



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ ปัญหาการคุมแทบเส้นโค้งของโมเชอร์

โดย อ.ดร. วัชรินทร์ วิจิรมาลา

31 ธันวาคม 2548

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ ปัญหาการคุมแท้งเส้นโค้งของโมเซอร์

อ.ดร. วัชรินทร์ วิจิรมาลา

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สนับสนุนโดยสำนักงานคณะกรรมการอุดมศึกษา และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกอ. และ สกว. ไม่จำเป็นต้องเป็นด้วยเสมอไป)

บทคัดย่อ

ปัญหาการปิดทับเส้นโค้งของโมเซอร์คือการค้นหาเซตในระนาบที่เล็กที่สุดที่สามารถปิดทับได้ทุกเส้นโค้งความยาวหนึ่งหน่วย แผ่นปิดทับที่เล็กที่สุดเท่าที่มีการค้นพบเป็นผลงานของ Norwood และ Poole มีพื้นที่ 0.260437 ปัญหาใกล้เคียงที่น่าสนใจมากปัญหานี้คือการหาแผ่นปิดทับสำหรับเฉพาะเส้นโค้งคอนเวกซ์ 30 ปีที่แล้ว Wetzel ได้แสดงว่าสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากที่มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวหนึ่งหน่วยและมีพื้นที่ 0.25 เป็นแผ่นปิดทับดังกล่าว ล่าสุดนี้ Johnson และ Poole ได้สร้างแผ่นปิดทับที่มีพื้นที่ 0.24655 ในงานวิจัยนี้ เราได้สร้างแผ่นปิดทับที่เล็กกว่า ซึ่งมีพื้นที่เพียง 0.2464 โดยได้จากการตัดสามเหลี่ยมของ Wetzel ที่ระดับความสูง 0.44

Abstract

The Moser's worm problem asks for the smallest set on the plane that can cover every unit arc. The smallest cover known is by Norwood and Poole of which the area is 0.260437. An interesting variant of this problem is to find the smallest cover for every unit convex arc. Thirty years ago, Wetzel proved that the isosceles right triangle with unit hypotenuse and area 0.25 is such a cover. Recently, Johnson and Poole found a convex cover of area 0.2466. In this work, we establish a smaller cover of area 0.2464 obtained from clipping the triangle at height .44.

Executive Summary

วัตถุประสงค์

- เพื่อศึกษาและสร้างความก้าวหน้าในการวิจัยหัวข้อต่าง ๆ ของ Moser's worm problem
- เพื่อสร้างโอกาสในการทำงานวิจัยร่วมกับ mentor คือ prof. John E. Wetzel และสร้างความสัมพันธ์ในการให้ความร่วมมือทางวิชาการในอนาคต
- เพื่อบุกเบิกการวิจัยในสาขาเรขาคณิตของประเทศไทยในสาขาที่เหมาะสมกับวงการคณิตศาสตร์ของเรา

การดำเนินงานวิจัย

เราได้แบ่งการวิจัยเป็นสามช่วง โดยเริ่มจากการค้นคว้าในแบบกว้างเพื่อเลือกหัวข้อที่น่าสนใจ จากนั้นจึงเลือกหัวข้อเรื่องการปิดทับด้วยแผ่นขนาดเล็กสำหรับเส้นโค้งคอนเวกซ์หนึ่งหน่วย ทั้งนี้ในการพิสูจน์ว่าแผ่นดังกล่าวมีความสามารถในการปิดทับจริงนั้น เราใช้การคำนวณเชิงตัวเลขด้วยคอมพิวเตอร์ แผ่นปิดทับใหม่นี้มีขนาดเล็กที่สุดเท่าที่มีการสร้างมา

สำหรับการสร้างความสัมพันธ์กับผู้เชี่ยวชาญและการส่งเสริมการวิจัยด้านเรขาคณิตในประเทศไทยนั้นเป็นไปตามแผนอย่างดี

ผลงานวิจัยที่ได้รับ

ผลงานที่ได้คือแผ่นปิดทับที่เล็กที่สุดเท่าที่มีการสร้าง สำหรับปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์หนึ่งหน่วย ได้รับการตรวจสอบจากกลุ่มผู้เชี่ยวชาญสูงสุดแล้ว และได้รับตอบรับในการตีพิมพ์แล้วจากวารสารวิจัยระดับนานาชาติ

เนื้อหางานวิจัย

1. วัตถุประสงค์ของโครงการ

- เพื่อศึกษาและสร้างความก้าวหน้าในการวิจัยหัวข้อต่าง ๆ ของ Moser's worm problem
- เพื่อสร้างโอกาสในการทำงานวิจัยร่วมกับ mentor คือ prof. John E. Wetzel และสร้างความสัมพันธ์ในการให้ความร่วมมือทางวิชาการในอนาคต
- เพื่อบุกเบิกการวิจัยในสาขาเรขาคณิตของประเทศไทยในสาขาที่เหมาะสมกับวงการคณิตศาสตร์ของเรา

2. การดำเนินงานวิจัยตามวัตถุประสงค์

หลังจากค้นคว้าและศึกษาเกี่ยวกับหัวข้อต่าง ๆ เราได้เลือกที่จะสร้างแผ่นปิดทับสำหรับเส้นโค้งคอนเวกซ์ โดยกระบวนการพิสูจน์จะได้รับความช่วยเหลือจากใช้การคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์ การคำนวณดังกล่าวได้รับการยืนยันทางทฤษฎีว่ายอมรับได้และมีชื่อว่า convex programming ในที่สุดเราก็ได้แผ่นปิดทับสำหรับเส้นโค้งคอนเวกซ์หนึ่งหน่วยที่มีพื้นที่น้อยกว่าแผ่นปิดทับที่เล็กที่สุดโดย Johnson และ Poole ในปี ค.ศ.2002 ผลงานนี้ได้ถูกนำเสนอในการประชุมวิชาการหลายครั้งและได้รับการอ้างอิงแล้วจากบทความอื่น

ในด้านความสัมพันธ์กับผู้เชี่ยวชาญที่เป็นที่ยอมรับสูงสุดคือ prof. John E. Wetzel นั้นได้ดำเนินไปอย่างดีมาก ได้มีการติดต่อทางอีเมลโดยสม่ำเสมอ ข้าพเจ้าได้ขอทุนจากเครือข่ายคณิตศาสตร์และจากภาควิชาเพื่อเดินทางไปปรึกษาและแสดงความก้าวหน้าของงานวิจัยนี้และงานวิจัยใกล้เคียง

สำหรับการส่งเสริมการวิจัยด้านเรขาคณิตของประเทศไทยนั้น ได้แก่ การผลิตบัณฑิตระดับปริญญาโทที่ทำวิทยานิพนธ์ในหัวข้อนี้โดยเน้นการรวบรวมที่มาและความเป็นไปของวงการวิจัยหัวข้อนี้ มีการเปิดสอนวิชาที่ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในหัวข้อนี้ มีการเขียนบทความลงในวารสารของสมาคมคณิตศาสตร์เพื่อแนะนำปัญหานี้ มีการเขียนบทความลงวารสาร My Math โดยบัณฑิตที่จบแล้ว มีการเขียนบทความลงเว็บของวิชาการดอทคอม มีการวิจัยโดยนิสิตนักศึกษาหลายคนและได้ผลงานเพื่อจะตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติ ระดับมหาวิทยาลัยในสหรัฐอเมริกา

3. ผลงานวิจัยที่ได้รับ

จากการวิจัยเราได้ผลงานเป็นแผ่นปิดทับที่เล็กที่สุดในปัจจุบัน กล่าวคือมีพื้นที่น้อยที่สุดเท่าที่มีการสร้าง โดยมีพื้นที่ 0.2464 ตารางหน่วยซึ่งสถิติเก่าคือ 0.24655 ตารางหน่วย แผ่นปิดทับนี้สามารถปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์หนึ่งหน่วยเส้นใดก็ได้ หลังจากจบบทพิสูจน์อย่างรัดกุม เราก็เสนอการคาดการณ์ลักษณะของแผ่นขนาดเล็กกว่าที่อาจจะปิดทับเส้นโค้งคอนเวกซ์ได้ ทั้งนี้การใช้เทคนิคการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยคอมพิวเตอร์เข้ามาช่วยพิสูจน์ได้ถูกพัฒนาและมีความชัดเจนมากขึ้น อันจะเป็นเครื่องมือสำคัญในการศึกษาด้านนี้ต่อไป จุดนี้เป็นข้อได้เปรียบของเราเพราะผู้เชี่ยวชาญส่วนใหญ่ไม่มีความชำนาญในเรื่องการใช้อัลกอริทึมเชิงตัวเลขเพื่อช่วยหาค่าจีดสุดที่ซับซ้อน

Output ที่ได้จากโครงการ

ผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติ

Wacharin Wichiramala, “A smaller cover for unit conver arcs”, East-West Journal of Mathematics 7 (2006), to appear.

ภาคผนวก

Reprint

กิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับการนำผลจากโครงการไปใช้ประโยชน์

จดหมายตอบรับจากบรรณาธิการของวารสาร

A SMALLER COVER FOR UNIT CONVEX ARCS

WACHARIN WICHIRAMALA*

ABSTRACT. The Moser's worm problem asks for the smallest set on the plane that can cover every unit arc. The smallest cover known is by Norwood and Poole of which the area is 0.260437. An interesting variant of this problem is to find the smallest cover for every unit convex arc. Thirty years ago, Wetzel proved that the isosceles right triangle with unit hypotenuse and area 0.25 is such a cover. Recently, Johnson and Poole found a convex cover of area 0.2466. In this work, we establish a smaller cover of area 0.2464 obtained from clipping the triangle at height .44.

*partially supported by Thai Research Fund Grand no. MRG4780036

MSC codes: 52C15, 52A10

key words: convex cover, convex unit arc, worm problem

1. INTRODUCTION

In 1966, Leo Moser set a well-recognized geometry problem on the plane called the *Moser's worm problem* [Moser]. The problem is to find the smallest set that can cover every unit arc. Naturally we measure a set by its area. The disk of radius $\frac{1}{2}$ is clearly capable of covering all unit arcs. It has area 0.78540. In 1971, Wetzel published the proof by Meir that a semidisk of radius $\frac{1}{2}$, whose area is 0.39270, is also such a cover and added a family of sectorial covers of which the smallest one has area 0.34501 [Wetzel]. He also conjectured that the 30-degree sector of unit radius (area 0.26180) is a cover. Many questions arised concerning necessary conditions of covers for unit arcs. One is to find good lower bounds of the width of these covers. An answer came from the discovery of the unit *broadworm* [Schaer]. It is the unique unit arc with the maximum width of $b_0 = 0.438925$. This leads to a lower bound of the area of convex covers $b_0/2 = 0.21946$ [SW] [CK]. Later, Gerriets found a cover of area 0.3214 composing of a semiellipse and a triangle glued together [G]. Later in 1972, Gerriets and Poole showed that a rhombus of unit major axis (area 0.2887) can cover unit arcs [GP2]. The rhombus can be clipped to get a smaller cover of area 0.28610 [GP3]. In 1989, Norwood, Poole and Laidacker rounded up a corner of the rhombus to get a smaller cover of area 0.27524 [NPL]. Recently, in 2002, Norwood and Poole established the current record with a nonconvex cover of area 0.260437 and also provided a smaller convex cover of area 0.2738086 [NP]. One challenging problem is to prove that the sector conjectured by Wetzel can cover all unit arcs. Currently, it is the smallest convex contender.

One interesting variant of the Moser's worm problem is to find the smallest set that can cover all unit convex arcs. In 1970's, Wetzel noted that an isosceles right triangle T with unit hypotenuse (area 0.25) can cover every unit convex arc [JPW]. He showed that a unit convex arc can be placed inside the triangle T in its "natural standing orientation" as shown in Figure 3.1. In addition, he showed that a smaller cover can be obtained from clipping the right angle of T to give a cover with area approximately 0.2492. At the time he conjectured that the triangle T clipped at the minimum width of b_0 is also a cover. In 2002, Johnson, Poole and Wetzel found a sophisticated way to prune

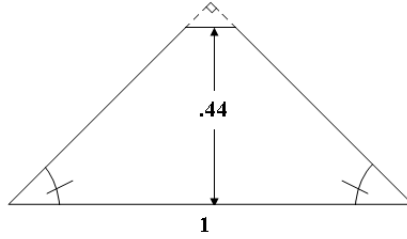


FIGURE 2.1. A smaller cover for unit convex arcs of area 0.2464.

T near its right angle by 2 symmetric parabolas to form a cover with area about 0.2466 [JPW]. Wetzel proved that many other arcs can also be covered by these covers for convex arcs [MWW].

Our proof. Our proof is based on simple comparisons using translations and then numerical minimizations by Mathematica (version 5 or later). The minimizations are called convex programming as we minimize convex functions on convex domains of which the convergences are confirmed theoretically.

Acknowledgements. The author would like to thank John E. Wetzel for his encouragement and generous help. This material is based upon work supported by the National Science Foundation under Grant No. 0200752.

2. THE COVER

Let \bar{T} be the clipped triangle T in Figure 2.1 where its height is $h_0 = 0.44$. The top edge has length $1 - 2h_0$ and each side edge has length $\sqrt{2}h_0$. It has area 0.2464. We will show later that it can cover every unit convex arc.

3. THE PROOF

In the proof of the main theorem, we will use the following 3 lemmas. We state the first lemma without proof.

Lemma 3.1. *On the plane, let l be a line and P and Q be 2 distinct points on the same side of l . Then there is only one point R on l that minimizes the sum of the distances $PR + RQ$. Furthermore, R is the only point for which the segments \overline{PR} and \overline{RQ} make the same angle with l .*

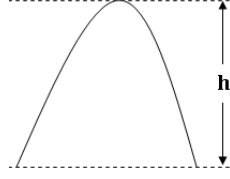
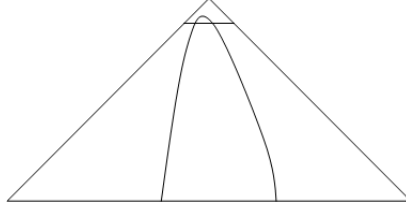
This lemma is also true when P and Q are not on the same side of l . When P and Q are on l , the set of all minimum points are the segment PQ . When P and Q are on opposite sides of l or when either P or Q is on l , the minimum point is the intersection of l and PQ .

At each point on a closed convex arc, there is a tangent line that the arc lies on only one of its sides. In many cases, there are many choices of such lines. When a convex arc is not closed, it has 2 endpoints. Each convex arc is on one side of the line L through its endpoints. Consider the 2 lines through the 2 endpoints perpendicular to L . These 2 lines are parallel. A **drape** [JPW] is a convex arc that stays in between the 2 perpendicular lines. The next lemma tells us that if a convex set can cover every unit drape, then it can cover every unit convex arc.

Lemma 3.2. [JPW] *A unit convex arc can be covered by the convex hull of a unit drape.*

In 1970's, Wetzel proved that

Lemma 3.3. [JPW] *The triangle T can cover every unit convex arc in its standing orientation as shown in Figure 3.2.*

FIGURE 3.1. The height h of a standing convex arc.FIGURE 3.2. The drape γ can be covered by T but cannot be covered by \bar{T} .

Now we are ready to prove the main theorem.

Theorem 3.4. *The clipped triangle \bar{T} is a cover for every unit convex arc.*

Proof. By Lemma 3.2, it suffices to show that \bar{T} can cover every unit drape. Suppose for a contradiction that γ is a unit drape that cannot be covered by \bar{T} . We will show that its length is greater than one. Throughout the proof, we fix the orientation of γ in its standing orientation as illustrated by Figure 3.1. Let h be the height of γ . We will rotate \bar{T} to cover γ . To describe the orientation of \bar{T} , we define \bar{T}_θ to be an isometric copy of \bar{T} after being rotated by angle θ . Furthermore, by “ \bar{T}_θ can cover γ ” we mean that \bar{T}_θ contains a translated copy of γ .

Since T can cover γ in its standing orientation but \bar{T} cannot cover γ , we must have $h > h_0$ (see Figure 3.2). Now we name 5 key points of γ as its head, shoulders and feet as follows. Consider Figure 3.3. Put a support angle of $\frac{\pi}{4}$ on γ . Let L_s be a point where γ touches the left support line and define R_s similarly. Note that in some case there are more than one choice of L_s . Let H , L_f and R_f be the top, the left and the right ends of γ . Note that we may have $H = L_s$, $H = R_s$, $L_s = L_f$ or $R_s = R_f$, but it is clear that $H \neq L_f$ and $H \neq R_f$. First we place γ in $\bar{T}_{\frac{11}{8}\pi}$ as illustrated in Figure 3.4. Next we see that $R_f \notin \bar{T}_{\frac{11}{8}\pi}$. For if this is not the case, then $L_f \notin \bar{T}_{\frac{11}{8}\pi}$, which implies that L_f is lower than R_f , a contradiction. It follows that $L_f \notin \bar{T}_{\frac{5}{8}\pi}$. Let R be the rhombus with side length $\sqrt{2}h_0$ and angle $\frac{\pi}{4}$ and place γ in R as shown in Figure 3.5. Hence R has width $w = 2\sqrt{2}h_0 \sin \frac{\pi}{8}$ (from left to right.) We will divide into cases according to whether $L_f, R_f \in R$. We will show that the length of γ is greater than 1 in every case.

CASE $L_f, R_f \notin R$ and $L_f R_f \geq w$.

According to a simple direct comparison using 2 translations as in Figure 3.6, we have $1 \geq L_f H + H R_f \geq 2\sqrt{h_0^2 + (\frac{w}{2})^2} = 2h_0\sqrt{1 + 2\sin^2 \frac{\pi}{8}} > 1.0006$, a contradiction.

CASE $L_f, R_f \notin R$ and $L_f R_f < w$.

According to a simple direct comparison using 2 translations as in Figure 3.7, we have $1 \geq \min\{d(x_{l1}, y_{l1}, x_{l2}, y_{l2}, x_H, y_H, x_{r2}, y_{r2}, x_{r1}, y_{r1}) \mid y_{l1} = y_{l2}, (x_{l1}, y_{l1}) \in l_1, (x_{l2}, y_{l2}) \in l_2, y_H \geq y_{l1} + h_0, (x_{r2}, y_{r2}) \in r_2 \text{ and } (x_{r1}, y_{r1}) \in r_1\} = \min\{2d(x_{l1}, y_{l1}, x_{l2}, y_{l2}, 0, y_{l1} + h_0) \mid (x_{l1}, y_{l1}) \in l_1, (x_{l2}, y_{l2}) \in l_2\}$ where $d(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = d(x_1, y_1, \dots, x_{n-1}, y_{n-1}) + d(x_{n-1}, y_{n-1}, x_n, y_n)$,

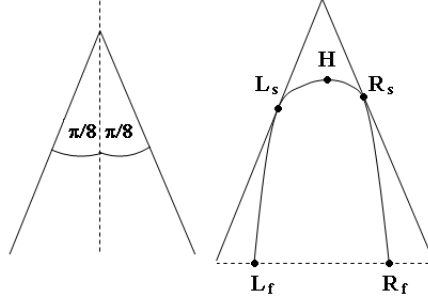


FIGURE 3.3. After putting the drape γ in a corner of angle $\frac{\pi}{4}$, we name 5 key points.

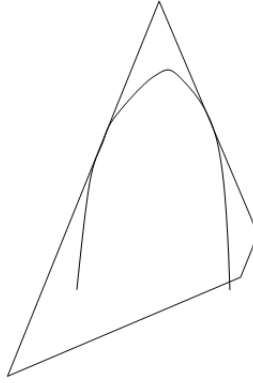


FIGURE 3.4. The drape γ is placed in $\overline{T}_{\frac{11}{8}\pi}$.

$d(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ and l_1, l_2, r_1, r_2 are sides on R . The length of the last 4-segment arc is convex on free variables x_{l_2} and y_{l_1} that form convex domain. Hence numerical minimization by Mathematica can get closely enough to the minimum. The length of the last 4-segment arc is clearly smooth on y_{l_1} as illustrated in Figure 3.8, where the variable $y_{l_1} \in [-\sqrt{2}h_0 \sin \frac{7}{8}\pi, 0]$, and the minimum is 1.00004, a contradiction.

CASE $R_f \in R$ (or $L_f \in R$).

By the previous case, we have $R_f \notin \overline{T}_{\frac{11}{8}\pi}$. According to a simple direct comparison as in Figure 3.9, we have $1 \geq \min\{y_{l_2} - y + d(x_{l_2}, y_{l_2}, x_H, y_H, x_{r_2}, y_{r_2}) + y_{r_2} - y \mid (x_{l_2}, y_{l_2}) \in l_2, y_H \geq y + h_0 \text{ and } (x_{r_2}, y_{r_2}) \in r_2\} = \min\{2(y_{l_2} - y + d(x_{l_2}, y_{l_2}, 0, y + h_0)) \mid (x_{l_2}, y_{l_2}) \in l_2\}$. The length of the last 4-segment arc is convex on free variables x_{l_2} and y that form convex domain. Hence numerical minimization by Mathematica can get closely enough to the minimum. The length of the last 4-segment arc is clearly smooth on y as illustrated in Figure 3.10, where the variable $y \in [-\sqrt{2}h_0 \sin \frac{7}{8}\pi, -(1 - 2h_0) \sin \frac{7}{8}\pi]$, and the minimum is 1.02396, a contradiction.

In any case, we found a contradiction. Therefore γ can be covered by \overline{T} . \square

We can see that h_0 can be lowered a little bit as long as the minimum length in the second case, currently 1.00004, is still greater than 1.

We conjecture that the clipped triangle in Figure 3.11 can cover every unit convex arc. It has no symmetry and has area 0.23982 which is close to the lower bound 0.21946. A similar cover was conjectured earlier in [JPW]; see Figure 9(b).

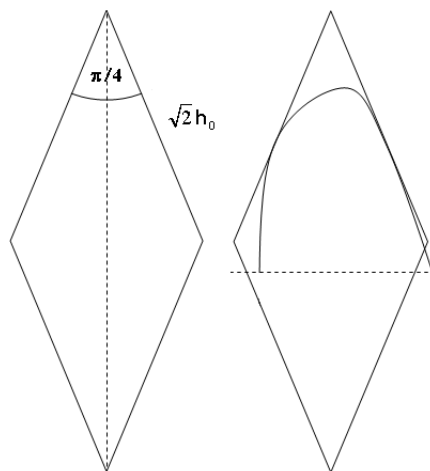


FIGURE 3.5. The rhombus R with side length $\sqrt{2}h_0$ and angle $\frac{\pi}{4}$.

4. MATHEMATICA CODE AND OUTPUT

In Figure 4.1, it shows the mathematica code for calculations of the 3 cases. It runs in Mathematica version 5 or later as it heavily uses the command “Minimize”.

REFERENCES

- [CK] G. D. Chakerian and M. S. Klamkin, “Minimal covers for closed curves”, *Math. Mag.* 46(1973), 55–61.
- [G] J. Gerriets, “An improved solution to Moser’s worm problem”, Unpublished. 1972.
- [GP] J. Gerriets and G. Poole, “Covers accommodating curves of constant length”, Unpublished solution.
- [GP2] J. Gerriets and G. Poole, “Minimum covers for arcs of constant length”, *Bull. Amer. Math. Soc.* 79(1973), 462–463.
- [GP3] J. Gerriets and G. Poole, “Convex regions which cover arcs of constant length”, *Amer. Math. Monthly* 81(1974), 36–41.
- [JPW] J. Johnson, G. Poole and J. E. Wetzel, “A small cover for convex unit arcs”, *Discrete Comput. Geom.* 32(2004), 141–147.
- [Moser] L. Moser, “Poorly formulated unsolved problems of combinatorial geometry” Mimeographed. 1966.
- [MWW] J. M. Maki, J. E. Wetzel, W. Wichiramala, “Drapeability”, *Discrete Comput. Geom.* 33(2005), xxx–yyy.
- [NP] R. Norwood and G. Poole, “An improved upper bound for Leo Moser’s worm problem”, *Discrete Comput. Geom.* 29(2003), 409–417.
- [NPL] R. Norwood, G. Poole and M. Laidacker, “The worm problem of Leo Moser”, *Discrete Comput. Geom.* 7(1992), 153–162.
- [Schaer] J. Schaer, “The broadest curve of length 1”, Research paper 52, University of Calgary, 1968.
- [SW] J. Shaer and J. E. Wetzel, “Boxes for curves of constant length”, *Israel J. Math.* 12(1972), 257–265.
- [Wetzel] J. E. Wetzel, “Sectorial covers for curves of constant length”, *Canad. Math. Bull.* 16(1973), 367–376.
- [Wichiramala] W. Wichiramala, “A smaller cover for unit convex arcs”, Geometric Potpourri Seminar, University of Illinois at Urbana-Champaign, March 18, 2003.

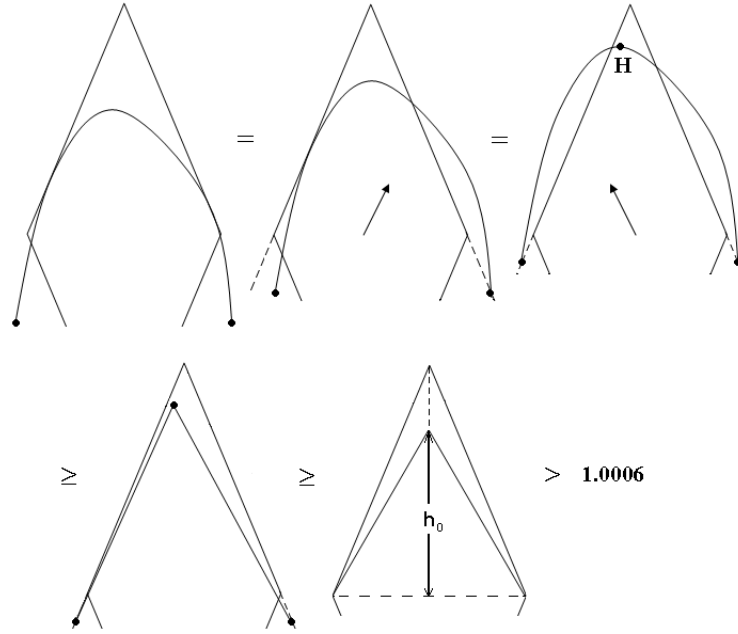


FIGURE 3.6. Comparison of length of the arcs when $L_f, R_f \notin R$ and $L_f R_f \geq w$.

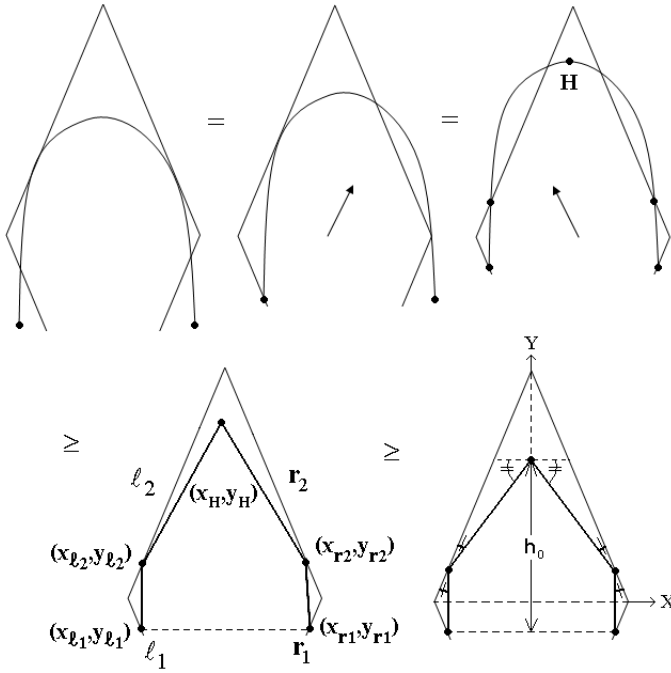


FIGURE 3.7. Comparison of length of the arcs when $L_f, R_f \notin R$ and $L_f R_f < w$.

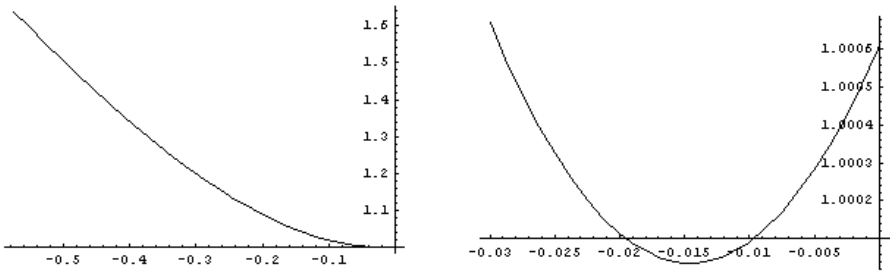


FIGURE 3.8. The graph of the minimum length of the last arc in the previous figure.

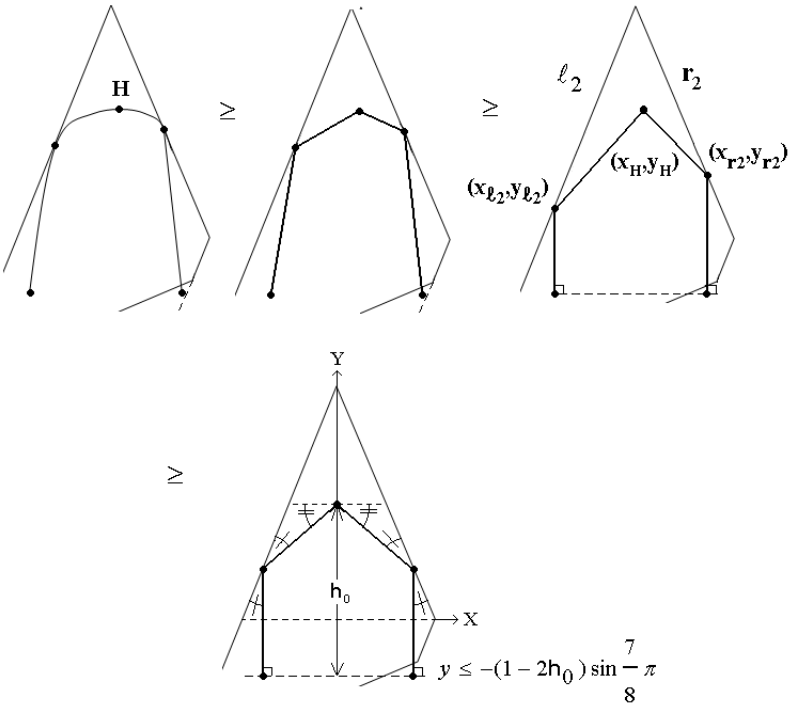


FIGURE 3.9. Comparison of length of the arcs when $R_f \in R$.

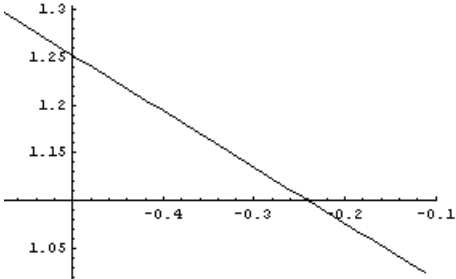


FIGURE 3.10. The graph of the minimum length of the last arc in the previous figure.

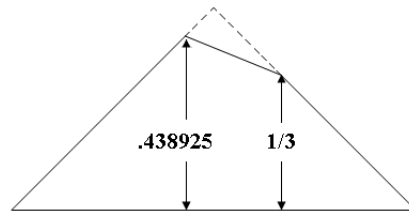


FIGURE 3.11. A clipped triangle that might cover every unit convex arc.

```

In[1]:= h0 = .44;  $\theta = \frac{\pi}{8}$ ;

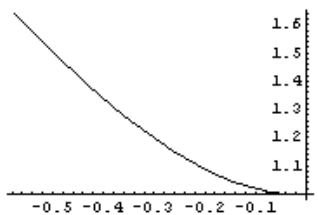
s = Sin[ $\theta$ ]; c = Cos[ $\theta$ ]; tan = Tan[ $\theta$ ]; cot = Cot[ $\theta$ ]; w2 =  $\sqrt{2}$  h0 s;
x11 = -tan y11 - w2; p11 = {x11, y11};
y12 = cot (x12 + w2); p12 = {x12, y12};
d[p1_, p2_] :=  $\sqrt{(p1[[1]] - p2[[1]])^2 + (p1[[2]] - p2[[2]])^2}$ ;
d2[p1_, p2_, p3_] := d[p1, p2] + d[p2, p3];

In[7]:= (***** calculation 1 *****)
2  $\sqrt{h0^2 + w2^2}$ 

Out[7]= 1.00061

In[8]:= (***** calculation 2 *****)
Plot[Minimize[2 d2[p11, p12, {0, y11 + h0}], x12][[1]], {y11, - $\sqrt{2}$  h0 c, 0}];

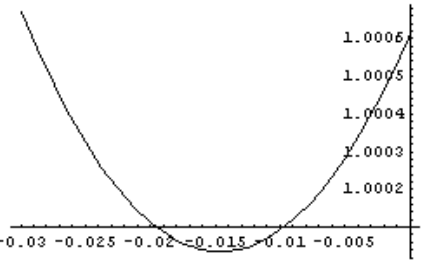
```



```

In[9]:= Plot[Minimize[2 d2[p11, p12, {0, y11 + h0}], x12][[1]], {y11, -.03, 0}];

```



```

In[10]:= Minimize[2 d2[p11, p12, {0, y11 + h0}], {y11, x12}]

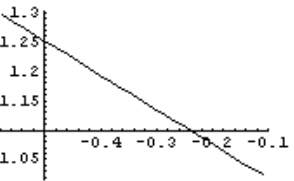
Out[10]= {1.00004, {x12  $\rightarrow$  -0.211418, y11  $\rightarrow$  -0.0146073}}

In[11]:= (***** calculation 3 *****)
-(1 - 2 h0) c

Out[11]= -0.110866

In[12]:= Plot[Minimize[2 (Abs[y12 - y] + d[p12, {0, y + h0}]), x12][[1]], {y, - $\sqrt{2}$  h0 c, -(1 - 2 h0) c}];

```



```

In[13]:= Minimize[2 (Abs[y12 - y] + d[p12, {0, y + h0}]), y < -(1 - 2 h0) c, {y, x12}]

Out[13]= {1.02396, {x12  $\rightarrow$  -0.173774, y  $\rightarrow$  -0.110866}}

```

FIGURE 4.1. Mathematica code for calculations of the 3 cases.

กิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับการนำผลจากโครงการไปใช้ประโยชน์

กิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับการนำผลไปใช้จะเป็นการนำไปประยุกต์ใช้ในวิถีทางของคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ กล่าวคือ ยังไม่มีการประยุกต์ใช้เป็นรูปธรรม ผลงานที่จะนำแผ่นปิดทับนี้ไปใช้เพื่อเพิ่มความเข้าใจการปิดทับเส้นโค้งใดๆ คือผลงานร่วมของข้าพเจ้ากับ prof. John E. Wetzel และ John M. Maki นักศึกษา ทั้งสองอยู่ที่ University of Illinois at Urbana-Champaign ในบทความ “Drapeability”, Discrete and Computational Geometry 34(4) 2005, 637-657 นอกจากนี้กระบวนการในการแปลงปัญหาเป็นการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อหาค่าสุดขั้วนั้นได้รับการพัฒนาและทำความเข้าใจมากขึ้น เพื่อไปประยุกต์กับการแก้ปัญหาในลักษณะใกล้เคียง