยตรง การเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อจะแปรผกผันกับค่ายังโมดูลัส ยิ่งค่ายังโมดูลัสมากการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นจะน้อยจนกระทั่งการเปลี่ยนแปลงเป็นศูนย์ในท่อแข็งเกร็ง และ นอกเหนือจากนี้ขนาดของท่อและความหนาก็มีผลกระทบดังท่อที่ 3 ซึ่งท่อมีขนาดเล็ก และ หนา การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นจะน้อยกว่าท่อทั้งสอง

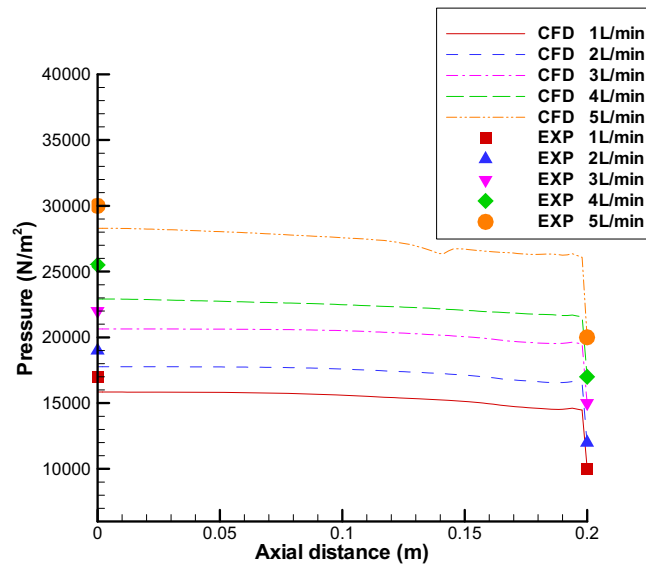
การเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงความดันที่อัตราการไหลต่างๆของท่อทั้งสามแสดงได้ดังรูปที่ 5.11 - 5.13 แกนตั้งบ่งบอกถึงความดันภายในท่อและแกนนอนเป็นความยาวของท่อ จากรูปพบว่าการเปลี่ยนแปลงความดันค่อยๆลดลงตามความยาวของท่อ ท่อที่ 1 จะมีความดันตกคร่อมสูงสุดเนื่องจากมีค่ายังโมดูลัสต่ำและค่าความคลาดเคลื่อนสูงจากการขยายตัวของท่อสูง จากการทดลองไม่สามารถวัดความดันภายในท่อได้ จึงมีการติดตั้งเกจวัดความดัน ณ ทางเข้า และ ทางออกของท่อ ดังนั้นจึงมีความคลาดเคลื่อนเนื่องจากตำแหน่งติดตั้งเครื่องมือวัดอยู่บ้างประมาณ 20 เปอร์เซ็นต์ ที่ตรงทางเข้าของท่อนอกเหนือจากนั้นท่อที่ใช้ในการทดลองเกิดการเปลี่ยนแปลงที่ไม่สม่ำเสมอและไม่สมมาตร ดังที่ได้กำหนดไว้ในแบบจำลองเชิงตัวเลข ค่าความดันที่เกิดขึ้นในท่อทดลองค่อนข้างจะสูงเนื่องจากมีแรงต้านการไหลเนื่องจากความเรียบของผิวของผนังท่อ ซึ่งผลกระทบทั้งหมดนี้ จึงทำให้ความดันมีค่าที่แตกต่างจากแบบจำลองเชิงตัวเลข



รูปที่ 5.11 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงความดันภายในท่อที่ 1 ตามความยาวที่อัตราการไหลต่างๆ



รูปที่ 5.12 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงความดันภายในท่อที่ 2 ตามความยาวที่อัตราการไหลต่างๆ



รูปที่ 5.13 เปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงความดันภายในท่อที่ 3 ตามความยาวที่อัตราการไหลต่างๆ

จากการยืนยันผลกับทฤษฎีของ Fung (1996) และการทดลองที่การไหลแบบคงตัวผลที่ได้จะสอดคล้องกันคือ การกระจายตัวของความดันลดลงตามความยาวของท่อและการเปลี่ยนแปลงรัศมีของท่อลดลงตามความยาวเช่นเดียวกัน จะมีค่าความคลาดเคลื่อนสูงสุด 12 เปอร์เซ็นต์ที่อัตราการไหล 5 ลิตรต่อวินาที ส่วนการเปรียบเทียบผลกับการทดลองนั้นพบว่ายังมีความแตกต่างทั้งด้านการเปลี่ยนแปลงรูปร่างและความดันอยู่ 20 เปอร์เซ็นต์ ทั้งนี้เนื่องมาจากการเสียรูปของท่อในการทดลองนั้นแตกต่างจากสมมติฐานที่ใช้ในแบบจำลองเชิงตัวเลข อย่างไรก็ตามผลการเปรียบเทียบระหว่างแบบจำลองเชิงตัวเลขที่สร้างขึ้นและการผลจากทางทฤษฎีก็ยังสามารถให้เห็นว่าเราสามารถนำเอาแบบจำลองเชิงตัวเลขนี้ไปใช้ในการศึกษาพื้นฐาน อันจะกล่าวในรายละเอียดต่อไปได้

5.3 กรณีศึกษาเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรในการไหลแบบออสซิลลาทอรี

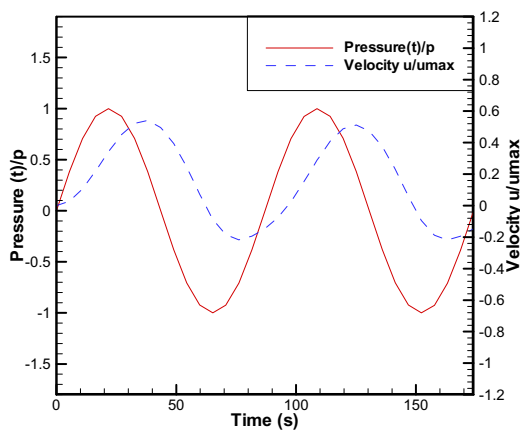
จากที่ได้ทำการยืนยันผลของแบบจำลองเชิงตัวเลขไปแล้วนั้น พบว่าแบบจำลองสามารถแสดงผลพฤติกรรมพื้นฐานของการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ ในส่วนนี้จะเป็นการนำเสนอผลการนำเอาแบบจำลองเชิงตัวเลขไปวิเคราะห์เกี่ยวกับลักษณะการไหลที่เกิดขึ้น โดยที่การไหลที่จะพิจารณาในกรณีศึกษาคือการไหลแบบออสซิลลาทอรี ซึ่งเป็นการไหลที่มีลักษณะเป็นคลื่น และมีช่วงคาบที่แน่นอน ยกตัวอย่างเช่น คลื่นไซน์ (sine wave) และคลื่นโคไซน์ (cosine wave) โดยการศึกษาการไหล แบบออสซิลลาทอรีแบ่งเป็น

5.3.1 ศึกษาการไหลในแบบออสซิลลาทอรีในท่อแข็งเกร็ง

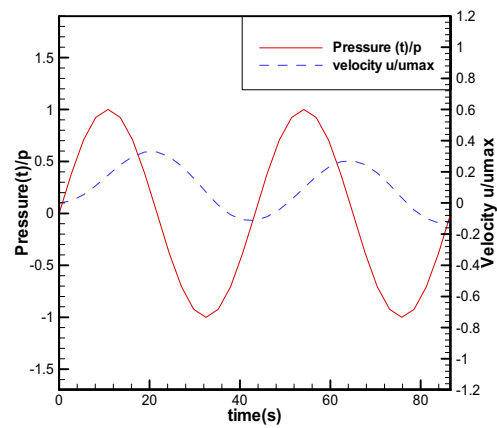
กรณีศึกษาของการไหลแบบออสซิลลาทอรี นี้จัดทำเพื่อยืนยันกันผลเฉลยของแบบจำลองเชิงตัวเลขที่ตอบสนองกับภาวะการไหลที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา และยังจะใช้เป็นฐานในการวิเคราะห์ร่วมกับการไหลแบบออสซิลลาทอรีในท่อที่ยืดหยุ่นได้ต่อไป

การไหลแบบออสซิลลาทอรีนี้จะถูกควบคุมด้วยตัวแปรไร้มิติ สองตัวด้วยกันคือ Reynolds number และ Womersley number (ตัวแปรไร้มิติของความถี่ของการไหลแบบออสซิลลาทอรี) โดยที่งานวิจัยนี้จะ

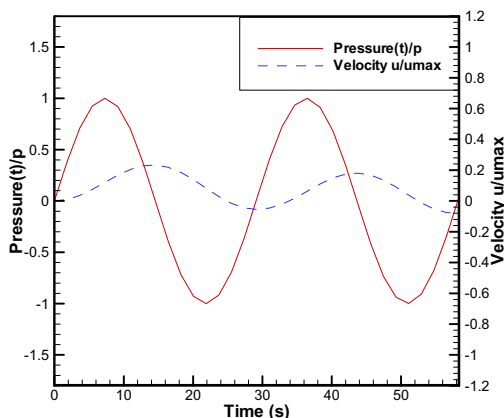
ศึกษาอยู่ในช่วงของค่า Reynolds number ตั้งแต่ 800 ถึง 4100 และค่า Womersley number ต่างๆ ตั้งแต่ 3.34 ถึง 6.67 รูปที่ 5.14 แสดงผลของการไหลแบบออสซิลลาทอรีในท่อแข็งเกร็งโดยจะนำเสนอในรูปของคลื่นความดันกับคลื่นความเร็ว และความสัมพันธ์ระหว่างเฟสของคลื่นทั้งสองที่เวลาต่าง ๆ จาก รูปพบว่าพฤติกรรมของการไหลของของไหลจะตอบสนองตามความดันที่เปลี่ยนแปลงไป โดยที่เมื่อความดัน เพิ่มขึ้น อัตราการไหลค่อยๆ เพิ่มขึ้น และเมื่อความดันลดลงอัตราการไหลก็จะลดลงด้วย ถ้าการเปลี่ยนแปลงของความดันมีค่าต่ำ (ความถี่ต่ำ) จะเห็นได้ว่าคลื่นของความเร็วจะมีเฟสที่ใกล้เคียงกับเฟสของความดัน และเมื่อคลื่นความดันมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว (ความถี่สูง) เฟสของการไหลจะตามหลังเฟสของความดัน โดยมีระยะห่างระหว่างเฟสเพิ่มขึ้นตามความถี่ที่เพิ่มขึ้น อันเนื่องมาจากความเฉื่อยของของไหล นอกจากนี้จะพบว่าการตามหลังของเฟสการไหลทำให้ขนาดสูงสุดของความเร็วลดลง และขนาดของความเร็วสูงสุดที่ลดลงจะแปรผันตามความถี่ของความดัน เมื่อความถี่ของความดันสูงมาก ๆ ความเร็วสูงสุดของของไหลจะลดลงจนเกือบเป็นศูนย์ นั่นคือเมื่อคลื่นความดันมีความถี่ค่าสูงมาก ของไหลแทบจะไม่มีไหลเกิดขึ้น เนื่องจากของไหลไม่สามารถตอบสนองต่อการเปลี่ยนแปลงของความดันได้ทัน



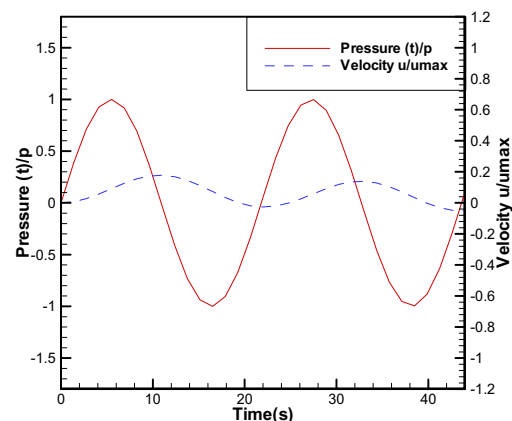
ความถี่ 3.34



ความถี่ 4.74



ความถี่ 5.78

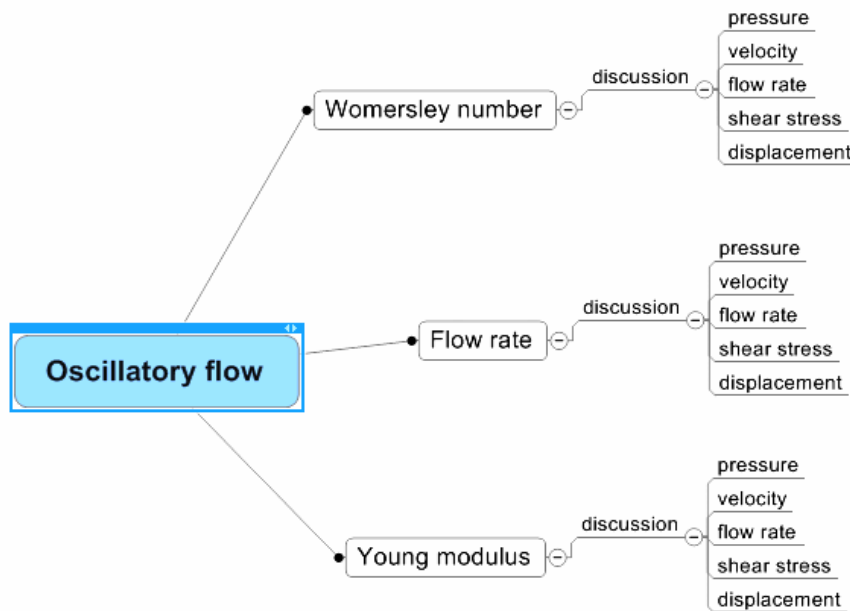


ความถี่ 6.67

รูปที่ 5.14 เปรียบเทียบความดันและความเร็วภายในท่อแข็งเกร็งที่ค่าความถี่ ต่างๆ

5.3.2 ศึกษาการไหลในท่อที่ยืดหยุ่นได้

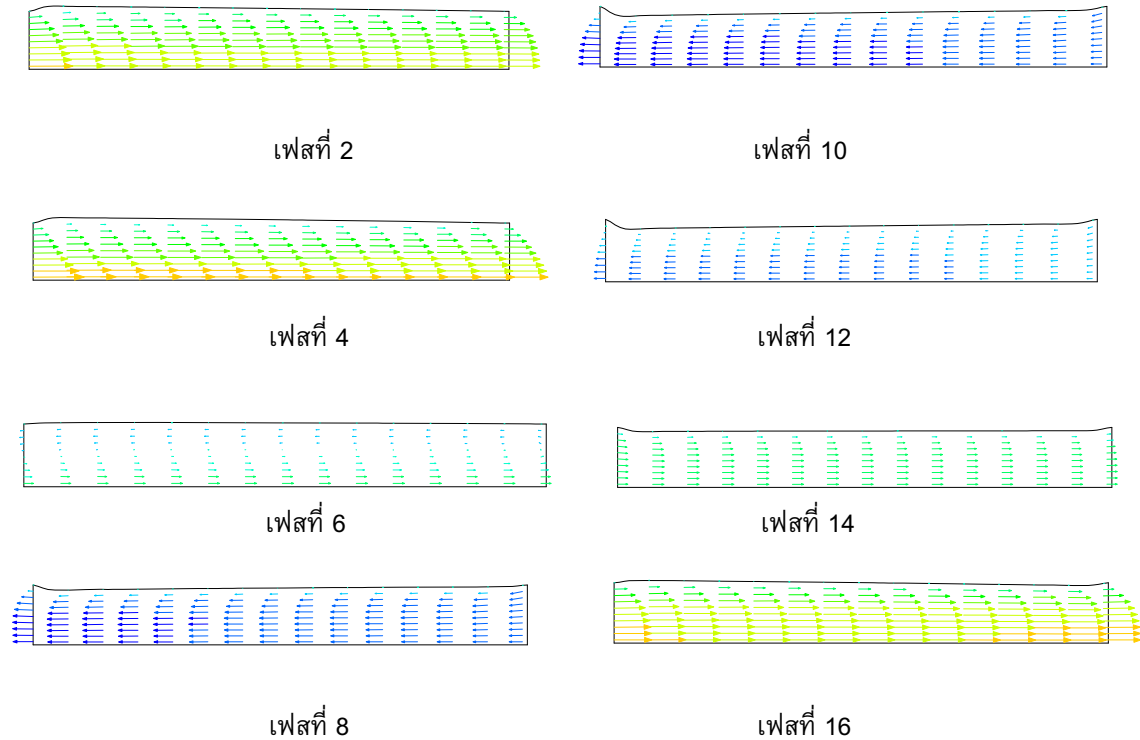
การไหลเป็นแบบออสซิลลาทอรีภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้มีการไหลภายในท่อจะขึ้นอยู่กับปัจจัยควบคุมหลายอย่างเช่น อัตราการไหล ความถี่ของการไหล และคุณสมบัติของท่อ ซึ่งในที่นี้จะมี การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่าตัวแปรและการไหลเป็นแบบพัลส์อันได้แก่ อัตราการไหล Womersley number และค่ายังโมดูลัสของท่อ โดยในการไหลแบบพัลส์นี้มีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต ด้วยค่าของความดันขาเข้าที่เป็น การวิเคราะห์การไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ใช้แบบจำลองเชิงตัวเลขที่มีช่วงค่า Reynolds number ตั้งแต่ 800 ถึง 4100 และรายละเอียดของการศึกษาผลกระทบของ ตัวแปรที่สนใจแสดงได้ดังรูปที่ 5.15



รูปที่ 5.15 ผังแสดงตัวแปรควบคุมที่สนใจศึกษาในงานวิจัยนี้และค่าตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการไหลที่จะทำการวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้

รูปที่ 5.16 คือผลการเปลี่ยนแปลงของขนาดท่อกับการกระจายความเร็วตามแนวการไหล จากรูปจะสังเกตเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับท่อตามความดันขาเข้า ณ เวลาใด ๆ นั้น ท่อจะเกิดการยืดตัวโป่งขึ้นมาเป็นระยะสูงสุด ตามความดันขาเข้าที่เพิ่มขึ้นตามเวลา และค่อยๆ ลดลง ตามความดันจนกลับมาสู่รูปร่างเดิม ณ เวลาที่ความดันขาเข้ากลับเป็นศูนย์ และต่อจากนั้นท่อจะเกิดการยุบตัวตามความดันที่ลดลง และขณะที่ความดันลดลงต่ำกว่าศูนย์นั้น สนามความเร็วภายในท่อจะเกิดการแยกเป็นสองส่วนดังจะเห็นได้จากเฟสที่ 6 โดยที่ส่วนหนึ่งยังเคลื่อนที่ไปข้างหน้าอีกส่วนหนึ่งเกิดการไหลสวนทางการไหลสวนกลับไปข้างหลัง การไหลจะเป็นอย่างนี้ต่อไปจนกระทั่งเกิดการไหลสวนทางกลับไปข้างหลังหมดโดยสมบูรณ์และเป็นช่วงขณะที่ท่อเกิดการยุบตัวสูงสุดในเฟสที่ 10 ก่อนที่จะเกิด

การโป่งพองขึ้นมายังจุดเริ่มต้น พร้อมกับการไหลกลับไปยังทิศทางเดิมในตอนต้นอีกครั้งหนึ่งเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ



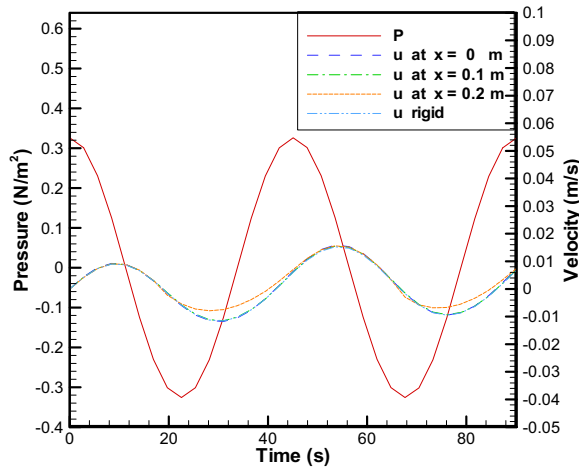
รูปที่ 5.16 การเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อและการกระจายตัวของความเร็วตามแนวการไหลท่อที่เฟสต่าง ๆ

กรณีการไหลแบบออสซิลลาทอรีจากแบบจำลองการไหลภายในท่อยืดหยุ่นได้มีการแยกวิเคราะห์ตามตัวแปรควบคุมต่าง ๆ ดังนี้

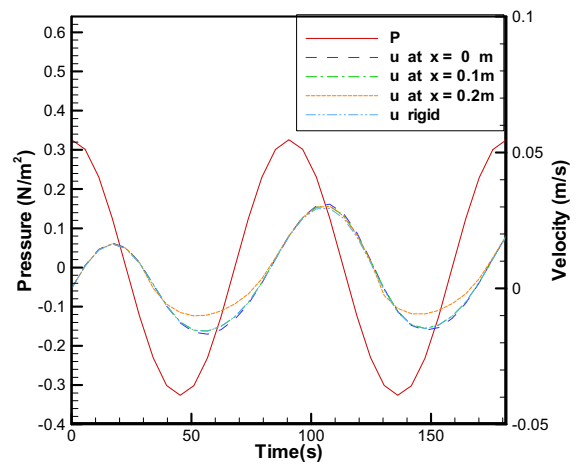
1. การเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรที่ Womersley ต่าง ๆ

ในส่วนนี้จะนำเสนอผลของการจำลองที่มีการไหลของความดันเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ในลักษณะเป็นคาบโดยที่เปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรควบคุมความถี่ Womersley number 4 ค่าคือความถี่ 3.34 4.74 5.78 และ 6.67 และจะนำเสนอตัวอย่างของผลจากแบบจำลองจากท่อที่มีค่ายังโมดูลัส 22 kN/m^2 และ Reynolds number เท่ากับ 835 โดยนำผลของความดัน และความเร็วที่กึ่งกลางท่อจากแบบจำลองเชิงตัวเลขค่าที่ได้มาพล็อตกราฟได้ดังรูปที่ 5.17 ซึ่งแสดงความดันที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลาและมีการนำความเร็วมาเปรียบเทียบในกราฟเดียวกัน โดยให้แกนของความดันอยู่ในแกนตั้ง ขวามือ และแกนของความเร็วอยู่ในแกนตั้ง ขวามือ โดยทำการเปรียบเทียบความเร็ว ณ ตำแหน่งต่าง ๆ สามช่วงด้วยกันคือทางเข้าท่อ ตรงกึ่งกลางท่อ และทางออกของท่อ และได้นำข้อมูลของท่อแข็งเกร็งมารวมแสดงผลด้วย เพื่อเปรียบเทียบความแตกต่างของความเร็วระหว่างท่อแข็งเกร็ง และท่อที่ยืดหยุ่นได้จากสภาวะการไหลเดียวกัน จากรูปจะเห็นได้ว่าเฟสของความเร็วของท่อยืดหยุ่นได้จะตามหลังเฟสของความดันอยู่ 45 องศาเนื่องจากความเฉื่อยของของไหล และขนาดของความเร็วจะมีค่าลดลงหาก

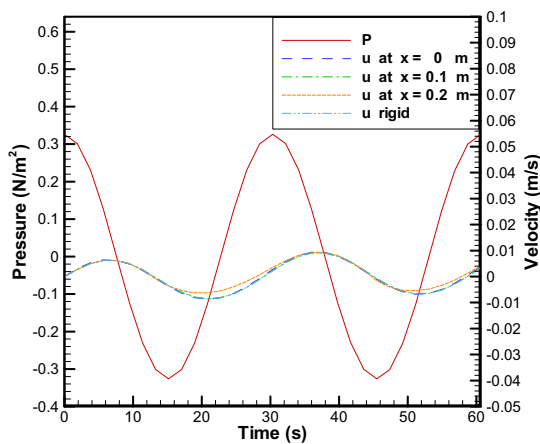
ความถี่ของความดันสูงขึ้น ซึ่งมีแนวโน้มไปในทางเดียวกันกับการไหลภายในท่อแข็งเกร็ง แต่มีจุดที่น่าสนใจก็คือที่เฟสของความเร็วเท่ากับ 90 และ 270 องศาที่บริเวณปากทางออกนั้น ความเร็วของท่อที่ยึดหยุ่นได้จะมีความเร็วสูงกว่า (ติดลบน้อยกว่า) ความเร็วภายในท่อแข็งเกร็ง ซึ่งจะได้ทำการอธิบายถึงเหตุและผลของปรากฏการณ์นี้ในรายละเอียดต่อไป



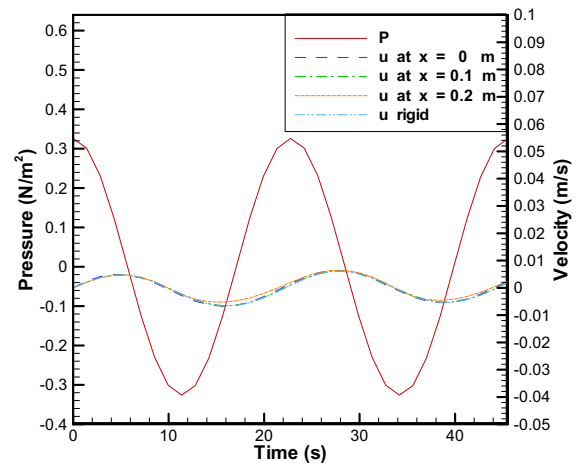
Womersley number 3.34



Womersley number 4.74



Womersley number 5.78

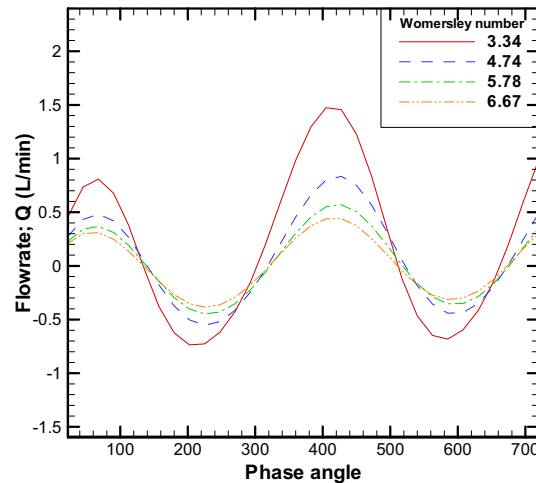


Womersley number 6.67

รูปที่ 5.17 เปรียบเทียบความดันและความเร็วที่ค่าความถี่ต่างๆ ของการไหลแบบออสซิลลาทอรีภายในท่อที่ยึดหยุ่นได้

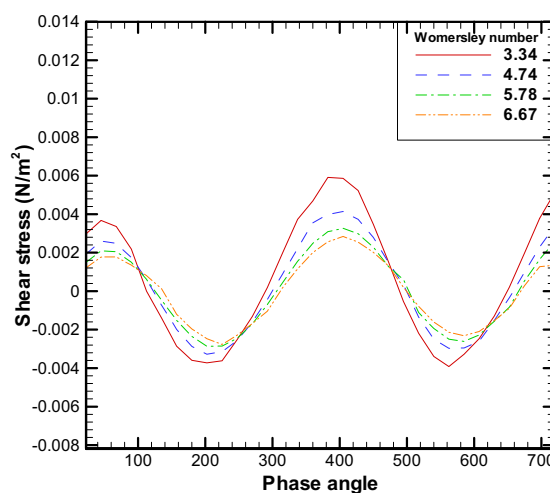
เนื่องจากในการไหลแบบออสซิลลาทอรีในท่อแข็งเกร็งได้แสดงให้เห็นว่าขนาดของความถี่ของของไหล (ซึ่งมีความสัมพันธ์โดยตรงกับอัตราการไหล) จะลดลงหากคลื่นความดันมีความถี่ที่สูงขึ้น รูปที่ 5.18 แสดงให้เห็นถึงอัตราการไหลที่ ความถี่ ต่างๆ การไหลแบบออสซิลลาทอรีเพื่อแสดงให้เห็น

ผลกระทบของความถี่ต่ออัตราการไหลของการไหลแบบออสซิลลาทอรีภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ จากรูปจะเห็นว่าอัตราการไหลแปรผกผันกับความถี่ของการไหล หากพิจารณาแนวแกนทิศทางของการไหล ณ ตำแหน่งที่อัตราการไหลเป็นศูนย์ แล้วนั้นจะพบว่าอัตราการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้นี้ไม่สมมาตรรอบแกนนี้ซึ่งจะทำให้เกิดอัตราการไหลสุทธิในหนึ่งคาบการไหลที่ไม่เป็นศูนย์ขึ้น



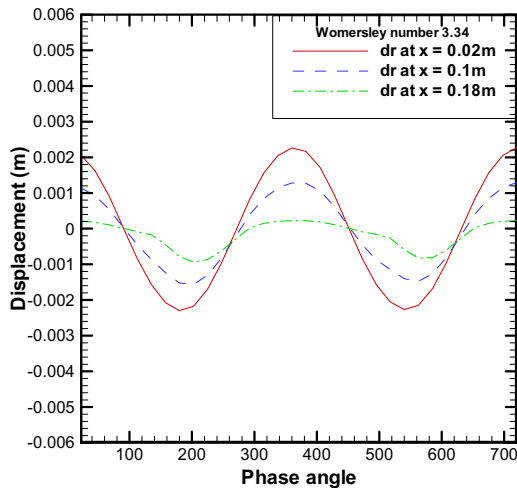
รูปที่ 5.18 การเปรียบเทียบอัตราการไหลที่ค่าความถี่ต่างๆ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางความยาวของท่อ

จากการเปลี่ยนแปลงทางด้านของความเร็วของของไหลนี้ยังส่งผลกระทบไปถึงการเปลี่ยนแปลงความเค้นเฉือนของของไหลที่กระทำกับท่อ โดยที่ความเค้นเฉือนแปรผันโดยตรงกับ อัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วต่อระยะทางในแนวรัศมี ณ บริเวณผนังท่อ ผลของความเค้นเฉือนที่ผนังท่อแสดงได้ดังรูปที่ 5.19 จากรูปความเค้นเฉือนจะเปลี่ยนแปลงไปตามจังหวะการไหลโดยจะมีค่าสูงที่สุดที่ค่า Womersley number เท่ากับ 3.34 ซึ่งช่วงนี้เป็นช่วงที่มีอัตราการไหลสูงสุด

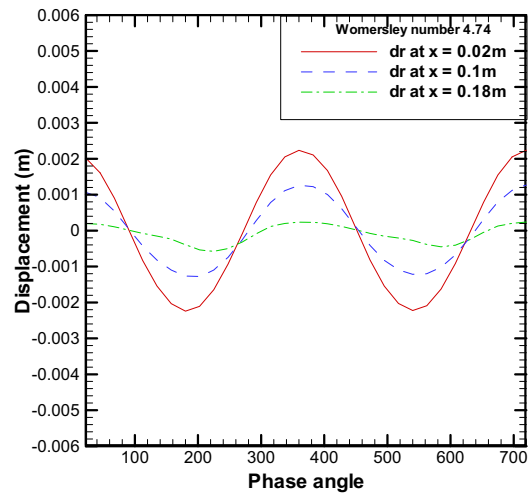


รูปที่ 5.19 การเปลี่ยนแปลงความเค้นเฉือนที่ค่าความถี่ต่างๆ ณ ตำแหน่งกึ่งกลางความยาวของท่อ

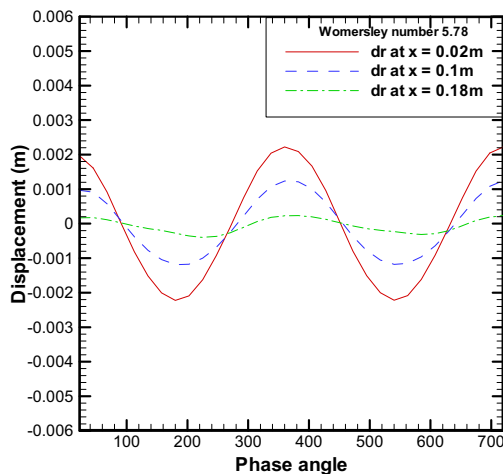
รูปที่ 5.20 แสดงการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อ ณ บริเวณช่วงทางเข้า ตรงกึ่งกลางและก่อนทางออกของท่อเล็กน้อยเนื่องจากการยืดปลายท่อทั้งสองด้านจึงไม่มีการเปลี่ยนแปลงที่ปลายท่อทั้งสองด้าน ผลจากแบบจำลองเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่มีค่าสูงสุด ณ บริเวณทางเข้า และลดลงไปตามแนวความยาวของท่อ และการเปลี่ยนแปลงของขนาดท่อจะลดลงตามค่าความถี่ที่เพิ่มขึ้น



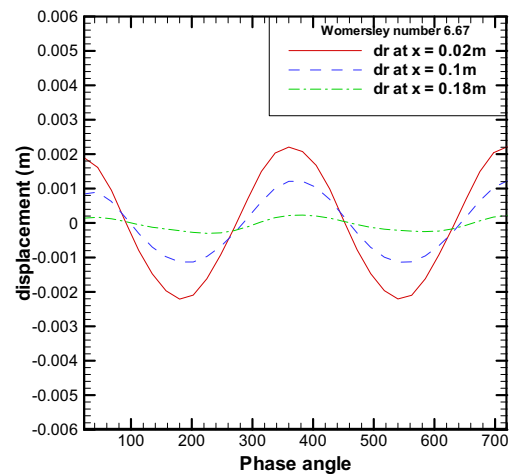
Womersley number 3.34



Womersley number 4.74



Womersley number 5.78

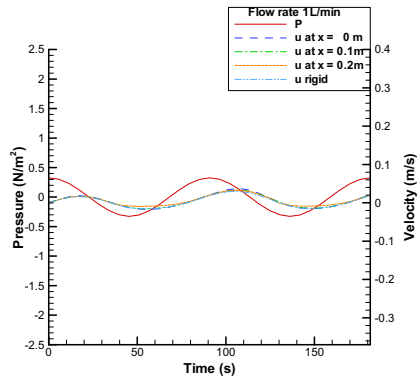


Womersley number 6.67

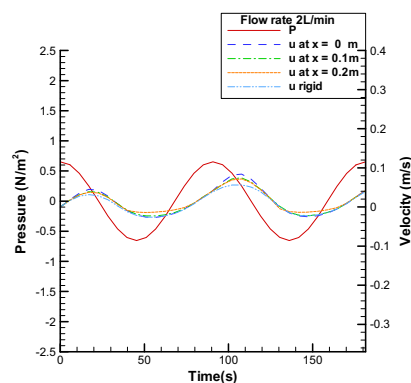
รูปที่ 5.20 การเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่ค่าความถี่ต่างๆ ของการไหลแบบออสซิลลาทอรีภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้

2. การเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรที่อัตราการไหลต่าง ๆ

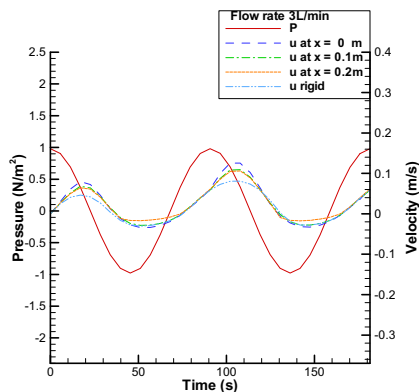
ในส่วนนี้จะนำเสนอถึงผลพฤติกรรมการไหลที่เกิดจากอัตราการไหลที่ต่างกันโดยจะปรับอัตราการไหลด้วยการกำหนด Reynolds number ทั้งหมดหาค่าคือ 835 1670 2450 3250 และ 4064 และจะนำเสนอผลการวิเคราะห์จากการแบบจำลองของท่อที่มีค่ายังโมดูลัส 22 kN/m^2 และค่าความถี่เท่ากับ 3.34 รูปที่ 5.21 แสดงคลื่นความเร็วเปรียบเทียบกับ คลื่นความดันที่กำหนดในเงื่อนไขขอบเขตของการไหลที่อัตราการไหลต่าง ๆ



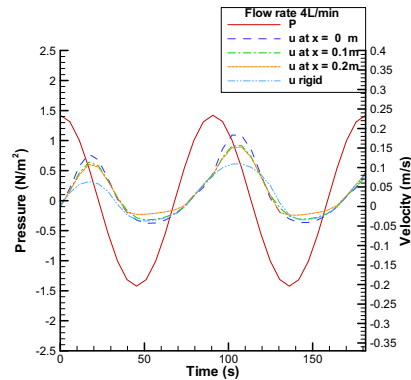
Reynolds number เท่ากับ 835 (1 ลิตรต่อวินาที)



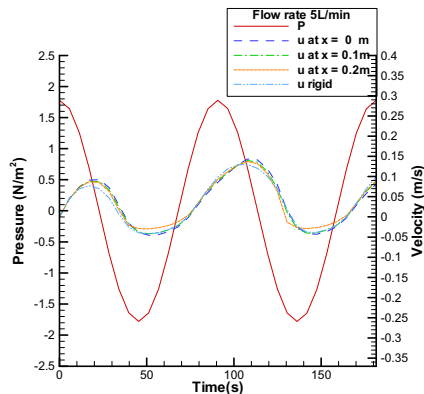
Reynolds number เท่ากับ 1670 (2 ลิตรต่อวินาที)



Reynolds number เท่ากับ 2450 (3 ลิตรต่อวินาที)



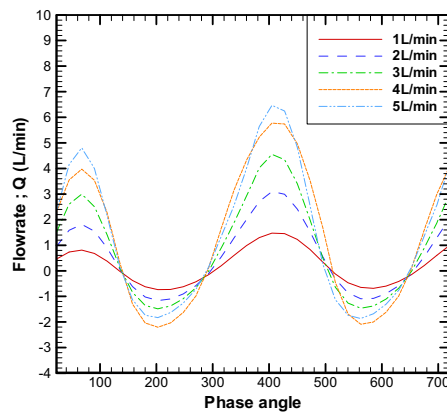
Reynolds number เท่ากับ 3250 (4 ลิตรต่อวินาที)



Reynolds number เท่ากับ 4064 (5 ลิตรต่อวินาที)

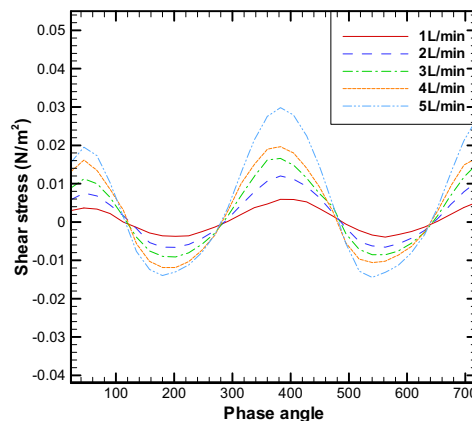
รูปที่ 5.21 เปรียบเทียบระหว่างความดันและความเร็วที่ Reynolds number ทั้งหมดหาค่าคือ 835 1670 2450 3250 และ 4064 ของการไหลที่ Womersley number เท่ากับ 3.34

ผลของการกระจายตัวของความเร็วจากแบบจำลองเชิงตัวเลขที่ได้พบว่าแอมพลิจูดของความเร็วจะมีเฟสตามหลังคลื่นความดัน และมีความเร็วสูงสุดที่ Reynolds number เท่ากับ 4064 (อัตราการไหล 5 ลิตรต่อนาที) โดยที่เฟสของความเร็วนั้นจะขึ้นอยู่กับเฟสของความดันเท่านั้นจะไม่เปลี่ยนแปลงตามอัตราการไหล อันจะสังเกตได้จากค่าเฟสที่คงที่ทุก ๆ อัตราการไหล ดังแสดงในรูปที่ 5.22

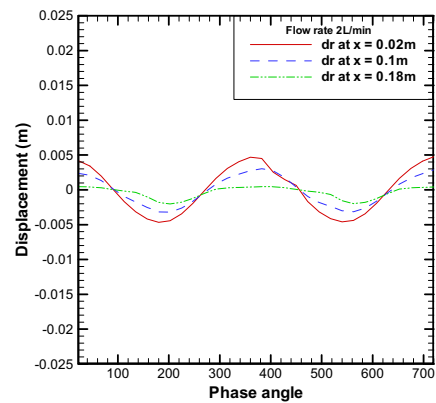
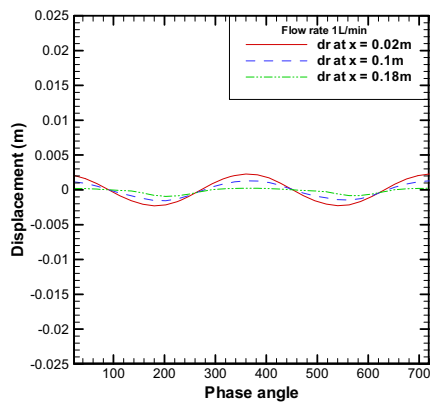


รูปที่ 5.22 อัตราการไหลตามแนวการไหลของท่อที่ Womersley number เท่ากับ 3.34 และ ค่ายังโมดูลัสเท่ากับ 22 kN/m^2

การเพิ่มขึ้นของอัตราการไหลจะมีผลต่อรูปร่างความเร็วของของไหลบริเวณชิดผนังท่อและมีผลกระทบต่อ การเปลี่ยนแปลงความเค้นเฉือนของของไหลที่กระทำกับผนังท่อ ดังแสดงในรูปที่ 5.23 ความเค้นเฉือนที่กระทำกับผนังท่อจะมีเฟสที่ใกล้เคียงกับความเร็ว และมีการเลื่อนของเฟสไปในทิศทางที่ลดลง หากอัตราการไหลเพิ่มขึ้นอีกด้วย นอกจากนั้นยังพบว่า การเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่เกิดขึ้นยังแปรตามอัตราการไหลที่เพิ่มขึ้นด้วย ดังแสดงในรูปที่ 5.24 โดยที่การขยายตัวของท่อที่ต้นทางจะมีค่ามากกว่าที่ปลายทางของท่อและที่ Reynolds number เท่ากับ 4064 (อัตราการไหล 5 ลิตรต่อนาที) ท่อจะเกิดการขยายตัวมากที่สุด

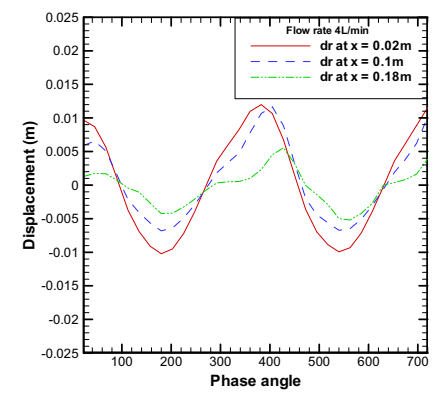
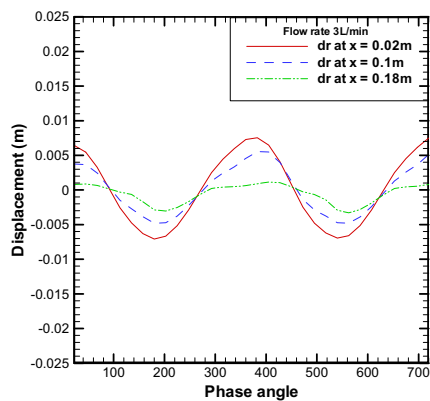


รูปที่ 5.23 ความเค้นเฉือน ณ ผนังท่อที่อัตราการไหลต่างๆ



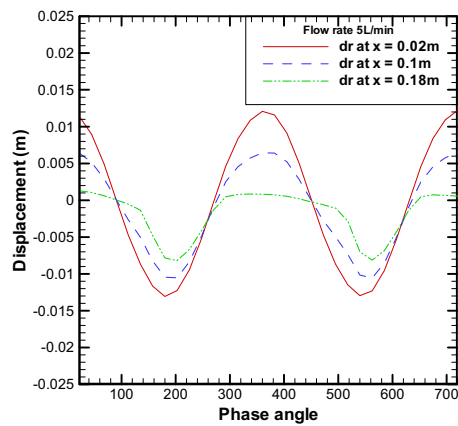
Reynolds number เท่ากับ 835 (1 ลิตรต่อนาที)

Reynolds number เท่ากับ 1670 (2 ลิตรต่อนาที)



Reynolds number เท่ากับ 2450 (3 ลิตรต่อนาที)

Reynolds number เท่ากับ 3250 (4 ลิตรต่อนาที)

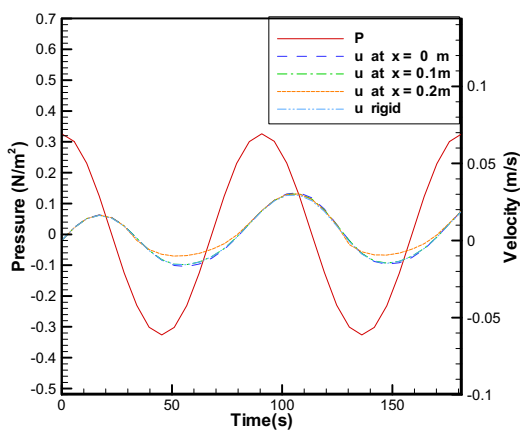
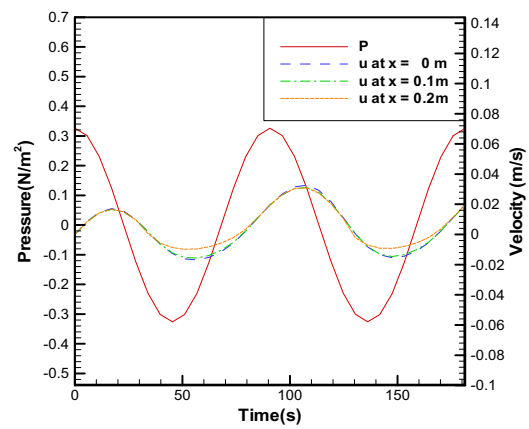
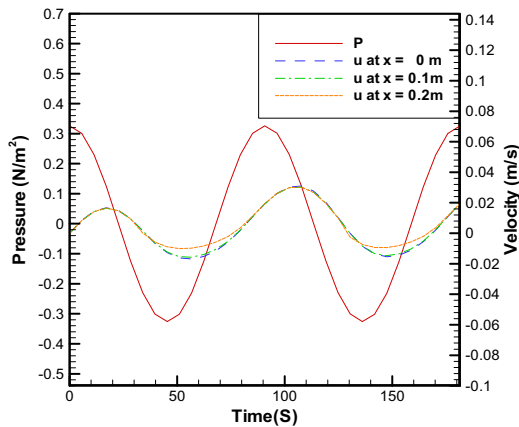
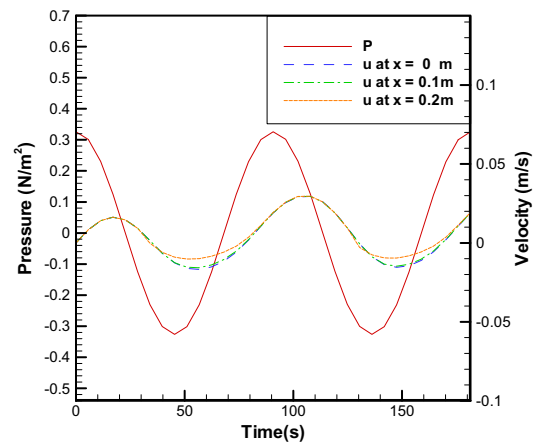


Reynolds number เท่ากับ 4064 (5 ลิตรต่อนาที)

รูปที่ 5.24 การเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อ ที่ Reynolds number ทั้งหมดหาค่าคือ 835 1670 2450 3250 และ 4064 ของการไหลที่ Womersley number เท่ากับ 3.34

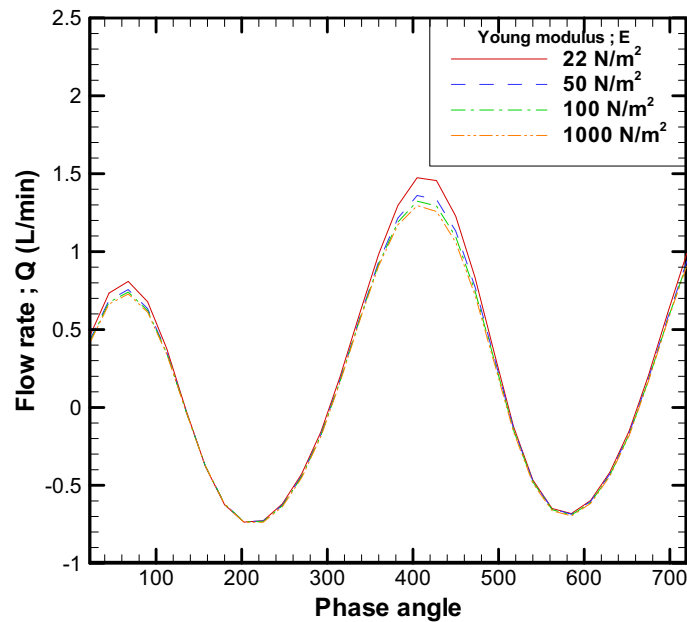
3. การเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรที่ค่ายังโมดูลัสต่าง ๆ

การศึกษาตัวแปรโดยการจำลองท่อที่มีขนาดเท่าเดิมในเบื้องต้นที่การไหลของน้ำด้วยอัตรา
การไหล 1 ลิตรต่อวินาที และค่า ความถี่ 3.34 มีการเปลี่ยนแปลงค่าตัวแปรต่ำที่สุดที่ท่อเกิดการ
เปลี่ยนแปลงมากที่สุดด้วยค่ายังโมดูลัส 4 ค่า จาก 22 50 100 และ 1000 kN/m^2 เปรียบเทียบเฟส
ของความดันและความเร็วตามเวลาที่เปลี่ยนแปลงไปดังรูป 5.25 การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นนั้นจะมี
ลักษณะคล้ายๆกันกับก่อนหน้านี้คือเฟสของความเร็วจะตามหลังเฟสของความดันอยู่ 45 องศาและ
ความเร็วตามแนวแกนของ ท่อแข็งเกร็งจะมากกว่าท่อยืดหยุ่นอยู่เล็กน้อย การเปลี่ยนแปลงค่ายัง
โมดูลัสแทบจะไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของแอมพลิจูดความดันและความเร็ว

E เท่ากับ 22 kN/m^2 E เท่ากับ 50 kN/m^2 E เท่ากับ 100 kN/m^2 E เท่ากับ 1000 kN/m^2

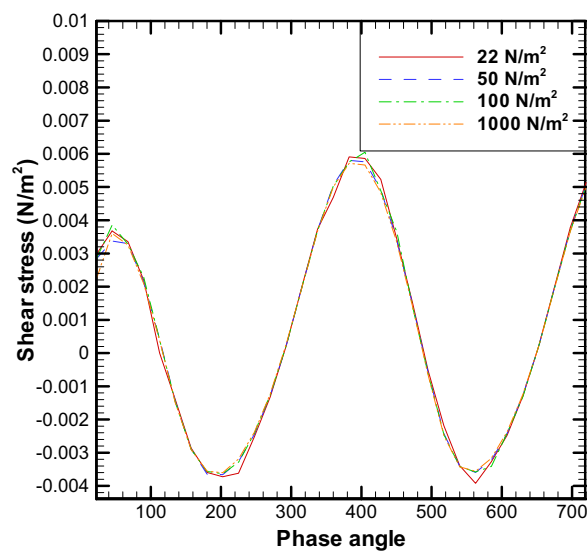
รูปที่ 5.25 เปรียบเทียบความดันและความเร็วที่ยังโมดูลัส 22 50 100 และ 1000 kN/m^2

แต่ถึงกระนั้นก็ยังมีการเปลี่ยนแปลงให้เห็นในด้านของอัตราการไหลดังรูป 5.26 กล่าวคือแอมพลิจูดของอัตราการไหลที่ค่ายังโมดูลัส 22 N/m² เพิ่มขึ้นไปเล็กน้อย และมีค่ามากที่สุด



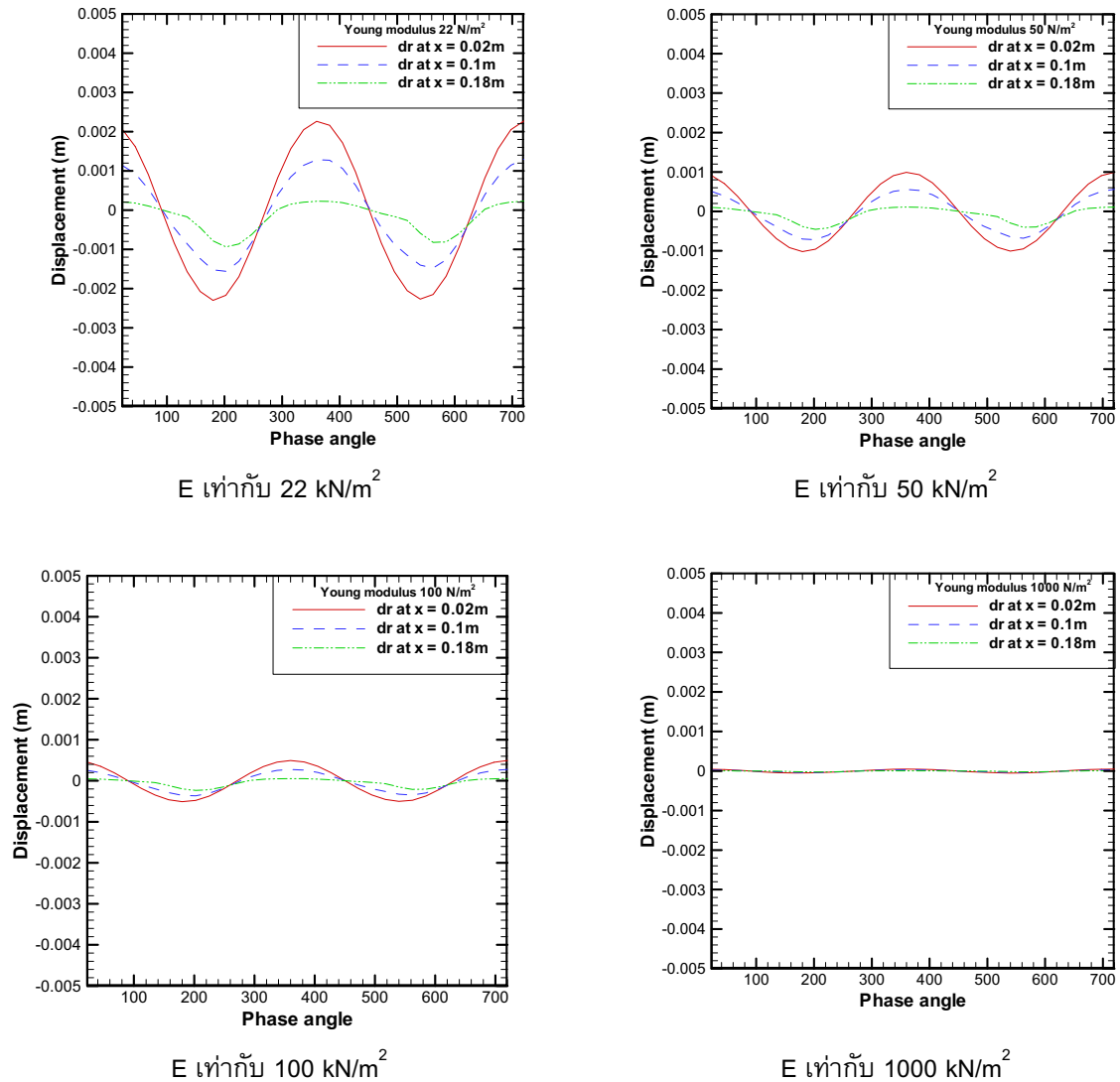
รูปที่ 5.26 การเปลี่ยนแปลงอัตราการไหลที่ค่ายังโมดูลัสต่างๆ

การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นแทบจะไม่เกิดความแตกต่างในด้านความเค้นเฉือนที่กระทำกับผนังท่อดังรูป 5.27



รูปที่ 5.27 การเปลี่ยนแปลงขนาดของความเค้นเฉือนที่ยังโมดูลัสต่างๆ

แม้ว่าความเร็วที่เกิดขึ้นมีการเปลี่ยนแปลงตามค่ายังโมดูลัสน้อยมาก แต่การเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อกลับมีผลโดยตรงกับค่ายังโมดูลัสที่เปลี่ยนไป การเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อจะลดลงเมื่อค่ายังโมดูลัสสูงขึ้นจนกระทั่งเป็นศูนย์ในท่อแข็งเกร็งดังแสดงในรูป 5.28



รูปที่ 5.28 การเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่ค่ายังโมดูลัส 22 50 100 และ 1000 kN/m^2

บทที่ 6

สรุปผลการวิจัย

6.1 สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ได้สร้างแบบจำลองเชิงตัวเลข 2 มิติของการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้เพื่อศึกษาถึงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่างๆที่เกี่ยวข้องกับการไหลได้แก่ ความดัน ความเร็ว กับการเปลี่ยนแปลงขนาดรูปร่าง และความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้น โดยแบ่งเป็น 2 ส่วน ส่วนแรกเป็นการจำลองที่การไหลแบบคงตัว ซึ่งมีการยืนยันคำตอบด้วยการเปรียบเทียบผลกับการคำนวณ ทางทฤษฎีของฟังก์ (Fung, Y.C., 1996) และการทดลอง ส่วนที่สองเป็นการประยุกต์ใช้แบบจำลองเชิงตัวเลขในการศึกษาการไหลแบบออสซิลลาทอรีด้วยการเปลี่ยนค่าตัวแปรของ อัตราการไหล Womersley และค่ายังโมดูลัส (Young modulus ; E)

จากการศึกษาตัวแปรในเบื้องต้นเริ่มจาก การสร้างแบบจำลองอย่างง่ายของท่อแข็งเกร็งขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 25.4 มิลลิเมตร (1 นิ้ว) ยาว 200 มิลลิเมตร กำหนดให้น้ำไหลผ่านด้วยอัตราการไหล 1-5 ลิตรต่อวินาที ได้เปรียบเทียบค่าของตัวแปรในทางทฤษฎีกับแบบจำลองเชิงตัวเลขเพื่อยืนยันผลของแบบจำลองพบว่าค่าที่ได้สอดคล้องกันและที่อัตราการไหลสูงขึ้นที่ 5 ลิตรต่อวินาทีจะมีค่าความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 2 เปอร์เซ็นต์จากการศึกษาและสร้างแบบจำลองภายในท่อแข็งเกร็งสามารถนำมาเป็นแม่แบบในการสร้างแบบจำลองของท่อที่ยืดหยุ่นได้ โดยการสร้างแบบจำลอง 2 มิติของการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 25.4 มิลลิเมตร (1 นิ้ว) ยาว 200 มิลลิเมตร หนา 1 มิลลิเมตร โดยใช้อัตราการไหลในการเปรียบเทียบจาก 1-5 ลิตรต่อวินาที มีการตรวจสอบคำตอบโดยแบ่งเป็น การเปรียบเทียบแบบจำลองที่การไหลแบบคงตัวกับทฤษฎีของฟังก์ ผลที่ได้คือการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อแปรผันตรงกับความดัน การเปลี่ยนแปลงความเร็วและความเค้นเฉือนจะมีความชันสูงขึ้นที่อัตราไหลสูงขึ้น จากการเปรียบเทียบผลกับทฤษฎีของฟังก์ ค่าความดันที่เปลี่ยนแปลงที่อัตราการไหลต่ำๆจะมีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าที่อัตราการไหลสูงๆและค่าที่ได้จากการคำนวณทางทฤษฎีมีค่าน้อยกว่าค่าความดันที่เปลี่ยนแปลงของแบบจำลองค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นสูงสุด 12% ที่อัตราการไหล 5 ลิตรต่อวินาทีค่าความคลาดเคลื่อนจะมีค่าค่อยๆเพิ่มขึ้นจากอัตราการไหล 4-5 ลิตรต่อวินาที ทั้งนี้เนื่องจากช่วงนี้เป็นช่วงของการไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow) ค่าเรโนลด์ประมาณ 3000

ถัดมาได้มีการทดลองที่การไหลแบบคงตัวด้วยท่อความยาว 200 มิลลิเมตร 3 ท่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 25.4 มิลลิเมตร (1 นิ้ว) หนา 1 มิลลิเมตร 2 ท่อและขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 24.86 มิลลิเมตร หนา 1.1 มิลลิเมตร 1 ท่อซึ่งมีค่ายังโมดูลัสที่แตกต่างกัน เปรียบเทียบผลการทดลองเพื่อยืนยันคำตอบของแบบจำลองจากการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อที่ใช้ในการทดลองด้วยอัตราการไหลซึ่งให้ค่า 1-5 ลิตรต่อวินาที การเปลี่ยนแปลงขนาดพื้นที่หน้าตัดเป็นผลที่เกิดขึ้นจากความดันจากกราฟ จะเห็นได้ว่าการโป่งพองของท่อจะเกิดขึ้นที่ใกล้ๆทางเข้าและค่อยๆลดลงไปตามความยาวของท่ออันเนื่องมาจากความดันตกคร่อม จากการทดลองการคำนวณทางทฤษฎี และแบบจำลองจะสอดคล้องกัน การยืดตัวของท่อขึ้นอยู่กับความดันและค่ายังโมดูลัส นั่นคือถ้าความดันมากท่อก็จะเกิดการยืดตัวมากซึ่งจะเห็นได้จาก ค่าอัตราการไหล ต่ำๆ ท่อเกิดการโป่งน้อย และจะเกิดการโป่งของท่ออย่างที่ต้นทางและค่อยๆลดลงที่ตรงปลายท่ออันนี้เนื่องมาจากการเกิดความดันลดที่ปลายทางของท่อทำให้การโป่งของท่ออย่างลดลงด้วย ส่วนค่ายังโมดูลัสนั้นก็มีผลเช่นเดียวกันนั่นคือ ถ้าท่อขนาด

เดียวกันแต่มีค่ายังโมดูลัสต่างกันการโป่งของท่อก็จะมีขนาดต่างกัน ค่ายังโมดูลัสน้อยๆจะมีผลทำให้ท่อเกิดการขยายตัวหรือโป่งมากกว่าค่ายังโมดูลัส มากๆที่ อัตราการไหลเดียวกัน ความเร็วของน้ำที่ไหลภายในท่อจะมีลักษณะสอดคล้องไปกับทฤษฎีคือจะมีความเร็วสูงสุดที่ตรงกึ่งกลางท่อและจะค่อยๆลดลงและเป็นศูนย์ที่ผนังท่อ ความเค้นที่เกิดขึ้นกับผนังท่อจะเกิดขึ้นมากเมื่อท่ออยู่ภายใต้แรงดันสูงๆหรือที่ค่า อัตราการไหลสูงๆ การใช้การทดลองในการเปรียบเทียบผลโดยรวมแล้วจะสอดคล้องกัน ค่าที่ได้จากการทดลองจะมีค่ามากกว่าสูงสุดประมาณ 15-20 เปอร์เซ็นต์เนื่องจากตัวแปรที่ไม่สามารถควบคุมได้อันได้แก่ท่อที่ใช้ในการทดลองเกิดการเปลี่ยนแปลงที่ไม่สมมาตร

การพิจารณาแบบจำลอง 2 มิติกับการไหลแบบออสซิลลาทอรีในกรณีศึกษาด้วยการเปลี่ยนค่าตัวแปรของ อัตราการไหล Womersley และค่ายังโมดูลัส โดยจะจำลองในท่อแข็งเกร็งก่อนที่จะนำไปเป็นต้นแบบในท่อยืดหยุ่นได้ต่อไปซึ่งใช้ท่อความยาว 200 มิลลิเมตรโดยที่ให้ Womersley ของความดันแตกต่างกันจาก ความถี่ 3.34 4.74 5.78 และ 6.67 พบว่าเฟสของความเร็วจะตามหลังเฟสของความดันอยู่ 45 องศาเนื่องจากความเฉื่อยของของไหลและที่ความถี่ต่ำๆนั้นค่าของการเปลี่ยนแปลงของความเร็วตามแนวรัศมีจะมีค่ามากและค่อยๆลดลงขนาดของความเร็วสูงสุดที่ลดลงจะแปรผันตามความถี่ของความดัน เมื่อความถี่ของความดันสูงมาก ๆ ความเร็วสูงสุดของของไหลจะลดลงจนเกือบเป็นศูนย์ นั่นคือเมื่อคลื่นความดันมีความถี่ค่าสูงมาก ของไหลแทบจะไม่มีไหลเกิดขึ้น และถ้าคลื่นความดันมีค่าต่ำมาก ๆ การไหลจะมีลักษณะเช่นเดียวกับการไหลแบบคงตัว ผลของการไหลแบบออสซิลลาทอรีในท่อแข็งเกร็งนี้สอดคล้องกับท่อยืดหยุ่นได้ เพียงแต่อัตราการไหลในท่อแข็งเกร็งจะคงที่ระหว่างช่วงไปกลับจะเท่ากัน แต่สำหรับท่อยืดหยุ่นได้นั้นจะเพิ่มขึ้นเล็กน้อย เมื่อท่อมีค่ายังโมดูลัสสูงขึ้น ส่งผลถึงอัตราการไหลจะลดลงเล็กน้อย และ การเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อจะลดลง จนกระทั่งการเปลี่ยนแปลงเกือบเป็นศูนย์เมื่อค่ายังโมดูลัสสูงมาก ๆ ซึ่งเป็นลักษณะของท่อแข็งเกร็งนั่นเอง

จากงานวิจัยแบบจำลองเชิงตัวเลข 2 มิติของการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้โดยรวมแล้วความดันมีผลโดยตรงทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงขนาดของท่อ การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นนั้นจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับค่ายังโมดูลัส ในกรณีการไหลแบบออสซิลลาทอรีความเร็วที่เกิดขึ้นจะตามหลังเฟสของความดันเนื่องจากความเฉื่อยของการไหล ความเค้นเฉือนจะแปรตามความเร็วที่กระทำ พฤติกรรมแบบนี้ก็เกิดขึ้นได้เช่นเดียวกันสำหรับการไหลของเลือดภายในหลอดเลือดดังนั้นสามารถที่จะนำเอาความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้เป็นข้อมูลในเบื้องต้นได้

6.2 ข้อเสนอแนะ

การสร้างแบบจำลองเชิงตัวเลข 2 มิติของการไหลภายในท่อที่ยืดหยุ่นได้นั้น เป็นการจำลองเพื่อศึกษาการปฏิสัมพันธ์กันระหว่าง ของไหลกับผนังท่อ โดยการสร้างแบบจำลอง สำหรับท่อขนาด 1 นิ้ว ยาว 200 มิลลิเมตร ซึ่งมีสิ่งที่จะต้องได้รับการปรับปรุงแก้ไขดังนี้

6.2.1 ถ้าต้องการศึกษาตัวแปรต่างๆ นอกเหนือจากนี้ สามารถเปลี่ยนคุณสมบัติต่างๆของท่อพร้อมกับแรงที่กระทำ กับ ท่อเพื่อศึกษาถึงพฤติกรรมต่างๆ ที่เกิดขึ้นได้ แต่ถ้ามีความจำเป็นที่จะนำไปใช้กับท่อที่มีขนาดเปลี่ยนแปลงไปก็จะต้องมีการสร้างแบบจำลองขึ้นมาใหม่ในลักษณะเดียวกัน

6.2.2 เนื่องจากแบบจำลองมีการเปรียบเทียบการทดลองการไหลของน้ำภายในท่อสิ่งที่น่าสนใจ ควรมีการนำไปทดสอบและเปรียบเทียบกับข้อมูลทางการแพทย์

6.2.3 ควรมีการสร้างแบบจำลองในลักษณะเป็นท่อต่อท่อแยกในลักษณะตัววายหรือตัวทีในการจำลองการไหลของเลือดที่ไปหล่อเลี้ยงหัวใจ หรือ การไหลเวียนของอากาศที่ผ่านไปยังปอด

เอกสารอ้างอิง

- วัฒนา ผลากรกุล. จลนศาสตร์ของการไหลเวียนเลือด, ภาควิชาสรีรวิทยา คณะแพทยศาสตร์ศิริราชพยาบาล มหาวิทยาลัยมหิดล, 2524.
- Atabek, H. B., and Lew H. S. Wave propagation through a viscous fluid contained in an initially stressed elastic tube. *Biophys. J.* 6:481-503, 1966.
- Atabek, H. B. Wave propagation through a viscous fluid contained in a tethered, initially stressed, orthotropic elastic tube. *Biophys. J.* 8:626-649, 1968.
- Bassiouny R., O'Neal D. Analysis of refrigerant flow and deformation for a flexible short tube using a finite element model. *International J. of Refrigeration.* 27:176-183, 2004.
- Cancelli, C., and Pedley T. J. A separated-flow model for collapsible tube. *J. Fluid. Mech.* 157:375-404, 1985.
- Downing, J. M., Ku D. N. Effects of frictional losses and pulsatile flow on the collapse of stenotic arteries. *J. of Biomech. Eng.* 119:317-324, 1997.
- Dutta, A., Wang D. M., and Tarbell J. M. Numerical analysis of flow in an elastic artery model. *J. of Biomech. Eng.* 114:26-33, 1992.
- Fung, Y.C. *Biomechanics: Circulation.* Springer-Verlag, New York Inc., 1996.
- Green, A. E., and Adkin J. E. *Large elastic deformations.* Oxford University Press, 1960.
- Greenshields, C. J., Weller H. G., and Ivankovic A. The Finite volume method for coupled fluid flow and stress analysis. *Computer Modeling and Simulation in Engineering.* 4(3):213-218, 1999.
- Hayashi S., Hayase T., and Miura Y. Stability analysis of collapsible tube flow. *J. Biomech. Eng.* 120:468-475, 1998.
- Hoekstra A.G., Artoli A.M., Sloot P.M.A. Unsteady flow in a 2D elastic tube with the LBGK method. *Future Generation Computer Systems* 20:917-924, 2004
- Hofer, M., Rappitsch G., Perktold K., Trübel W., and Schima H. Numerical study of wall mechanics and fluid dynamics in end-to-side anastomoses and correlation to intimal hyperplasia. *J. Biomechanics* 29(10):1297-1308, 1996.
- Khunatorn Y., S. Mahalingam, C.G. Degroff, R. Shandas. A fluid dynamic study of the total cavopulmonary connection of Fontan operation" *International Conference on Mechanics in Medicine and Biology*, April 2-5, 2000.
- Khunatorn Y., S. Mahalingam, C.G. Degroff, R. Shandas. A numerical study of pulsatile flow in a compliant tube. *International Conference on Mechanics in Medicine and Biology*, April 2-5, 2000.

- Khunatorn Y., S. Mahalingam, C.G. Degroff, R. Shandas. Influence of connection geometry and SVC-IVC flow rate ratio on structures within the total cavopulmonary connection:A numerical study” Vol.124 J. of Biomech. Eng, 2002.
- Lambert, J. W. On the nonlinearities of fluid flow in nonrigid tubes. J. of Franklin Institute. 266(2):83-102, 1958.
- Lee K.W., Xu X.Y. Modelling of flow and wall behaviour in a mildly stenosed tube.Medical Engineering and Physics. 24:575-586, 2002.
- Ling, S. C., and Atabek H. B. A nonlinear of pulsatile flow in arteries. J. Fluid Mech. 55:493-511, 1972.
- Lou, Z, Yang W. J. A computer simulation of the blood flow at the aortic bifurcation with flexible walls. J. Biomech. Eng. 115:306-315, 1993.
- Matsumoto T., Naiki T., and Hayashi K. Flow visualization analysis of pulsatile flow in elastic straight tube.Biorheology,Vol.31,No.4 365-381,1994.
- McDonald, D. A. Blood flow in Arteries. Edward Arnold (Publishers) Ltd.,1974.
- Mirsky., Wave propagation in a viscous fluid contained in an orthotropic elastic tube. Biophys. J. 7:165-186, 1967.
- Pedley T.J.,Luo X.Y. Modelling flow and oscillations in collapsible tube. Theoretical and Computational Fluid Dynamics.10: 277-294, 1998.
- Perktold, K., and Rappitsch G. Numerical analysis of arterial wall mechanics and local blood flow phenomena. ASME Adv. in Bioeng. 26:127-130, 1993.
- Qiu, Y., and Tarbell J. M. Numerical simulation of pulsatile flow in a compliant curved tube model of a coronary artery. J. of Biomech. Eng. 122:77-85, 2000.
- Rosar, M. E., and Peskin C. S. Fluid flow in collapsible elastic tubes: A three-dimensional numerical model. NYJM 7:281-302, 2001.
- Steinman, D. A., and Ethier C. R. The effect of wall distensibility on flow in a two-dimensional end-to-side anastomosis. J. of Biomech. Eng. 116:294-301, 1994.
- Tang, D., and Yang J. A free moving boundary model and boundary iteration method for unsteady viscous flow in stenotic elastic tubes. SIAM J. Sci. Comput. 21(4):1370-1386, 2000.
- Whirlow, D. K., and Rouleau W. T. Periodic flow of a viscous liquid in a thick walled elastic tube. Bulletin of Mathematical Biophysics 27:355370, 1965.
- Womersley, J. R. An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries. Wright Air Development Center Technical Report TR 56-614, 1957.
- Wu, S. G., Lee G. C., and Tseng N. T. Nonlinear elastic analysis of blood vessels, ASME J. of Biomech. Eng., 106:376-383, 1984.
- Wu, S. G., and Lee G. C. Theoretical and computational investigations of nonlinear wave propagations in arteries. Science in China (Series B). 32(6):711-727, 1989.
- Zamir, M. The physics of pulsatile flow. Springer-Verlag. New York, 2000.

- Zhao, S. Z., Xu X. Y., and Collins M. W. The numerical analysis of fluid-solid interactions for blood flow in arterial structures. Part 1: a review of models for arterial wall behavior. Proc. Instn. mech. Engrs. 212(H):229-240, 1998.
- Zhao, S. Z., Xu X. Y., and Collins M. W. The numerical analysis of fluid-solid interactions for blood flow in arterial structures. Part 2: development of coupled fluid-solid algorithms. Proc. Instn. mech. Engrs. 212(H):241-252, 1998.

ภาคผนวก ก.
การนำเสนอบทความ
งานประชุมนักวิจัยรุ่นใหม่ สกว.
พ.ศ. 2548



Numerical Modeling of Pulsatile Flow in a Compliant Tube



Asst. Prof. Yottana Khunatorn

MRG 4680142

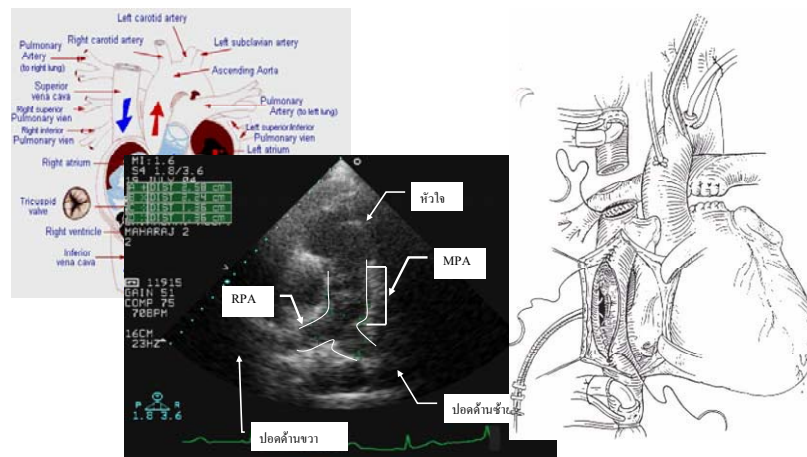
Mechanical Engineering
Chiang Mai University
THAILAND

Presentation Overview

- Motivation
- Technical Review
- Open Issues
- Governing Equations
- Numerical Modeling
- Numerical Results and Discussion
- Conclusion

Motivation

Pulsatile Flow within a Compliant vessel



Technical Review

Mathematical Modeling (1950s-80s)

- Model several type of elastic material
- Solution presented in the form of analytical solution
- Mainly focus on wave propagation characteristic
- No fluid dynamics perspective

Numerical Modeling (1980s-present)

- Apply the mathematical modeling from above with the fluid flow modeling
- Focus on specific application/problem or location

Open Issues

- Detail study of pulsatile flow structure in a compliant wall has not been carried out
- Influence of flow patterns, flow instabilities on the pressure drop and energy loss and tube deformation
- Effect of compliant vessel wall on the hemodynamics

Goals and Objectives

Overall Goals

- Study the relationship between fluid dynamic structures and resulting pressure drop/energy loss
- Understand the difference in behavior of these structures within rigid and compliant wall

Specific Objectives

- Develop a computational methodology to model wall compliance effect on fluid dynamics in a simplified configuration
- Study flow structures (primary flow, secondary flow, recirculation, and flow separation/reattachment) of a TCPC connection with compliant vessel modeling

Governing Equations

Continuity Equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$$

Momentum Equations

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\mu \nabla u) + F_x$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla \cdot (\mu \nabla v) + F_y$$

$$F_x = f_x + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{V} \right)$$

$$F_y = f_y + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{V} \right)$$

Compliant Tube Modeling and Assumption

Hooke's Law

$$e_{\theta\theta} = \frac{1}{E} (\sigma_{\theta\theta} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{xx}))$$

$$e_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}))$$

$$\sigma_{rr} = \frac{h}{r_o} \sigma_{\theta\theta}$$

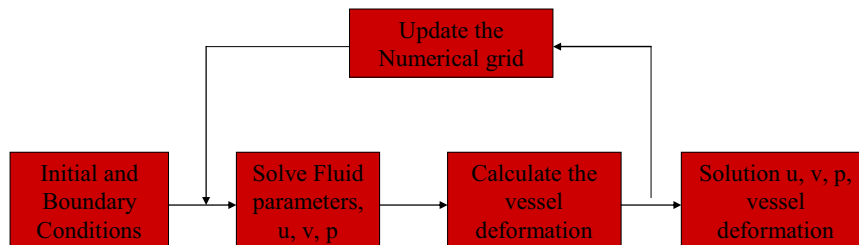
Assumption

1. Tube has thin wall and uniform thickness and initially straight
2. No stress in the lateral axis

$$\sigma_{rr} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{e_{\theta\theta}}{r_o}$$

$$e_{\theta\theta} = \frac{r(x) - r_o}{r_o}$$

Coupling between Fluid Dynamics and Wall Motion

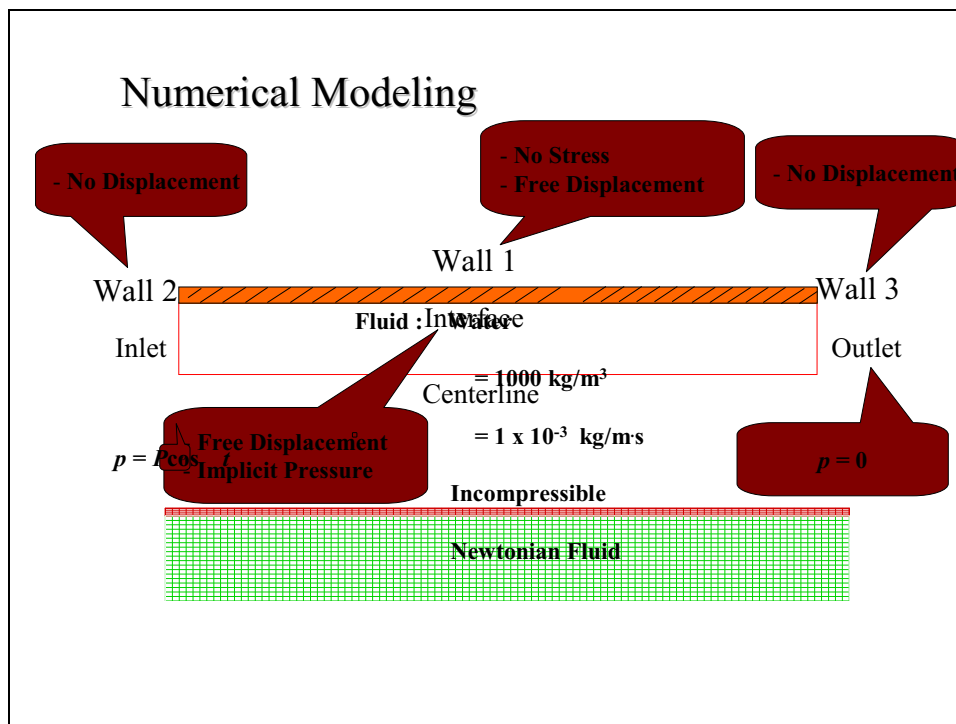


Governing Parameters

Reynolds Number $Re_D = \frac{\rho V D}{\mu}$ $\longrightarrow$ Inertia Force/Shear Force

Womersley Number $\Omega = \sqrt{\frac{\rho \omega}{\mu}} R$ $\longrightarrow$ Transient Inertia Force / Shear Force

Young Modulus $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ $\longrightarrow$ Tube Deformation & Wave Speed



Steady Flow within a Compliant Tube

1-D Laminar Steady Flow in a Compliant Tube (Fung, Y.C., 1996)

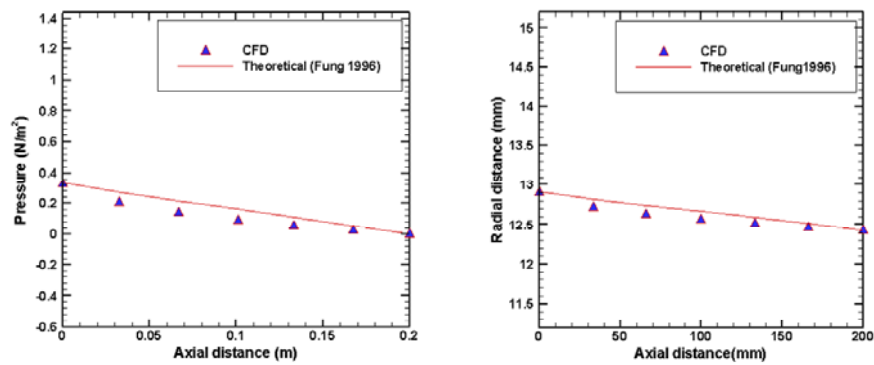
$$\frac{Eh}{3a_0} \left\{ \left(1 - \frac{a_0}{Eh} p(L) \right)^{-3} - \left(1 - \frac{a_0}{Eh} p(0) \right)^{-3} \right\} = -\frac{8\mu}{\pi a_0^4} L \dot{Q}$$

$$a(x) = a_0 \left[1 - \frac{a_0}{Eh} p(x) \right]^{-1}$$

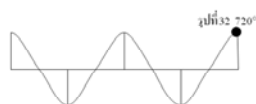
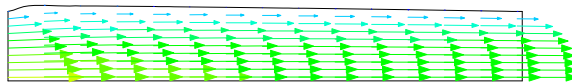
Radial Stress is very small compared with the circumferential stress

Model Validation

Pressure drop and deformation comparison between numerical model and analytical model (Fung, Y.C., 1996)

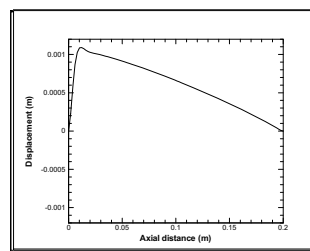


Numerical Results

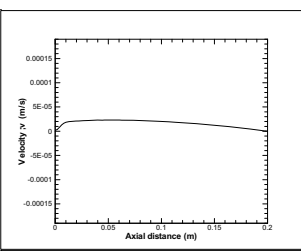


Dia. 2.54 cm
Length = 20 cm
 $E = 50 \text{ N/m}^2$
 $Re = 854$
Womersley = 3.34

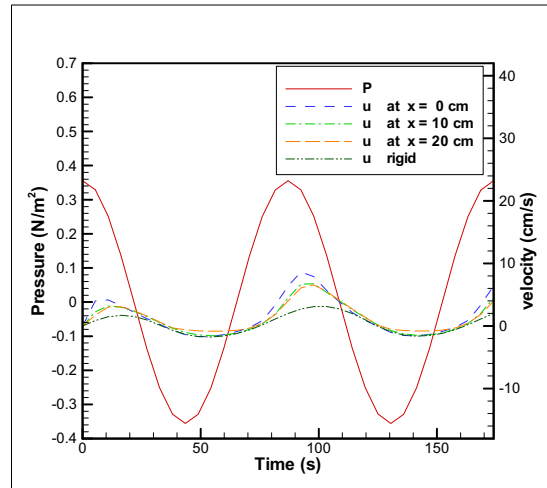
Wall Displacement



Radial Velocity

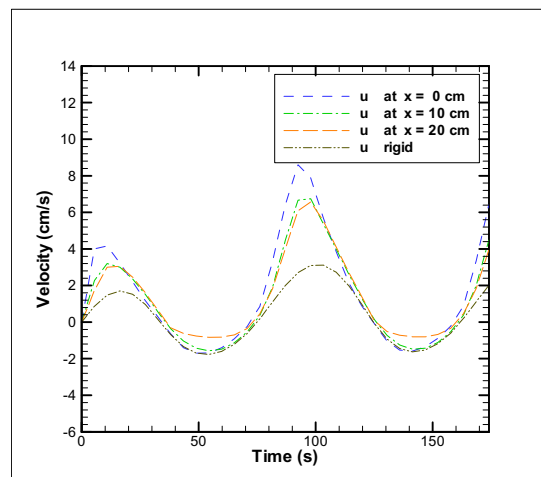


Pressure and Velocity Comparison



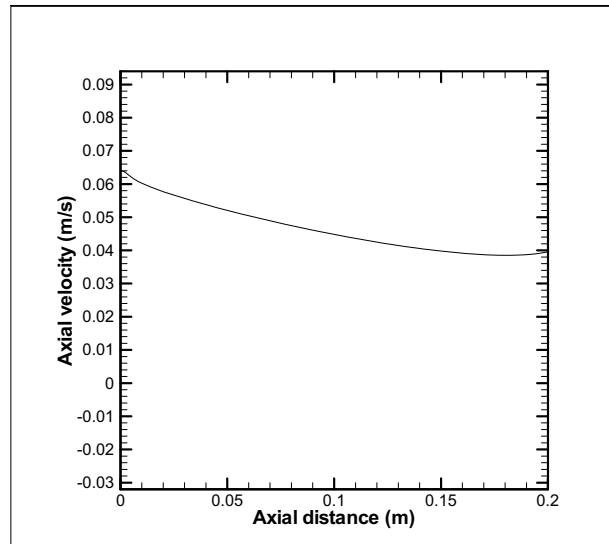
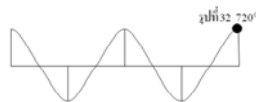
Womersley = 3.34

Velocity Propagation

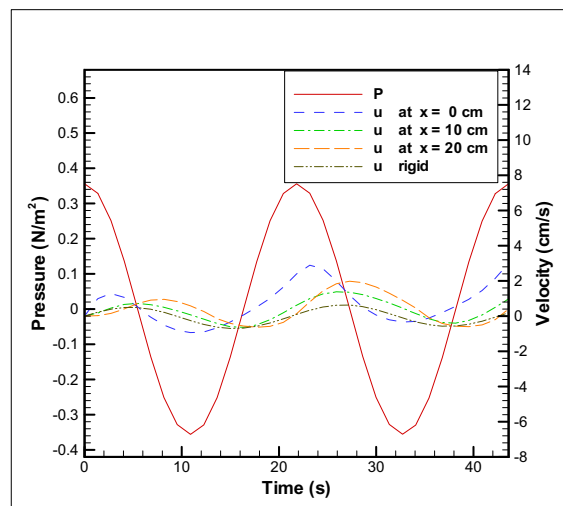


Womersley = 3.34

Centerline Velocity Pattern

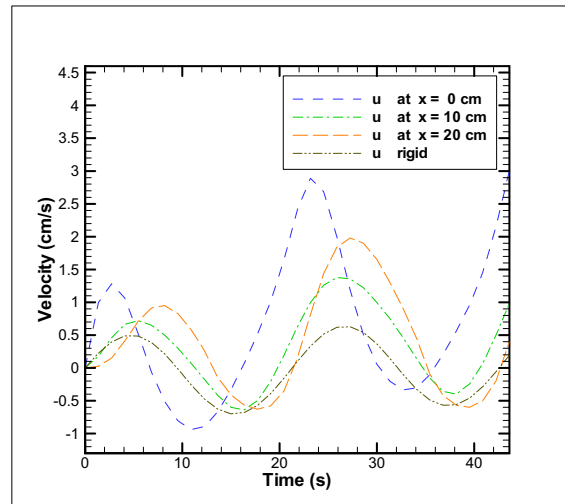


Pressure and Velocity Comparison



Womersley = 6.67

Velocity Propagation



Womersley = 6.67

Conclusion

- Deformation cause secondary flow and separation at the vessel wall
- Flow rate over an oscillatory period is not zero
- Maximum velocity is greater than rigid tube
- Maximum velocity attenuate along the axial direction

Recommendation for Future Work

- An elastic model with lateral and circumferential stress and deformation in all direction
- 3-D modeling

ภาคผนวก ข.

บทความวิจัย

Two Dimensional Numerical Model of Flow in a Compliant Tube

The 4th National Meeting on Biomedical Engineering, August 25-26, 2005

ภาคผนวก ค.

โปสเตอร์เผยแพร่ผลงานวิจัย และเอกสารประกอบการบรรยาย

US-Thai Biomedical Engineering Symposium 2005

Chulalongkorn University, THAILAND



Numerical Modeling of Oscillatory Flow within a Compliant Tube

Yottana Khunatorn¹, Thawan Sucharitakul¹

¹Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Chiang Mai University, THAILAND



Introduction

Pulsatile flow through a compliant tube plays a major role in several applications especially blood flow within human body. This phenomenon is more complex than flow inside a rigid tube because of the interactive between flow and motion of the wall. Furthermore, it has been evidenced that the fluid mechanic parameters plays an important role to the clinical information. Two dimensional modeling of the oscillatory flow within a straight compliant tube are being developed to observe the flow characteristic and affect of the compliant in detail. This study will provide us a better understanding role of the flow-wall interaction and can be applied with the vascular disease diagnostic in the future.

Governing Equations

The fluid flow is governed by the Navier's Stoke equations. The pressure distribution of the fluid is coupled with the solid wall motion by using Hooke's law.

Conservation of Mass

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Momentum Equation

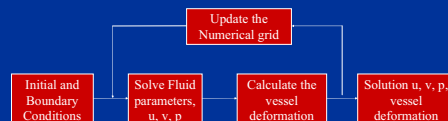
$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right) = F_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

Hooke's law

$$p = \frac{Eh}{1 - \sigma^2} \frac{\xi}{r_o^2}$$

Coupling between Fluid Dynamics and Wall Motion



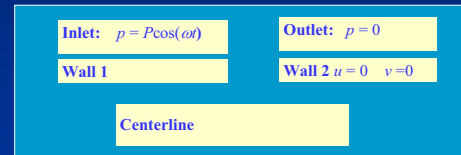
Numerical Modeling

Two dimensional numerical models are built using structured grid and the solution can be obtained by the finite volume method using the CFDRC™ software.



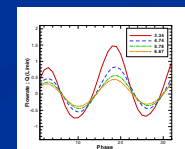
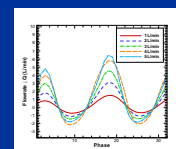
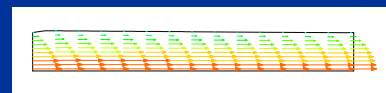
Boundary conditions

The fluid is driven by oscillatory inlet pressure and the axial velocity is zero at the interface.

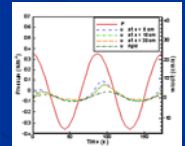
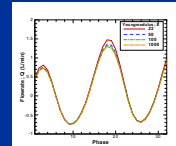


Numerical Results

Velocity distribution and wall displacement



Flow rate vs. time (at different maximum flow rate and frequency)



Flow rate vs. time (at different wall stiffness)

Flow rate vs. time (at downstream locations)

Conclusion

The results of the numerical modeling agree with the theoretical result. The flow structures reveal that velocity and pressure waves travel at different wave speed. Moreover, the volume flow rate over a periodic cycle appears to be higher than the oscillatory flow within a rigid tube. However, the volume flow rate of the oscillatory flow within a compliant tube attenuates along the traveling distance.

Acknowledgement

The financial support for this research project from the Thailand Research Fund is gratefully acknowledged.