



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ: ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนในโดเมนที่มี
รูปทรงซับซ้อน

**A Finite Volume Method for Turbulent Flow in Complex
Configuration Domains**

โดย ผศ.ดร. สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์

30 มิถุนายน 2549

สัญญาเลขที่ MRG4780188

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ: ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนในโดเมนที่มีรูปทรง
ซับซ้อน

A Finite Volume Method for Turbulent Flow in Complex Configuration
Domains

ผศ.ดร. สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนวิจัยและสำนักงานคณะกรรมการอุดมศึกษา

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกว.และสกอ. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

บทคัดย่อ

รหัสโครงการ: MRG4780188
ชื่อโครงการ: ระเบียบวิธีไฟในดัวลุ่มสำหรับการไหลแบบปั่นป่วนในโดเมนที่มีรูปทรงซับซ้อน
ชื่อนักวิจัย: ผศ.ดร. สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
E-mail Address: sompong.p@eng.chula.ac.th
ระยะเวลาโครงการ: 2 ปี (1 กรกฎาคม 2547 ถึง 30 มิถุนายน 2549)

งานวิจัยนี้มีจุดประสงค์ในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นมาเพื่อใช้ในการคำนวณการไหลและการถ่ายเทความร้อนในโดเมนที่มีลักษณะซับซ้อน สำหรับหัวข้อวิจัยทางด้านพลศาสตร์ของไหลในระดับสูง ซึ่งระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในที่นี้ คือ ระเบียบวิธีไฟในดัวลุ่ม โดยกระทำการคำนวณบนพิกัดกระชับขอบเขตด้วยกริดแบบเยื้องกัน โดยใช้ตัวประกอบความเร็วแบบคาร์ทีเซียนเป็นตัวแปรตาม ซึ่งในการประมาณค่าของพจน์การพาหนะของปริมาตรควบคุมนั้น สามารถเลือกใช้ขั้นตอนเชิงตัวเลขได้หลายวิธี ทั้งแบบ first order และ second order เช่น hybrid, power-law, QUICK หรือ SOU เป็นต้น สำหรับการแก้ไขความเร็วและความดันที่คำนวณได้ให้มีความสอดคล้องกับสมการความต่อเนื่อง ใช้ขั้นตอนวิธี SIMPLE และแบบจำลองที่เลือกใช้ในกรณีของการไหลแบบปั่นป่วน คือแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$, $k-\omega$ และ $k-\varepsilon-\gamma$

เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมา ได้มีการตรวจสอบผลการคำนวณของโปรแกรมอย่างเป็นขั้นตอน กับปัญหาการนำความร้อน การไหลแบบราบเรียบและแบบปั่นป่วนง่าย ๆ หลายกรณี เช่น การนำความร้อนในแผ่นรูปทรงต่างๆ การไหลผ่าน gradual-expansion channel การไหลผ่านทรงกระบอกกลมที่มีความร้อน และการไหลผ่าน inclined backward facing step เป็นต้น ซึ่งการตรวจสอบจะทำโดยเปรียบเทียบผลการคำนวณกับผลเฉลยแม่นยำตรง ผลการทดลอง หรือผลการคำนวณที่ได้มีผู้ทำมาแล้ว

จากผลการตรวจสอบ พบว่าการคำนวณที่ได้มีความสอดคล้องกันดีกับผลเฉลยแม่นยำตรง หรือผลการทดลองที่นำมาเปรียบเทียบ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้มีความถูกต้องอยู่ในระดับที่น่าพอใจ และในส่วนของแบบจำลองความปั่นป่วนพบว่าแบบจำลอง $k-\omega$ และ $k-\varepsilon-\gamma$ สามารถทำนายปรากฏการณ์ไหลที่ซับซ้อนได้แม่นยำกว่าแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$

คำหลัก: ระเบียบวิธีไฟในดัวลุ่ม แบบจำลองความปั่นป่วน พิกัดกระชับขอบเขต

Abstract

Project Code: MRG4780188
Project Title: A Finite Volume Method for Turbulent Flow in Complex Configuration Domains
Investigator: Asst.Prof. Sompong Putivisutisak, Ph.D.
Dept. of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering
Chulalongkorn University
E-mail Address: sompong.p@eng.chula.ac.th
Project Period: 2 years (1 July 2004 - 30 June 2006)

The aim of the present work is to develop a computer code for calculating fluid flow and heat transfer in complex domains for research in the area of advanced Computational Fluid Dynamics. The numerical method used here is a finite volume method. The computation is based on a body-fitted coordinate system on a staggered grid with Cartesian velocity components as dependent variables. Several first and second order numerical schemes are employed in evaluation of the convection term at the control volume's interfaces, for example, hybrid, power-law, QUICK and SOU schemes. To satisfy the continuity equation, the pressure and flow field are corrected with SIMPLE algorithm. For turbulent flows, the standard $k-\varepsilon$, $k-\omega$ and $k-\varepsilon-\gamma$ models are used in calculation.

The computer code is carefully validated, step by step, with simple problems of heat conduction, laminar and turbulent flows, such as heat conduction through different configurations, flow through a gradual-expansion channel, heat transfer and flow over a circular cylinder and flow past inclined backward facing step etc. The results are compared, where possible, with exact solutions, experimental data or similar numerical computations available in the literature.

It is found that the numerical results are in good agreement with those solutions or data, which proves that the present computer code is adequate for calculation of such simple flows. In the case of turbulence models, it can be shown that the $k-\omega$ and $k-\varepsilon-\gamma$ perform better than the standard $k-\varepsilon$ in predicting complicated flow phenomena.

Keywords: Finite volume method, Turbulence models, Body-fitted coordinates

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. ปราโมทย์ เดชะอำไพ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่กรุณาทำหน้าที่เป็นนักวิจัยที่ปรึกษา ให้คำแนะนำและช่วยเหลือเป็นอย่างดีเสมอมา

ขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.ชญานุช แสงวิเชียร ภาควิชาวิศวกรรมเคมี คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ที่ช่วยเหลือในการจัดทำรูปเล่มรายงาน

ขอขอบคุณ คุณกิตติศักดิ์ คู่วัฒนคุณ คุณคมกฤษณ์ ชัยโย และคุณจุฑาทิพย์ ปรมีศนาภรณ์ ผู้ช่วยวิจัยที่มีส่วนช่วยในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในงานวิจัยนี้

ท้ายสุดนี้ขอขอบพระคุณ สำนักงานกองทุนสนับสนุนงานวิจัย (สกว.) และสำนักงานคณะกรรมการอุดมศึกษา (สกอ.) ที่ได้ให้ความสนับสนุนด้านงบประมาณและแนวทางที่เป็นประโยชน์ในการทำงานวิจัย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	(1)
Abstract	(2)
กิตติกรรมประกาศ	(3)
สารบัญ	(4)
สารบัญตาราง	(7)
สารบัญรูป	(8)
รายการสัญลักษณ์	(14)
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและที่มา	1
1.2 วัตถุประสงค์	3
1.3 ขอบเขตของการวิจัย	3
บทที่ 2 การสร้างกริดที่ใช้ในการคำนวณ	4
2.1 ประเภทของการสร้างกริด	4
2.2 คุณลักษณะของกริดที่เหมาะสม	7
2.3 การสร้างกริดด้วยวิธีเชิงพีชคณิต	10
2.4 การสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก	13
2.4.1 ฟังก์ชันควบคุม	18
2.4.2 การแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต	20
บทที่ 3 ทฤษฎีการคำนวณ	23
3.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มบนพิกัดกระชับขอบเขต	23
3.1.1 การแปลงพิกัด	24
3.1.2 สัมประสิทธิ์ของรูปร่างและตัวประกอบของความเร็ว	27
	(4)

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.1.3 สมการครอบคลุมสำหรับการแก้ปัญหาคาร์ไหล.....	29
3.1.4 ขั้นตอนการคำนวณ.....	31
3.2 แบบจำลองความปั่นป่วน.....	32
3.2.1 แบบจำลอง standard $k-\varepsilon$	33
3.2.2 แบบจำลอง $k-\omega$	37
3.2.3 แบบจำลอง $k-\varepsilon-\gamma$	41
 บทที่ 4 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์.....	 46
4.1 ปัญหาการนำความร้อน.....	46
4.1.1 การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน.....	47
4.1.2 การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์กลาง.....	51
4.1.3 การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีวงกลมอยู่ข้างใน.....	55
4.1.4 การนำความร้อนในแผ่นสามเหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อนภายใน.....	60
4.2 ปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อน.....	63
4.2.1 การไหลแบบราบเรียบผ่าน gradual-expansion channel.....	63
4.2.2 การถ่ายเทความร้อนของการไหลแบบราบเรียบผ่านทรงกระบอกกลม.....	66
4.2.3 การไหลแบบปั่นป่วนผ่าน inclined backward facing step.....	75
 บทที่ 5 กรณีทดสอบสำหรับแบบจำลองความปั่นป่วน.....	 83
5.1 การไหลและการถ่ายเทความร้อนแบบปั่นป่วนผ่านช่องทางไหลผนังเรียบโดยใช้แบบจำลอง $k-\omega$	83
5.2 การไหลและการถ่ายเทความร้อนแบบปั่นป่วนผ่าน backward facing step โดยใช้แบบจำลอง $k-\omega$	88
5.3 การไหลแบบปั่นป่วนผ่านแผ่นเรียบโดยใช้แบบจำลอง $k-\varepsilon-\gamma$	95
5.4 การไหลแบบปั่นป่วนในท่อโดยใช้แบบจำลอง $k-\varepsilon-\gamma$	100

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 6 สรุปผล.....	105
เอกสารอ้างอิง.....	108
Output ที่ได้จากงานวิจัย.....	114

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 2.1 สัมประสิทธิ์ที่ใช้ในฟังก์ชันควมคุม P_i	20
ตารางที่ 4.1 คำนวณเชลล์นัมเบอร์เฉลี่ยและค่า drag coefficient สำหรับกริดที่มีขนาด ต่างกัน	68
ตารางที่ 4.2 ช่วงของเรย์โนลด์นัมเบอร์ที่ใช้ในการคำนวณที่มีผู้ทำมาก่อนเปรียบเทียบกับช่วงที่ใช้ในการคำนวณปัจจุบัน.....	73
ตารางที่ 4.3 ค่าคงที่ในสมการ empirical correlation ของ Hilpert (1933).....	74

สารบัญรูป

	หน้า
รูปที่ 2.1 การสร้างกริดแบบ structured.....	5
รูปที่ 2.2 การสร้างกริดแบบ unstructured.....	5
รูปที่ 2.3 ตัวอย่างกริดที่ได้จากการแก้สมการลาปลาซของ stream function (ψ) และ velocity potential function (ϕ).....	7
รูปที่ 2.4 ระยะ Δx บนปริมาตรควบคุมแบบสองมิติ.....	8
รูปที่ 2.5 ความคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าในช่วงโดยการถ่วงน้ำหนักเชิงเส้นใน กริดที่มีความโค้งมาก.....	9
รูปที่ 2.6 ตำแหน่งของจุดภายในโดเมน.....	10
รูปที่ 2.7 ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์แบบเชิงเส้น.....	12
รูปที่ 2.8 ลักษณะของกริดที่สร้างจากสมการครอบคลุมที่เป็น (ก) สมการลาปลาซ (ข) สมการปัวส์ซอง.....	14
รูปที่ 2.9 กริดในบริเวณที่เป็นส่วนโค้ง (ก) โค้งคว่ำ (ข) โค้งหงาย.....	14
รูปที่ 2.10 การใช้ฟังก์ชันควบคุมในการ (ก) ดึงเส้น (ข) ดึงจุด.....	20
รูปที่ 3.1 พื้นที่บนพิคตที่ใช้ในการคำนวณ (ก) พื้นที่ทางกายภาพ (physical space) (ข) พื้นที่การคำนวณ (computational space).....	24
รูปที่ 3.2 ทิศทางและขนาดของตัวประกอบความเร็วแบบต่างๆ ใน 2 มิติ.....	28
รูปที่ 3.3 การกระจายตัวของ intermittency factor และปริมาณค่าต่าง ๆ ใน self- similar mixing layer (Pope, 2000).....	42
รูปที่ 4.1 แผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน (ก) แผ่นเต็ม (ข) $\frac{1}{4}$ ของแผ่น.....	47
รูปที่ 4.2 กริดที่สร้างโดยใช้วิธี TFI บนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมี ศูนย์กลางร่วมกัน.....	48
รูปที่ 4.3 กริดที่สร้างโดยการแก้สมการอิลิปติกบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อน กันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน.....	49
รูปที่ 4.4 การกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดขนาด 4x3, 8x4, 18x8 และ 35x15.....	50

สารบัญรูป (ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 4.5 การกระจายของอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบ มีศูนย์กลางร่วมกัน.....	50
รูปที่ 4.6 การเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิในแนวรัศมี r ระหว่างผลลัพธ์จากการ คำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มกับผลเฉลยแม่นยำ.....	51
รูปที่ 4.7 แผ่นที่มีลักษณะเป็นวงกลมสองวงซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์กลาง (ก) แผ่นเต็ม (ข) $\frac{1}{2}$ ของแผ่น.....	52
รูปที่ 4.8 กริดที่สร้างโดยใช้วิธี TFI บนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบ เยื้องศูนย์กลาง.....	53
รูปที่ 4.9 กริดที่สร้างโดยการแก้สมการอิลิปติกบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์กลาง.....	53
รูปที่ 4.10 การกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดขนาด 25x10, 50x20 และ 100x40.....	54
รูปที่ 4.11 การกระจายของอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบ เยื้องศูนย์กลาง.....	54
รูปที่ 4.12 แผ่นสี่เหลี่ยมมีวงกลมตรงกลาง (ก) แผ่นเต็ม (ข) $\frac{1}{4}$ ของแผ่น.....	55
รูปที่ 4.13 กริดที่สร้างโดยใช้วิธี TFI สำหรับโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมมี วงกลมตรงกลาง.....	56
รูปที่ 4.14 กริดที่ปรับโดยวิธีแก้สมการลาปลาซบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมมี วงกลมตรงกลาง.....	57
รูปที่ 4.15 กริดที่ปรับโดยวิธีแก้สมการปัวซองบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมมี วงกลมตรงกลาง.....	57
รูปที่ 4.16 การเปรียบเทียบเส้นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดที่สร้าง จากสมการลาปลาซและสมการปัวซอง.....	58
รูปที่ 4.17 การกระจายของอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดขนาด 18x8, 67x28 และ 100x42.....	59

สารบัญรูป (ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 4.18 การกระจายของอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมมีวงกลมตรงกลาง.....	59
รูปที่ 4.19 แผ่นสามเหลี่ยมด้านเท่าสูง 1 หน่วย.....	60
รูปที่ 4.20 กริดที่สร้างโดยใช้วิธี TFI บนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสามเหลี่ยม.....	61
รูปที่ 4.21 กริดที่สร้างโดยการแก้สมการอิลลิปติกบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสามเหลี่ยม.....	61
รูปที่ 4.22 การกระจายของอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสามเหลี่ยม.....	62
รูปที่ 4.23 การเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิระหว่างผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มโดยใช้กริดขนาด 20x20 กับผลเฉลยแม่นยำตรง ที่ตำแหน่ง $x = 1/\sqrt{3}$	63
รูปที่ 4.24 รูปร่างของ gradual-expansion channel.....	64
รูปที่ 4.25 กริดขนาด 32x32 สำหรับการไหลผ่าน gradual-expansion channel ที่ $Re = 10$	64
รูปที่ 4.26 กริดขนาด 32x32 สำหรับการไหลผ่าน gradual-expansion channel ที่ $Re = 100$ (not to scale).....	64
รูปที่ 4.27 การกระจายของความดันที่ผนังด้านบนของช่องทางไหล ที่ $Re = 10$	65
รูปที่ 4.28 การกระจายของความดันที่ผนังด้านบนของช่องทางไหล ที่ $Re = 100$	65
รูปที่ 4.29 รูปร่างและขนาดของโดเมนการไหลผ่านทรงกระบอกกลม.....	67
รูปที่ 4.30 เงื่อนไขขอบของโดเมนการคำนวณสำหรับการไหลผ่านทรงกระบอกกลม.....	67
รูปที่ 4.31 กริดขนาด 50x18 สำหรับการไหลผ่านทรงกระบอกกลม (not to scale).....	68
รูปที่ 4.32 การกระจายของความดันบนผิวของทรงกระบอก.....	69
รูปที่ 4.33 การกระจายของความดันบนผิวของทรงกระบอกสำหรับการไหลที่ $Re = 40$ และ $Re = 100$ โดยเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Fornberg (1980).....	69
รูปที่ 4.34 บริเวณปิดของ streamlines ด้านหลังทรงกระบอก.....	71
รูปที่ 4.35 ความยาวบริเวณปิดของ streamlines ด้านหลังทรงกระบอกเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Taneda (1956).....	71
รูปที่ 4.36 ค่า drag force ที่กระทำบนผิวทรงกระบอก.....	73

สารบัญรูป (ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 4.37 การกระจายค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านเบอร์รอบทรงกระบอกที่ $Re = 28.1$	74
รูปที่ 4.38 ค่าสัมประสิทธิ์แรงต้านเบอร์รอสี่เหลี่ยมเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จาก empirical correlation	75
รูปที่ 4.39 รูปร่างและมิติของโดเมนการไหลภายในช่องทางไหลแบบ inclined backward facing step.....	76
รูปที่ 4.40 กริดขนาด 30x20 ที่ใช้ในการคำนวณการไหลภายในช่องทางไหลแบบ inclined backward facing step.....	77
รูปที่ 4.41 โพรไฟล์ความเร็วที่ตำแหน่งต่างๆของการไหลผ่าน inclined backward facing step.....	78 -79
รูปที่ 4.42 ความเค้นเฉือนบนผนังด้านล่าง (ด้านที่มี step) ของช่องทางไหลแบบ inclined backward facing step.....	80
รูปที่ 4.43 ความเค้นเฉือนบนผนังด้านบน (ด้านตรงข้าม step) ของช่องทางไหลแบบ inclined backward facing step.....	80
รูปที่ 4.44 ความดันบนผนังด้านล่าง (ด้านที่มี step) ของช่องทางไหลแบบ inclined backward facing step.....	81
รูปที่ 4.45 ความดันบนผนังด้านบน (ด้านตรงข้าม step) ของช่องทางไหลแบบ inclined backward facing step.....	81
รูปที่ 5.1 ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านช่องทางไหลผนังเรียบ.....	84
รูปที่ 5.2 ลักษณะของกริดแบบสม่ำเสมอที่ใช้สำหรับปัญหาการไหลผ่านช่องทางไหลผนังเรียบ (not to scale).....	84
รูปที่ 5.3 ความเร็ว u/U_0 ที่ตำแหน่งทางออกซึ่งได้จากการคำนวณด้วยแบบจำลองความปั่นป่วน standard $k - \varepsilon$ สำหรับ $Re_H = 13750$	85
รูปที่ 5.4 ความเร็ว u/U_0 ที่ตำแหน่งทางออกซึ่งได้จากการคำนวณด้วยแบบจำลองความปั่นป่วน $k - \omega$ สำหรับ $Re_H = 13750$	85
รูปที่ 5.5 ความเร็ว u/U_0 ที่ตำแหน่งทางออกซึ่งได้จากการจำลองการไหลเปรียบเทียบกับผลการคำนวณด้วยวิธี DNS สำหรับ $Re_H = 13750$	86
รูปที่ 5.6 ลักษณะของปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนผ่านช่องทางไหลผนังเรียบ	87

สารบัญรูป (ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 5.7 ความเร็ว u/U_0 ที่ตำแหน่งทางออก สำหรับ $Re = 20000$	87
รูปที่ 5.8 คำนวณเชลล์นัมเบอร์เฉลี่ยที่เรย์โนลด์นัมเบอร์ต่างๆ สำหรับ $q'' = 1000 \text{ W/m}^2$	88
รูปที่ 5.9 ลักษณะของปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนผ่าน backward facing step	89
รูปที่ 5.10 รูปแบบกริดที่ใช้ในการจำลองการไหลผ่าน backward facing step สำหรับ $Re_h = 5540$ (not to scale)	90
รูปที่ 5.11 ความเร็ว u/U_{ref} ที่ได้จากผลการจำลองการไหลผ่าน backward facing step เปรียบเทียบกับผลจากวิธี DNS สำหรับ $Re_h = 5540$ ที่ x/h ต่างๆ กัน	91
รูปที่ 5.12 ความเร็ว v/U_{ref} ที่ได้จากผลการจำลองการไหลผ่าน backward facing step เปรียบเทียบกับผลจากวิธี DNS สำหรับ $Re_h = 5540$ ที่ x/h ต่างๆ กัน	91
รูปที่ 5.13 เวกเตอร์ความเร็วของการไหลผ่าน backward facing step สำหรับ $Re_h = 5540$	92
รูปที่ 5.14 เส้น streamlines ของการไหลผ่าน backward facing step สำหรับ $Re_h = 5540$	92
รูปที่ 5.15 รายละเอียดของเวกเตอร์ความเร็วและ streamlines บริเวณที่เกิดการหมุนวน สำหรับ $Re_h = 5540$	92
รูปที่ 5.16 ค่าสแตนด์นัมเบอร์หลังการไหลผ่าน backward facing step ที่ x/h ต่างๆ กัน	94
รูปที่ 5.17 การกระจายอุณหภูมิไว้มิติที่ x/h ต่างๆ กัน	94
รูปที่ 5.18 ลักษณะของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนผ่านแผ่นเรียบ	95
รูปที่ 5.19 เงื่อนไขขอบและกริดที่ใช้ในการคำนวณ (ขนาด 102×202) สำหรับการไหล แบบปั่นป่วนผ่านแผ่นเรียบ (not to scale)	96
รูปที่ 5.20 การกระจายตัวของความเร็ว u^+ ในชั้นขอบที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 2600$ ที่ได้จาก การใช้อำนาจกริดที่แตกต่างกันสามขนาด	96
รูปที่ 5.21 ลักษณะการกระจายตัวของ intermittency factor ที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 2600$	97
รูปที่ 5.22 ลักษณะการกระจายตัวของ turbulent kinetic energy ที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 2600$	97

สารบัญรูป (ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 5.23 การกระจายตัวของความเร็ว u^+ ในชั้นขอบที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 8000$ ที่ได้จากการใช้จำนวนกริดที่แตกต่างกันสามขนาด	98
รูปที่ 5.24 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว u^+ ในชั้นขอบที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 8000$	99
รูปที่ 5.25 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วภายในชั้นขอบที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 8000$	99
รูปที่ 5.26 ลักษณะการกระจายตัวของ intermittency factor ที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 8000$..	100
รูปที่ 5.27 ลักษณะของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อ	101
รูปที่ 5.28 เงื่อนไขขอบและกริดขนาด 32×22 ที่ใช้สำหรับปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อ สำหรับการไหลที่ $Re = 4.0 \times 10^3$ (not to scale)	101
รูปที่ 5.29 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วที่ตำแหน่ง $x = 4.572 \text{ m}$ ($30D$) กรณิ $Re = 4.0 \times 10^3$	102
รูปที่ 5.30 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วที่ตำแหน่ง $x = 4.572 \text{ m}$ ($30D$) กรณิ $Re = 1.5 \times 10^5$	103
รูปที่ 5.31 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วที่ตำแหน่ง $x = 4.572 \text{ m}$ ($30D$) กรณิ $Re = 3.2 \times 10^6$	103
รูปที่ 5.32 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วไร้มิติในชั้นขอบของท่อที่ตำแหน่ง $x = 4.572 \text{ m}$ ($30D$) กรณิ $Re = 4.0 \times 10^4$	104

รายการสัญลักษณ์

a	ค่าคงที่, สัมประสิทธิ์ในสมการพีชคณิต
A	พื้นที่
B	source term
b	พจน์ไม่ตั้งฉากในสมการพีชคณิต
C	ค่าคงที่ของแบบจำลองความปั่นป่วน
C_d	drag coefficient
C_p	ความจุความร้อนจำเพาะ
C_p	สัมประสิทธิ์ความดันไร้มิติ
D, d	ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม
D_H	hydraulic diameter
D_p, D_f	pressure drag, friction drag
$\bar{e}_{(i)}, \bar{e}^{(i)}$	covariant และ contravariant basis vectors
$\bar{e}_i, \bar{e}^i$	unit vector ของ covariant และ contravariant basis vectors
F_D	drag force
f_N	ค่า Probability Density Function (PDF) ของตัวแปรสเกลาร์ ϕ บริเวณที่การไหลไม่เป็นแบบปั่นป่วน
f_T	ค่า Probability Density Function (PDF) ของตัวแปรสเกลาร์ ϕ บริเวณที่การไหลเป็นแบบปั่นป่วน
f_μ, f_1, f_2	damping function
H	ความสูง
h	ความสูง, เอนทัลปี
I	ค่ามากที่สุดของ ξ
J	ค่ามากที่สุดของ η , Jacobian
$\bar{I}$	ค่าเฉลี่ยของ Intermittency factor
k	thermal conductivity, turbulent kinetic energy
L	ความยาว
l	turbulence length scale
l_m	Prandtl mixing length
Nu	Nusselt number
Pr	Prandtl number

รายการสัญลักษณ์ (ต่อ)

p	ความดัน
p'	ความดันแกว่ง, pressure fluctuation
g_{ij}, g^{ij}, g^i_j	covariant, contravariant และ mixed tensor components
Q	ฟังก์ชันควบคุม, ความร้อนที่ถ่ายเทผ่านปริมาตรควบคุม
q''	ฟลักซ์ความร้อน
r	ระยะในแนวแกน r
R	ขนาดรัศมีท่อ, ฟังก์ชันควบคุม
R'	ระยะที่วัดจากผนังในแนวแกน r ไร้มิติ $R' = (R - r)/R$
Re	Reynolds number
S	source term, shape factor, ฟังก์ชันควบคุม
St	Stanton number
$\bar{s}_{ij}$	mean strain rate tensor
T	อุณหภูมิ
t	เวลา
$\bar{U}$	เวกเตอร์ความเร็ว
U'^i, U'^i	covariant และ contravariant velocity components
$\hat{U}^i$	normal flux component
u, v	ความเร็วในแนวแกน x และแกน y (หรือแกน r)
U_{ref}	ความเร็วอ้างอิง
u^+	ความเร็วไร้มิติในชั้นขอบ
u_∞	ความเร็วของกระแสการไหลอิสระ
V_i, V^i	covariant และ contravariant velocity projection
x	ตัวแปรอิสระบนพิกัดคาร์ทีเซียน, ระยะในแนวแกน x
y	ตัวแปรอิสระบนพิกัดคาร์ทีเซียน, ระยะในแนวแกน y
y^+	ระยะห่างจากผนังไร้มิติ
ℓ_m	mixing length
α	geometric coefficient
β	geometric coefficient, ค่าคงที่ของแบบจำลองความปั่นป่วน

รายการสัญลักษณ์ (ต่อ)

δ, δ^*	boundary layer thickness, displacement thickness
δ_j^i	Kronecker delta
δV	ปริมาตรควบคุม
ε	dissipation rate ของ turbulent kinetic energy
$\tilde{\varepsilon}$	modified dissipation rate ของ turbulent kinetic energy
ϕ	ตัวแปรสเกลาร์, velocity potential function และ blending function
γ	intermittency factor,, geometric coefficient
κ	ค่าคงที่ของ Von Karman
μ, μ_t	ความหนืดสัมบูรณ์และ Eddy viscosity
ν	ความหนืดจลนศาสตร์
θ	momentum thickness
ρ	ความหนาแน่น
τ_w	ความเค้นเฉือนที่ผนัง
ω	specific Dissipation rate, ตัวประกอบ relaxation
ξ, η	ตัวแปรอิสระบนพิกัดกระขับขอบเขต
ψ	stream function และ blending function
Γ	สัมประสิทธิ์การแพร่

ตัวห้อย (subscripts)

i, j, k	tensor index
e, w, n, s	ผิวปริมาตรควบคุมที่อยู่ระหว่างจุดต่อ E และ P , P และ W , N และ P , P และ S
E, W, N, S	จุดต่อที่อยู่ข้างเคียงปริมาตรควบคุม
P	จุดบอกตำแหน่งปริมาตรควบคุม
t	turbulent
w	ผนัง

ตัวยก (superscripts)

'	ส่วนที่เป็นผลของ fluctuation
—	ส่วนที่เป็นค่าเฉลี่ย

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มา

ในทศวรรษที่ผ่านมา การคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้เริ่มเข้ามามีบทบาทมากขึ้นในการออกแบบและทำนายผลของงานทางวิศวกรรม ทั้งนี้เนื่องจากข้อได้เปรียบที่เห็นได้ชัดเมื่อเทียบกับการทำการทดลอง ไม่ว่าจะเป็นในเรื่องของต้นทุน หรือความสะดวกในการดำเนินการ ซึ่งจะเห็นได้ว่า นอกจากการทำนายผลโดยการคำนวณจะสามารถกระทำในกรณีที่ไม่สามารถทำการทดลองได้หรือทำได้ยากแล้ว (ตัวอย่างเช่น การไหลในรูปทรงที่ซับซ้อนของอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน การไหลที่เกิดขึ้นในที่ที่อันตรายหรือมีอุณหภูมิสูง การไหลของเลือดในเส้นเลือดของมนุษย์ เป็นต้น) การคำนวณยังสามารถให้รายละเอียดในแง่มุมต่างๆ ได้ครบถ้วนกว่า ด้วยค่าใช้จ่ายและความซับซ้อนที่น้อยกว่าการทำการทดลองเป็นอย่างมาก ซึ่งด้วยสมรรถภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ได้รับการพัฒนาไปอย่างรวดเร็ว และความก้าวหน้าในสาขาวิชาพลศาสตร์ของไหลเชิงตัวเลข (Computational Fluid Dynamics – CFD) ในปัจจุบัน จึงทำให้การใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการคำนวณได้รับความนิยมแพร่หลายยิ่งขึ้น

โดยทั่วไป เราสามารถแสดงลักษณะทางกายภาพของปัญหาทางวิศวกรรมให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ แต่อย่างไรก็ตาม การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (analytical solution) ของสมการนั้นๆ อาจไม่สามารถทำได้ง่ายนัก โดยเฉพาะถ้าสมการนั้นมีลักษณะไม่เชิงเส้น เช่น สมการทางด้านพลศาสตร์ของไหล หรือสมการของการถ่ายเทความร้อนที่มีทั้งการพาและการนำความร้อนควบคู่กัน เป็นต้น ดังนั้น จึงได้มีการนำระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเข้ามาช่วยในการแก้สมการ โดยเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นระบบสมการพีชคณิตและประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้นเพื่อทำการคำนวณแก้ระบบสมการนั้นๆ

ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite volume method) เป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขชนิดหนึ่งที่ได้รับการนิยมนำมาใช้แก้ปัญหาทางด้านการไหล และการถ่ายเทความร้อนทางวิศวกรรม เนื่องจากระเบียบวิธีนี้มีจุดเด่นในด้านความสะดวกและเหมาะสมในการแก้สมการแบบไม่เชิงเส้นสำหรับปัญหาของการไหลแบบหนืดที่มีค่า Reynolds Number (Re) สูง หรือมีลักษณะปั่นป่วน (turbulent flow) ซึ่งมักจะพบในปัญหาทางวิศวกรรมโดยทั่วไป เมื่อเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขอื่นๆ เช่น ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) หรือ ระเบียบวิธีบาวดาไรเอลิเมนต์ (Boundary element method) อย่างไรก็ตาม เป็นที่ทราบกันดีว่า ข้อด้อยของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มทั่วไป ก็คือ ความไม่สะดวกที่เกิดขึ้น เมื่อต้องการคำนวณบนโดเมนที่มีลักษณะ

ซับซ้อน (Dechaumphai and Kanjanakijkasem, 1999) ดังนั้น เพื่อจัดซื้อได้อีกต่อไป โดยยังรักษาจุดเด่นของระเบียบวิธีนี้เอาไว้ เราจำเป็นต้องหาวิธีที่เหมาะสมเข้ามาประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม

วิธีที่นำมาใช้ในโครงการวิจัยนี้ ก็คือ การนำเอาพิกัดกระชับขอบเขต (body-fitted coordinates) เข้ามาประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มบนพิกัดฉากทั่วไป ซึ่งพิกัดกระชับขอบเขตนี้ จะมีลักษณะที่เปลี่ยนทิศทางไปตามโดเมนของรูปทรงที่พิจารณา โดยมีได้มีทิศทางหนึ่งทิศทางใดที่ตายตัว ดังนั้น จึงสามารถช่วยให้เราทำการคำนวณปัญหาที่เกิดขึ้นในรูปทรงที่ซับซ้อนได้ โดยในขณะเดียวกัน ก็ยังรักษาข้อดีของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มในเรื่องของความสะดวกในการเพิ่มเติมแบบจำลองความปั่นป่วน (turbulence model) หรือ ในการใส่ feature พิเศษอื่นๆ เช่น การคำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต ลงไปในตัวโปรแกรม

ความสำคัญของงานวิจัยนี้ นอกเหนือไปจากทางด้านวิชาการ คือการคำนวณการไหลและการถ่ายเทความร้อนในโดเมนที่ซับซ้อน สำหรับงานวิจัยทางด้านพลศาสตร์ของไหลขั้นสูงแล้ว ยังมีความสำคัญในเชิงประยุกต์อย่างยิ่ง นั่นคือ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น สามารถนำไปดัดแปลงเพื่อใช้ในการออกแบบอุปกรณ์ทางวิศวกรรมที่เกี่ยวข้องกับการไหลและการถ่ายเทความร้อน เช่น ช่วยพัฒนาการออกแบบอุปกรณ์อุ่นอากาศจากไอเสีย (recuperator) ในโรงงานอุตสาหกรรม ซึ่งในปัจจุบันนี้ ยังไม่มีการสร้างเองในประเทศ ต้องพึ่งพาจากการนำเข้าเท่านั้น (สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ และ คณะ: 2001, 2004) หรือใช้ในการออกแบบครีบของหม้อน้ำรถยนต์ เพื่อพัฒนาเทคโนโลยีการผลิตหม้อน้ำในประเทศ หรือแม้กระทั่ง ใช้ในการออกแบบกลุ่มอาคารหรือยานพาหนะชนิดต่างๆ อีกทั้งจะเป็นการลดต้นทุนของการพัฒนาเทคโนโลยีการออกแบบในประเทศ ซึ่งในปัจจุบัน มหาวิทยาลัยและสถาบันวิจัยหลายแห่งในประเทศไทย ต้องเสียค่าใช้จ่ายเป็นจำนวนไม่น้อยจากการใช้ซอฟต์แวร์ CFD ของต่างประเทศในการทำการวิจัย ซึ่งส่วนใหญ่ มักจะคิดค่า license เป็นรายปี

ในส่วนของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้สำหรับการคำนวณในโดเมนที่ซับซ้อนนี้ ได้มีการเสนอแนวคิดพื้นฐาน (basic concept) ในเชิงคณิตศาสตร์ ตั้งแต่เมื่อประมาณสามสิบปีที่แล้ว ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์บนพิกัดแบบโค้ง (curvilinear coordinates) (Vinokur, 1974; Thomson et al., 1974) และในเวลาที่ผ่านมา ได้มีผู้วิจัยจำนวนมากที่นำแนวคิดพื้นฐานนี้ ไปพัฒนาใช้กับระเบียบวิธีเชิงตัวเลข การกำหนดตัวประกอบความเร็วและการวางเรียงตัวของกริดสำหรับวิธีการคำนวณแบบนี้ สามารถกระทำได้หลากหลาย เช่น อาจจะใช้ตัวประกอบความเร็วแบบคาร์ทีเซียนเป็นตัวแปรตาม ร่วมกับการใช้กริดแบบเอียงกัน (staggered grid) (Vanka et al., 1980; Maliska and Raithby, 1984; Hah, 1984) ซึ่งวิธีที่ใช้นี้ได้มีถูกนำไปพัฒนาต่อ ในแง่ของความเร็วและเสถียรภาพของการคำนวณ (Shyy et al., 1985; Shyy and Sun, 1991; Shyy et al., 1992) หรือ อาจจะใช้ตัวประกอบความเร็วแบบอื่น เช่น แบบ contravariant ร่วมกับกริด

แบบไม่เยื้องกัน (non-staggered grid) (Ikohagi et al., 1992; Matsumoto and Daiguji, 1992)

Peric (1985) ได้ใช้ตัวประกอบความเร็วแบบแบบคาร์ทีเซียน ร่วมกับการใช้กริดแบบไม่เยื้องกัน เพื่อประหยัดหน่วยความจำในการคำนวณ โดยใช้วิธีการประมาณค่าของเทอมการพาบนผิวรอยต่อของปริมาตรควบคุม ของ Rhie and Chow (1983) เพื่อหลีกเลี่ยงปรากฏการณ์ checkerboard effect ซึ่งวิธีที่คล้ายกันนี้ ได้ถูกนำไปพัฒนาต่อโดย Burns and Wilkes (1987)

จากนั้น Karki (1985)] ได้ริเริ่มใช้ตัวประกอบความเร็วที่เปลี่ยนทิศไปตามทิศทางของพิกัดที่เปลี่ยนไป ซึ่งเรียกว่า ตัวประกอบความเร็วแบบ physical covariant ร่วมกับกริดแบบเยื้องกันในการคำนวณ ซึ่งเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมและถูกนำไปพัฒนาต่อโดย Melaaen (1990)

ในแง่ของการไหลแบบปั่นป่วนก็มีผู้ที่นำวิธีนี้ไปใช้เป็นที่แพร่หลายเช่นเดียวกัน ตัวอย่างเช่น Lien and Leschziner (1994a, 1994b) หรือ Zijlema et al. (1995) สำหรับในส่วนของการประยุกต์ใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมนั้น ในปัจจุบัน มี application จำนวนมากที่น่าสนใจ ซึ่งมีข้อมูลจำนวนหนึ่งจากการทดลอง แต่ยังไม่มีผู้ทำการวิจัยในเรื่องของการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแพร่หลายนัก เนื่องจากความซับซ้อนของลักษณะทางกายภาพของการไหลและการถ่ายเทความร้อน และรูปทรงของโดเมนที่พิจารณานั้นๆ เช่น การไหลผ่านทรงกระบอกที่มีขนาดความสูงจำกัด (Natarajan and Chyu, 1994; Luo et al., 1996; Park and Lee, 2003) หรือ การระบายความร้อนในใบพัดของกังหัน (Buchlin, 2002; Khan et al., 2002; Al-Hadhrani and Han, 2003) เป็นต้น

1.2 วัตถุประสงค์

- 1) เพื่อประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ระเบียบวิธีไฟน์ในตัวลูมในการคำนวณการไหลและการถ่ายเทความร้อนในโดเมนที่มีลักษณะซับซ้อน สำหรับหัวข้อวิจัยทางด้านพลศาสตร์ของไหลในระดับสูง
- 2) เพื่อพัฒนาเครื่องมือพื้นฐาน (basic tool) ในรูปของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อใช้ช่วยในงานวิจัยออกแบบ สำหรับแก้ปัญหาทางวิศวกรรมของอุตสาหกรรมในประเทศ

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

- 1) ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สามารถคำนวณการไหลแบบปั่นป่วน สำหรับโดเมนสองมิติที่มีลักษณะซับซ้อน
- 2) ทำการเปรียบเทียบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น จนแน่ใจว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความถูกต้องเชื่อถือได้

บทที่ 2

การสร้างกริดที่ใช้ในการคำนวณ

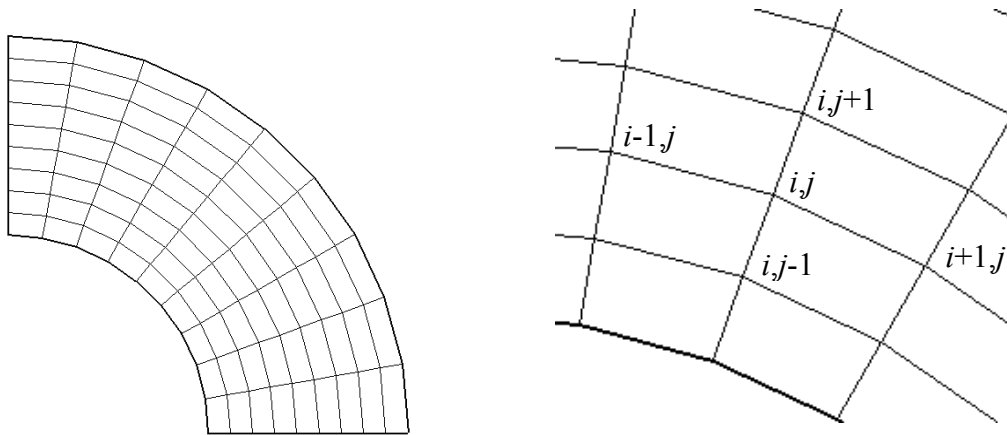
ในบทนี้ จะอธิบายถึงการสร้างกริดซึ่งเป็นขั้นตอนสำคัญขั้นตอนแรกในการวิเคราะห์ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มโดยกระบวนการสร้างกริดนั้นมีผลกระทบต่อความแม่นยำ อัตราการลู่เข้า และเสถียรภาพในการคำนวณ โดยจะเริ่มจากวิธีการสร้างกริดต่างๆรวมถึงข้อดีและข้อเสียของแต่ละวิธีเพื่อที่จะเลือกใช้ให้เหมาะสมกับปัญหา คุณลักษณะของกริดที่เหมาะสม และสุดท้ายจะแสดงขั้นตอนของวิธีการสร้างกริดแบบวิธีเชิงพีชคณิตและวิธีการสร้างกริดโดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก

2.1 ประเภทของการสร้างกริด

การสร้างกริด (grid generation) คือกระบวนการแบ่งพื้นที่โดเมนที่สนใจออกเป็นปริมาตรควบคุมย่อยๆจำนวนมากที่เรียกว่าเซลล์ (grid cells) และเชื่อมต่อระหว่างแต่ละจุดของกริด (grid points) ด้วยเส้นกริด (grid lines) ซึ่งกระบวนการสร้างกริดนี้มีความสำคัญเนื่องจากเป็นขั้นตอนแรกสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งถ้าเลือกใช้วิธีการสร้างกริดที่ไม่เหมาะสมแล้ว ก็อาจจะเกิดความคลาดเคลื่อนกับผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณ

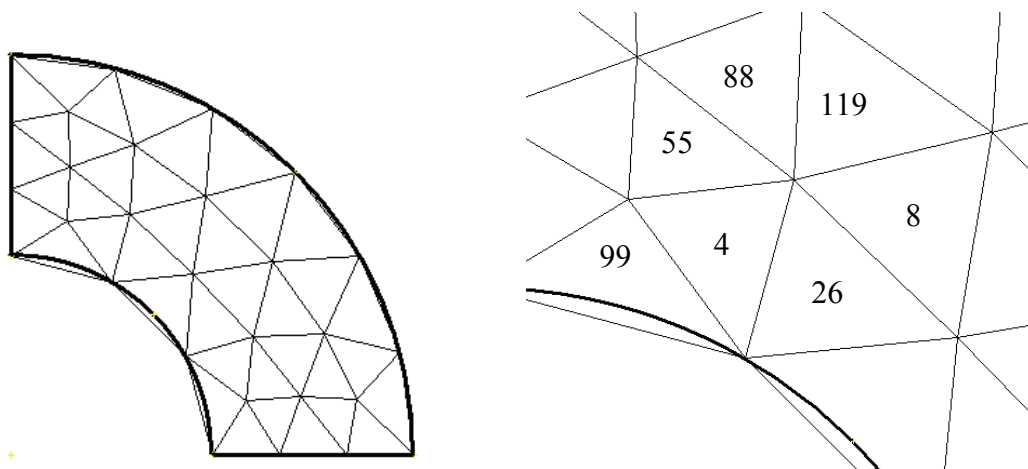
การสร้างกริดสามารถทำได้หลายวิธี โดยเราสามารถสร้างเส้นกริดได้ด้วยมือ (free hand) แต่วิธีนี้ใช้เวลามากและไม่สะดวก ดังนั้น Thompson et al. (1985) จึงได้เสนอวิธีการสร้างกริดแบบอัตโนมัติ (automatic grid generation techniques) โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งมีความสะดวกและใช้นาน้อยกว่าการวาดด้วยมือ ในการสร้างกริดแบบอัตโนมัตินั้นสามารถสร้างกริดได้หลายรูปแบบด้วยกัน ซึ่งเราสามารถแบ่งประเภทของกริดตามลักษณะได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ๆคือ กริดแบบ structured และกริดแบบ unstructured

กริดแบบ structured เป็นกริดที่มีการจัดเรียงชุดของจุดกริดอย่างมีระเบียบและสามารถระบุแต่ละจุดของกริดบนระนาบได้โดยใช้ตัวเลขดัชนี i, j ตัวอย่างเช่น ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนเราสามารถระบุตัวเลขดัชนีได้เป็น x_{ij}, y_{ij} เป็นต้น ดังแสดงในรูปที่ 2.1 ซึ่งการระบุตำแหน่งของจุดนี้สอดคล้องกันโดยตรงกับการจัดเก็บตัวแปรไว้ในหน่วยความจำ ทำให้สามารถเรียกใช้จุดกริดที่ต่อกันได้ง่ายและรวดเร็ว เพียงใช้แค่การบวกหรือลบค่าที่สอดคล้องกับตัวเลขดัชนีเท่านั้น เช่น $(i+1)$ หรือ $(j-1)$ เป็นต้น จึงทำให้การคำนวณค่าเกรเดียนต์ (gradients) หรือ ฟลักซ์ สำหรับเงื่อนไขขอบต่างๆสามารถทำได้โดยง่าย



รูปที่ 2.1 การสร้างกริดแบบ structured

สำหรับกริดแบบ unstructured จะไม่มีลำดับการวางแต่ละจุดของกริดที่เฉพาะเจาะจง โดยจุดกริดที่อยู่ต่อกันนั้นไม่สามารถระบุโดยใช้ตัวเลขดัชนี ตัวอย่างดังเช่นในรูปที่ 2.2 จุดที่ 4 จะต่อกับจุดที่ 119 และจุดที่ 55 เป็นต้น ส่วนรูปร่างของแต่ละกริดสามารถเป็นได้หลายแบบ เช่น รูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมสำหรับสองมิติ และทรงสี่หน้าหรือทรงหกหน้าสำหรับสามมิติ เป็นต้น ทั้งนี้ภายในหนึ่งโดเมนสามารถนำกริดที่มีแบบต่าง ๆ กันมาผสมกันได้ซึ่งเรียกว่า กริดแบบไฮบริด (hybrid grids) เพื่อให้สามารถจำลองรูปร่างที่ขอบของโดเมนได้อย่างเหมาะสมมากขึ้น สำหรับข้อดีของกริดแบบ unstructured คือกริดมีความยืดหยุ่นสูง จึงสามารถจำลองรูปร่างที่ซับซ้อนมากๆ ได้อย่างไรก็ตาม กระบวนการสร้างกริดแบบนี้ต้องใช้เวลาค่อนข้างมาก นอกจากนี้โครงสร้างของข้อมูลก็มีความซับซ้อนและไม่สามารถระบุตำแหน่งของจุดภายในโดเมนอย่างเป็นลำดับ จึงทำให้เมตริกซ์ของระบบสมการเชิงพีชคณิตไม่เป็นแนวทแยงมุมและทำให้เกิดความยุ่งยากในขั้นตอนการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตเพื่อคำนวณหาผลเฉลย และทำให้ต้องใช้หน่วยความจำและเวลามากกว่าในการคำนวณเมื่อเทียบกับกริดแบบ structured



รูปที่ 2.2 การสร้างกริดแบบ unstructured

ในที่นี้ จะเลือกใช้กริดแบบ structured สำหรับการคำนวณบนฟังก์ชันกระชับขอบเขต โดย การสร้างกริดจะใช้วิธีเชิงพีชคณิตร่วมกับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลลิปติก

การสร้างกริดโดยวิธีเชิงพีชคณิตสามารถทำได้โดยการนำค่าการกระจายของจุดกริดที่เส้น ขอบของโดเมนมาหาตำแหน่งของจุดกริดที่อยู่ภายในโดเมนด้วยวิธีการประมาณค่าในช่วง (interpolation) ซึ่งวิธีที่ได้รับความนิยมมากที่สุดวิธีหนึ่งก็คือ วิธี Transfinite interpolation method (TFI) ซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดในหัวข้อที่ 2.3 ซึ่งข้อดีของการสร้างกริดโดยวิธีเชิง พีชคณิตก็คือ มีขั้นตอนการคำนวณน้อย สามารถสร้างกริดได้ง่ายและรวดเร็ว และมีระยะห่าง ระหว่างกริดที่เหมาะสม ส่วนข้อเสียก็คือขนาดของกริดอาจจะไม่สม่ำเสมอ

สำหรับการสร้างกริดโดยการแก้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ จะมีความซับซ้อนมากกว่าการ สร้างกริดโดยวิธีเชิงพีชคณิต แต่กริดที่ได้จากวิธีนี้จะมีความสม่ำเสมอมากกว่า ซึ่งสมการเชิง อนุพันธ์ที่ถูกเลือกใช้ในที่นี่ ก็คือ สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลลิปติก (elliptic equation)

สมการที่เป็นต้นแบบของสมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลลิปติกคือ สมการลาปลาซ ซึ่งใช้อธิบาย ปรากฏการณ์การไหลแบบ irrotational incompressible flow และการนำความร้อนในสภาวะอยู่ ทั่ว ดังแสดงในสมการ (2.1)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

การสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลลิปติกมีความคิดพื้นฐานมาจากการ อุปมาอุปไมยการสร้างกริดเทียบกับผลเฉลยของสมการลาปลาซสำหรับ stream function (ψ) และ velocity potential function (ϕ) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (2.3)$$

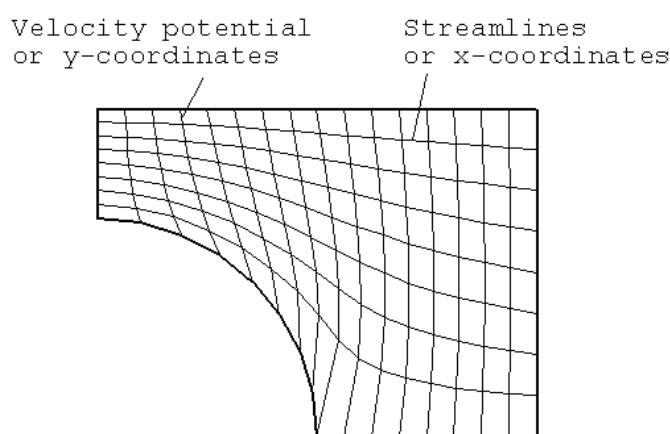
เราพิจารณาเปลี่ยน stream function (ψ) เป็นตัวแปร x และ velocity potential function (ϕ) เป็น y ดังนั้น จึงได้สมการเพื่อใช้สร้างกริดดังนี้

$$\nabla^2 x = \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \quad (2.5)$$

ผลเฉลยของชุดสมการ (2.4) และ (2.5) ถูกแสดงในรูปที่ 2.3 ซึ่งจะเห็นได้ว่าการนำสมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกมาใช้ในการสร้างกริดนั้นทำให้การกระจายของกริดมีความสม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งโดเมน ซึ่งวิธีสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมมากที่สุด แม้ว่าวิธีนี้ใช้เวลาในการสร้างกริดมากและยากกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีเชิงพีชคณิต เนื่องจากการคำนวณหาฟังก์ชันควบคุมที่มีความยุ่งยากมากกว่า อย่างไรก็ตาม ข้อเสียที่สำคัญของวิธีนี้ก็คือการควบคุมระยะห่างระหว่างกริดให้เหมาะสมอาจทำได้ยาก ซึ่งอาจทำให้ผลเฉลยเกิดการลู่ออก (divergent)

การกำจัดข้อเสียของการสร้างกริดโดยใช้สมการอิลิปติกสามารถทำได้โดยสร้างกริดเริ่มต้นด้วยวิธีเชิงพีชคณิตก่อนแล้วจึงปรับกริดให้สม่ำเสมอมากขึ้นด้วยวิธีการสร้างกริดแบบอิลิปติก ซึ่งการสร้างกริดโดยใช้วิธีเชิงพีชคณิตร่วมกับวิธีการสร้างกริดแบบอิลิปติกนี้ทำให้สามารถควบคุมระยะห่างระหว่างกริดได้เหมาะสม ช่วยลดเวลาในการคำนวณและยังป้องกันการลู่ออกเนื่องจากมีตำแหน่งของกริดเริ่มต้นที่ใกล้เคียงผลเฉลยอยู่แล้วจึงทำให้จำนวนรอบการทำงานช้าลง ในที่นี้จึงเลือกใช้วิธีสร้างกริด โดยใช้วิธีเชิงพีชคณิตร่วมกับวิธีการสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดต่อไปในหัวข้อที่ 2.4



รูปที่ 2.3 ตัวอย่างกริดที่ได้จากการแก้สมการลาปลาซของ stream function (ψ) และ velocity potential function (ϕ)

2.2 คุณสมบัติของกริดที่เหมาะสม

เพื่อความรวดเร็วและแม่นยำของการคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข เราควรเลือกวิธีสร้างกริดที่เหมาะสมกับปัญหา โดยพิจารณาจากคุณสมบัติดังนี้

1) กริดควรมีระยะห่างระหว่างกริด (grid spacing) ที่เหมาะสมและสามารถควบคุมได้ โดยที่กริดควรมีระยะห่างระหว่างกริดน้อยในช่วงที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยสูง แต่ควรมีระยะห่างระหว่างกริดมากในช่วงที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยต่ำ คุณสมบัติเชิงเรขาคณิต

(geometric properties) ที่เป็นตัวบ่งบอกความเหมาะสมของกริดได้แก่ expansion ratio และ aspect ratio ซึ่งสามารถนิยามได้ดังนี้

expansion ratio คือ อัตราส่วนความกว้างของปริมาตรควบคุมหนึ่งต่ออีกปริมาตรควบคุมที่ติดกัน ซึ่งสามารถแสดงเป็นสมการได้ดังนี้

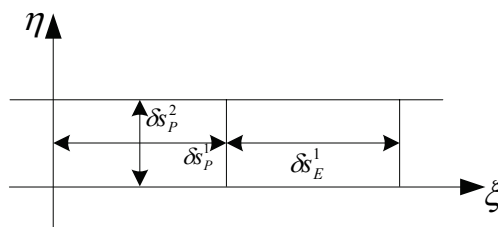
$$\text{expansion ratio} \equiv \frac{\delta s_{P+1}^i}{\delta s_P^i} \quad (2.6)$$

expansion ratio ของกริดที่เหมาะสมควรมีค่าเท่ากับหนึ่ง แต่ในบริเวณที่ผลเฉลยมีการเปลี่ยนแปลงสูงนั้นควรจะมีกริดที่ละเอียดซึ่งค่าของอัตราส่วน expansion อาจไม่เท่ากับหนึ่ง อย่างไรก็ตาม ค่ามากที่สุดของอัตราส่วน expansion ไม่ควรเกิน 1.5

สำหรับ aspect ratio สามารถนิยามโดยอัตราส่วนระหว่างด้านกว้างต่อด้านยาวภายในปริมาตรควบคุม ซึ่งสามารถแสดงเป็นสมการได้ดังนี้

$$\text{aspect ratio} \equiv \frac{\delta s_P^i}{\delta s_P^j} \quad (2.7)$$

โดย δs ในสมการ (2.6) และ (2.7) คือ ระยะต่าง ๆ บนปริมาตรควบคุมดังแสดงในรูปที่ 2.4 ทั้งนี้จุด $P+1$ ก็คือจุด E เมื่อ i มีค่าเท่ากับ 1

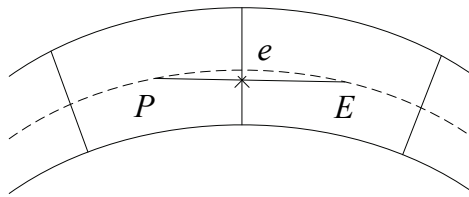


รูปที่ 2.4 ระยะ δs บนปริมาตรควบคุมแบบสองมิติ

อัตราส่วน aspect ที่เหมาะสมควรมีค่าเท่ากับหนึ่ง ซึ่งถ้าอัตราส่วน aspect ยิ่งห่างจากหนึ่งมากเท่าใดค่าสัมประสิทธิ์ a_{nb} ซึ่งเป็นค่าที่บ่งบอกพื้นที่หน้าตัดของปริมาตรควบคุมจะมีค่าในทิศทางหนึ่งมากกว่าในทิศทางอื่น ส่งผลให้การเชื่อมโยงระหว่างทิศของพิกัดที่ต่างกันไม่ดีและขาดเสถียรภาพ นอกจากนี้ค่าอัตราส่วน aspect ที่มากขึ้นทำให้ค่าความไม่ตั้งฉากในสมการที่ discretized แล้วมากเกินไปจนความจำเป็น ซึ่งค่าอัตราส่วน aspect นี้ไม่ควรมีค่าเกิน 10 (Melaen, 1990)

2) กริดควรมีความเรียบ (smoothness) ซึ่งแม้ว่าคุณสมบัตินี้จะตรงกันข้ามกับความต้องการที่จะให้มีกริดอยู่ในบริเวณที่สนใจศึกษาก็ตาม ซึ่งในการทำให้กริดมีความเรียบนั้น ความสม่ำเสมอ (uniformity) และความโค้งของกริด (curvature) เป็นปัจจัยที่สำคัญ เนื่องจาก

คุณสมบัติทั้งสองนี้อาจทำให้ความคลาดเคลื่อนจากการปิดเศษมีค่ามาก นอกจากนี้ กริดไม่ควรมีการขยายหรือย่อจากเซลล์หนึ่งไปอีกเซลล์มากจนเกินไป ความเรียบนี้มีความสำคัญต่อความแม่นยำในการคำนวณหาพจน์เชิงเรขาคณิต (geometric terms) โดยเฉพาะอย่างยิ่งสำหรับสมการอนุพันธ์โมเมนต์ในพิกัดกระชับขอบเขตซึ่งมีพจน์เกี่ยวกับความโค้ง (curvature terms) อยู่เราจำเป็นต้องมีกริดที่มีความต่อเนื่องสม่ำเสมอเพื่อให้ได้ผลการคำนวณที่แม่นยำ นอกจากนี้พจน์เกี่ยวกับความโค้งที่มีค่ามากยังทำให้การประมาณค่าในช่วงโดยการถ่วงน้ำหนักเชิงเส้นไม่มีความแม่นยำอีกด้วย ดังแสดงในรูปที่ 2.5 เพื่อให้ได้ผลเฉลยที่ดีขึ้น ความโค้งของกริดควรมีค่าน้อย ซึ่งอาจทำได้โดยการแบ่งกริดในช่วงโค้งให้ละเอียดมากขึ้น หรือใช้อันดับในการประมาณค่าในช่วงให้สูงขึ้น



รูปที่ 2.5 ความคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าในช่วงโดยการถ่วงน้ำหนักเชิงเส้นในกริดที่มีความโค้งมาก

3) กริดควรมีคุณสมบัติตั้งฉาก (orthogonality) แม้ว่าจะเป็นกริดบนพิกัดโค้งแบบไม่ตั้งฉากก็ตาม เนื่องจากกริดแบบตั้งฉากสามารถลดค่าความคลาดเคลื่อนจากการปิดเศษได้ ในทางกลับกัน การที่กริดตั้งฉากตลอดทั่วโดเมนนั้นกลับไม่เป็นที่ต้องการและไม่มีความจำเป็น ทั้งนี้ เราต้องการให้มีกริดอยู่ในบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยสูง แม้ว่ากริดจะมีความไม่ตั้งฉากมากขึ้นก็ตาม จากสมการที่ดิศกริไทช์แล้วพบว่า กริดที่เกือบจะตั้งฉาก (nearly orthogonal grids) จะมีความเสถียรภาพมากขึ้นและลู่เข้ารวดเร็วขึ้น อย่างไรก็ตาม ความไม่ตั้งฉากของกริดนั้นควรที่จะควบคุมได้ ทั้งนี้ การที่กริดตั้งฉากที่ขอบของโดเมนนั้นมีข้อดีคือช่วยลดความซับซ้อนของเงื่อนไขขอบเขต ซึ่งการที่กริดไม่ตั้งฉากที่ขอบของโดเมนในกรณีที่โดเมนบิดเบี้ยวมากนั้น ทำให้ความแม่นยำที่ขอบลดลงและความคลาดเคลื่อนอาจจะกระจายไปภายในโดเมนและทำให้ผลเฉลยโดยรวมทั้งหมดคลาดเคลื่อนไปด้วย

การสร้างกริดให้มีคุณสมบัติครบทั้ง 3 ข้อนั้นไม่สามารถทำได้โดยง่าย เช่น การสร้างกริดด้วยวิธีเชิงพีชคณิตสามารถควบคุมระยะห่างระหว่างกริดได้ดีแต่กริดจะไม่มี ความสม่ำเสมอ ในทางกลับกันการสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลลิปติก ให้กริดที่มีความสม่ำเสมอแต่กริดจะไม่ตั้งฉากกัน ซึ่งนอกจากคุณสมบัติของกริดทั้ง 3 ข้อนี้อันแล้ว เราควรพิจารณาถึงความซับซ้อนในการสร้างกริดและระยะเวลาในการคำนวณด้วย กล่าวคือ วิธีการสร้างกริดที่เหมาะสมต้องไม่ซับซ้อนและยุ่งยากเกินไป อีกทั้งวิธีการสร้างกริดที่เหมาะสมไม่ควรใช้เวลาในการสร้างกริดนานเกินไปอันจะส่งผลถึงระยะเวลาในการคำนวณที่เพิ่มขึ้นอีกด้วย

สำหรับในงานวิจัยนี้จะทำการสร้างกริดเริ่มต้นโดยใช้วิธีเชิงพีชคณิต แล้วทำการปรับปรุงกริดโดยใช้วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก ซึ่งกริดที่ได้จะมีระยะห่างระหว่างกริดที่เหมาะสมและมีความสม่ำเสมอ

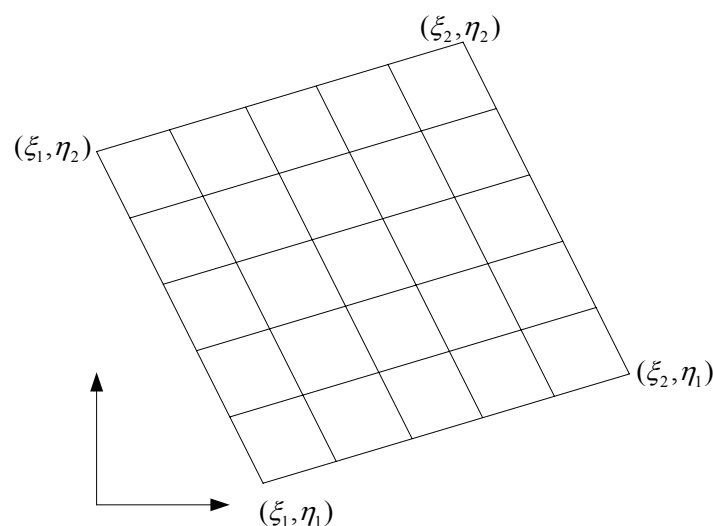
2.3 การสร้างกริดด้วยวิธีเชิงพีชคณิต

การสร้างกริดด้วยวิธีเชิงพีชคณิตจะทำการสร้างกริดโดยอาศัยฟังก์ชันการแปลงพิกัดระหว่าง computational space กับ physical space ซึ่งเริ่มต้นจากการกระจายจุดกริดบนเส้นขอบของโดเมนเสียก่อน จากนั้นจึงใช้วิธีการประมาณค่าในช่วงเพื่อสร้างจุดกริดที่อยู่บริเวณภายในโดเมน สำหรับการประมาณค่าในช่วง (interpolation) สามารถทำได้หลายวิธี ทั้งนี้ Transfinite interpolation หรือ TFI เป็นวิธีที่นิยมใช้มากที่สุด และเป็นวิธีที่ถูกเลือกนำมาใช้ในงานวิจัยนี้

การประมาณค่าในช่วงจะกระทำโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามของลากรองจ์ (Lagrange interpolating polynomials) ในการกระจายจุดกริดบนเส้นขอบของโดเมน ซึ่งฟังก์ชันพหุนามของลากรองจ์นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบโดยทั่วไปสำหรับสองมิติในทิศทาง ξ และ η ดังนี้ (ตำแหน่งของกริดในโดเมนแสดงในรูปที่ 2.6)

$$r(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^N \phi_n \left(\frac{\xi}{I} \right) r(\xi_n, \eta) \quad (2.8)$$

$$r(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^M \psi_m \left(\frac{\eta}{J} \right) r(\xi, \eta_m) \quad (2.9)$$



รูปที่ 2.6 ตำแหน่งของจุดภายในโดเมน

โดยที่ I, J คือ ค่ามากที่สุดของ ξ และ η ตามลำดับ และ N, M คือ จำนวนข้อมูลที่น่ามาใช้ในการประมาณค่า เช่น มีข้อมูลจำนวน 2 ข้อมูล จะได้ $N = 2$ ซึ่งจะเป็นการประมาณค่าในช่วงเชิงเส้น หรือถ้ามีข้อมูลจำนวน 3 ข้อมูล จะได้ $N = 3$ ซึ่งจะเป็นการประมาณค่าในช่วงกำลังสอง เป็นต้น ส่วน ϕ_n และ ψ_m คือ blending function เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความสอดคล้องกับเงื่อนไขดังนี้

$$\phi_n\left(\frac{\xi_l}{I}\right) = \delta_n^l \quad n = 1, 2 \quad l = 1, 2 \quad (2.10)$$

$$\psi_m\left(\frac{\eta_l}{J}\right) = \delta_m^l \quad m = 1, 2 \quad l = 1, 2 \quad (2.11)$$

ฟังก์ชัน ϕ_n และ ψ_m สามารถหาได้โดยใช้ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงพหุนามทั่วไปของลากรองจ์ (Lagrange interpolation polynomials) คือ

$$\phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) = \prod_{l=1}^N \frac{\xi - \xi_l}{\xi_n - \xi_l} \quad l \neq n \quad (2.12)$$

$$\psi_m\left(\frac{\eta}{J}\right) = \prod_{l=1}^M \frac{\eta - \eta_l}{\eta_m - \eta_l} \quad l \neq m \quad (2.13)$$

โดยที่ Π เป็นสัญลักษณ์ของการคูณ

สำหรับฟังก์ชัน ϕ_n และ ψ_m นี้ มีคุณสมบัติโดยทั่วไปกล่าวคือ ϕ_n มีค่าเท่ากับหนึ่งตำแหน่ง ξ_n และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ตำแหน่ง ξ ของข้อมูลอื่นๆ

สำหรับกรณีที่ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์เป็นแบบเชิงเส้น (linear Lagrange interpolation functions) เราสามารถดรูปรูปสมการ (2.8) และ (2.9) ได้เป็น

$$r(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^2 \phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) r(\xi_n, \eta) = \phi_1\left(\frac{\xi}{I}\right) r(\xi_1, \eta) + \phi_2\left(\frac{\xi}{I}\right) r(\xi_2, \eta) \quad (2.14)$$

$$r(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^2 \psi_m\left(\frac{\eta}{J}\right) r(\xi, \eta_m) = \psi_1\left(\frac{\eta}{J}\right) r(\xi, \eta_1) + \psi_2\left(\frac{\eta}{J}\right) r(\xi, \eta_2) \quad (2.15)$$

ส่วน blending function (ϕ_n และ ψ_m) สำหรับกรณีที่ฟังก์ชันเชิงเส้นสามารถหาได้โดยใช้สมการดังนี้

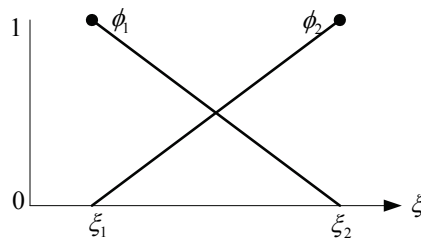
$$\phi_1\left(\frac{\xi}{I}\right) = 1 - \frac{\xi}{I} \quad (2.16)$$

$$\phi_2\left(\frac{\xi}{I}\right) = \frac{\xi}{I} \quad (2.17)$$

$$\psi_1\left(\frac{\eta}{J}\right) = 1 - \frac{\eta}{J} \quad (2.18)$$

$$\psi_2\left(\frac{\eta}{J}\right) = \frac{\eta}{J} \quad (2.19)$$

blending function สำหรับกรณีที่ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์เป็นแบบเชิงเส้น จะมีลักษณะการกระจายดังแสดงในรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 ฟังก์ชันการประมาณค่าในช่วงของลากรองจ์แบบเชิงเส้น

สำหรับ blending function (ϕ_n และ ψ_m) ที่ฟังก์ชันเชิงเส้น มีคุณสมบัติกล่าวคือ ϕ_n มีค่าเท่ากับหนึ่งที่ตำแหน่ง ξ_1 และมีค่าเท่ากับศูนย์ที่ตำแหน่ง ξ ของข้อมูลอื่นๆ

$$\phi_1 = \begin{cases} 1 & \text{at } \xi = \xi_1 \\ 0 & \text{at } \xi = \xi_2 \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\phi_2 = \begin{cases} 0 & \text{at } \xi = \xi_1 \\ 1 & \text{at } \xi = \xi_2 \end{cases} \quad (2.21)$$

เมื่อได้ตำแหน่งของจุดกริดบนเส้นขอบของโดเมนแล้ว ขั้นตอนต่อไปจะเป็นการหาจุดกริดที่อยู่ภายในโดเมน โดยการนำสมการ (2.8) และ (2.9) มารวมกัน แล้วเพิ่มพจน์ลงไป จะได้รูปแบบทั่วไปของสมการการกระจายจุดกริดภายในโดเมน ดังนี้

$$r(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^2 \phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) r(\xi_n, \eta) + \sum_{m=1}^2 \psi_m\left(\frac{\eta}{J}\right) r(\xi, \eta_m) - \sum_{n=1}^2 \sum_{m=1}^2 \phi_n\left(\frac{\xi}{I}\right) \psi_m\left(\frac{\eta}{J}\right) r(\xi_n, \eta_m) \quad (2.22)$$

วิธีสร้างกริดโดย TFI ใช้เวลาในการคำนวณน้อยเนื่องจากไม่ต้องใช้กระบวนการทำซ้ำ สามารถควบคุมระยะห่างระหว่างกริดได้ดีแต่การเลือกฟังก์ชัน ϕ_n และ ψ_m ยาก ส่วนข้อเสียของ

TFI คือ กริดจะไม่มีควมสม่ำเสมอเนื่องจากไม่สามารถควบคุมระยะห่างเส้นกริดได้ดีเพียงพอ ปัญหานี้สามารถแก้ไขได้ด้วยวิธีสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก ซึ่งจะทำให้กริดมีความสม่ำเสมอมากขึ้น

2.4 การสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงขั้นตอนการสร้างกริดโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกซึ่งแบ่งได้เป็น 3 ส่วนหลัก คือ สมการครอบคลุมการสร้างกริด ฟังก์ชันควบคุม และการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต การสร้างกริด โดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกสามารถทำได้โดยใช้สมการลาปลาซ (Laplace equation) หรือสมการปัวส์ซอง (Poisson equation) ซึ่งมีความแตกต่างกันดังที่จะได้กล่าวถึงต่อไป

การสร้างกริดโดยการแก้สมการลาปลาซเป็นวิธีการสร้างกริดที่ง่ายที่สุด โดยสมการลาปลาซ มีรูปแบบสมการ คือ

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_i^2} = 0 \quad (2.23)$$

โดยที่ $(\xi_i) = (\xi, \eta)$ และ $(x_i) = (x, y)$

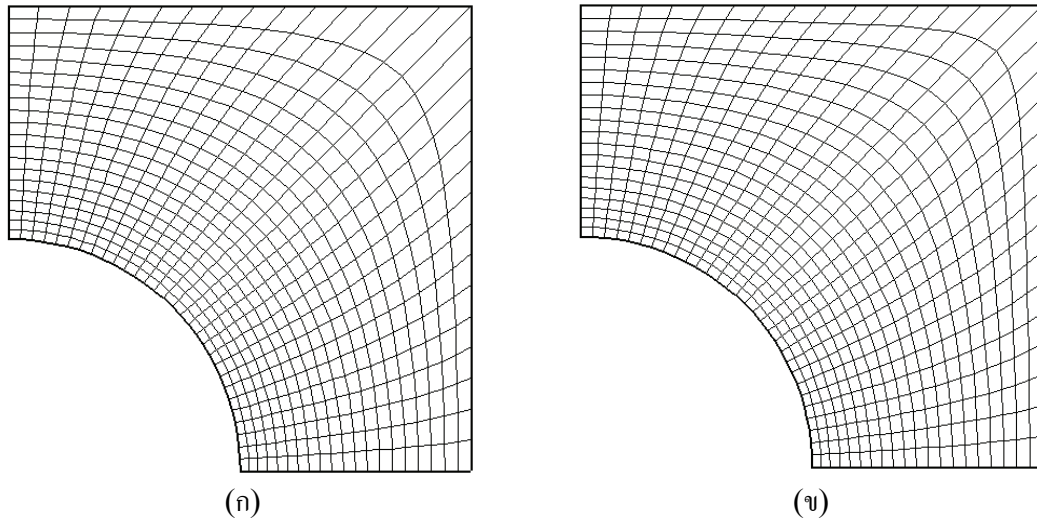
กริดที่ได้จากการสร้างกริดโดยการแก้สมการลาปลาซจะมีความสม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งโดเมนดังรูปที่ 2.8 (ก) แต่ไม่สามารถควบคุมการกระจายของเส้นกริดให้มีกริดอยู่ในบริเวณที่เป็นมุมของโดเมนได้ ทำให้ผลการคำนวณในบริเวณนั้นไม่แม่นยำ นอกจากนี้ กริดจะชิดกันจนเกินไป ดังแสดงในบริเวณที่เป็นโค้งคว่ำในรูปที่ 2.9 (ก) แต่กริดจะห่างกันจนเกินไปบริเวณที่เป็นโค้งหงาย ดังแสดงในรูปที่ 2.9 (ข)

การสร้างกริดโดยการแก้สมการปัวส์ซอง สามารถควบคุมการกระจายของเส้นกริดได้ดี โดยสมการปัวส์ซองมีรูปแบบสมการคือ

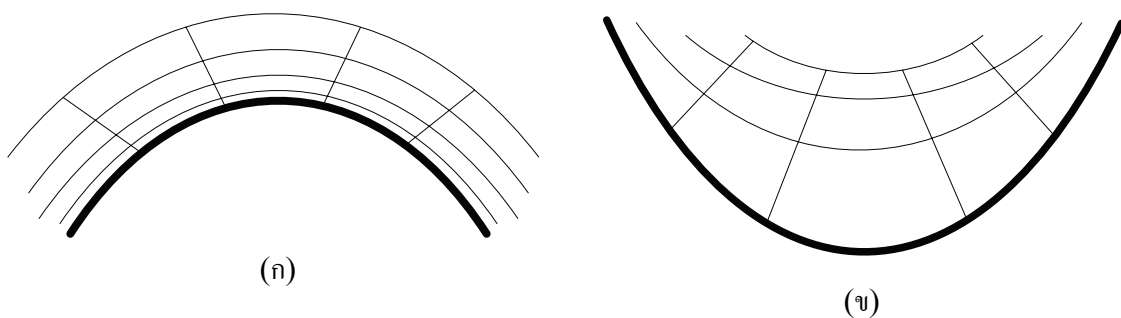
$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_i^2} = P_i \quad (2.24)$$

โดยที่ $(P_i) = (P, Q)$

กริดที่ได้จากการสร้างกริดโดยการแก้สมการปัวส์ซองมีลักษณะดังรูปที่ 2.8 (ข) ซึ่งเส้นกริดมีความสม่ำเสมอตลอดทั่วทั้งโดเมนและสามารถควบคุมการกระจายของเส้นกริดบริเวณที่เป็นมุมของโดเมนได้ ทำให้ผลการคำนวณในบริเวณที่เป็นมุมมีความแม่นยำ



รูปที่ 2.8 ลักษณะของกริดที่สร้างจากสมการครอบคลุมที่เป็น (ก) สมการลาปลาซ
(ข) สมการปัวส์ซอง



รูปที่ 2.9 กริดในบริเวณที่เป็นส่วนโค้ง (ก) โค้งครึ่งวงกลม (ข) โค้งพาราโบลา

สำหรับสมการปัวส์ซอง (สมการ (2.24)) เราสามารถกระจายพจน์สำหรับกรณีที่เป็นสองมิติ ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = P(\xi, \eta) \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = Q(\xi, \eta) \quad (2.26)$$

สมการเหล่านี้เป็นสมการ boundary-value problems ซึ่งมีความเหมาะสมในการนำมาใช้ในการสร้างกริด จากสมการ (2.25) นี้มีตัวแปรในพิกัดกระขับขอบเขตคือ $(\xi_i) = (\xi, \eta)$ เป็นตัวแปรตาม (dependent variables) และมีตัวแปรของพิกัดคาร์ทีเซียนคือ $(x_i) = (x, y)$ เป็นตัวแปรอิสระ (independent variables) เนื่องจากเส้นกริดแต่ละเส้นมีค่าเป็นค่าคงที่ ดังนั้นเพื่อความสะดวก เราจึงควรแปลงสมการ (2.24) โดยใช้กฎลูกโซ่ (chain rule) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \quad (2.28)$$

ซึ่งเราสามารถกระจายและจัดรูปสมการ (2.27) และ (2.28) ให้อยู่ในรูปแบบของเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

จากสมการ (2.29) และ (2.30) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง physical space และ computational space ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}^{-1} \quad (2.31)$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

โดยที่ J คือเมตริกซ์จาโคเบียน ซึ่งนิยามโดย

$$J(\xi, \eta) = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (2.33)$$

จากความสัมพันธ์ของกฎลูกโซ่ดังสมการ (2.32) เมื่อประยุกต์ความสัมพันธ์นี้เพื่อหาพจน์ต่างๆ ทางด้านซ้ายมือของสมการปัวส์ซองซึ่งมีอยู่สี่พจน์ด้วยกัน สามารถแปลงตัวแปรและเขียนพจน์แรก คือ $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\frac{\partial y}{\partial \eta}}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} \right) - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\frac{\partial y}{\partial \eta}}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} \right) \quad (2.34)$$

เช่นเดียวกันกับพจน์ $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ ในสมการ (2.34) เราสามารถแปลงพจน์ที่เหลือได้แก่ $\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ และ

$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$ โดยใช้หลักการเดียวกัน

เมื่อได้พจน์ทั้งสี่ $(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \text{ และ } \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2})$ และแทนพจน์เหล่านี้ลงในสมการ

ปัวส์ซอง (สมการ (2.25) และ (2.26)) สามารถเขียนสมการครอบคลุมของการสร้างกริด (grid generation governing equations) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \\ & = -J^2 \left(P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ & = -J^2 \left(P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (2.36)$$

สมการครอบคลุมของการสร้างกริด (2.35) และ (2.36) นี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น (non-linear equations) ซึ่งการแก้สมการสามารถทำได้โดยการทำซ้ำ (iteration) ซึ่งเราสามารถจัดรูปสมการได้เป็น

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = -J^2 \left(P \frac{\partial x}{\partial \xi} + Q \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \quad (2.37)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = -J^2 \left(P \frac{\partial y}{\partial \xi} + Q \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \quad (2.38)$$

โดย

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \quad (2.39)$$

$$\beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (2.40)$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \quad (2.41)$$

สมการครอบคลุมของการสร้างกริด (2.35) และ (2.36) นี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งต้องทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตในการหาผลเฉลย การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตนี้สามารถทำได้สองวิธีด้วยกัน ได้แก่การกำหนดเงื่อนไขขอบแบบ Dirichlet และ Neumann การกำหนดเงื่อนไขขอบแบบ Dirichlet สามารถทำได้โดยการกำหนดตำแหน่งของจุดกริดไว้บนเส้นขอบของโดเมน ในกรณีนี้เราจะกำหนดค่าฟังก์ชันควบคุมเพื่อให้ได้มุมตัดกันและระยะห่างระหว่างกริดตามที่ต้องการ ซึ่งรายละเอียดของการกำหนดค่าฟังก์ชันควบคุมนี้จะกล่าวในหัวข้อย่อยต่อไป และการกำหนดเงื่อนไขขอบแบบ Neumann สามารถทำได้โดยการกำหนดความชันของเส้นพิกัดบนขอบของโดเมนหรือกำหนดมุมที่ตัดกันระหว่างเส้นพิกัดกับเส้นขอบของโดเมน ซึ่งในกรณีนี้เราไม่จำเป็นต้องกำหนดค่าฟังก์ชันควบคุม ($P_i = 0$) อย่างไรก็ตาม เราไม่สามารถควบคุมการกระจายของจุดบนขอบของโดเมนและระยะห่างระหว่างกริดได้

สมการ (2.35) และ (2.36) นี้เป็นสมการครอบคลุมของการสร้างกริดซึ่งอยู่ในรูปแบบทั่วไป เราสามารถหาผลเฉลยของสมการซึ่งเป็นพิกัดคาร์ทีเซียน (x_i) บนกริดที่มีระยะห่างเท่าๆกันบนระนาบการคำนวณได้ด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ในเบื้องต้นนี้ เราจะทำการแปลงสมการ (2.37) และ (2.38) ซึ่งเป็นสมการไม่เชิงเส้นให้เป็นสมการเชิงเส้นเสมือน (quasi-linear equations) โดยการกำหนดค่า α, β และ γ ให้เป็นค่าคงที่ จากนั้นจึงทำการดิสครีไทซ์สมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการเชิงพีชคณิตด้วยวิธี central differencing ซึ่งเป็นวิธีที่มีความแม่นยำเป็นอันดับสอง สำหรับอนุพันธ์อันดับหนึ่งและอันดับสอง ดังนี้

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\delta \xi} \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_{i-1} - 2\varphi_i}{\delta \xi^2} \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1} - \varphi_{i+1,j-1} - \varphi_{i-1,j+1}}{4\delta \xi \delta \eta} \quad (2.44)$$

โดย φ คือค่า x หรือ y

แทนสมการ (2.42) - (2.44) ลงในสมการ (2.37) และ (2.38) จากนั้นกำหนดค่าให้ $\delta\xi = 1$ และ $\delta\eta = 1$ เราจะได้ระบบสมการเชิงพีชคณิตดังนี้

$$\begin{aligned} \alpha[x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}] - \frac{\beta}{2}[x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}] + \\ \gamma[x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}] = -J^2 \left(P \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2} + Q \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \alpha[y_{i+1,j} - 2y_{i,j} + y_{i-1,j}] - \frac{\beta}{2}[y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}] + \\ \gamma[y_{i,j+1} - 2y_{i,j} + y_{i,j-1}] = -J^2 \left(P \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2} + Q \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

หลังจากทำการดิสครีไทซ์สมการครอบคลุมของการสร้างกริดโดยใช้วิธี central differencing แล้ว สามารถเขียนระบบสมการเชิงพีชคณิตดังแสดงในสมการ (2.45) และ (2.46) ซึ่งเราจะกล่าวถึงระเบียบวิธีต่างๆ ในการแก้ระบบสมการนี้ในหัวข้อ 2.4.2 หลังจากที่ได้แก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตนี้แล้วจะได้ผลเฉลยซึ่งเป็นตำแหน่งของแต่ละจุดบนพิกัดคาร์ทีเซียนที่เป็นเส้นกริดของโดเมนตามที่ต้องการ ส่วน $(P_i) = (P, Q)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันควบคumn นั้นทำหน้าที่คล้ายกับเป็น source term ในสมการ (2.54) และ (2.55) ซึ่งถ้าเรากำหนดให้ $P_i = 0$ จะเป็นการแก้สมการลาปลาซ แต่ถ้าเรากำหนดให้ $P_i \neq 0$ จะเป็นการแก้สมการปัวซอง ซึ่งการกำหนดค่าของฟังก์ชันควบคumn ที่เหมาะสมจะกล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

2.4.1 ฟังก์ชันควบคumn

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันควบคumn (P_i) ซึ่งสามารถใช้เพื่อปรับระยะห่างระหว่างเส้นกริด ปรับความสม่ำเสมอของกริด และปรับคุณสมบัติไม่ตั้งฉาก (non-orthogonality) ของกริดได้ การกำหนดค่าที่เหมาะสมให้กับฟังก์ชันควบคumn ก็เพื่อที่จะควบคumn การกระจายจุดหรือเส้นของกริดโดยเราสามารถดึงเส้นสองเส้นหรือจุดสองจุดเข้ามาหากันหรือผลักให้ออกจากกัน และสามารถบิดโค้งได้ เราสามารถหาฟังก์ชันควบคumn ได้โดยมีขั้นตอนต่างๆ ดังต่อไปนี้

จัดรูประบบสมการครอบคลุมของการสร้างกริด (2.45) และ (2.46) ให้อยู่ในรูปเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ S \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

โดยที่

$$R = -\frac{1}{J^2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right\} \quad (2.48)$$

$$S = -\frac{1}{J^2} \left\{ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2 \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \right\} \quad (2.49)$$

ทำการแก้ระบบสมการ (2.47) เพื่อหาฟังก์ชันควบคุมได้ ดังนี้

$$P = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} R - \frac{\partial x}{\partial \eta} S \right) \quad (2.50)$$

$$Q = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} S - \frac{\partial y}{\partial \xi} R \right) \quad (2.51)$$

ทั้งนี้เราสามารถสมมติฟังก์ชันควบคุมให้อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันเอ็กซ์โปเนนเชียลได้ ซึ่งรูปแบบของ Thompson et al. (1985) ที่เป็นรูปแบบที่นิยมใช้กันทั่วไปสามารถแสดงได้ดังนี้

$$P(\xi, \eta) = -\sum_{l=1}^m a_{l1} \cdot \text{sgn}(\xi - \xi_l) \cdot \exp(-b_{l1} \cdot T_l) \quad (2.52)$$

$$Q(\xi, \eta) = -\sum_{l=1}^m a_{l2} \cdot \text{sgn}(\eta - \eta_l) \cdot \exp(-b_{l2} \cdot T_l) \quad (2.53)$$

โดย

$$T_l = \sqrt{c_{l1}(\xi - \xi_l)^2 + c_{l2}(\eta - \eta_l)^2} \quad (2.54)$$

โดยฟังก์ชัน $\text{sgn}(a)$ คือการคิดเฉพาะเครื่องหมายบวกหรือลบของค่าภายในวงเล็บ

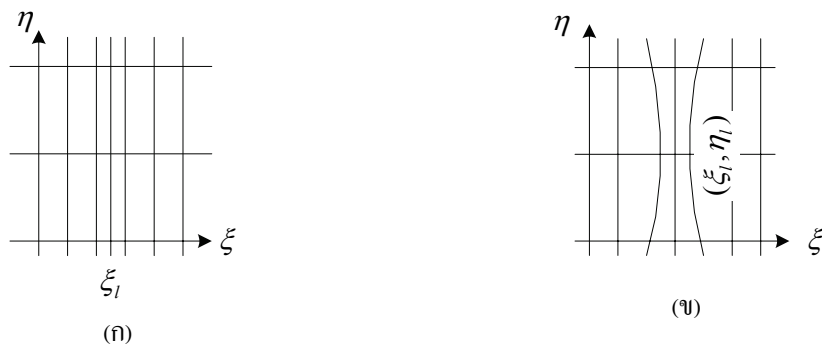
ในการระบุว่าเส้นพิกัดใดระหว่างเส้นพิกัดในทิศทาง ξ และ/หรือ η จะถูกดึงดูด (attraction) กับเส้นพิกัดหรือจุดที่กำหนดไว้เราจะใช้ค่าสัมประสิทธิ์ a_{ln} และ c_{ln} เป็นตัวกำหนด นอกจากนี้ เราสามารถควบคุมขนาด (strength) ที่ใช้ในการดึงดูดได้โดยการใช้ตัวประกอบ b_{ln} (decay factor) ยกตัวอย่างเช่น กรณีที่เส้นพิกัด ξ ถูกดึงดูด ก็จะมีค่าสัมประสิทธิ์ a_{l1} ไม่เท่ากับ

ศูนย์ เช่นเดียวกัน ถ้าเส้นพิกัด η ถูกดึงดู ก็จะมีค่าสัมประสิทธิ์ a_{i2} ไม่เท่ากับศูนย์ การดึงดูของเส้นพิกัดในทิศของเส้นพิกัดหรือจุดได้แสดงไว้ในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 สัมประสิทธิ์ที่ใช้ในฟังก์ชันควบคุม P_i

เส้นที่ถูกดึงดู	ระนาบ เส้น หรือจุด ที่ดึงดูระนาบข้างเคียง
$a_{i1} \neq 0$ สำหรับเส้น ξ เป็นค่าคงที่	$a_{i1} \neq 0, a_{i2} = 0$ สำหรับเส้น $\xi = \xi_i$ $c_{i1} \neq 0, c_{i2} = 0$
$a_{i2} \neq 0$ สำหรับเส้น η เป็นค่าคงที่	$a_{i1} = 0, a_{i2} \neq 0$ สำหรับเส้น $\eta = \eta_i$ $c_{i1} = 0, c_{i2} \neq 0$
	$a_{i1} \neq 0, a_{i2} \neq 0$ สำหรับจุด $(\xi, \eta) = (\xi_i, \eta_i)$ $c_{i1} \neq 0, c_{i2} \neq 0$

รูปที่ 2.10 แสดงให้เห็นผลของฟังก์ชันดึงดูแบบสองมิติ ซึ่งเป็นการดึงดูเส้นพิกัดที่ ξ เป็นค่าคงที่ ซึ่งเป็นผลของฟังก์ชัน P โดยมีสัมประสิทธิ์ $a_{i1} \neq 0$ สำหรับในรูปที่ 2.10 (ก) เส้นพิกัดที่ ξ เป็นค่าคงที่ที่ถูกดึงดูไปหาเส้น $\xi = \xi_i$ ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์ $c_{i1} \neq 0$ และ $c_{i2} = 0$ สำหรับรูปที่ 2.10 (ข) เส้นพิกัดที่ ξ เป็นค่าคงที่ที่ถูกดึงดูไปหาจุด $(\xi, \eta) = (\xi_i, \eta_i)$ ซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์ $c_{i1} \neq 0$ และ $c_{i2} \neq 0$ ทั้งนี้สำหรับฟังก์ชัน P จะไม่มีการดึงดูของเส้นที่ η เป็นค่าคงที่



รูปที่ 2.10 การใช้ฟังก์ชันควบคุมในการ (ก) ดึงเส้น (ข) ดึงจุด

หลังจากดิสกรีไทซ์สมการครอบคลุมของการสร้างกริดให้เป็นระบบสมการเชิงพีชคณิต และเลือกฟังก์ชันควบคุมแล้ว ในหัวข้อต่อไปจะแสดงการแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตเพื่อหาผลเฉลยของสมการ

2.4.2 การแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิต

การแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตสามารถแบ่งได้เป็นสองแบบด้วยกันคือวิธีตรงและวิธีทำซ้ำ วิธีตรงเช่น การกำจัดแบบเกาส์, Thomas algorithm หรือ Chelosky method เป็นต้น ส่วนวิธีทำซ้ำเช่น การทำซ้ำจาโคบี การทำซ้ำแบบจุดของเกาส์ซีเดล การทำซ้ำแบบเส้นของเกาส์ซีเดล วิธี

point successive over-relaxation (PSOR) หรือวิธี alternating direction implicit (ADI) เป็นต้น

การแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตด้วยวิธี explicit มีข้อเสียคือใช้เวลามากกว่าวิธีทำซ้ำ และมีความไวต่อค่าความคลาดเคลื่อนอันเนื่องมาจากการปัดเศษ (round-off errors) ยิ่งในกรณีที่เป็น การแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ ค่าความคลาดเคลื่อนนี้จะกลายเป็นปัญหาที่สำคัญยิ่ง ในขณะที่ค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากวิธีทำซ้ำจะถูกแก้ไขในแต่ละรอบการทำซ้ำ ดังนั้นจึงไม่ก่อให้เกิดปัญหา ดังกล่าว

ในส่วนของการสร้างกริดโดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติกนี้ วิธีที่เหมาะสมในการนำมาแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตคือ วิธี point successive over-relaxation หรือ PSOR ซึ่งวิธีนี้มีขั้นตอนเช่นเดียวกับวิธีการทำซ้ำแบบจุดของเกาส์ซีเดล แต่สามารถเร่งอัตราการลู่เข้าของผลเฉลยได้ โดยมีขั้นตอนดังนี้

จากระบบสมการเชิงพีชคณิต (2.45) และ (2.46) จัดสมการให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$x_{i,j}^{temporary} = \frac{1}{2} \left\{ \alpha [x_{i+1,j} + x_{i-1,j}] - \frac{\beta}{2} [x_{i+1,j+1} - x_{i-1,j+1} - x_{i+1,j-1} + x_{i-1,j-1}] + \gamma [x_{i,j+1} + x_{i,j-1}] + J^2 \left(P \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2} + Q \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2} \right) \right\} / (\alpha + \gamma) \quad (2.55)$$

$$y_{i,j}^{temporary} = \frac{1}{2} \left\{ \alpha [y_{i+1,j} + y_{i-1,j}] - \frac{\beta}{2} [y_{i+1,j+1} - y_{i-1,j+1} - y_{i+1,j-1} + y_{i-1,j-1}] + \gamma [y_{i,j+1} + y_{i,j-1}] + J^2 \left(P \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2} + Q \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2} \right) \right\} / (\alpha + \gamma) \quad (2.56)$$

และ

$$x_{i,j}^{new} = \omega x_{i,j}^{temporary} + (1 - \omega) x_{i,j}^{old} \quad (2.57)$$

$$y_{i,j}^{new} = \omega y_{i,j}^{temporary} + (1 - \omega) y_{i,j}^{old} \quad (2.58)$$

โดย ω คือ ตัวประกอบ relaxation ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.8

ตัวประกอบ relaxation (ω) ในวิธี successive over-relaxation (SOR) ใช้สำหรับการเปลี่ยนอัตราการลู่เข้าของผลเฉลย ซึ่งจะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 2 ในกรณีที่ ω มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 จะเรียกว่า under-relaxation ซึ่งใช้สำหรับการหน่วงผลเฉลยให้มีอัตราการลู่เข้าช้าลง เพื่อลดการแกว่งของผลเฉลยทำให้ผลเฉลยมีเสถียรภาพมากขึ้น และป้องกันการลู่ออกของผลเฉลย มักใช้กับปัญหาไม่เชิงเส้น ในกรณีที่ ω มีค่าอยู่ระหว่าง 1 ถึง 2 จะเรียกว่า over-relaxation ใช้สำหรับการเร่งผลเฉลยให้มีอัตราการลู่เข้าเร็วขึ้น ทั้งนี้ ควรเลือกค่า ω ให้มีความเหมาะสมกับกายภาพของ

ปัญหานั้น สำหรับการสร้างกริดโดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบอิลิปติก ค่า ω ที่เหมาะสมจะมีค่าเท่ากับ 1.8 (Melaen (1990))

เมื่อใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหาผลเฉลยของสมการครอบคลุมของการสร้างกริด (สมการ (2.25) และ (2.26)) แล้ว จะได้ผลเฉลยเป็นตำแหน่งของกริด $x(\xi, \eta)$ และ $y(\xi, \eta)$ ตามที่ต้องการ

บทที่ 3

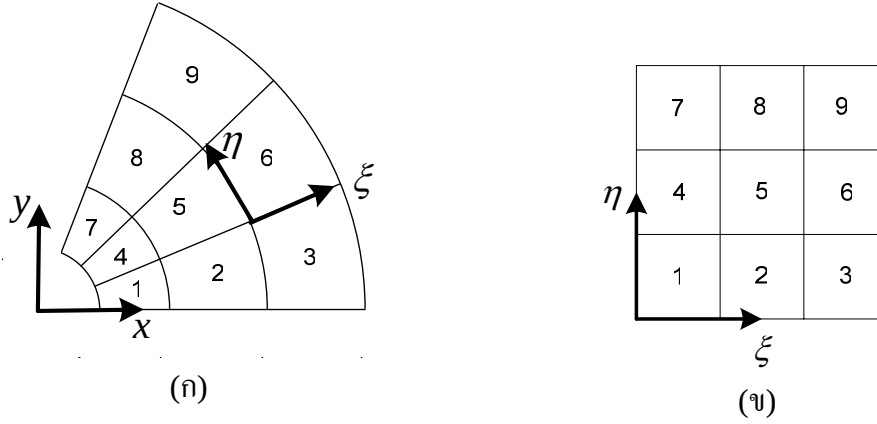
ทฤษฎีการคำนวณ

ในบทนี้ จะกล่าวถึงทฤษฎีและสมการที่ใช้ในการคำนวณโดยย่อ โดยสามารถแบ่งเนื้อหาในบทได้เป็น 2 ส่วนใหญ่ๆ คือส่วนที่เกี่ยวข้องกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และส่วนที่เกี่ยวข้องกับแบบจำลองความปั่นป่วนที่ใช้ในงานวิจัย

3.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์บนพิกัดกระชับขอบเขต

ระบบพิกัดกระชับขอบเขต (body-fitted coordinates) มีเส้นพิกัดที่มีลักษณะโค้งสอดคล้องกันกับลักษณะของรูปร่างของโดเมนที่พิจารณาและมีตัวแปรอิสระคือ $(\xi_i) = (\xi, \eta)$ ซึ่งมีทิศทางในแต่ละจุดกริดเปลี่ยนแปลงไปตามลักษณะรูปร่างของโดเมน พิกัดกระชับขอบเขตนี้สามารถนำไปใช้กับโดเมนที่มีรูปร่างซับซ้อนได้ทุกประเภท รวมไปถึงโดเมนที่มีการเคลื่อนที่ของขอบด้วย โดยตำแหน่งของจุดบนโดเมนมีความสัมพันธ์กันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one to one) กับพิกัดคาร์ทีเซียน นั่นคือสามารถเขียนในรูปฟังก์ชัน $\xi_i(x_i)$ และ $x_i(\xi_i)$

สำหรับในระบบพิกัดกระชับขอบเขต การคำนวณเพื่อหาผลเฉลยของปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข จะกระทำบนพื้นที่ทางกายภาพ (physical space) ร่วมกับพื้นที่การคำนวณ (computational space) (รูปที่ 3.1) ซึ่งโดยทั่วไป เราเลือกที่จะทำการดิสครีไทซ์สมการครอบคลุมที่แปลงพิกัดแล้วบนพื้นที่การคำนวณ ซึ่งคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ของรูปร่าง (geometric coefficients) จากลักษณะของกริดบนพื้นที่ทางกายภาพ การแปลงสมการครอบคลุมจากพิกัดคาร์ทีเซียนซึ่งมีตัวแปรอิสระคือ $(x_i) = (x, y)$ ไปเป็นพิกัดกระชับขอบเขตซึ่งมีตัวแปรอิสระคือ $(\xi_i) = (\xi, \eta)$ จะอาศัยกฎลูกโซ่ แล้วทำการดิสครีไทซ์และแก้ระบบสมการเชิงพีชคณิตบนกริดสี่เหลี่ยมในพื้นที่การคำนวณซึ่งมีลักษณะเช่นเดียวกับการดิสครีไทซ์บนพิกัดฉากปกติ (เช่นพิกัดคาร์ทีเซียนหรือพิกัดทรงกระบอก) ซึ่งเมื่อได้ผลเฉลยแล้วสามารถส่งค่าของผลเฉลยกลับไปยังตำแหน่งต่างๆของจุดกริดบนพื้นที่ทางกายภาพได้ทันที



รูปที่ 3.1 พื้นที่บนพิกัดที่ใช้ในการคำนวณ (ก) พื้นที่ทางกายภาพ (physical space) (ข) พื้นที่การคำนวณ (computational space)

3.1.1 การแปลงพิกัด

การแปลงพิกัดของสมการครอบคลุมปัญหาการไหล และเงื่อนไขขอบจากพิกัดคาร์ทีเซียนให้อยู่ในพิกัดกระขับขอบเขตสามารถกระทำโดยใช้กฎลูกโซ่ ซึ่งการแปลงสมการนี้จะเปลี่ยนตัวแปรอิสระในสมการครอบคลุมจาก x และ y ไปเป็น ξ และ η ตามลำดับ ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

รูปแบบทั่วไปของสมการครอบคลุมพื้นฐาน (governing equations) สำหรับปัญหาการไหลแบบสองมิติในพิกัดคาร์ทีเซียนสามารถแสดงได้ในรูปของตัวแปร ϕ ดังต่อไปนี้

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho u \phi)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \phi)}{\partial y}}_{\text{Convection Term}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)}_{\text{Diffusion Term}} + \underbrace{S_\phi}_{\text{Source Term}} \quad (3.1)$$

โดยที่ Γ คือสัมประสิทธิ์การแพร่ (diffusion coefficient)

ซึ่งสมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x และในแนวแกน y คือ

$$\frac{\partial(\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v u)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v v)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + S_v \quad (3.3)$$

และสมการความต่อเนื่อง คือ

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3.4)$$

พิจารณาพจน์แรกทางขวามือของสมการ (3.2) เมื่อใช้กฎลูกโซ่ สามารถแปลงสมการได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (3.5)$$

จากนิยามของเมตริกซ์จาโคเบียนในบทที่ 2 (สมการ (2.33)) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.6)$$

เช่นเดียวกัน เมื่อพิจารณาพจน์ที่สองทางขวามือของสมการ (3.2) และใช้กฎลูกโซ่ในการแปลงสมการ จะได้

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (3.7)$$

นำพจน์การแพร่ทั้งสองกลับไปแทนค่าในสมการ (3.2) จะสามารถจัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} = \\ \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial y}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial y}{\partial \xi} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u \end{aligned} \quad (3.8)$$

พิจารณาพจน์เชิงอนุพันธ์ $\mu \frac{\partial u}{\partial x}$ และ $\mu \frac{\partial u}{\partial y}$ ในสมการข้างบน ทำการแปลงพิกัดด้วยวิธีเช่นเดิม จะได้

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{1}{J} \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.9)$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{1}{J} \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (3.10)$$

แทนค่าสมการ (3.9) และ (3.10) ลงในสมการ (3.8) และจัดรูปใหม่ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} = & \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\mu}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \left[\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] \right\} + \\ & \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{\mu}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] \right\} - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u \end{aligned} \quad (3.11)$$

เราสามารถลดรูปสมการ (3.11) โดยใช้ค่า α, β และ γ จากสมการ (2.39) – (2.41) ซึ่งจะได้เป็น

$$\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\mu \alpha}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\mu \beta}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{\mu \gamma}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\mu \beta}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right\} - \frac{\partial p}{\partial x} + S_u \quad (3.12)$$

สำหรับพจน์การพาทั้ง 2 พจน์ทางซ้ายมือของสมการ (3.12) สามารถแปลงพิกัดโดยใช้กฎลูกโซ่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} = \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left((\rho uu) \frac{\partial y}{\partial \eta} - (\rho vu) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\rho vu) \frac{\partial x}{\partial \xi} - (\rho uu) \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right] \quad (3.13)$$

และพจน์ $\frac{\partial p}{\partial x}$ สามารถแปลงพิกัดได้ดังนี้

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{1}{J} \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{1}{J} \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \quad (3.14)$$

ดังนั้น จะได้สมการอนุพันธ์โมเมนตัมในแนวแกน x ที่แปลงพิกัดแล้วดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\rho uu) \frac{\partial y}{\partial \eta} - (\rho vu) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\rho vu) \frac{\partial x}{\partial \xi} - (\rho uu) \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = & \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mu \alpha}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\mu \beta}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu \gamma}{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\mu \beta}{J} \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + JS_u \end{aligned} \quad (3.15)$$

โดยใช้วิธีเดียวกันนี้ จะได้สมการอนุพันธ์โมเมนต์ในแนวแกน y ที่แปลงพิถัดแล้ว คือ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\rho uv) \frac{\partial y}{\partial \eta} - (\rho v v) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\rho v v) \frac{\partial x}{\partial \xi} - (\rho u v) \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = \\ & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\mu \alpha}{J} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\mu \beta}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\mu \gamma}{J} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{\mu \beta}{J} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) + JS_v \end{aligned} \quad (3.16)$$

หรือเขียนในรูปแบบทั่วไปของตัวแปร ϕ คือ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left((\rho u \phi) \frac{\partial y}{\partial \eta} - (\rho v \phi) \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((\rho v \phi) \frac{\partial x}{\partial \xi} - (\rho u \phi) \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = \\ & \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\Gamma \alpha}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{\Gamma \beta}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\Gamma \gamma}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \frac{\Gamma \beta}{J} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) + JS_\phi \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.1.2 สัมประสิทธิ์ของรูปร่างและตัวประกอบของความเร็ว

สัมประสิทธิ์ของรูปร่าง (geometric coefficients) ที่มีบทบาทเกี่ยวข้องกับการแปลงพิถัด ได้แก่ covariant tensor component (g_{ij}), contravariant tensor component (g^{ij}) และ mixed tensor component (g^i_j) ซึ่งสามารถนิยามสัมประสิทธิ์ทั้งสามในรูปของเทนเซอร์ได้ดังนี้

$$g_{ij} = \bar{e}_{(i)} \cdot \bar{e}_{(j)} = J_i^k J_j^k \quad (3.18)$$

$$g^{ij} = \bar{e}^{(i)} \cdot \bar{e}^{(j)} = \bar{J}_k^i \bar{J}_k^j \quad (3.19)$$

$$g^i_j = \bar{e}^{(i)} \cdot \bar{e}_{(j)} = \bar{J}_k^i J_j^k = \delta_j^i \quad (3.20)$$

เมื่อ $\bar{e}_{(i)}$ คือ covariant basis vector โดย $\bar{e}_{(i)} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \bar{i}_k = J_i^k \bar{i}_k$

$\bar{e}^{(i)}$ คือ contravariant basis vector โดย $\bar{e}^{(i)} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \bar{i}_k = \bar{J}_k^i \bar{i}_k$

และ δ_j^i คือ Kronecker delta

สำหรับความเร็วสามารถแยกตัวประกอบเป็นเวกเตอร์ความเร็ว covariant หรือ contravariant ได้โดยใช้นิยามของ basis vector ดังนี้

$$\bar{U} = U_i \bar{e}^{(i)} = U^i \bar{e}_{(i)} \quad (3.21)$$

เมื่อ $\bar{U}$ คือเวกเตอร์ความเร็ว โดย $\bar{U} = u_i \bar{i}^i = u^i + v^j$ สำหรับพิกัดคาร์ทีเซียน
 U'_i คือตัวประกอบ covariant ของ $\bar{U}$
 U'^i คือตัวประกอบ contravariant ของ $\bar{U}$

ความสัมพันธ์ระหว่างส่วนประกอบความเร็วแบบต่างๆ (คาร์ทีเซียน, covariant และ contravariant) สามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

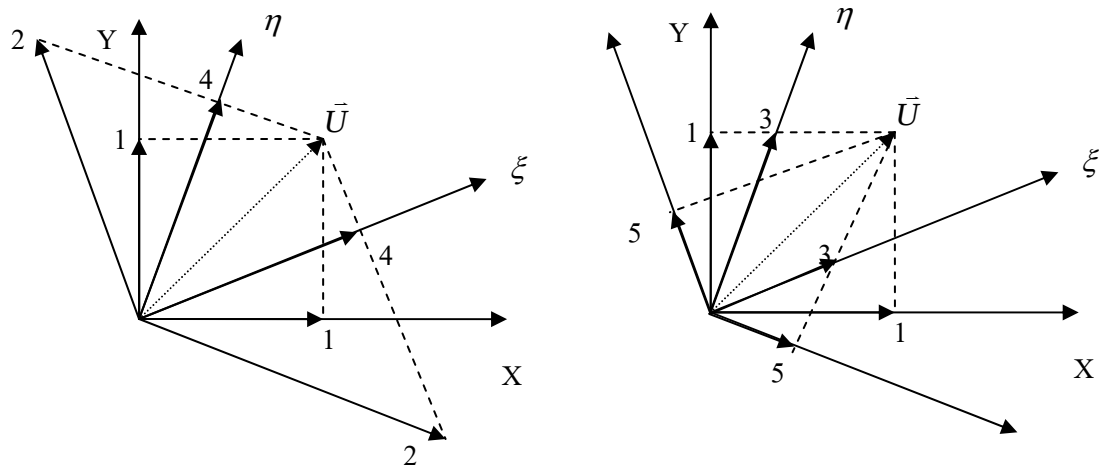
$$U'_i = J_i^j u_j = \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} u_j \quad (3.22)$$

$$U'^j = \bar{J}_j^i u_i = \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} u_i \quad (3.23)$$

$$U'_i = g_{ij} U'^j = J_i^k J_j^k U'^j \quad (3.24)$$

$$U'_i = g^{ij} U'_j = \bar{J}_i^k \bar{J}_k^j U'_j \quad (3.25)$$

ซึ่งทิศทางและขนาดของตัวประกอบความเร็วเหล่านี้แสดงในรูปที่ 3.2



- 1 – Cartesian velocity component, u_i
- 2 – covariant velocity component, U'_i
- 3 – contravariant velocity component, U'^i
- 4 – covariant velocity projection, V_i
- 5 – contravariant velocity projection, V^i

รูปที่ 3.2 ทิศทางและขนาดของตัวประกอบความเร็วแบบต่างๆ ใน 2 มิติ

ถ้านำเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\bar{e}_i = \frac{\bar{e}_{(i)}}{|\bar{e}_{(i)}|}$ และ $\bar{e}^i = \frac{\bar{e}^{(i)}}{|\bar{e}^{(i)}|}$ มาช่วยในการนิยามตัวประกอบความเร็วแบบ covariant และ contravariant จากนั้นจึงแทนค่า velocity components ด้วย velocity projections ตามแนวแกน หรือตั้งฉากกับพื้นผิว จะได้

$$V_i = \bar{U} \cdot \bar{e}_i = \frac{u_k J_k^i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (3.26)$$

$$V^i = \bar{U} \cdot \bar{e}^i = \frac{\bar{U} \cdot \bar{A}^{(i)}}{|\bar{A}^{(i)}|} = \frac{u_k A_k^i}{|\bar{A}^{(i)}|} \quad (3.27)$$

เมื่อ $\bar{A}^{(i)}$ คือ เวกเตอร์พื้นที่
 $\sqrt{g_{ii}}$ คือ $|\bar{e}^{(i)}|$ ซึ่งอาจแทนด้วยสัญลักษณ์ h_i

3.1.3 สมการครอบคลุมสำหรับการแก้ปัญหากลไหล

สมการครอบคลุม (governing equations) สำหรับปัญหากลไหลโดยทั่วไปที่แปลงให้อยู่ในพิกัดกระขับขอบเขตแล้ว สามารถเขียนในรูปแบบเทนเซอร์ได้ ดังต่อไปนี้

สมการความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} (\rho \hat{U}^i) = 0 \quad (3.28)$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} (\rho \hat{U}^i u_k) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\mu G^{ij} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_j} \right) - \frac{\partial p}{\partial \xi_i} \bar{J}_k^i J + \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\mu \bar{J}_m^i \omega_k^m) + S_{u_k} J \quad (3.29)$$

สมการสเกลาร์

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} (\rho \hat{U}^i \phi) = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\Gamma G^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \xi_j} \right) + S_\phi J \quad (3.30)$$

เมื่อ $\hat{U}^i$ คือ normal flux components โดย $\hat{U}^i = J g^{ij} \sqrt{g_{jj}} V_j$

$$G^{ij} = J \bar{J}_k^i \bar{J}_k^j = J g^{ij}$$

$$\omega_k^m = \frac{\partial u_m}{\partial \xi_j} \bar{J}_k^j J$$

โดยที่ตัวแปรตามในสมการโมเมนตัมคือตัวประกอบความเร็วในพิกัดคาร์ทีเซียน

ในกรณีที่มีการไหลเป็นแบบปั่นป่วน ก็สามารถแปลงพิกัดสมการครอบคลุมจากพิกัดคาร์ทีเซียนให้กลายเป็นสมการในพิกัดกระขับขอบเขต ด้วยวิธีเช่นเดียวกับที่กล่าวมาแล้ว

สำหรับการดิสครีไทซ์โดยใช้ระเบียบไฟในตัวolum สำหรับสมการข้างต้นสามารถทำได้โดยง่ายใน computational space โดยใช้วิธีเช่นเดียวกันกับการดิสครีไทซ์ปกติในพิกัดฉากทั่วไป ซึ่งรายละเอียดสามารถหาได้จาก textbook มาตรฐานทางด้าน Computational Fluid Dynamics เช่น Patankar (1980), Versteeg and Malalasekera (1995) เป็นต้น ซึ่งในที่นี้จะแสดงเฉพาะสรุปของสมการที่จำเป็นต้องใช้ที่ผ่านการดิสครีไทซ์แล้ว ดังต่อไปนี้

สมการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$a_p u_{k,p} = \sum_{nb} a_{nb} u_{k,nb} - \left(J \bar{J}_k^i \frac{\partial p}{\partial \xi_i} \right)_p + B_{u_k} \quad (3.31)$$

เมื่อ B_{u_k} รวมเทอมที่เกิดจากความโค้งของพิกัดเข้าไปด้วย นั่นคือ

$$B_{u_k} = B_{NO,u_k} + \int_{\delta V} \frac{\partial}{\partial \xi_i} (\mu \bar{J}_m^i \omega_k^m) dV + S_{u_k} J \quad (3.32)$$

$$\text{โดย } B_{NO,u_k} = \left[\mu G^{12} \frac{\partial u_k}{\partial \eta} \right]_w^e + \left[\mu G^{21} \frac{\partial u_k}{\partial \xi} \right]_s^n$$

สมการของความดันแก้ไข (pressure-correction equation)

$$a_p p'_p = \sum_{nb} a_{nb} p'_{nb} + S_p \quad (3.33)$$

เมื่อ S_p คือเทอม mass source

ในกรณีของการไหลแบบปั่นป่วน ถ้าเราจำลองแบบสมการการไหลโดยใช้แบบจำลองความปั่นป่วน standard $k-\varepsilon$ (รายละเอียดอยู่ในหัวข้อ 3.2) ค่าความหนืด μ ในสมการอนุรักษ์โมเมนตัมจะถูกแทนด้วย turbulent viscosity (μ_t) และจะต้องแก้สมการครอบคลุมอีก 2 สมการ คือสมการ turbulent kinetic energy (k) และสมการ dissipation rate ของ turbulent kinetic energy (ε) ดังนี้

สมการ turbulent kinetic energy

$$a_p k_p = \sum_{nb} a_{nb} k_{nb} + S_k \quad (3.34)$$

$$\text{เมื่อ } a_p = \sum a_{nb} + \frac{\rho \varepsilon}{k}$$

$$S_k = S_{NO,k} + \frac{\mu_t}{J^2} \left[(\omega_j^i)^2 + \omega_j^i \omega_i^j \right] \text{ โดย } S_{NO,k} = \frac{\mu_t}{\sigma_k} \left[G^{12} \frac{\partial k}{\partial \eta} \right]_w^e + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \left[G^{21} \frac{\partial k}{\partial \xi} \right]_s^n$$

สมการ dissipation rate ของ turbulent kinetic energy

$$a_p \varepsilon_p = \sum_{nb} a_{nb} \varepsilon_{nb} + S_\varepsilon \quad (3.35)$$

$$\text{เมื่อ } a_p = \sum a_{nb} + C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon}{k}$$

$$S_\varepsilon = S_{NO,\varepsilon} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \frac{\mu_t}{J^2} \left[(\omega_j^i)^2 + \omega_j^i \omega_i^j \right] \text{ โดย}$$

$$S_{NO,\varepsilon} = \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \left[G^{12} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} \right]_w^e + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \left[G^{21} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} \right]_s^n$$

รายละเอียดของค่าคงที่ในสมการ (3.34) และ (3.35) คือ $C_{\varepsilon 1}$, $C_{\varepsilon 2}$, σ_k และ σ_ε อยู่ในหัวข้อ 3.2 และสำหรับการคำนวณผลกระทบเนื่องจากการไหลในบริเวณใกล้ผนังจะใช้ wall function ช่วยในการคำนวณ

3.1.4 ขั้นตอนการคำนวณ

ขั้นตอนการคำนวณโดยใช้สมการที่กล่าวมาทั้งหมด สามารถกล่าวโดยย่อได้ดังต่อไปนี้

- 1) คำนวณสัมประสิทธิ์ของรูปร่างสำหรับกริดที่ใช้
- 2) เติมนำเริ่มต้นของตัวแปรทุกตัว
- 3) แก้ไขค่าที่เกี่ยวข้องให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ
- 4) คำนวณสัมประสิทธิ์และ source term ในสมการดิสครีไทซ์ของโมเมนตัมทั้งหมด จากนั้นจึงแก้สมการโมเมนตัมเพื่อหาค่าตัวประกอบความเร็วคาร์ทีเซียน
- 5) คำนวณสัมประสิทธิ์และ source term ในสมการดิสครีไทซ์ของความดันแก้ไข จากนั้นจึงแก้สมการเพื่อหาค่าความดันแก้ไข ซึ่งค่าความดันในโดเมนจะถูกปรับปรุงค่าโดยค่าความดันแก้ไขเหล่านี้
- 6) แก้ไขค่าความเร็วจากความดันที่คำนวณได้
- 7) ในกรณีของการไหลแบบปั่นป่วน ให้แก้สมการของ k และ ε
- 8) แก้สมการสเกลาร์อื่นๆ (ถ้ามี)
- 9) ย้อนกลับไปขั้นตอน 3 และทำซ้ำจนกระทั่งผลลัพธ์ลู่เข้า (convergent)

ในงานวิจัยนี้ ตัวประกอบความเร็วคาร์ทีเซียนถูกเลือกใช้เป็นตัวแปรตามในสมการที่ใช้ในการคำนวณร่วมกับกริดแบบเดียวกัน เนื่องจากความง่ายของสมการและความสะดวกในการดิสครี

ไทซ์ ซึ่งถ้าใช้ตัวประกอบความเร็วประเภทอื่น เช่น covariant velocity projection การดิสครีไทซ์สมการครอบคลุมค่อนข้างจะมีความยุ่งยากกว่า เนื่องจากทิศทางที่เปลี่ยนไปมาของตัวประกอบความเร็วดังกล่าว (Karki (1985) ใช้เทคนิคการดิสครีไทซ์จากสมการโมเมนตัมที่มีตัวประกอบความเร็วคาร์ทีเซียนเป็นตัวแปรตามแล้วใช้หลักการของ local velocities เข้าช่วยในการแปลงสมการ)

สำหรับ numerical scheme ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ มีทั้งที่เป็น first order เช่น upwind, hybrid, power-law และ second order เช่น SOU และ QUICK โดย solver ที่ใช้คือ TDMA (Tri-Diagonal Matrix Algorithm) และในส่วนของ การ coupling ความเร็วและความดัน เพื่อให้สอดคล้องกับสมการความต่อเนื่องจะใช้ขั้นตอนวิธี SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) ซึ่งรายละเอียดของ SIMPLE algorithm รวมถึง numerical scheme และ solver ที่กล่าวมาทั้งหมดสามารถดูได้จาก Versteeg and Malalasekera (1995)

3.2 แบบจำลองความปั่นป่วน

ผลงานวิจัยที่ถูกนำเสนอในช่วง 2-3 ทศวรรษที่ผ่านมาเกี่ยวกับการจำลองปรากฏการณ์การไหลแบบปั่นป่วนด้วยแบบจำลองความปั่นป่วน (turbulence models) ได้มีการพัฒนาอย่างต่อเนื่องโดยนักวิจัยจำนวนมาก ซึ่งการที่แบบจำลองความปั่นป่วนเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมเป็นอย่างมาก ก็เนื่องจากวิธีนี้เป็นวิธีที่นับว่ามีความซับซ้อนน้อยที่สุด ที่จะใช้อธิบายลักษณะทางกายภาพของการไหลแบบปั่นป่วนได้ ซึ่งตัวอย่างของแบบจำลองความปั่นป่วนก็เช่น แบบจำลองแบบ zero-equation, one-equation และ two-equation เป็นต้น

ความยุ่งยากของการพัฒนาแบบจำลองความปั่นป่วน ก็คือ การนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาใช้ในการอธิบายลักษณะทางกายภาพและพฤติกรรมของการไหลแบบปั่นป่วนในรูปสมการว่าจะสามารถอธิบายได้อย่างไร ซึ่งได้มีนักวิจัยหลายท่านได้เสนอแนวคิดต่างๆ โดยมุ่งหวังที่จะได้แบบจำลองที่เหมาะสมสำหรับอธิบายการไหลแบบปั่นป่วน เช่น Lumley (1978), Speziale (1989) และ Hallback et al. (1995) เป็นต้น

ข้อด้อยที่สำคัญของแบบจำลอง zero และ one-equation ก็คือ เราจะต้องสมมติหรือคาดคะเนล่วงหน้าเพื่อประมาณค่า length scale ที่ถูกต้อง แต่สำหรับแบบจำลอง two-equation จะเพิ่มสมการ transport สำหรับ length scale หรือ ปริมาณที่เกี่ยวข้องกับความปั่นป่วนอื่นๆ เพื่อช่วยในการหาผลเฉลยที่แม่นยำมากขึ้น

ในบรรดาแบบจำลองที่สร้างจากแนวคิด eddy viscosity นั้น แบบจำลอง two-equation นับได้ว่าเป็นแบบจำลองที่ได้รับความนิยมมากที่สุดในการประยุกต์ใช้ทางวิศวกรรม โดยแบบจำลอง two-equation จะใช้ turbulence scale สองค่า เพื่อสร้างเป็นสมการของแบบจำลอง โดยที่แนวคิดการสร้างแบบจำลองแบบนี้จะใช้ Boussinesq approximation ร่วมกับสมการ

turbulent kinetic energy (k) และปริมาณ auxiliary อื่นๆ เช่น dissipation rate ของ turbulent kinetic energy (ε), turbulence length scale (ℓ) หรือ specific dissipation rate (ω) เป็นต้น สำหรับในที่นี้ จะกล่าวถึงเฉพาะแบบจำลองความปั่นป่วนที่ใช้ในงานวิจัย 3 แบบจำลอง นั่นคือแบบจำลองความปั่นป่วน standard $k-\varepsilon$, $k-\omega$ และ $k-\varepsilon-\gamma$

3.2.1 แบบจำลอง standard $k-\varepsilon$

แบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ ของ Launder and Spalding (1972) ถือว่าเป็นแบบจำลองที่ได้รับความนิยมจากนักวิจัยจำนวนมาก เนื่องจากความง่ายของสมการที่ใช้และความสะดวกในการคำนวณ ซึ่งจากผลงานวิจัยต่างๆ พบว่าแบบจำลองนี้สามารถทำนายปรากฏการณ์การไหลปั่นป่วน ซึ่งให้ความถูกต้องในระดับหนึ่ง โดยสามารถใช้ได้ดีเฉพาะในบริเวณ free stream หรือบริเวณการไหลที่ห่างจากผนัง สมการ transport สำหรับแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

สมการ turbulent kinetic energy

การจำลองสมการ turbulent kinetic energy ถูกเสนอโดย Prandtl ในปี ค.ศ. 1945 (อ้างอิงใน Wilcox (1993)) ซึ่งได้ประมาณค่า characteristic velocity scale, v_{mix} สำหรับการไหลแบบปั่นป่วนโดยให้ v_{mix} มีค่าประมาณ $\ell_{\text{mix}} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$ และได้กำหนดให้ค่า turbulent kinetic energy ของ turbulent fluctuation ต่อหนึ่งหน่วยมวล (k) มีความสัมพันธ์กับค่า turbulent velocity fluctuation ดังนี้

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2}) \quad (3.36)$$

ซึ่งเราสามารถเขียน eddy viscosity ในเทอมของความหนาแน่น (ρ), turbulence length scale (ℓ) และ turbulent kinetic energy ดังนี้

$$\mu_t = \text{Constant} \cdot \rho k^{\frac{1}{2}} \ell \quad (3.37)$$

การหาค่า k มาแทนลงในสมการ (3.37) ทำให้ได้โดยอาศัยพจน์ของ Reynolds stress tensor ซึ่งจัดอยู่ในรูป

$$R_{ii} = -\rho \overline{u'_i u'_i} = -2\rho k \quad (3.38)$$

จากสมการ (3.38) จะเห็นได้ว่า ถ้าค่า Reynolds stress tensor แปรผันตามค่า kinetic energy ต่อหน่วยปริมาตรของ turbulent fluctuation แล้ว จะได้ว่าค่า k ที่ถูกต้องควรเรียกว่า

specific turbulent kinetic energy แต่บางครั้งเราอาจเรียกว่า turbulent kinetic energy ง่ายๆก็ได้ และสมการ Reynolds stress สามารถแสดงได้ดังสมการ (3.39)

$$\bar{u}_k \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} = -R_{ik} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - R_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \varepsilon_{ij} - \Pi_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} + C_{ijk} \right] \quad (3.39)$$

เมื่อแทน R_{ij} จากสมการ (3.38) ลงในสมการ (3.39) แล้วจัดรูปใหม่จะได้เป็น

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \underbrace{R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{(2)} + \underbrace{\rho \varepsilon}_{(3)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right]}_{(4)} - \underbrace{\frac{1}{2} \overline{\rho u'_i u'_i u'_j}}_{(5)} - \underbrace{\overline{p' u'_j}}_{(6)} \quad (3.40)$$

เมื่อค่า ε คือ dissipation ต่อหนึ่งหน่วยมวล ซึ่งสามารถนิยามโดยความสับสนี้ ดังต่อไปนี้

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \quad (3.41)$$

เทอมต่างๆ ในสมการ (3.40) แสดงถึงกระบวนการทางกายภาพที่เกิดจากการเคลื่อนที่แบบปั่นป่วนในการไหล ดังนี้

เทอมที่ 1 คือ เทอมการพา (convection terms) ซึ่งบอกถึงการเปลี่ยนแปลงของค่า k ตามการเคลื่อนที่ของอนุภาคของไหล

เทอมที่ 2 คือ เทอม production ซึ่งแทนอัตราการส่งถ่ายด้วยพลังงานจลน์จาก mean flow ไปยัง turbulent flow ซึ่งเขียนได้เป็น $R_{ij} \bar{S}_{ij}$

เทอมที่ 3 คือ เทอม dissipation ที่แสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลง turbulent kinetic energy ไปเป็น thermal internal energy

เทอมที่ 4 คือ เทอม molecular diffusion ที่แสดงถึงค่า diffusion turbulence ซึ่งเกิดจากกระบวนการส่งถ่ายโมเลกุลของของไหลในธรรมชาติ

เทอมที่ 5 คือ เทอม turbulent transport ที่แสดงถึงอัตราการถ่ายเท turbulent energy สู่ของไหลโดย turbulent fluctuation

เทอมที่ 6 คือ เทอมการแพร่ความดัน (pressure diffusion) ที่แสดงถึงการถ่ายเท turbulence ในรูปของความสับสนี้ระหว่างความดันกับ velocity fluctuation

เราจะสามารถหาผลเฉลยของสมการ (3.40) ได้ก็ต่อเมื่อเราทราบค่า Reynolds stress tensor, turbulent transport, pressure diffusion และ dissipation ซึ่งหาได้ดังรายละเอียดต่อไปนี้

สำหรับเทอม Reynolds stress tensor เราใช้การประมาณด้วย Boussinesq approximation ซึ่งในการประมาณแบบนี้ กำหนดให้ kinetic Reynolds stress มีความสัมพันธ์แบบเชิงเส้นกับค่า mean strain rate tensor ($\bar{s}_{ij}$) ดังต่อไปนี้ (Wilcox, 1993)

$$R_{ij} = -\frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} + 2\mu_t\bar{s}_{ij} \quad (3.42)$$

เมื่อ $\bar{s}_{ij}$ คือ mean strain rate tensor ซึ่งหาได้จาก $\bar{s}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)$

μ_t คือ turbulent kinetic viscosity ซึ่งถูกกำหนดโดย $\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$ และ $C_\mu = 0.09$

และ δ_{ij} คือ Kronecker delta

เทอม turbulent transport และ pressure diffusion ได้มาจากข้อมูลการทดลองโดย Mansour et al. (1988) ดังต่อไปนี้

$$\frac{1}{2}\overline{\rho u'_i u'_i u'_j} + \overline{p' u'_j} = -\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (3.43)$$

เมื่อ σ_k คือ Prandtl-Schmidt number ซึ่งมีค่าประมาณ 1.0

เทอม Dissipation ถูกจัดอยู่ในรูปความสัมพันธ์ของ turbulent kinetic energy (k) กับ turbulence length scale (ℓ) ได้ดังนี้

$$\varepsilon \approx k^{\frac{3}{2}} / \ell \quad (3.44)$$

เมื่อรวมสมการ (3.40) ถึง (3.44) เข้าด้วยกันแล้ว ก็จะได้สมการ turbulent kinetic energy ดังนี้

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = G - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (3.45)$$

เมื่อ G คืออัตราของ turbulent energy production ซึ่งคำนวณได้จาก

$$G = \mu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (3.46)$$

สมการ dissipation rate ของ turbulent kinetic energy

การพิสูจน์หาสมการ dissipation rate (ε) ไม่สามารถทำได้ง่ายนัก แต่สามารถคำนวณโดยใช้ความคล้ายคลึงทางมิติที่สอดคล้องกัน (dimensionally consistent analogy) กับสมการ turbulent kinetic energy ดังนั้นจึงกำหนดให้ ε สามารถอธิบายในรูปของ turbulent kinetic energy และ turbulence length scale ดังนี้

$$\varepsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{L} \quad (3.47)$$

เมื่อ L มีความสัมพันธ์กับค่า ℓ_m โดย $L = C_\mu^{-0.75} \ell_m$ และ ℓ_m คือ Prandtl mixing length ซึ่งนิยามจาก $\ell_m = \max[\kappa y, \lambda \delta]$ โดยที่ δ คือ boundary layer thickness, κ คือ Von Karman constant ($\kappa = 0.41$) และ λ คือ ค่าคงที่ ($\lambda = 0.09$)

ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการ ε ได้เป็น

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right]}_{(1)} + \underbrace{C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} G}_{(2)} - \underbrace{C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}}_{(3)} \quad (3.48)$$

ซึ่งเทอมต่างๆ ในสมการ (3.48) นี้ แสดงถึงความหมายทางกายภาพที่เกิดจากการเคลื่อนที่แบบปั่นป่วนในการไหล ดังนี้

เทอมที่ 1 คือ เทอมการพาของ ε

เทอมที่ 2 คือ เทอมการแพร่ของความปั่นป่วน

เทอมที่ 3 คือ อัตราการผลิตของ ε

เทอมที่ 4 คือ อัตราการแยกสลายของ ε

สำหรับค่าคงที่ต่างๆของแบบจำลอง standard $k - \varepsilon$ มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ในการพิจารณาการไหลแบบปั่นป่วนที่ง่ายที่สุด ทำได้โดยกำหนดให้การไหลเป็นแบบ isotropic turbulence ดังนั้นสมการ k และสมการ ε จึงลดรูปได้เป็น

$$\bar{u} \frac{\partial k}{\partial x} = -\varepsilon \quad \text{และ} \quad \bar{u} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3.49)$$

โดยที่ค่า k มีความสัมพันธ์แบบ power-law กับ x ($k \propto x^{-n}$) ซึ่งจะได้

$$C_{\varepsilon 2} = \frac{n+1}{n} \quad (3.50)$$

จากข้อมูลผลการทดลอง (อ้างอิงใน Durbin and Reif (2001)) ค่า n อยู่ในช่วง 1.3 ± 0.2 ในที่นี้เราเลือกใช้ $n = 1.2$ ทำให้สมการ (3.50) กลายเป็น $C_{\varepsilon 2} = 1.83$

เมื่อพิจารณาที่บริเวณใกล้ผนัง (k มีค่าคงที่) จะได้ว่าค่าอนุพันธ์ของทุกเทอมในสมการ k เป็นศูนย์หมด ทำให้สมการ k กลายเป็น

$$P = \varepsilon \quad (3.51)$$

จากสมการ(3.50) สังเกตได้ว่าค่า production เท่ากับค่า dissipation ซึ่งอยู่ในสภาพที่เรียกว่า local equilibrium ดังนั้นเราจะได้

$$k = \frac{u_\tau^2}{\sqrt{C_\mu}}, \quad \varepsilon = \frac{u_\tau^3}{\kappa y} \quad \text{และ} \quad \mu_t = \rho \kappa u_\tau y$$

เมื่อ u_τ คือ friction velocity จากนั้น แทนค่า ε และ μ_t จากความสัมพันธ์ของสมการข้างบนลงในสมการ ε จะได้

$$\kappa^2 = (C_{\varepsilon 2} - C_{\varepsilon 1}) \sigma_\varepsilon \sqrt{C_\mu} \quad (3.52)$$

ดังนั้นค่าคงที่สำหรับแบบจำลองความปั่นป่วน $k - \varepsilon$ เมื่อ Re มีค่าสูง (Launder and Spalding, 1972) คือ $C_\mu = 0.09$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ และ $C_{\varepsilon 2} = 1.83$

3.2.2 แบบจำลอง $k-\omega$

แบบจำลองความปั่นป่วน $k - \omega$ ของ Wilcox (1988) ได้รับการพัฒนาขึ้น โดยคาดว่า จะสามารถใช้ในการอธิบายถึงคุณลักษณะของปรากฏการณ์การไหลหมุนวน (recirculating flow phenomena) ได้ เนื่องจากสมการ specific dissipation rate (ω) สามารถให้ผลเฉลยที่เสมือนว่า ค่า turbulent kinetic energy มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ และไม่ต้องใช้ damping function ในการคำนวณบริเวณ viscous sub-layer อีกด้วย (Peng et al., 1997) และจุดเด่นอีกอย่างหนึ่งของแบบจำลอง $k - \omega$ ก็คือ การกำหนดรูปแบบใน viscous sub-layer ได้ง่าย และสามารถใช้เงื่อนไขขอบแบบ Dirichet ได้โดยตรง เป็นผลทำให้เกิดเสถียรภาพเชิงตัวเลข (Menter, 1992) แบบจำลองนี้ถูก

ประยุกต์ใช้กับงานทางวิศวกรรมต่างๆไป ซึ่งให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำสูงกว่า แบบจำลอง two-equation แบบอื่นๆ สำหรับการทำนายการไหลแบบที่มี adverse pressure gradient และการไหลแบบแยกตัว (separated flows) ซึ่งแบบจำลอง $k-\omega$ ถูกเสนอครั้งแรกโดย Kolmogorov ในปี ค.ศ. 1942 และถูกปรับปรุงขยายผลอีกครั้งโดย Saffman ในปี ค.ศ. 1970 และยังมีผู้ให้ความสนใจศึกษาอีกหลายท่าน (รายละเอียดอยู่ใน Wilcox (1988)) เช่น Launder and Spalding ในปี 1972 และ Wilcox et al. ตั้งแต่ปี 1972–1988 (Wilcox and Alber ในปี 1972, Saffman and Wilcox ในปี 1974, Wilcox and Traci ในปี 1976, Wilcox and Rubesin ในปี 1980 และ Wilcox ในปี 1988) เป็นต้น โดยสมการ transport สำหรับแบบจำลองความปั่นป่วน $k-\omega$ ของ Wilcox (1988) มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

สมการ turbulent kinetic energy

สมการ k ที่ใช้ในแบบจำลอง $k-\omega$ หาได้โดยอาศัยสมการ k ที่ใช้ในแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ ร่วมกับความสัมพันธ์ $\varepsilon = \beta \omega k$ (เมื่อ β คือ ค่าคงที่ของแบบจำลองมีค่าเท่ากับ 3/40) ทำให้ได้สมการ k ดังนี้

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = R_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (3.53)$$

สมการ specific dissipation rate (ω)

Wilcox ได้ให้คำจำกัดความของ specific dissipation rate (ω) คือ อัตราการสูญเสียของพลังงานต่อหน่วยปริมาตรและต่อเวลา ซึ่งสามารถแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$\omega \approx k^{1/2} / \ell \quad (3.54)$$

เมื่อ ℓ คือ turbulence length scale ซึ่งกำหนดให้เท่ากับ $\frac{C_\mu k^{3/2}}{\varepsilon}$

เราสามารถนิยามสมการ ω โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่าง ε และ k ดังนี้

$$\omega \equiv \frac{\varepsilon}{k} \quad (3.55)$$

สมการของแบบจำลองความปั่นป่วน $k-\omega$ สามารถหาได้จากการแปลงรูปสมการของแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ โดยเริ่มต้นจากการแทนค่า ω จากสมการ (3.55) ลงในสมการ k (สมการ (3.45)) และ สมการ ε (สมการ (3.48)) ซึ่งจะได้

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{k} \frac{D\varepsilon}{Dt} - \frac{\omega}{k} \frac{Dk}{Dt} \quad (3.56)$$

โดยที่ สมการ k และสมการ ε ซึ่งจัดอยู่ในรูป total derivative คือ

$$\frac{Dk}{Dt} = P_k - \varepsilon + \Pi_k + D_k^T + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (3.57)$$

และ

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = P_\varepsilon - \Phi_\varepsilon + \Pi_\varepsilon + D_\varepsilon^T + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (3.58)$$

แทนสมการ (3.57) และ (3.58) ลงในสมการ (3.56) และพิจารณาการไหลภายใต้สถานะอยู่ตัว จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_j \omega)}{\partial x_j} = & \left(\frac{P_\varepsilon}{k} - \frac{\omega P}{k} \right) + \left(\frac{\Phi_\varepsilon}{k} - \frac{\omega}{k} \varepsilon \right) + \left(\rho \omega^2 - \frac{\Pi_\varepsilon}{k} \right) \\ & + \left(\frac{\omega D_\omega^T}{k} - \frac{D_\varepsilon^T}{k} \right) + \left(\mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{2\mu}{k} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

จัดรูปสมการ (3.59) ใหม่ จะได้

$$\frac{\partial(\rho u_j \omega)}{\partial x_j} = \underbrace{P_\omega}_{(1)} - \underbrace{\Phi_\omega}_{(2)} + \underbrace{\Pi_\omega}_{(3)} + \underbrace{D_\omega^T}_{(4)} + \underbrace{D_\omega^\nu}_{(5)} + \underbrace{D_\omega^\nu}_{(6)} \quad (3.60)$$

ซึ่งความหมายของเทอมต่าง ๆ ในสมการ (3.60) คือ

เทอมที่ 1 คือ เทอมการพา

เทอมที่ 2 คือ เทอม production ของ ω

เทอมที่ 3 คือ เทอม destruction ของ ω

เทอมที่ 4 คือ เทอมการแพร่ของความดัน

เทอมที่ 5 คือ เทอมการแพร่ของความปั่นป่วน (turbulent diffusion)

เทอมที่ 6 คือ เทอม viscous diffusion

สำหรับสมการ ω ซึ่งพัฒนาโดย Bredberg et al. (2003) สามารถหาได้จากสมการ

$$D_\omega^T = \left(\frac{\omega D_\omega^T}{k} - \frac{D_\varepsilon^T}{k} \right) = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + C_\omega \frac{\mu_t}{k} \left(\frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) \right] \quad (3.61)$$

ซึ่งเมื่อพิจารณาบริเวณใกล้ผนังและละทิ้งผลจากเทอม viscous diffusion เราจะได้

$$\mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial^2 y} + \frac{2\mu}{k} \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial k}{\partial y} - \beta \rho \omega^2 = 0 \quad (3.62)$$

จากสมการ (3.61) และ (3.62) จึงทำให้สมการ ω ลดรูปได้ดังนี้

$$\rho \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} P_k - \beta \rho \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \quad (3.63)$$

สำหรับค่าคงที่ต่างๆของแบบจำลอง $k - \omega$ มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

ในบริเวณใกล้ผนังนั้นเมื่อเราใช้ความสัมพันธ์และข้อสมมติที่ว่าเทอม production เท่ากับ เทอม dissipation ของ turbulent kinetic energy เราจะได้

$$\sqrt{\alpha^* \beta^*} = \frac{u_\tau^2}{k} = -\frac{\overline{u'v'}}{k} \quad (3.64)$$

จากข้อมูลผลการทดลอง (อ้างอิงใน Chien, 1982) $u_\tau^2 / k \approx 0.3$ จึงได้

$$\alpha^* \beta^* = 0.09 \quad (3.65)$$

เมื่อพิจารณาภายใต้เงื่อนไขของ decaying homogeneous และ isotropic turbulence สมการ ω (สมการ(3.63)) จะกลายเป็น

$$\frac{dk}{dx} = -\beta^* \omega k \quad \text{และ} \quad \frac{d\omega}{dx} = -\beta \omega^2 \quad (3.66)$$

จากนั้นใช้ความสัมพันธ์ $k = x^{-\beta^*/\beta}$ โดยที่ $\beta^*/\beta \approx 1.00 - 1.25$ (ค่า β^*/β สามารถหาได้จากข้อมูลการทดลอง (อ้างอิงใน Chien, 1982) ดังนั้น

$$\alpha = \frac{\beta}{\beta^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_\omega \sqrt{\alpha^* \beta^*}} \quad (3.67)$$

ซึ่งสามารถสรุปค่าคงที่ที่ใช้ในแบบจำลองความปั่นป่วน $k-\omega$ ได้ดังนี้

$$\alpha^* = 1, \alpha = 5/9, \beta^* = 9/100, \beta = 3/40, \sigma_\omega = 2 \text{ และ } \sigma_k = 2$$

3.2.3 แบบจำลอง $k-\varepsilon-\gamma$

แบบจำลอง $k-\varepsilon-\gamma$ เป็นแบบจำลองที่ปรับปรุงจากแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ โดยพบว่าแบบจำลองนี้สามารถทำนายผลของ Reynolds shear stress สำหรับการไหลที่มีค่า Re สูงๆ ได้ดีกว่าแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ (Wang and Derksen, 1999) ซึ่งหากพิจารณาถึงความแตกต่างระหว่างแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ และ $k-\varepsilon-\gamma$ จะเห็นได้ว่ามีสมการของ intermittency factor (γ) เพิ่มขึ้นมาในแบบจำลอง $k-\varepsilon-\gamma$ ซึ่งความหมายทางกายภาพของ intermittency factor ก็คือ ความน่าจะเป็นที่การไหล ณ บริเวณตำแหน่งใดๆ จะมีความเป็น turbulent (Pope, 2000) ดังแสดงในสมการ

$$\gamma = \bar{I}(x_i, t) \quad (3.68)$$

เมื่อ $\bar{I}(x_i, t)$ คือ ค่าเฉลี่ยของ intermittency function, $I(x_i, t)$ โดยกำหนดให้ที่ $I=1$ คือ บริเวณที่การไหลเป็นแบบปั่นป่วน (turbulent flow) หรือ turbulent fluid และที่ $I=0$ คือ บริเวณที่การไหลไม่เป็นแบบปั่นป่วน (non-turbulent flow) หรือ irrotational fluid ดังนั้น γ จึงมีค่าเท่ากับ 0 และ 1 ที่ $I=0$ และ $I=1$ ตามลำดับ ซึ่งสามารถนำค่า γ ไปใช้ในการพิจารณาการไหลแบบปั่นป่วนได้ดังตัวอย่างเช่น การคำนวณค่า Probability Density Function (PDF), $f_\phi(x_i, t)$ ของตัวแปรสเกลาร์ $\phi(x_i, t)$ ดังสมการ (3.69)

$$f_\phi(x_i, t) = \gamma f_T(x_i, t) + (1-\gamma) f_N(x_i, t) \quad (3.69)$$

เมื่อ $f_T(x_i, t)$ คือ ค่า PDF ของตัวแปรสเกลาร์ $\phi(x_i, t)$ บริเวณที่การไหลเป็นแบบปั่นป่วน

$$(\gamma = 1)$$

$f_N(x_i, t)$ คือ ค่า PDF ของตัวแปรสเกลาร์ $\phi(x_i, t)$ บริเวณที่การไหลไม่เป็นแบบปั่นป่วน

$$(\gamma = 0)$$

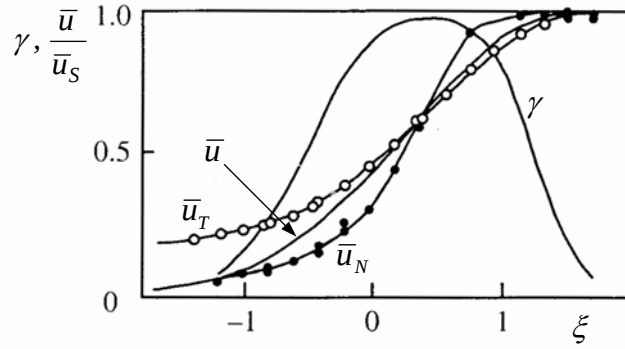
ดังนั้นเมื่อต้องการทราบค่าเฉลี่ยของตัวแปรสเกลาร์, $\bar{\phi}(x_i, t)$ ก็สามารถพิจารณาได้ดังนี้

$$\bar{\phi}(x_i, t) = \gamma \bar{\phi}_T(x_i, t) + (1-\gamma) \bar{\phi}_N(x_i, t) \quad (3.70)$$

โดยกำหนดให้ $\bar{\phi}_T(x_i, t)$ คือ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสเกลาร์ในบริเวณที่การไหลเป็นแบบปั่นป่วน

และ $\bar{\phi}_N(x_i, t)$ คือ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสเกลาร์ในบริเวณที่การไหลไม่เป็นแบบปั่นป่วน

รูปที่ 3.3 แสดงตัวอย่างของลักษณะการกระจายตัวของ intermittency factor γ , ค่าความเร็วเฉลี่ยรวม $\bar{u}$, ค่าความเร็วเฉลี่ยส่วนที่การไหลเป็นแบบปั่นป่วน $\bar{u}_T$ และค่าความเร็วเฉลี่ยส่วนที่การไหลไม่เป็นแบบปั่นป่วน $\bar{u}_N$ ของ self-similar mixing layer



รูปที่ 3.3 การกระจายตัวของ intermittency factor และปริมาณค่าต่าง ๆ ใน self-similar mixing layer (Pope, 2000)

สำหรับในงานวิจัยนี้ ได้ทำการศึกษาแบบจำลองความปั่นป่วน k - ϵ - γ ทั้งกรณีที่เป็นแบบ High Reynolds และ Low Reynolds modeling โดยมีรายละเอียดพอสังเขปดังต่อไปนี้

แบบจำลอง High Reynolds (High-Re) k - ϵ - γ

แบบจำลองความปั่นป่วน High-Re k - ϵ - γ จะประกอบไปด้วยสมการ turbulent kinetic energy (k), สมการ dissipation rate ของ turbulent kinetic energy (ϵ) และสมการ intermittency factor (γ) ดังนี้

สมการ turbulent kinetic energy

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \epsilon \quad (3.71)$$

สมการ dissipation rate ของ turbulent kinetic energy

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_j \epsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\epsilon 1} P_k \frac{\epsilon}{k} - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + C_{\epsilon 3} \rho \Gamma \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.72)$$

สมการ intermittency factor

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \bar{u}_j \gamma) = D_\gamma + S_\gamma \quad (3.73)$$

โดยกำหนดให้ Γ คือ non-dimensional invariant of interaction แสดงถึงปริมาณ
entrainment rate ของ intermittency factor ที่เกิดจากปฏิสัมพันธ์
ระหว่าง mean velocity กับ intermittency field

D_γ คือ พจน์ที่แสดงถึงการถ่ายเท intermittency factor เนื่องจาก mean
velocity jump ที่เกิดขึ้นระหว่าง turbulent fluid กับ irrotational
fluid (non-turbulent fluid)

S_γ คือ พจน์ที่แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงของ irrotational fluid ให้กลายเป็น
turbulent fluid

เมื่อ

$$P_k = 2\mu \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij} \quad (3.74)$$

$$\Gamma = \left(\frac{k^{2.5}}{\varepsilon^2} \right) \bar{u}_i / (\bar{u}_k \bar{u}_k)^{1/2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right) \quad (3.75)$$

$$D_\gamma = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(1-\gamma) \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\gamma} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} \right] \quad (3.76)$$

$$S_\gamma = C_{\gamma 1} \gamma (1-\gamma) \frac{P_k}{k} + C_{\gamma 2} \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \right)^2 \right] - C_{\gamma 3} \rho \gamma (1-\gamma) \frac{\varepsilon}{k} \Gamma \quad (3.77)$$

และ eddy viscosity มีค่าดังนี้

$$\mu_t = \rho C_\mu \left\{ 1 + C_{\mu\gamma} \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma^3} \right) \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right\} \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.78)$$

เมื่อค่าคงที่ต่าง ๆ ในแบบจำลองความปั่นป่วน High-Re k - ε - γ มีค่าดังต่อไปนี้

$$\sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad \sigma_\gamma = 1.0,$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1.35, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.80, \quad C_{\varepsilon 3} = 0.10,$$

$$C_{\gamma 1} = 1.60, \quad C_{\gamma 2} = 0.15, \quad C_{\gamma 3} = 0.16,$$

$$C_\mu = 0.09, \quad C_{\mu\gamma} = 0.10$$

แบบจำลอง Low Reynolds (Low-Re) k - ε - γ

แบบจำลองความปั่นป่วน Low-Re k - ε - γ นั้นมีลักษณะเช่นเดียวกันกับแบบจำลอง High-Re k - ε - γ โดยจะแตกต่างกันเฉพาะพจน์บางพจน์ที่เพิ่มเข้ามาในสมการ turbulent kinetic energy และสมการ dissipation rate รวมถึงค่าของ eddy viscosity แต่สำหรับสมการ intermittency factor นั้นยังคงเหมือนเดิม ซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

สมการ turbulent kinetic energy

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \rho \tilde{\varepsilon} - \frac{2\mu k}{y^2} \quad (3.79)$$

สมการ dissipation rate ของ turbulent kinetic energy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_j \tilde{\varepsilon}) = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon 1} P_k f_1 \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} - C_{\varepsilon 2} \rho f_2 \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} + \\ & C_{\varepsilon 3} \rho \Gamma \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{k} - \frac{2\mu \tilde{\varepsilon} e^{-C_1 y^+}}{y^2} \end{aligned} \quad (3.80)$$

เมื่อกำหนดให้ $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{2\nu k}{y^2}$ และ eddy viscosity มีค่าดังสมการ

$$\mu_t = \rho C_\mu f_\mu \left\{ 1 + C_{\mu\gamma} \frac{k^3}{\tilde{\varepsilon}^2} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma^3} \right) \left[\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_2} \right)^2 \right] \right\} \frac{k^2}{\tilde{\varepsilon}} \quad (3.81)$$

โดยที่ damping functions, f_μ , f_1 , และ f_2 มีค่าดังนี้

$$f_\mu = 1.0 - \exp(-C_2 y^+) \quad (3.82)$$

$$f_1 = 1.0 \quad (3.83)$$

$$f_2 = 1.0 - \frac{0.4}{1.8} \exp\left[-(k^2/6\nu\tilde{\varepsilon})^2\right] \quad (3.84)$$

และ

$$y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu} \quad (3.85)$$

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.86)$$

เมื่อ y คือ ระยะห่างจากผนัง
 y^+ คือ ระยะห่างจากผนังไร้มิติ
 u_τ คือ friction velocity
 τ_w คือ ค่าความเค้นเฉือนที่ผนัง (wall shear stress)

ซึ่งค่าคงที่ต่าง ๆ ในแบบจำลองความปั่นป่วน Low-Re $k-\varepsilon-\gamma$ เป็นค่าคงที่เดียวกันกับในแบบจำลองความปั่นป่วน High-Re $k-\varepsilon-\gamma$ โดยจะมีค่าคงที่ที่เพิ่มเข้ามาคือ $C_1 = 0.5$ และ $C_2 = 0.0115$

บทที่ 4

การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

เนื้อหาในบทนี้ เป็นการนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นจากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มบนพิกัดกระขับขอบเขต มาตรวจสอบความถูกต้อง (validation) โดยนำผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรมไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง ผลจากการคำนวณและผลการทดลองของผู้วิจัยที่ได้ทำมาก่อน ทั้งนี้เพื่อแสดงว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้มีความถูกต้องและเชื่อถือได้ สำหรับการตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นนี้จะแบ่งออกเป็นสองขั้นตอนด้วยกัน คือ ในขั้นตอนแรกจะนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีเฉพาะส่วนของการแก้ปัญหาที่มีเฉพาะพจน์การแพร่กระจาย (diffusion terms) มาทดสอบกับปัญหาการนำความร้อนแบบสภาวะอยู่ตัว (steady state) ในโดเมนที่ซับซ้อนซึ่งมีทั้งหมด 4 กรณีศึกษาด้วยกัน ดังนี้

- 1) การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน
- 2) การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์กลาง
- 3) การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีวงกลมอยู่ข้างใน
- 4) การนำความร้อนในแผ่นสามเหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อนภายใน

จากนั้น จะเพิ่มการคำนวณในส่วนของการไหล ซึ่งมีพจน์การพา (convection terms) เพิ่มขึ้น มาลงไปในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และทดสอบกับปัญหาการไหลทั้งแบบราบเรียบและแบบปั่นป่วน ดังต่อไปนี้

- 1) การไหลแบบราบเรียบผ่าน gradual-expansion channel
- 2) การถ่ายเทความร้อนของการไหลแบบราบเรียบผ่านทรงกระบอกกลม
- 3) การไหลแบบปั่นป่วนผ่าน inclined backward facing step

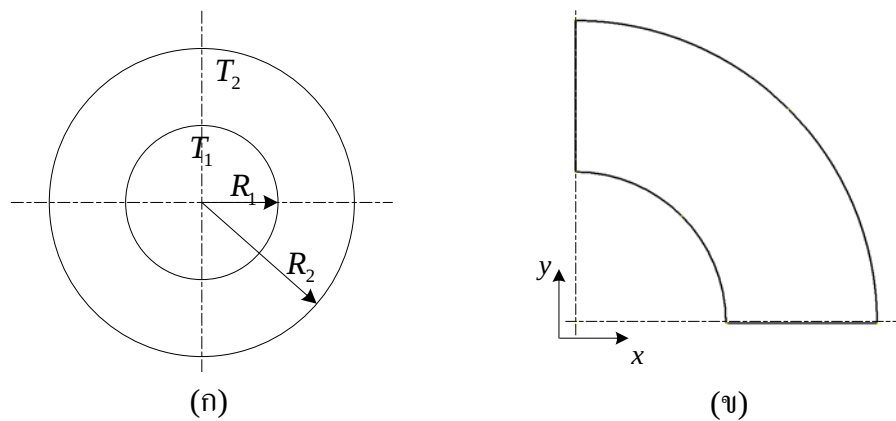
4.1 ปัญหาการนำความร้อน

ในหัวข้อนี้ เราจะทำการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมโดยใช้ปัญหาการนำความร้อนแบบสภาวะอยู่ตัวซึ่งมีทั้งหมด 4 ปัญหาด้วยกัน ได้แก่ การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์กลาง การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีวงกลมอยู่ข้างใน และการนำความร้อนในแผ่นสามเหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อนภายใน โดยที่โดเมนของ 3 รูปแรก จะมีความสมมาตร ดังนั้นจึงมีการแบ่งคำนวณเพียง 1

ใน 4 หรือ 1 ใน 2 ของรูปร่างทั้งหมดเพื่อลดจำนวนหน่วยประมวลผล สำหรับหัวข้อนี้จะทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับผลการคำนวณทางเชิงเลขและผลเฉลยแม่นยำ

4.1.1 การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน

ปัญหาแรกที่น่าสนใจใช้ตรวจสอบโปรแกรมที่ประดิษฐ์ขึ้นคือ ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน โดยผิววงกลมด้านในมีอุณหภูมิ T_1 และผิวด้านนอกมีอุณหภูมิ T_2 ซึ่ง $T_1 > T_2$ ดังแสดงในรูปที่ 4.1 (ก) ซึ่งการตรวจสอบกระทำโดยนำผลที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลูมมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ ในส่วนของการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เนื่องจากรูปร่างของโดเมนมีความสมมาตร ดังนั้นเราสามารถคำนวณเพียง 1 ใน 4 ส่วนของรูปได้ ดังรูปที่ 4.1 (ข) เพื่อลดจำนวนหน่วยประมวลผลที่ใช้ในการคำนวณ ซึ่งในส่วนของผลเฉลยแม่นยำ เราสามารถคำนวณโดยมีขั้นตอนดังนี้



รูปที่ 4.1 แผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน (ก) แผ่นเต็ม (ข) $\frac{1}{4}$ ของแผ่น

สมการครอบคลุมของปัญหาการนำความร้อนในสภาวะอยู่ตัวแบบหนึ่งมิติในพิกัดทรงกระบอกมีรูปแบบสมการ คือ

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (4.1)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$\begin{aligned} r = R_1 & \quad T = T_1 \\ r = R_2 & \quad T = T_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

ทำการแก้สมการหาผลเฉลยของปัญหาโดยการอินทิเกรตสมการ (4.1) สองครั้งเทียบกับรัศมี จะได้ผลเฉลยในรูปแบบทั่วไปที่ติดค่าคงที่ไว้ จากนั้นจึงหาค่าคงที่สัมประสิทธิ์ของสมการนั้นจากเงื่อนไขขอบเขตทั้งสองเงื่อนไขดังสมการ (4.2) สุดท้ายจะได้สมการของผลเฉลยแม่นยำของ

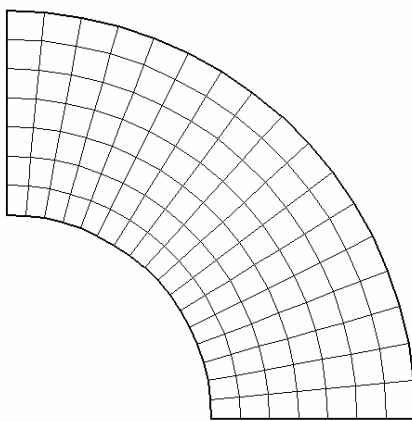
ปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกันซึ่งมีรูปแบบสมการโดยทั่วไป ดังนี้

$$T = T_1 - \frac{(T_1 - T_2) \ln(r / R_1)}{\ln(R_2 / R_1)} \quad (4.3)$$

สำหรับการตรวจสอบโปรแกรมในกรณีนี้ เราจะกำหนดค่าคงที่ต่างๆ เพื่อแทนค่าลงในสมการ (4.3) โดยให้วงกลมภายในมีรัศมี 1 cm ($R_1 = 1$) และวงกลมภายนอกมีรัศมี 2 cm ($R_2 = 2$) โดยมีอุณหภูมิภายใน 100 K ($T_1 = 100$) และมีอุณหภูมิภายนอก 0 K ($T_2 = 0$) หลังจากแทนค่าลงในสมการ (4.3) แล้ว จะได้ผลเฉลยเป็นค่าของอุณหภูมิที่รัศมีต่างๆ กัน ดังสมการต่อไปนี้

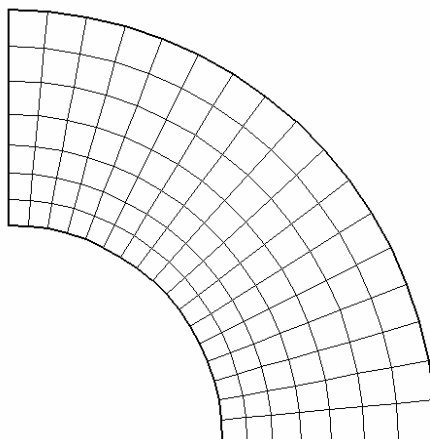
$$T = 100 - 144.27 \ln r \quad (4.4)$$

เมื่อได้ผลเฉลยแม่นยำตรงดังสมการ (4.4) แล้ว ขั้นตอนต่อไปจะเป็นการคำนวณโดยใช้โปรแกรมเพื่อที่จะนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง สำหรับการคำนวณด้วยโปรแกรมในขั้นตอนแรกนั้นจะทำการสร้างกริดเริ่มต้นโดยใช้วิธี TFI ซึ่งจะได้กริดที่มีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 4.2



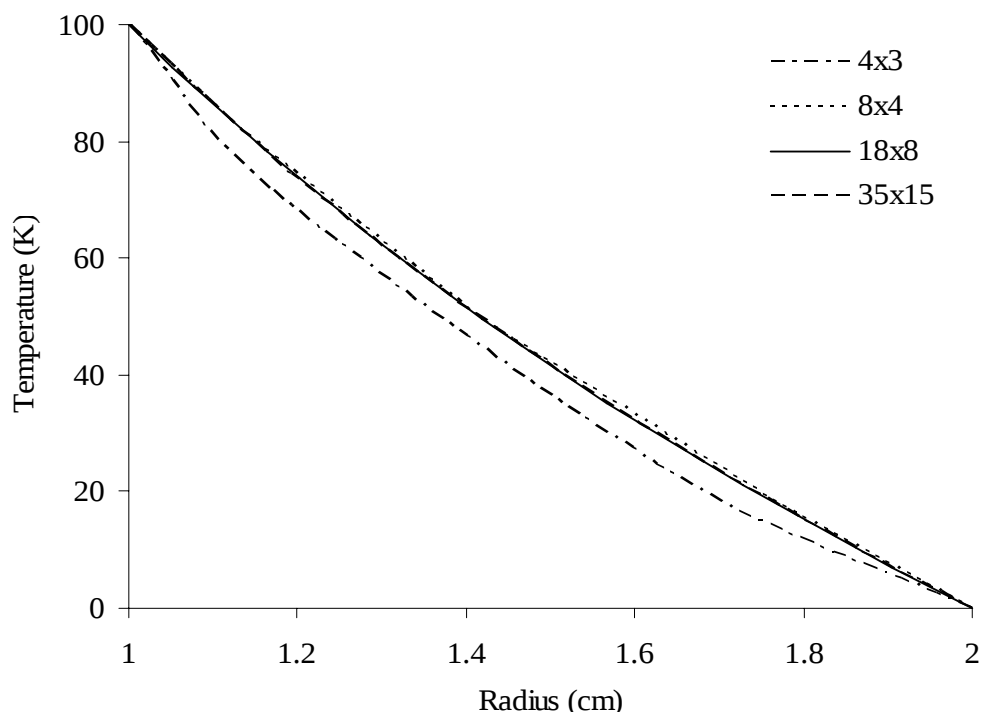
รูปที่ 4.2 กริดที่สร้างโดยใช้วิธี TFI บนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน

จากนั้นทำการปรับกริดให้มีความสม่ำเสมอมากขึ้น โดยใช้วิธีการแก้สมการอิลิปติกซึ่งจะได้กริดที่มีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 4.3



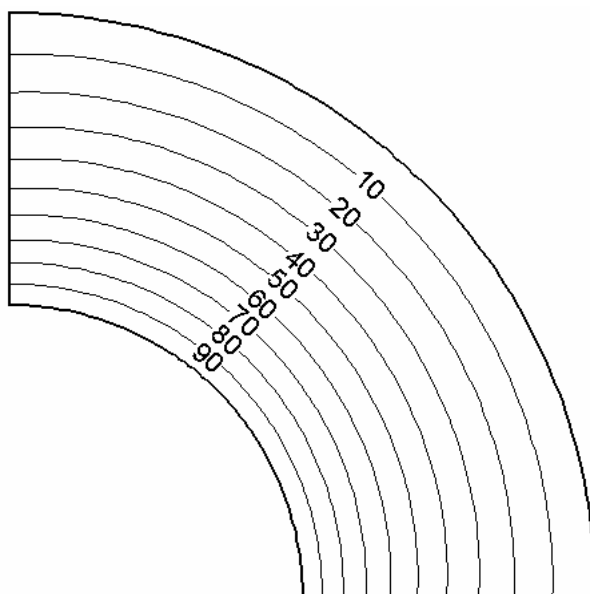
รูปที่ 4.3 กริดที่สร้างโดยการแก้สมการอิลิปติกบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน

การหาจำนวนกริดที่เหมาะสมในการนำมาใช้ในการคำนวณหาผลลัพธ์สำหรับโดเมนที่มีลักษณะเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกันนี้ เราจะทดสอบโดยใช้กริดขนาด 4×3 , 8×4 , 18×8 และ 35×15 ในการคำนวณหาผลลัพธ์ของปัญหาการนำความร้อนในแผ่นวงกลมนี้ ซึ่งผลการทดสอบแสดงดังกราฟในรูปที่ 4.4 พบว่าเส้นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดขนาด 18×8 และ 35×15 มีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้มีคุณสมบัติความเป็น grid independent หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ การใช้กริดขนาด 18×8 มีความละเอียดเพียงพอที่จะให้ผลเฉลยที่ถูกต้องและการเพิ่มจำนวนกริดให้มากกว่านี้จะไม่มีผลต่อผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณ



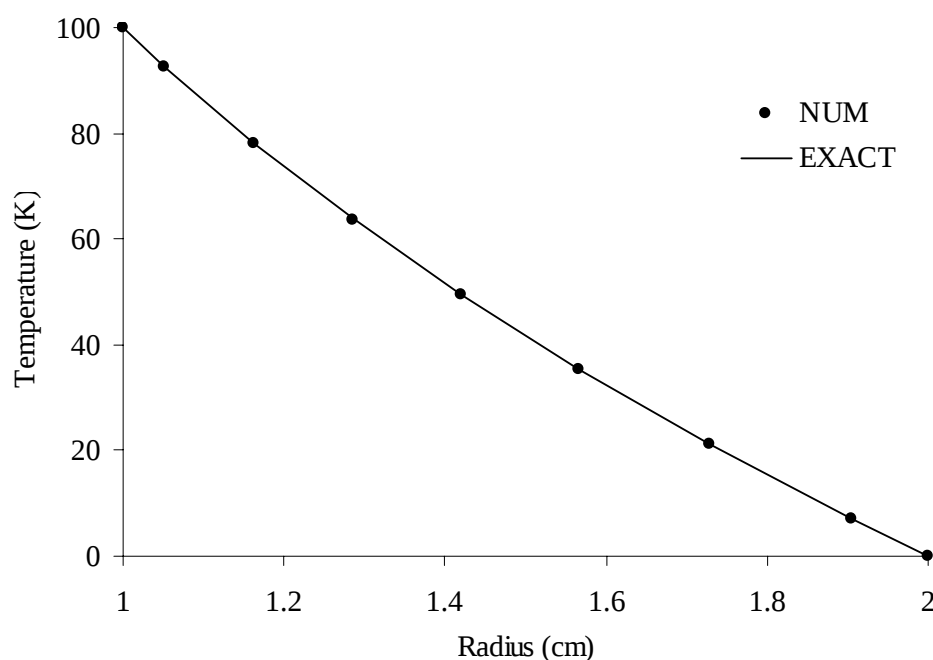
รูปที่ 4.4 การกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดขนาด 4x3, 8x4, 18x8 และ 35x15

เมื่อได้รูปร่างและจำนวนของกริดที่เหมาะสมแล้ว จากนั้นนำกริดที่ได้มาใช้ในการคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม จะได้ผลลัพธ์เป็นอุณหภูมิที่จุดต่างๆ บนโดเมนซึ่งสามารถแสดงเป็นเส้น contour ได้ดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 การกระจายของอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกัน

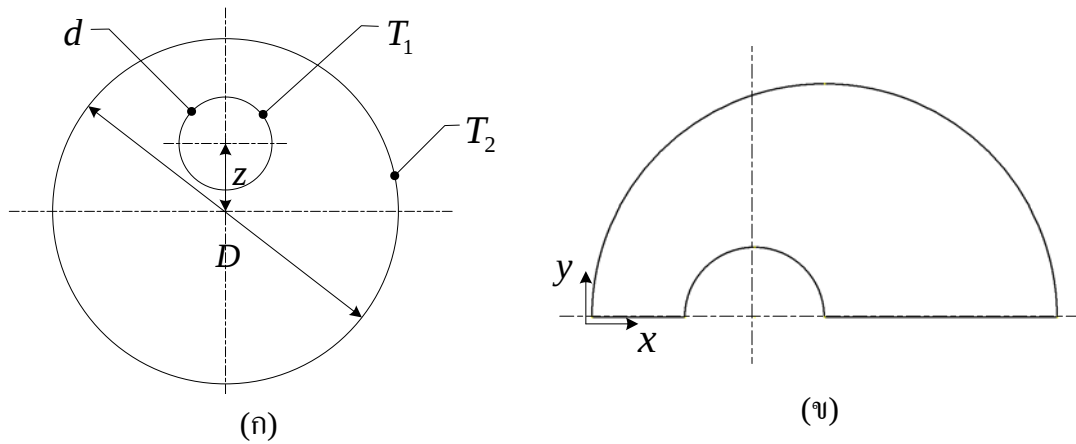
เมื่อคำนวณหาผลเฉลยแม่นยำและผลลัพธ์จากโปรแกรมได้แล้ว ต่อไปจะนำผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟในหัวกลมมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำโดยใช้การกระจายอุณหภูมิในแนวรัศมี (r) ดังกราฟในรูปที่ 4.6 ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟในหัวกลมมีความสอดคล้องกันกับผลเฉลยแม่นยำเป็นอย่างดี โดยมีค่าความคลาดเคลื่อนเฉลี่ยเท่ากับ 0.10% จึงสามารถสรุปได้ว่า ระเบียบวิธีไฟในหัวกลมบนพิกัดกระชับขอบเขตสามารถนำมาใช้ในการแก้ปัญหาคำนวณนำความร้อนสำหรับรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบมีศูนย์กลางร่วมกันได้เป็นอย่างดี



รูปที่ 4.6 การเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิในแนวรัศมี r ระหว่างผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟในหัวกลมกับผลเฉลยแม่นยำ

4.1.2 การนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์

การตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับปัญหาคำนวณนำความร้อนในแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์ดังรูปที่ 4.7 (ก) นี้ กระทำโดยนำผลที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟในหัวกลมมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจากวิธีตัวประกอบรูปร่าง (shape factor) ซึ่งมีผลเฉลยเป็นฟังก์ชันความร้อนรวม ในส่วนของการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เนื่องจากรูปร่างของโดเมนมีความสมมาตร ดังนั้นเราสามารถคำนวณเพียง 1 ใน 2 ส่วนของรูปได้ ดังรูปที่ 4.7 (ข) เพื่อลดจำนวนหน่วยประมวลผลที่ใช้ในการคำนวณ และในส่วนของผลเฉลยจากวิธีตัวประกอบรูปร่าง เราสามารถการคำนวณโดยมีขั้นตอนดังนี้



รูปที่ 4.7 แผ่นที่มีลักษณะเป็นวงกลมสองวงซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์กลาง (ก) แผ่นเต็ม (ข) 1/2 ของแผ่น

ผลเฉลยที่เป็นฟังก์ชันทางความร้อนรวมสามารถหาได้โดยใช้วิธีตัวประกอบรูปร่าง (shape factor) (Incropera and Dewitt, 2002) ซึ่งฟังก์ชันความร้อนหาได้โดยใช้สมการดังต่อไปนี้

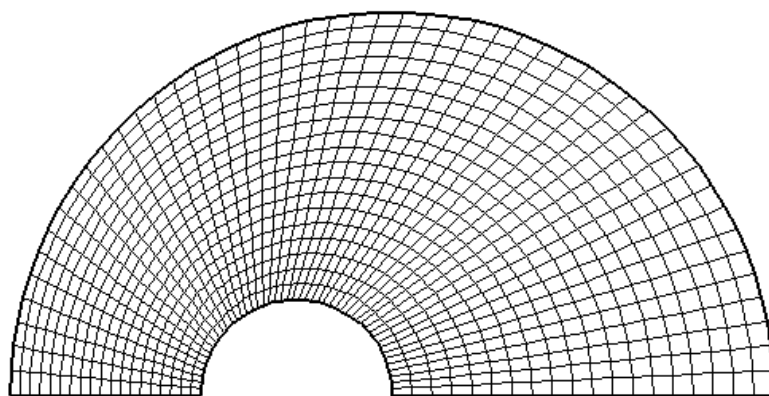
$$q = Sk(T_1 - T_2) \quad (4.5)$$

โดยที่ S คือตัวประกอบรูปร่าง ซึ่งสามารถหาได้จากสมการ ดังนี้

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 + d^2 - 4z^2}{2Dd}\right)} \quad (4.6)$$

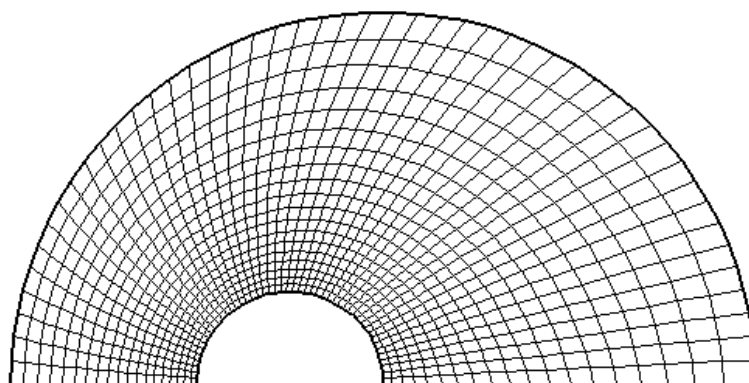
สำหรับการตรวจสอบโปรแกรมในกรณีนี้ เราจะกำหนดค่าคงที่ต่างๆ ดังนี้ คือ กำหนดให้วงกลมภายในมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 1 cm ($d = 1$) และวงกลมภายนอกมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 4 cm ($D = 4$) โดยที่วงกลมทั้งสองมีระยะเยื้องศูนย์กลาง 0.5 cm ($z = 0.5$) โดยมีอุณหภูมิภายใน 100 K ($T_1 = 100$) และมีอุณหภูมิภายนอก 0 K ($T_2 = 0$) มีค่าคงที่การนำความร้อนเป็น 1 W/cm.K ($k = 1$) และมีความยาว 1 cm ($L = 1$) หลังจากแทนค่าลงในสมการทั่วไป (4.5) และ (4.6) แล้ว จะได้ผลเฉลยเป็นฟังก์ชันความร้อน $q = 477.1$ kW

ใช้วิธี TFI ในการสร้างกริดเริ่มต้น ซึ่งจะได้กริดที่มีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 4.8



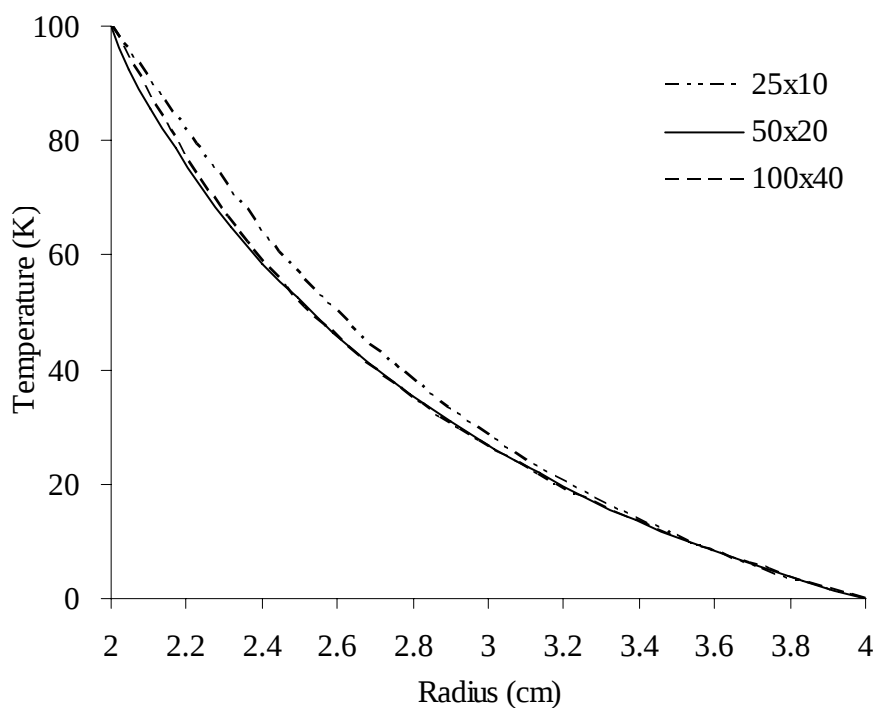
รูปที่ 4.8 กริดที่สร้างโดยใช้วิธี TFI บนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์

จากนั้นทำการปรับกริดให้มีความสม่ำเสมอมากขึ้น โดยใช้วิธีการแก้สมการอิลิปติกซึ่งจะได้กริดที่มีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 4.9



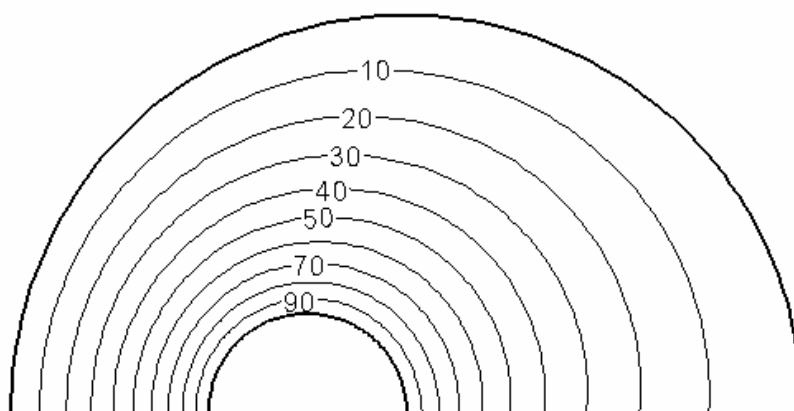
รูปที่ 4.9 กริดที่สร้างโดยการแก้สมการอิลิปติกบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์

ในการหาจำนวนกริดที่เหมาะสมสำหรับปัญหาในกรณีที่เป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์ สามารถทำได้โดยการเปรียบเทียบการใช้กริดขนาด 25x10, 50x20 และ 100x40 ในการคำนวณหาผลลัพธ์จากโปรแกรม ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้กริดจำนวนต่าง ๆ กันได้แสดงไว้ดังกราฟรูปที่ 4.11 จะเห็นได้ว่าเส้นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดขนาด 50x20 และ 100x40 มีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่า การใช้กริดขนาด 50x20 นั้นมีความละเอียดเพียงพอที่จะใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยแล้ว โดยที่การเพิ่มจำนวนของกริดให้มากกว่านี้จะไม่ทำให้ผลการคำนวณเปลี่ยนแปลง นั่นคือ กริดมีคุณสมบัติความเป็น grid independent แล้ว



รูปที่ 4.10 การกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดขนาด 25x10, 50x20 และ 100x40

เมื่อได้รูปร่างและขนาดของกริดที่เหมาะสมแล้ว จึงนำกริดที่ได้มาใช้ในการคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม จะได้ผลลัพธ์เป็นอุณหภูมิที่จุดต่างๆบนโดเมนซึ่งสามารถแสดงเป็นเส้น contour ได้ดังแสดงในรูปที่ 4.11



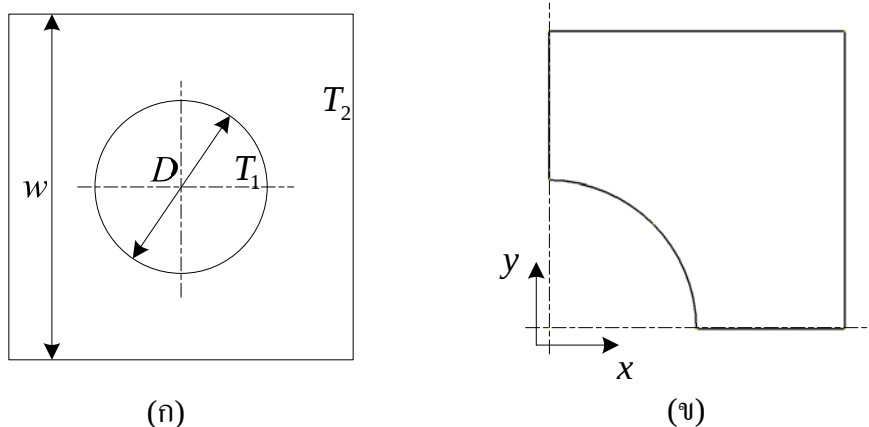
รูปที่ 4.11 การกระจายของอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์

ค่าฟลักซ์ความร้อนที่ได้จากการการคำนวณโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ คือ $q = 477.4 \text{ kW}$ ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยจากวิธีตัวประกอบรูปร่าง พบว่าผลลัพธ์มีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งแสดงว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์มีความถูกต้องเป็นที่น่าพอใจสำหรับกรณีที่เป็นกร

แก้ปัญหานำความร้อนที่สภาวะอยู่ตัวสำหรับโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์กลางนี้

4.1.3 การนำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีวงกลมอยู่ข้างใน

ในหัวข้อนี้ ปัญหาที่นำมาทดสอบ คือปัญหานำความร้อนในแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีวงกลมอยู่ข้างในดังแสดงในรูปที่ 4.12 (ก) นี้ จะใช้ผลเฉลยซึ่งผลเฉลยซึ่งเป็นฟังก์ชันความร้อนรวมที่ได้จากวิธีตัวประกอบรูปร่างเช่นเดียวกับของปัญหาในหัวข้อ 4.1.2 ในการเปรียบเทียบ ในส่วนของการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เนื่องจากรูปร่างของโดเมนมีความสมมาตร ดังนั้นเราสามารถคำนวณเพียง 1 ใน 4 ส่วนของรูปได้ ดังแสดงในรูปที่ 4.12 (ข)



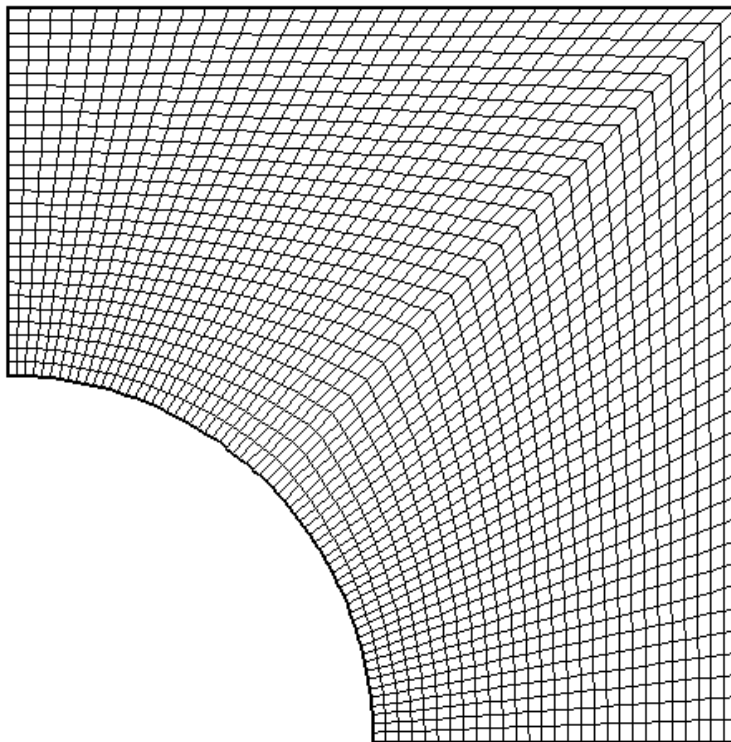
รูปที่ 4.12 แผ่นสี่เหลี่ยมมีวงกลมตรงกลาง (ก) แผ่นเต็ม (ข) $\frac{1}{4}$ ของแผ่น

ผลเฉลยจากวิธีตัวประกอบรูปร่าง สามารถคำนวณโดยวิธีเช่นเดียวกับกรณีที่เป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์กลาง โดยสามารถหาผลเฉลยที่เป็น ฟังก์ชันทางความร้อนรวมได้จากวิธีตัวประกอบรูปร่าง (shape factor) โดยใช้สมการ (4.5) โดยที่มีค่าตัวประกอบรูปร่าง (S) แตกต่างกับกรณีที่เป็นแผ่นวงกลมที่ซ้อนกันแบบเยื้องศูนย์กลาง ดังนี้

$$S = \frac{2\pi L}{\ln(1.08w/D)} \quad (4.7)$$

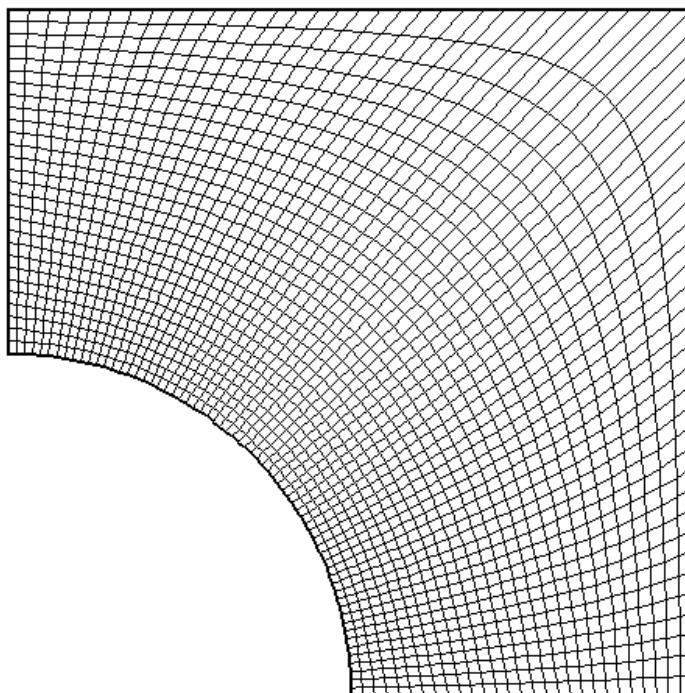
กำหนดให้วงกลมภายในมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 2 cm ($D = 2$) และสี่เหลี่ยมจัตุรัสภายนอกกว้าง 4 cm ($w = 4$) โดยมีอุณหภูมิภายใน 100 K ($T_1 = 100$) และมีอุณหภูมิภายนอก 0 K ($T_2 = 0$) มีค่าคงที่การนำความร้อนเป็น 1 W/cm.K ($k = 1$) และมีความยาว 1 cm ($L = 1$) ซึ่งจะได้ ฟังก์ชันความร้อน $q = 815.8$ kW

ใช้วิธี TFI ในการสร้างกริดเริ่มต้น ซึ่งจะได้กริดที่มีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 4.13

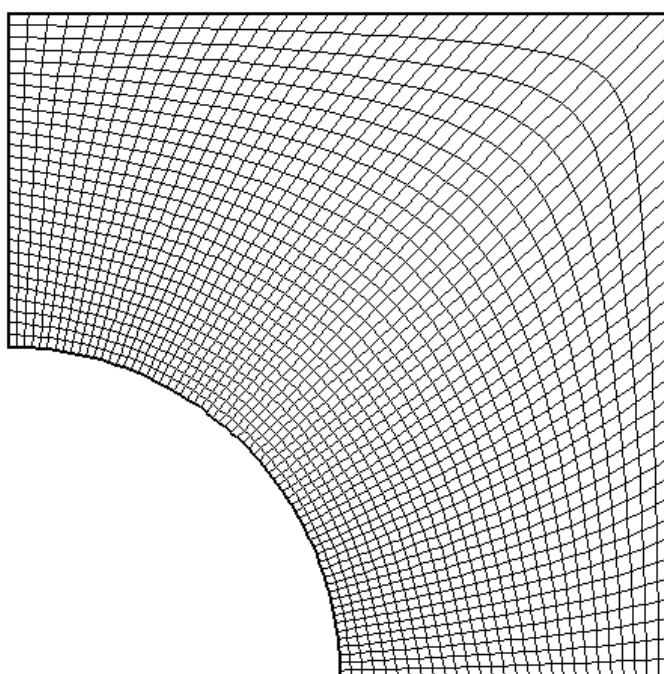


รูปที่ 4.13 กริดที่สร้างโดยใช้วิธี TFI สำหรับโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมมีวงกลมตรงกลาง

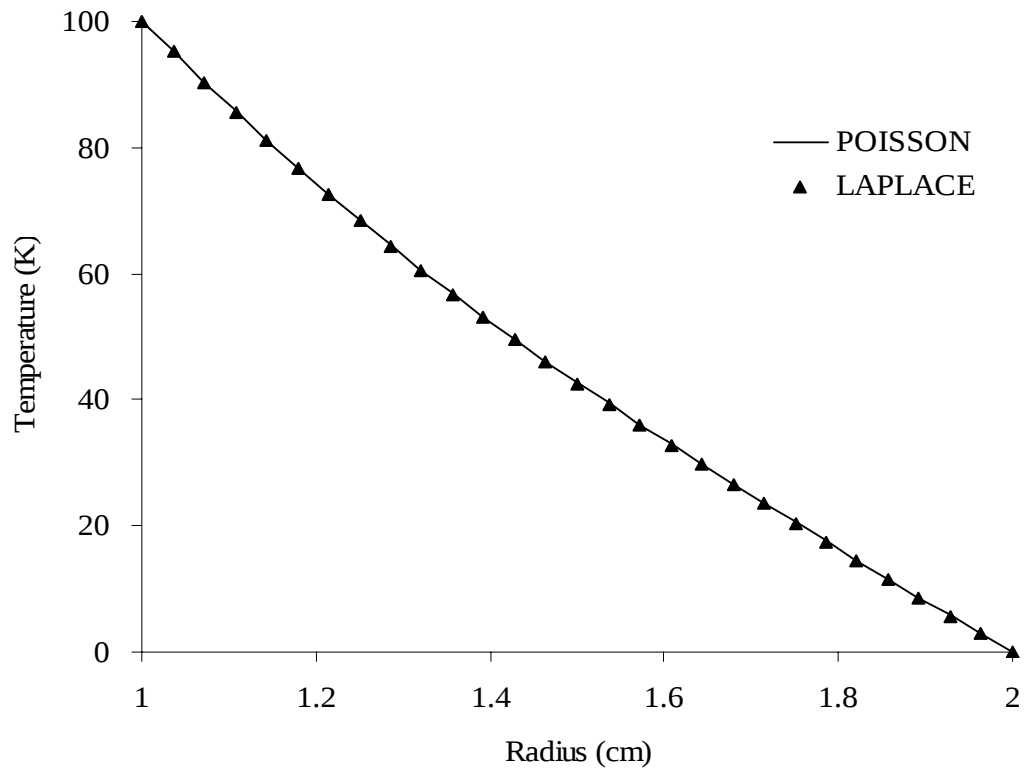
สำหรับการปรับกริดให้มีความสม่ำเสมอมากขึ้นโดยใช้วิธีการแก้สมการอิลิปติกสามารถทำได้โดยใช้สมการลาปลาซหรือสมการปัวซองส์ โดยที่สมการลาปลาซจะให้กริดที่สม่ำเสมอทั่วทั้งโดเมนซึ่งมีลักษณะของกริดดังรูปที่ 4.14 แต่จะไม่สามารถควบคุมการกระจายของกริดให้มีกริดอยู่ในบริเวณที่เป็นมุมของสี่เหลี่ยมได้ การแก้ปัญหาคือการกระจายตัวของกริดที่มุมสามารถทำได้โดยใช้สมการปัวซองส์ซึ่งมีฟังก์ชันควบคุมที่ช่วยควบคุมการกระจายของกริดให้มีกริดอยู่ในบริเวณที่เป็นมุมได้ ดังแสดงรูปที่ 4.15 ในกรณีที่ใช้สมการลาปลาซ ถ้าผลเฉลยของปัญหามีการเปลี่ยนแปลงสูงในบริเวณที่เป็นมุมนั้นจะทำให้ผลการคำนวณที่ได้ไม่แม่นยำ อย่างไรก็ตาม สำหรับปัญหาการนำความร้อนในสภาวะอยู่ตัวที่พิจารณาในที่นี้ พบว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้กริดที่ได้จากการแก้สมการลาปลาซและสมการปัวซองส์แทบจะไม่มี ความแตกต่างกัน ดังแสดงในกราฟการกระจายอุณหภูมิในรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.14 กริดที่ปรับโดยวิธีแก้สมการลาปลาซบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมมีวงกลมตรง
กลาง

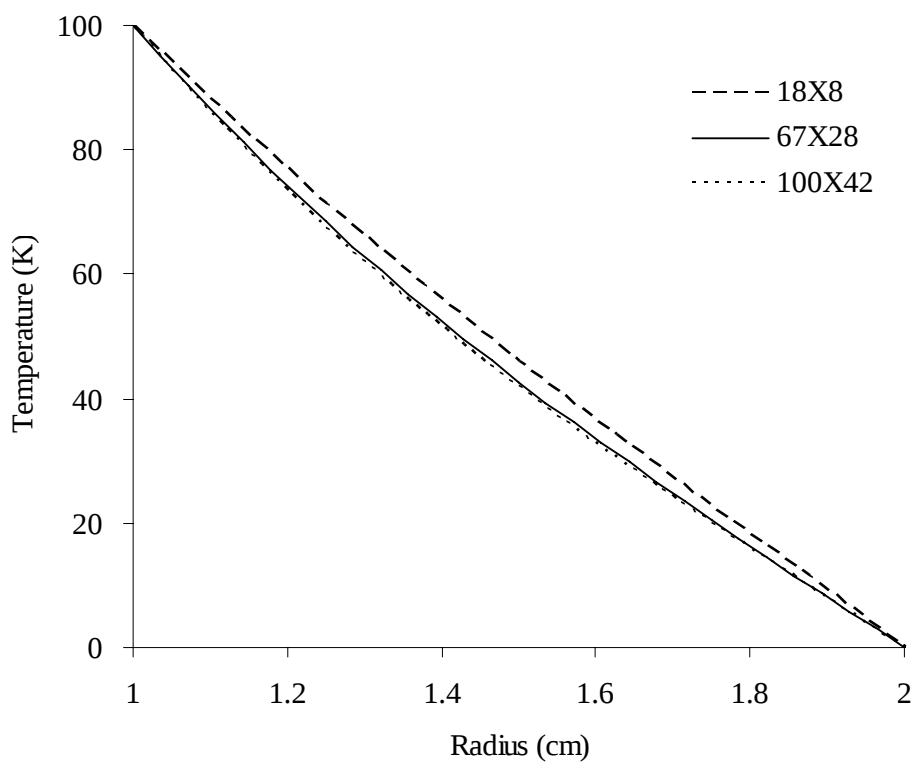


รูปที่ 4.15 กริดที่ปรับโดยวิธีแก้สมการปัวซองบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมมีวงกลมตรง
กลาง



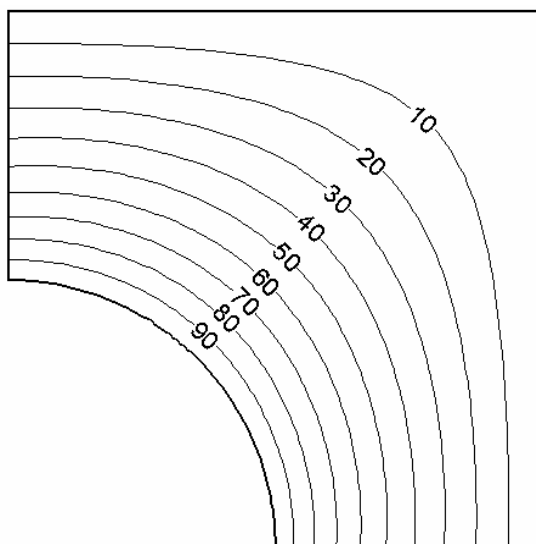
รูปที่ 4.16 การเปรียบเทียบเส้นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดที่สร้างจากสมการลาปลาซและสมการปัวซองส์

ในการหาจำนวนกริดที่เหมาะสมสำหรับปัญหาในกรณีที่เป็นแผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่วงกลมอยู่ข้างในจะทดลองใช้กริดขนาด 18x8, 67x28 และ 100x42 ซึ่งจะได้ผลการกระจายอุณหภูมิตั้งกราฟในรูปที่ 4.17 ซึ่งพบว่าเส้นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดขนาด 67x28 และ 100x42 มีค่าใกล้เคียงกัน จึงแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้โดยใช้กริดขนาด 67x28 มีความเป็น grid independent แล้ว



รูปที่ 4.17 การกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดขนาด 18x8, 67x28 และ 100x42

เมื่อได้รูปร่างและขนาดของกริดที่เหมาะสมแล้ว จึงนำกริดที่ได้มาใช้ในการคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ซึ่งจะได้ temperature contour ดังแสดงในรูปที่ 4.18

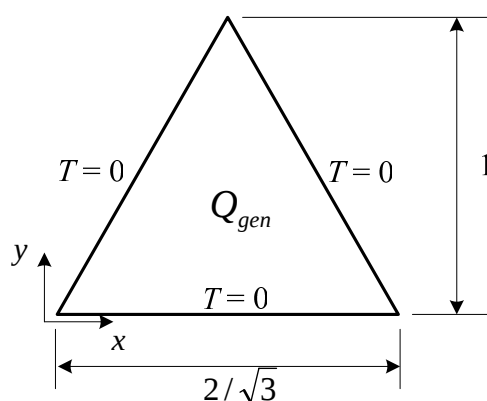


รูปที่ 4.18 การกระจายของอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมมีวงกลมตรงกลาง

จากนั้นทำการคำนวณหาฟลักซ์ความร้อนจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม จะได้ $q = 816.2 \text{ kW}$ ซึ่งจะเห็นได้ว่า ผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมมีความสอดคล้องกับผลเฉลยที่ได้จากการใช้วิธีตัวประกอบรูปร่างเป็นอย่างดี โดยมีค่าความแตกต่างน้อยกว่า 0.05%

4.1.4 การนำความร้อนในแผ่นสามเหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อนภายใน

กรณีทดสอบนี้เป็นกรณีสุดท้ายสำหรับการตรวจสอบส่วนการคำนวณที่เกี่ยวข้องกับพจน์การแพร่กระจายในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยเพิ่มการผลิตความร้อน (heat generation) เข้าไปในสมการครอบคลุม ในที่นี้ โดเมนเป็นแผ่นสามเหลี่ยมด้านเท่าสูง 1 หน่วย ที่มีการผลิตความร้อนภายในและมีอุณหภูมิที่ขอบทุกด้านเท่ากับศูนย์ ดังแสดงในรูปที่ 4.19 ซึ่งการตรวจสอบกระทำได้โดยนำผลที่ได้จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงของ Carslaw and Jaeger (1959)



รูปที่ 4.19 แผ่นสามเหลี่ยมด้านเท่าสูง 1 หน่วย

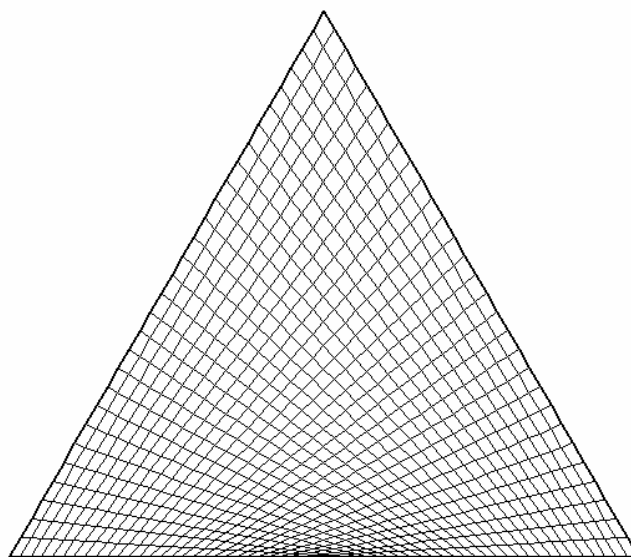
สมการครอบคลุมของปัญหาการนำความร้อนที่มีการผลิตความร้อนอยู่ภายในแบบสองมิติ ในพิกัดคาร์ทีเซียน คือ

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = q_0 \quad (4.8)$$

ทำการแก้สมการหาผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหา จะได้เป็นลักษณะการกระจายอุณหภูมิตามตำแหน่งต่างๆภายในสามเหลี่ยม ดังสมการ

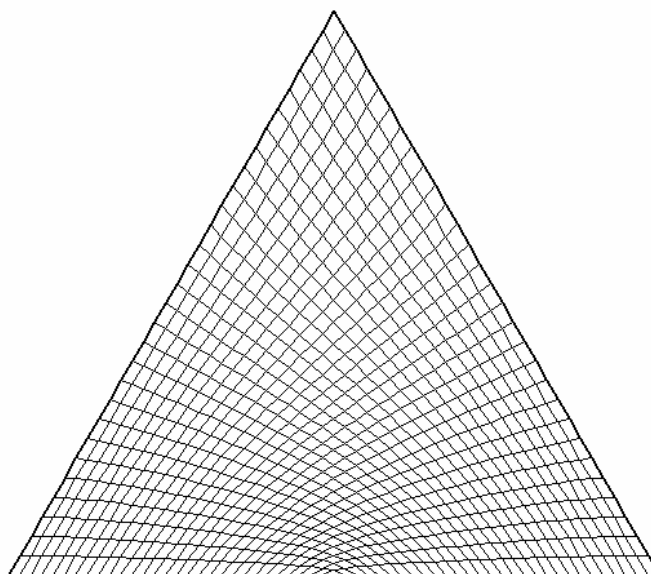
$$T = \frac{Q}{4k} (y - 2 + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x)y \quad (4.9)$$

เมื่อได้ผลเฉลยแม่นยำตรงดังสมการ (4.9) แล้ว ขั้นตอนต่อไปจะเป็นการคำนวณโดยใช้โปรแกรมเพื่อที่จะนำมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำที่ได้ สำหรับการคำนวณด้วยโปรแกรมในขั้นตอนแรกนั้นจะทำการสร้างกริดเริ่มต้นโดยใช้วิธี TFI ซึ่งจะได้กริดที่มีลักษณะดังรูปที่ 4.20



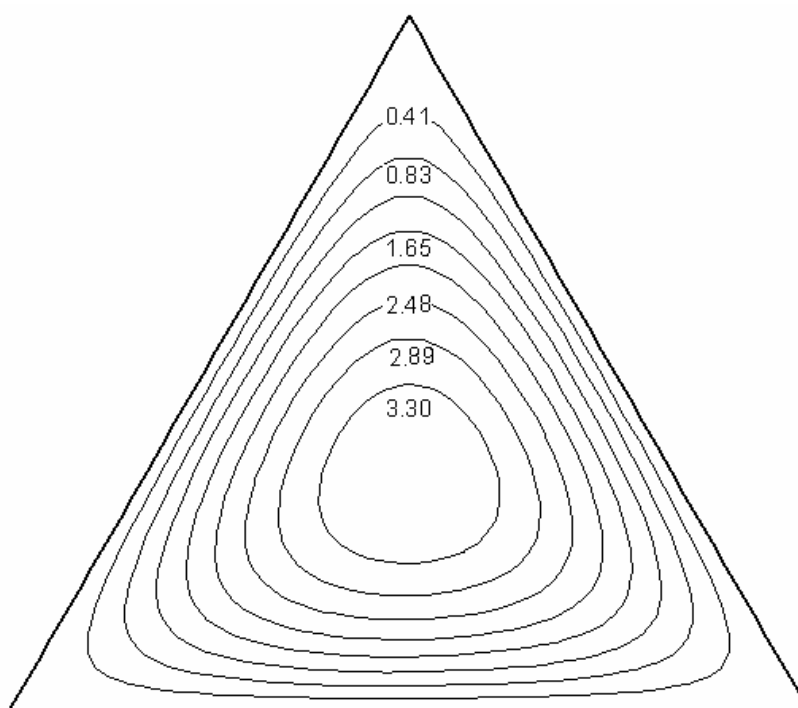
รูปที่ 4.20 กริดที่สร้างโดยใช้วิธี TFI บนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสามเหลี่ยม

จากนั้นทำการปรับกริดให้มีความสม่ำเสมอมากขึ้น โดยใช้วิธีการแก้สมการอิลิปติกซึ่งจะได้กริดที่มีลักษณะดังรูปที่ 4.21



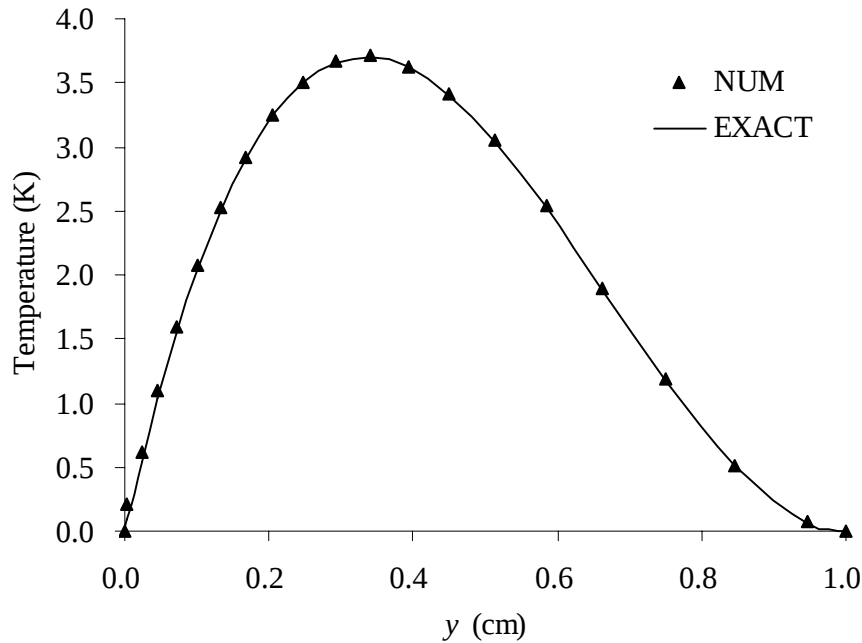
รูปที่ 4.21 กริดที่สร้างโดยการแก้สมการอิลิปติกบนโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสามเหลี่ยม

สำหรับกรณีที่เป็นแผ่นสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีการผลิตความร้อนภายในนี้ ได้ทำการทดสอบคุณสมบัติความเป็น grid independent โดยการใช้กริดขนาด 10x10 20x20 และ 30x30 ซึ่งพบว่าเส้นการกระจายอุณหภูมิที่ได้จากการคำนวณโดยใช้กริดขนาด 20x20 และ 30x30 กริด มีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งแสดงให้เห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้มีคุณสมบัติความเป็น grid independent จึงเลือกใช้กริดขนาด 20x20 ในการคำนวณ ผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับค่าอุณหภูมิที่ตำแหน่งต่างๆบนโดเมนสามารถแสดงเป็นเส้น contour ได้ดังรูปที่ 4.22



รูปที่ 4.22 การกระจายของอุณหภูมิภายในโดเมนที่มีรูปร่างเป็นแผ่นสามเหลี่ยม

จากการเปรียบเทียบผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มกับผลเฉลยแม่นยำตรง จะเห็นได้ว่า ผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์มีความสอดคล้องกับผลเฉลยแม่นยำตรงเป็นอย่างดีดังแสดงในกราฟรูปที่ 4.23 ซึ่งแสดงว่าโปรแกรมมีความถูกต้องเป็นที่น่าพอใจสำหรับการแก้ปัญหาคำนวณการนำความร้อนแบบสภาวะอยู่ตัวที่มีโดเมนเป็นแผ่นสามเหลี่ยมที่มีการผลิตความร้อนภายใน



รูปที่ 4.23 การเปรียบเทียบการกระจายอุณหภูมิระหว่างผลลัพธ์จากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มโดยใช้กริดขนาด 20x20 กับผลเฉลยแม่นยำตรง ที่ตำแหน่ง $x = 1/\sqrt{3}$

4.2 ปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อน

หลังจากที่ได้ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีเฉพาะส่วนของการคำนวณการแพร่กระจาย (diffusion part) แล้ว ในหัวข้อนี้ เราจะแสดงผลจากกรณีทดสอบที่ใช้ในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้มีการเพิ่มส่วนของการพา (convection part) ลงไป โดยมีรายละเอียดของปัญหาที่นำมาทดสอบดังต่อไปนี้

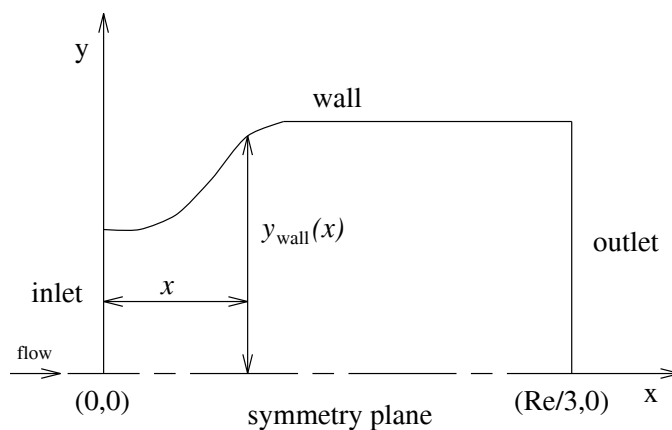
4.2.1 การไหลแบบราบเรียบผ่าน gradual-expansion channel

สำหรับส่วนการคำนวณที่ประกอบด้วยการพาและการแพร่กระจาย (convection and diffusion parts) ของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เราจะเลือกปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่าน gradual-expansion channel เพื่อใช้เป็นกรณีทดสอบแรกในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น ซึ่งรูปร่างของช่องการไหลและเงื่อนไขขอบถูกแสดงดังรูปที่ 4.24 โดยส่วนโค้งของผนังด้านบนถูกนิยามโดยความสัมพันธ์ระหว่างโคออร์ดิเนต y และ x ดังต่อไปนี้

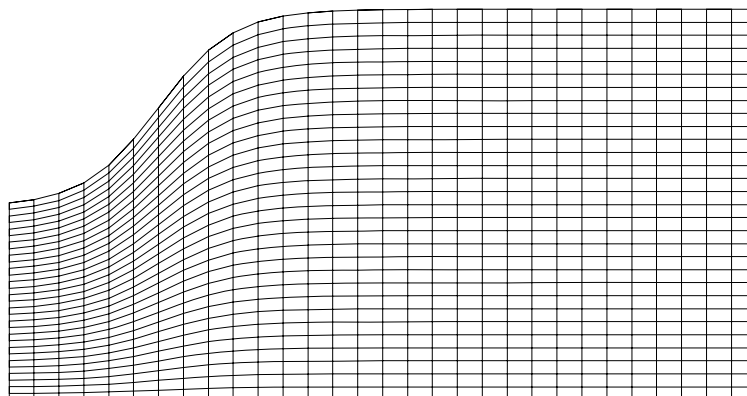
$$y_{\text{wall}} = 1 - 0.5 \left[\tanh \left(2 - 30 \frac{x}{\text{Re}} \right) - \tanh(2) \right], \quad 0 \leq x \leq \frac{\text{Re}}{3} \quad (4.10)$$

เมื่อตัวประกอบความเร็วคาร์ทีเซียนที่ทางเข้าถูกกำหนดโดยให้ $u = \frac{3}{2}(1 - y^2)$ และ $v = 0$

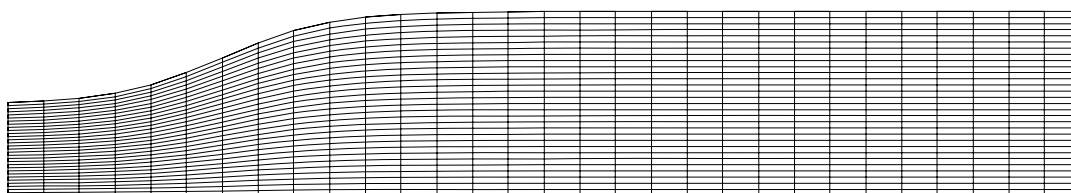
เงื่อนไขขอบที่ทางออกของช่องทางไหล คือ การไหลเป็นแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว (fully-developed flow) และมีระนาบสมมาตรอยู่ที่ระนาบ $y = 0$



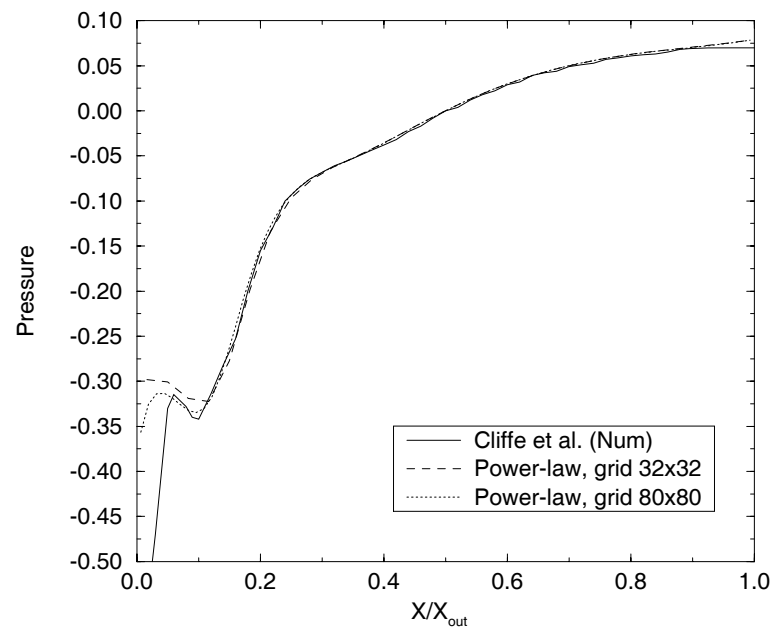
รูปที่ 4.24 รูปร่างของ gradual-expansion channel



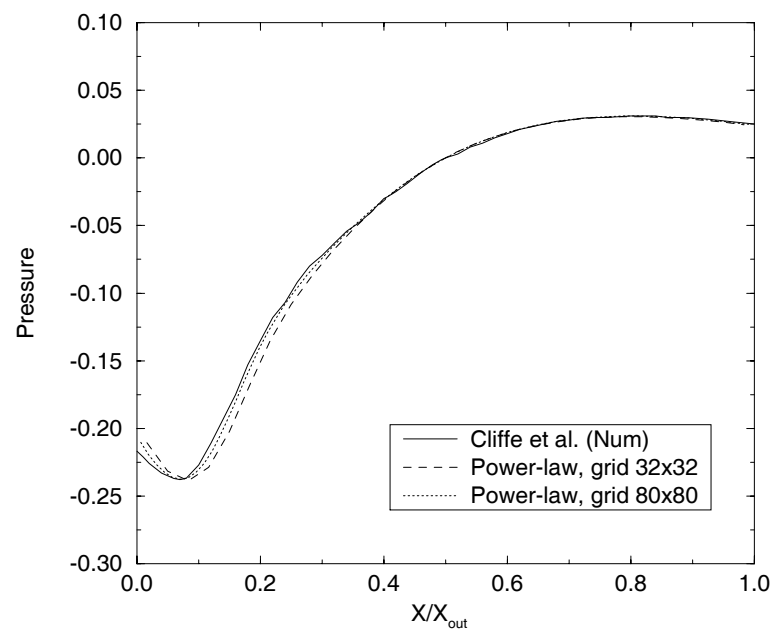
รูปที่ 4.25 กริดขนาด 32x32 สำหรับการไหลผ่าน gradual-expansion channel ที่ $Re = 10$



รูปที่ 4.26 กริดขนาด 32x32 สำหรับการไหลผ่าน gradual-expansion channel ที่ $Re = 100$
(not to scale)



รูปที่ 4.27 การกระจายของความดันที่ผนังด้านบนของช่องทางไหล ที่ $Re = 10$



รูปที่ 4.28 การกระจายของความดันที่ผนังด้านบนของช่องทางไหล ที่ $Re = 100$

numerical scheme ที่ถูกใช้ในที่นี้คือ power-law scheme โดยทำการตรวจสอบโปรแกรมกับปัญหาการไหลที่ $Re = 10$ และ $Re = 100$ กริดขนาด 32×32 สำหรับการไหลที่ Re ทั้งสองแสดงดังรูปที่ 4.25 และ 4.26 ผลกระทบต่อการกระจายความดันที่ผนังด้านบนซึ่งเกิดจากการใช้กริดขนาดต่างกันถูกแสดงในรูปที่ 4.27 และ 4.28 ร่วมกับการเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของ Cliffe et al. (1982) ซึ่งจะเห็นได้ว่ากริดทั้งสองขนาด (32×32 และ 80×80) ให้ผลลัพธ์ที่มีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งหมายความว่าผลลัพธ์ที่มีความเป็น grid independent แล้วนั่นเอง

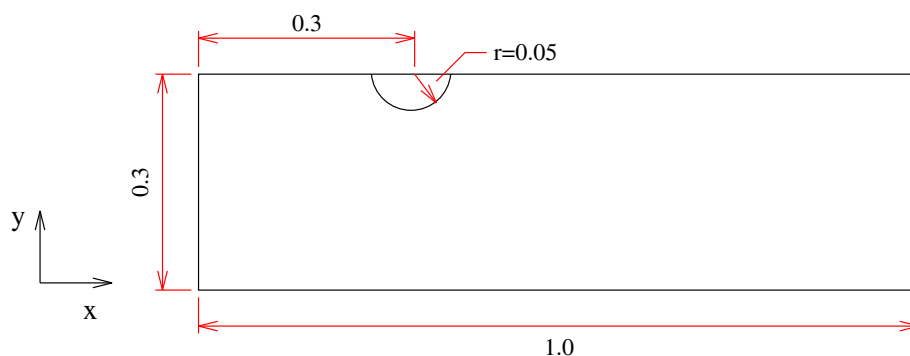
ที่ $Re = 10$ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีความสอดคล้องกับข้อมูลของ Cliffe et al. ในทุกพื้นที่ ยกเว้นที่บริเวณทางเข้าซึ่งมีค่าเกรเดียนต์ของความดันขนาดใหญ่ โดยที่ความแตกต่างที่เกิดขึ้นอาจเนื่องมาจากการใช้วิธีการคำนวณที่ต่างกันหรืออาจเป็นไปได้ว่า เราจำเป็นต้องใช้กริดที่มีขนาดความละเอียดมากๆ เฉพาะการคำนวณในบริเวณนี้ อย่างไรก็ตาม สำหรับการไหลที่ $Re = 100$ ผลการคำนวณที่ได้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีกับ benchmark ของ Cliffe et al. ตลอดทั้งโดเมนการคำนวณ

การตรวจสอบความถูกต้องนี้แสดงให้เห็นว่าส่วนของการคำนวณที่เกี่ยวข้องกับการไหลในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่เพิ่มเข้าไป ทั้งในส่วนที่เกี่ยวข้องกับสมการโมเมนตัมและสมการความดันแก้ไข มีความถูกต้องเป็นที่น่าสนใจ

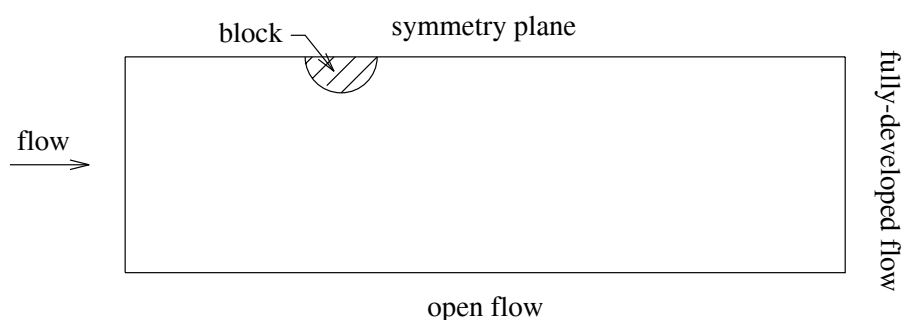
4.2.2 การถ่ายเทความร้อนของการไหลแบบราบเรียบผ่านทรงกระบอกกลม

ปัญหาที่สองที่ถูกนำมาสอบเทียบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในส่วนของการไหลนี้ คือ ปัญหาการถ่ายเทความร้อนของการไหลแบบราบเรียบผ่านทรงกระบอกกลม ซึ่งเป็นปัญหาพื้นฐานที่ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวาง จึงมีทั้งผลการทดลองและผลการคำนวณให้เปรียบเทียบเป็นจำนวนมาก

รูปที่ 4.29 แสดงรูปร่างและขนาดของโดเมนการคำนวณ โดยมีเงื่อนไขขอบดังแสดงในรูปที่ 4.30 เนื่องจากความสมมาตรของปัญหา เราจึงพิจารณารูปทรงกระบอกเพียงครึ่งเดียวเท่านั้น ที่ทางเข้าของโดเมน ความเร็ว u ถูกกำหนดให้เป็นค่าคงที่ และ ความเร็ว v ถูกกำหนดให้มีค่าเป็นศูนย์ ทางออกของโดเมนถูกวางที่ระยะทาง 7 เท่าของขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางทรงกระบอกจากทางเข้าของโดเมน และขอบที่ระนาบ $y = 0$ ถูกวางที่ระยะทาง 3 เท่าของขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางวัดจากศูนย์กลางของทรงกระบอก ทั้งนี้เพื่อให้มั่นใจว่าการไหลเป็นแบบ open flow ซึ่งขอบทั้งสองจะไม่รบกวนการไหลในบริเวณใกล้ทรงกระบอก



รูปที่ 4.29 รูปร่างและขนาดของโดเมนการไหลผ่านทรงกระบอกกลม



รูปที่ 4.30 เงื่อนไขขอบของโดเมนการคำนวณสำหรับการไหลผ่านทรงกระบอกกลม

เอนทาลปีบนผิวของทรงกระบอกถูกกำหนดให้มีค่าคงที่เท่ากับ 100 kJ/kg โดยเอนทาลปีที่ทางเข้าของโดเมนก็ถูกกำหนดให้มีค่าคงที่ด้วย นั่นคือ $h_{in} = 20 \text{ kJ/kg}$ ซึ่งค่าเอนทาลปีทั้งสองรวมถึงค่าความแตกต่างของเอนทาลปีระหว่างผิวทรงกระบอกกับทางเข้าที่ถูกกำหนดขึ้นมานี้ ไม่มีผลต่อคุณลักษณะด้านความร้อน (heat transfer characteristics) ของการไหลเนื่องจากคุณสมบัติต่างๆของการไหลมีค่าคงที่

เราเลือกใช้กริดขนาด 50×18 และ 100×36 สำหรับการคำนวณการไหลที่ $Re = 40$ ผลกระทบต่อค่าเฉลี่ยของเลขนัสเซิล (average Nusselt number) และค่า drag coefficient จากการใช้กริดที่ต่างกันถูกแสดงในตารางที่ 4.1 ผลลัพธ์ถูกเปรียบเทียบกับสหสัมพันธ์ (correlation) ของ Hilpert (1933) และผลการทดลองของ Tritton (1959) ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้กริดขนาดต่างกันทั้งสองมีความใกล้เคียงกัน ซึ่งเป็นการบ่งบอกว่า การใช้กริดขนาด 50×18 ก็มีความละเอียดเพียงพอที่จะทำให้ผลลัพธ์มีความเป็น grid independent แล้ว ดังนั้น สำหรับการคำนวณในหัวข้อนี้จะใช้กริดขนาด 50×18 เท่านั้น

ตารางที่ 4.1 คำนวณเชลล์ที่นับเบอร์เฉลี่ยและค่า drag coefficient สำหรับกริดที่มีขนาดต่างกัน

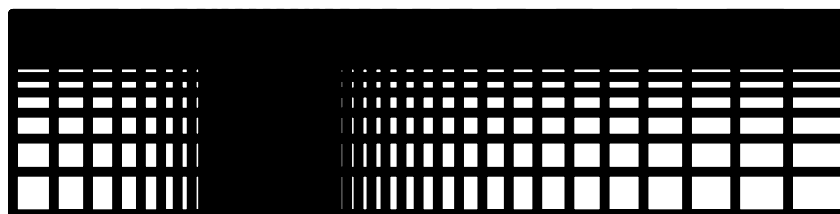
Grid	Nusselt number			Drag coefficient		
	Correlation	Computed	% Diff	Measured	Computed	% Diff
50x18	3.383	3.246	- 4.04%	1.585	1.437	-9.34%
100x36		3.283	-2.96%		1.390	-12.30%

การกระจายของกริดถูกแสดงในรูปที่ 5.21 ซึ่งในที่นี้เซลล์ภายในทรงกระบอกจะไม่ถูกนำมาคำนวณและจะถูกกัน (block) ออกจากการไหลโดยตัดความเชื่อมต่อระหว่างเซลล์ภายในทรงกระบอกกับเซลล์ที่ติดกันที่อยู่ในสนามการไหล สำหรับ numerical scheme ที่ใช้การคำนวณทั้งหมดจะใช้ SOU (second order upwind) ยกเว้นว่าจะมีการบ่งบอกเฉพาะสำหรับการคำนวณบางรายการ

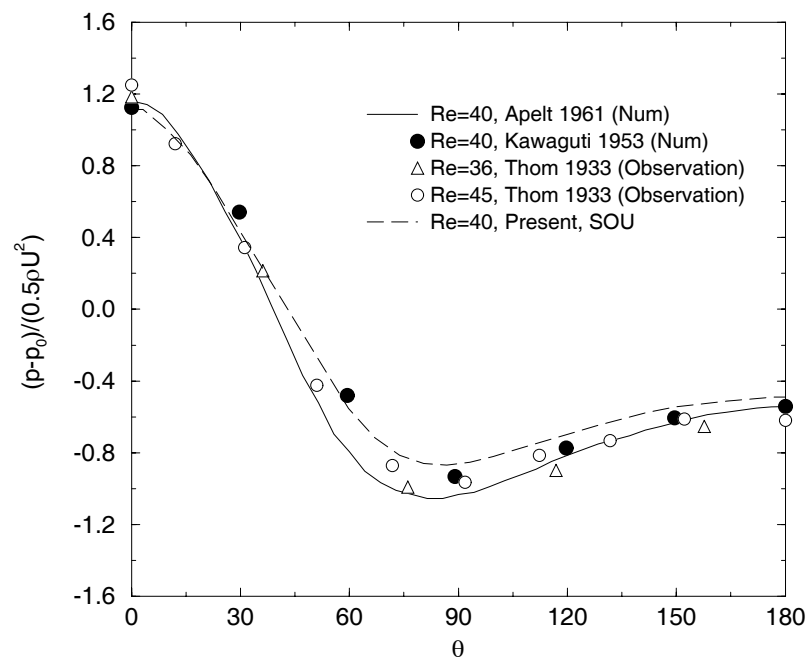
ในที่นี้ ค่าเรย์โนลด์สนับเบอร์ (Reynolds number) ถูกกำหนดโดย

$$Re_d = \frac{\rho U d}{\mu} \quad (4.11)$$

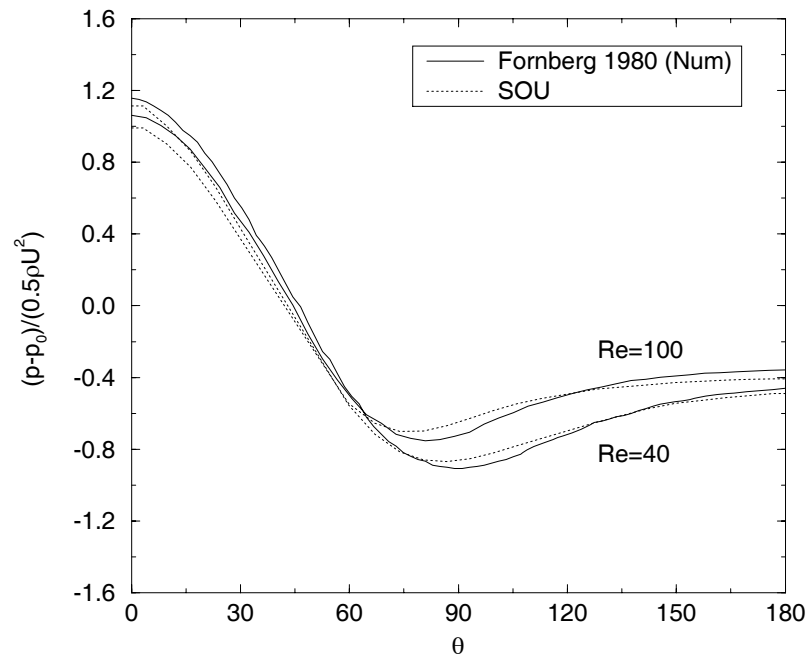
เมื่อ d คือเส้นผ่านศูนย์กลางกลางของทรงกระบอก U คือความเร็วที่ทางเข้า และ ρ และ μ คือความหนาแน่นและความหนืดของของไหลตามลำดับ



รูปที่ 4.31 กริดขนาด 50x18 สำหรับการไหลผ่านทรงกระบอกกลม (not to scale)



รูปที่ 4.32 การกระจายของความดันบนผิวของทรงกระบอก



รูปที่ 4.33 การกระจายของความดันบนผิวของทรงกระบอกสำหรับการไหลที่ $Re = 40$ และ $Re = 100$ โดยเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Fornberg (1980)

รูปที่ 4.32 แสดงสัมประสิทธิ์ความดันไร้มิติ (dimensionless pressure coefficient) ที่คำนวณได้ เปรียบเทียบกับผลลัพธ์ของ Thom (1933), Kawaguti (1953) และ Apelt (1961) โดยสัมประสิทธิ์ความดันไร้มิติ (C_p) ถูกกำหนดโดย

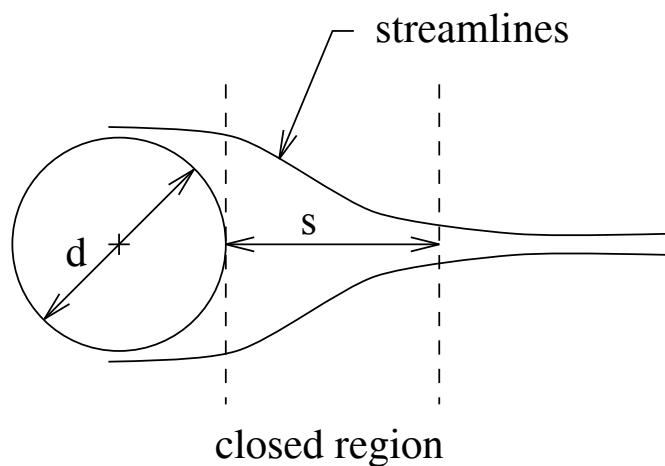
$$C_p = \frac{p - p_0}{0.5\rho U^2} \quad (4.12)$$

เมื่อ p คือความดันที่ตำแหน่งต่างๆรอบทรงกระบอก และ p_0 และ U คือ ความดันและความเร็วที่ทางเข้าของโดเมน Re ของการไหลเท่ากับ 40 ค่าของ C_p ถูกพล็อตที่ตำแหน่งมุม θ ต่างๆซึ่งวัดเทียบจากจุด stagnation ด้านหน้าของทรงกระบอก

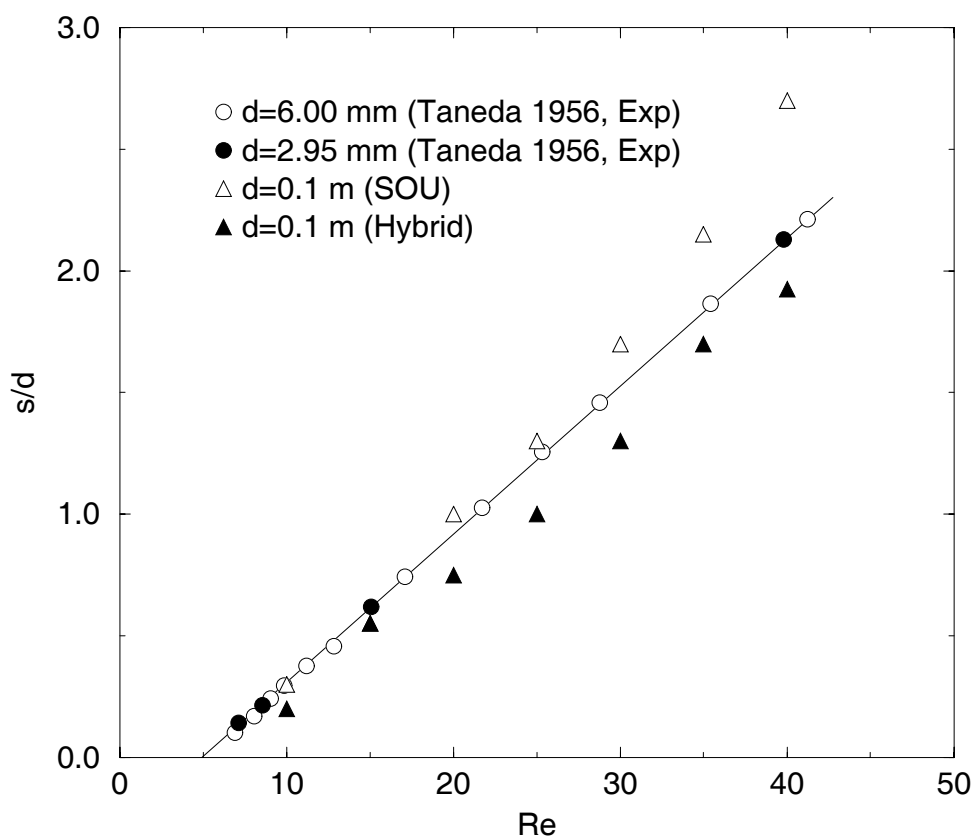
เราจะเห็นได้ว่าผลการคำนวณโดยใช้ SOU scheme มีความสอดคล้องค่อนข้างดีทั้งกับผลการทดลองและผลการคำนวณที่มีผู้ทำวิจัยมาก่อนหน้านี้ ลักษณะและแนวโน้มของกราฟมีลักษณะที่คล้ายคลึงกัน โดยค่าสัมประสิทธิ์ความดันเริ่มลดลงจากจุด stagnation ด้านหน้าของทรงกระบอกจนกระทั่งตกลงจนถึงจุดต่ำสุดที่มุมประมาณ 80° จากนั้นกราฟจึงยกขึ้นอีกเล็กน้อยจากจุดดังกล่าว ผลการคำนวณที่ได้มีค่าใกล้เคียงกันมากกับผลลัพธ์ของ Kawaguti แม้ว่าผลการทำนายจะมีค่าสูงกว่าผลการทดลองของ Thom เล็กน้อยที่ค่า $\theta > 30^\circ$

นอกจากนั้น ยังมีการเปรียบเทียบผลการคำนวณของการไหลที่ $Re = 40$ และ $Re = 100$ กับผลการคำนวณของ Fornberg (1980) ซึ่งจากการเปรียบเทียบดังแสดงในรูปที่ 4.33 จะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความสอดคล้องกันอย่างน่าพอใจ

ความยาวของบริเวณปิด (closed region) ของ streamlines ด้านหลังทรงกระบอก (รูปที่ 4.34) ถูกคำนวณและนำมาเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Taneda (1956) ดังแสดงในรูปที่ 4.35 สำหรับการทดลองเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกระบอกคือ 6 mm และ 2.95 mm ในขณะที่เส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกระบอกที่ใช้ในการคำนวณคือ 0.1 m ความยาวของบริเวณปิด (s) ถูกทำให้เป็นพจน์ไร้มิติโดยการหารด้วยเส้นผ่านศูนย์กลาง (d) และพล็อตในช่วงของเรย์โนลด์ส์นับเบอร์ตั้งแต่ 10 ถึง 40



รูปที่ 4.34 บริเวณปิดของ streamlines ด้านหลังทรงกระบอก



รูปที่ 4.35 ความยาวบริเวณปิดของ streamlines ด้านหลังทรงกระบอกเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Taneda (1956)

จากรูปที่ 4.35 จะเห็นได้ว่าค่า s/d เพิ่มขึ้นเป็นเส้นตรงตามค่า Re ที่เพิ่มขึ้น ซึ่งในที่นี้การคำนวณใช้ numerical scheme 2 แบบ คือ SOU และ hybrid ซึ่งจะเห็นว่าผลการคำนวณที่ใช้ scheme ทั้งสองให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลการทดลองของ Taneda ถึงแม้ว่า ค่าที่ทำนายโดยใช้ hybrid scheme จะมีค่าต่ำกว่าเล็กน้อย และ ค่าที่ทำนายโดยใช้ SOU scheme จะมีค่าสูงกว่าบ้าง ที่ $Re > 30$

ค่า drag coefficient (C_D) ของทรงกระบอกถูกนิยามโดย

$$C_D \equiv \frac{F_D}{0.5\rho U^2 d} \quad (4.13)$$

เมื่อ F_D คือ drag force ที่กระทำบนทรงกระบอก โดย drag force ประกอบด้วย pressure drag (D_p) ซึ่งเกิดจากความแตกต่างของความดันในทิศทางการไหลและ friction drag (D_f) ที่เกิดจากความเค้นเฉือนที่พื้นผิว (surface shear stress) ซึ่งค่าทั้งสองสามารถคำนวณจากสมการต่อไปนี้

$$D_p = \int p \cos \theta dA_s \quad (4.14)$$

$$D_f = \int \tau_w \sin \theta dA_s \quad (4.15)$$

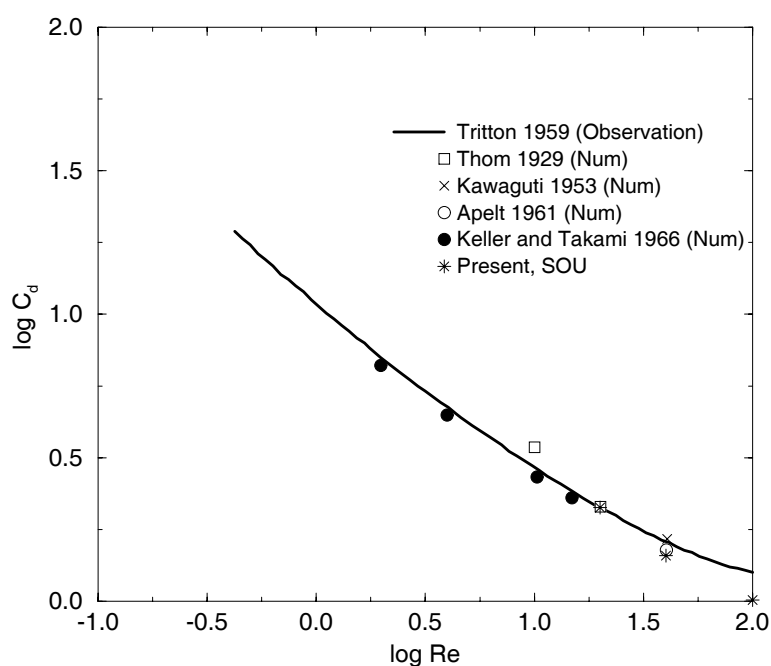
เมื่อ τ_w คือความเค้นเฉือนบนพื้นผิวทรงกระบอกและ A_s คือ พื้นผิวของทรงกระบอก

รูปที่ 4.36 แสดงการเปรียบเทียบ drag coefficient ที่ได้จากการคำนวณโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ กับผลการทดลองของ Tritton (1959) และผลการคำนวณของ Thom (1929), Kawaguti (1953), Apelt (1961) และ Keller and Tatami (1966)

จากการคำนวณที่ $Re = 20, 40$ และ 100 จะพบว่าแนวโน้มของกราฟเป็นไปในทิศทางเดียวกันกับทั้งผลการทดลองและผลการคำนวณของนักวิจัยท่านอื่น ซึ่ง C_D เป็นฟังก์ชันของเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ โดยที่ C_D มีค่าลดลงเมื่อ Re มีค่าเพิ่มขึ้น สำหรับ $Re = 20$ และ 40 การทำนายให้ผลที่ใกล้เคียงกันมากกับผลการทดลอง อย่างไรก็ตามสำหรับค่า Re ที่สูง ($Re = 100$) ผลที่ได้จากการคำนวณจะมีค่าต่ำกว่าผลการทดลองอยู่บ้าง ที่เป็นเช่นนี้ ก็อาจเนื่องมาจากสาเหตุที่ว่า เมื่อ $Re > 40$ แม้ว่าการไหลยังเป็นแบบราบเรียบ แต่ก็จะเริ่มมีลักษณะเป็นการไหลแบบไม่อยู่ตัว (unsteady) บ้างแล้ว ซึ่งสมมติฐานของการคำนวณในที่นี้ที่กำหนดให้เป็นการไหลแบบอยู่ตัว จะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์ได้ โดยเฉพาะในส่วนของการคำนวณค่า D_p ซึ่งเป็นผลมาจากการก่อตัวของ wake เนื่องจากการไหลแบบไม่อยู่ตัวด้านหลังทรงกระบอก ทั้งนี้ ผลการคำนวณของนักวิจัยอื่นที่นำมาเปรียบเทียบก็ล้วนแล้วแต่กระทำที่ $Re \leq 40$ ทั้งสิ้น ดังแสดงในตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 ช่วงของเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ที่ใช้ในการคำนวณที่มีผู้ทำมาก่อนเปรียบเทียบกับช่วงที่ใช้ในการคำนวณปัจจุบัน

Authors	Re
Thom (1929)	10 – 20
Kawaguti (1953)	40
Apelt (1961)	40
Keller and Tatami (1966)	2 – 15
Present calculation	20 – 100



รูปที่ 4.36 ค่า drag force ที่กระทำบนผิวทรงกระบอก

ในส่วนของการถ่ายเทความร้อนของการไหล เราจะทำการเปรียบเทียบค่าตัวเลขที่นัมเบอร์ที่ตำแหน่งต่างๆรอบพื้นผิวทรงกระบอกกับผลการทดลองของ Eckert and Soehngen (1952) ดังแสดงในรูปที่ 4.37 ในที่นี้กำหนดให้ค่า Re ของการไหลเท่ากับ 28.1 โดยค่าตัวเลขที่นัมเบอร์ที่ตำแหน่งต่างๆ (Nu) ถูกกำหนดโดยสมการ

$$Nu \equiv \frac{q''}{h_s - h_{in}} \cdot \frac{Pr}{\mu} \cdot d \quad (4.16)$$

เมื่อ q'' คือค่าฟลักซ์ความร้อนที่ตำแหน่งต่างๆ, h_s และ h_{in} คือค่าเอนทาลปีที่ทรงกระบอกและที่ทางเข้าของการไหล ตามลำดับ, Pr คือพรีนดท์เทิลนัมเบอร์ (Prandtl number) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.7 และ μ คือค่าความหนืดของของไหลซึ่งถูกกำหนดให้เท่ากับ 0.1 ในที่นี้

ค่าสเซลท์นัมเบอร์เฉลี่ยสามารถคำนวณได้จาก

$$\overline{Nu} = \frac{\int Nu \, dA_s}{\int dA_s} \quad (4.17)$$

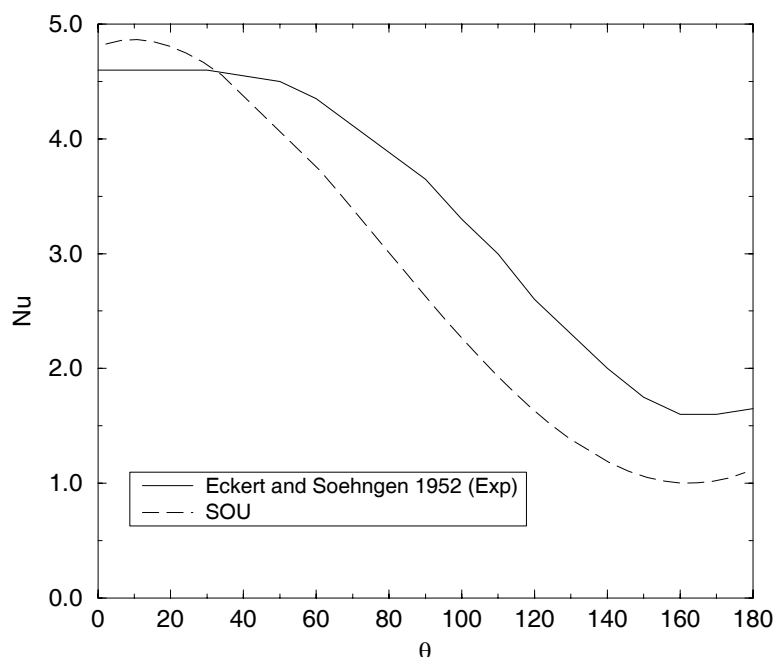
ซึ่งในรูปที่ 4.38 ค่าสเซลท์นัมเบอร์เฉลี่ยที่ได้จากผลการคำนวณสำหรับการไหลที่ Re ต่างๆ ตั้งแต่ Re = 10 ถึง 100 ถูกนำมาเปรียบเทียบกับ empirical correlation ของ Hilpert (1933) ที่กำหนดโดยสมการต่อไปนี้

$$\overline{Nu} = C Re^m Pr^{1/3} \quad (4.18)$$

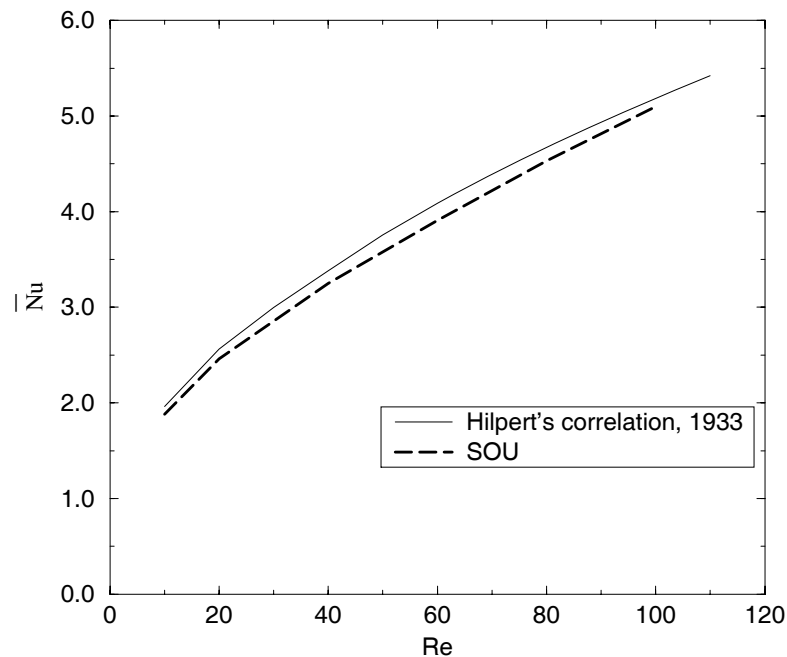
เมื่อ C และ m เป็นค่าคงที่ ซึ่งแสดงค่าดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 ค่าคงที่ในสมการ empirical correlation ของ Hilpert (1933)

Re	C	m
4 – 40	0.911	0.385
40 – 4000	0.683	0.466



รูปที่ 4.37 การกระจายค่าสเซลท์นัมเบอร์รอบทรงกระบอกที่ Re = 28.1



รูปที่ 4.38 ค่าตัวเลขเทย์เลอร์เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จาก empirical correlation

จากรูปที่ 4.37 จะเห็นได้ว่าผลการคำนวณสอดคล้องกับผลการทดลองเพียงในส่วนของ แนวโน้มกราฟที่มีความคล้ายคลึงกันเท่านั้น เมื่อค่า $\theta > 40^\circ$ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมีค่าน้อยกว่าผลที่ได้จากการทดลอง อย่างไรก็ตามแนวโน้มของกราฟมีส่วนคล้ายกันในแง่ที่ว่า ค่าตัวเลขเทย์เลอร์ลดลงโดยตลอดนับตั้งแต่จุด stagnation ด้านหน้าของทรงกระบอกเป็นต้นมา และสำหรับ $\theta > 160^\circ$ ค่าของ Nu ทั้งจากการคำนวณและการทดลองก็เพิ่มขึ้นเล็กน้อยจนกระทั่ง $\theta = 180^\circ$

จากรูปที่ 4.38 พบว่าค่าตัวเลขเทย์เลอร์ที่ได้จากการทำนายผลมีความสอดคล้องกันดีกับ empirical correlation ของ Hilpert ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า $\overline{Nu}$ เป็นฟังก์ชันของ Re ซึ่ง $\overline{Nu}$ มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ Re มีค่าเพิ่มขึ้น ถึงแม้ว่าการคำนวณจะให้ค่าที่ต่ำกว่า แต่ค่าที่ได้ก็ยังอยู่ในช่วงของความผิดพลาด 25% ที่เป็นที่ยอมรับกันทั่วไปจากการใช้สหสัมพันธ์ประเภทนี้ (Incropera and de Witt, 2002)

ผลการคำนวณในหัวข้อนี้แสดงให้เห็นว่าสมการการพาความร้อนได้ถูกใส่เข้าไปอย่างถูกต้องในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และ numerical scheme ทั้งแบบ SOU และ hybrid ก็ได้ผ่านการทดสอบด้วย

4.2.3 การไหลแบบปั่นป่วนผ่าน inclined backward facing step

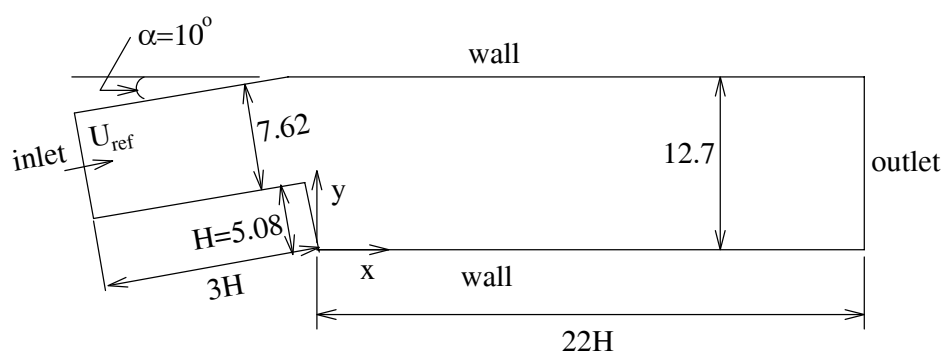
หลังจากที่ได้มีการเพิ่มส่วนของแบบจำลองความปั่นป่วน standard $k-\epsilon$ พร้อม wall functions ลงไปในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อให้สามารถคำนวณการไหลแบบปั่นป่วนได้ เราจะ

ทำการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมกับปัญหาการไหลใน backward facing step ซึ่งมีทางเข้าเป็นแบบเอียง โดยเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Westphal et al. (1984) รูปร่างของช่องทางไหลแสดงดังรูปที่ 4.39 ซึ่งจะเห็นได้ว่าทางเข้าเอียงเป็นมุมลงเล็กน้อย α เมื่อเทียบกับส่วนที่เหลือของช่องทางไหล ค่าความยาวลักษณะเฉพาะ (characteristic length) L_{ch} ถูกกำหนดให้เท่ากับความสูงของ step คือ H ความยาวของช่องทางไหลก่อนถึง step คือ $3H$ และความยาวทั้งหมดนับจาก step คือ $22H$ ค่าความเร็วลักษณะเฉพาะ (characteristic velocity) ถูกกำหนดให้เป็น U_{ref} และ Re ถูกกำหนดโดย

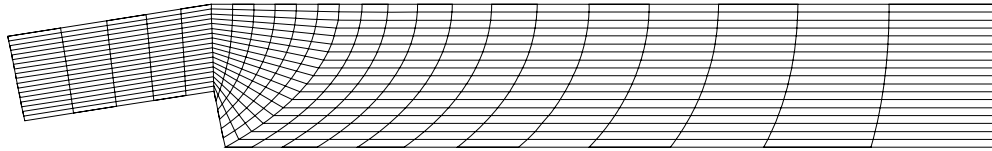
$$Re = \frac{\rho U_{ref} H}{\mu} \quad (4.19)$$

และมีค่าเท่ากับ 42000

กริดขนาด 30×20 ที่ใช้ในการคำนวณถูกแสดงในรูปที่ 4.40 ซึ่งในส่วนของการตรวจสอบความเป็น grid-independent ของผลลัพธ์ ได้มีการใช้กริดละเอียดขนาด 60×40 ในการคำนวณด้วย โดยผลการคำนวณของการกระจายความดันและความเค้นเฉือนที่ผนังด้านบนและด้านล่างของช่องทางไหลจากการใช้กริดขนาดต่างกันนี้ถูกแสดงในรูปที่ 5.42 ถึง 5.45 จะเห็นได้ว่ากริดทั้งสองให้ผลที่คล้ายคลึงกัน จึงอาจถือได้ว่าผลลัพธ์จากการใช้กริดขนาด 30×20 มีความเป็น grid-independent เพียงพอแล้ว ในส่วนของ numerical scheme ในที่นี้ได้มีการใช้ทั้ง QUICK และในการทดสอบ ซึ่งได้ผลลัพธ์ที่แทบจะไม่แตกต่างกัน จึงจะแสดงเฉพาะผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้ QUICK scheme เท่านั้น



รูปที่ 4.39 รูปร่างและมิติของโดเมนการไหลภายในช่องทางไหลแบบ inclined backward facing step



รูปที่ 4.40 กริดขนาด 30x20 ที่ใช้ในการคำนวณการไหลภายในช่องทางไหลแบบ inclined backward facing step

โปรไฟล์ของความเร็วที่ทางเข้าถูกกำหนดให้เป็นแบบ fully-developed turbulent flow โดยใช้ 1/7th law (Schlichting, 1979) ดังนี้

$$u = U_{\text{ref}} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad (4.19)$$

เมื่อ δ ถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของความสูงที่ทางเข้า
ค่า turbulent kinetic energy (k) ที่ทางเข้าถูกกำหนดจาก

$$k = \frac{l^2}{\sqrt{C_\mu}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (4.20)$$

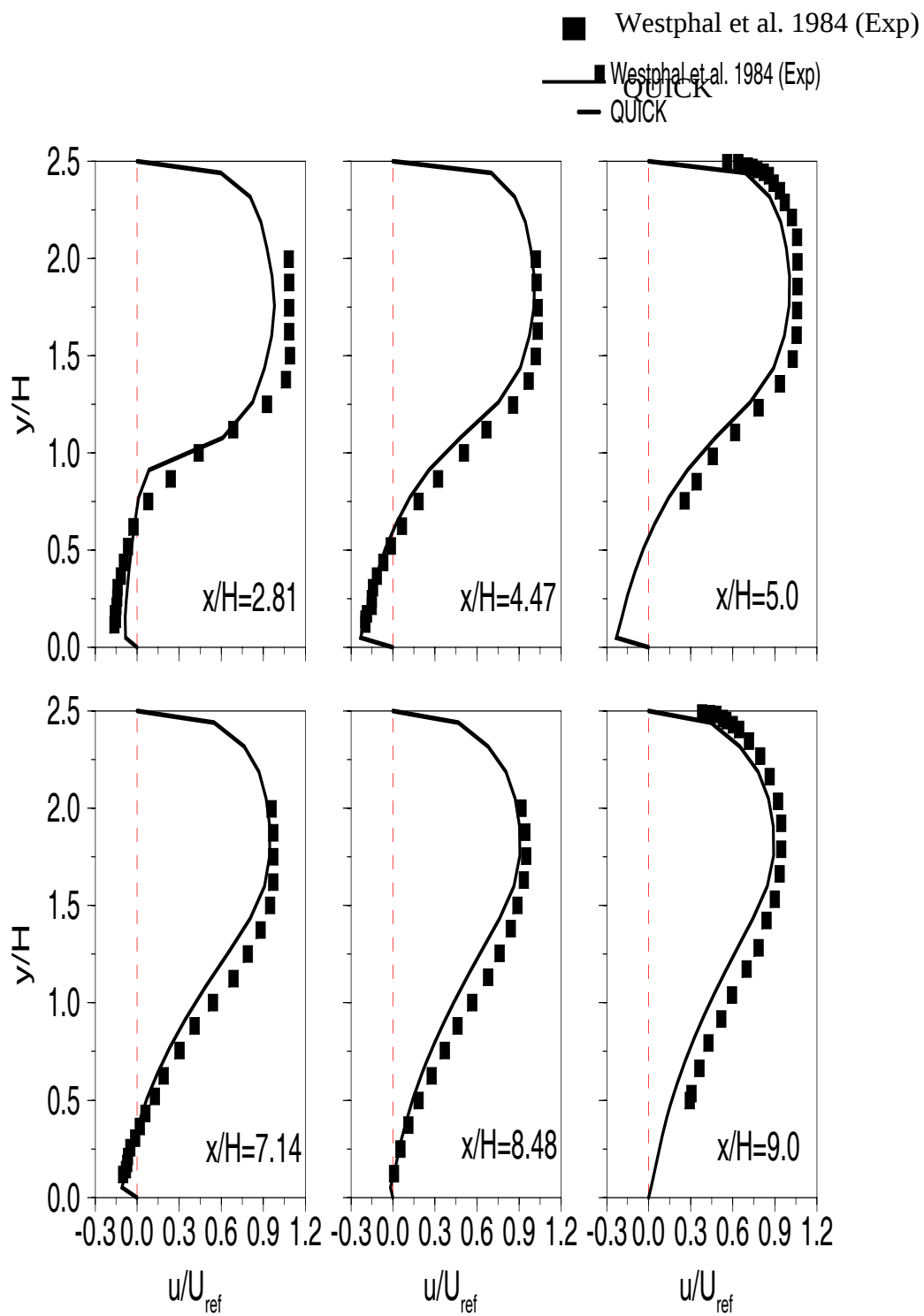
เมื่อ

$$l = \min(\kappa y, 0.09\delta) \quad (4.21)$$

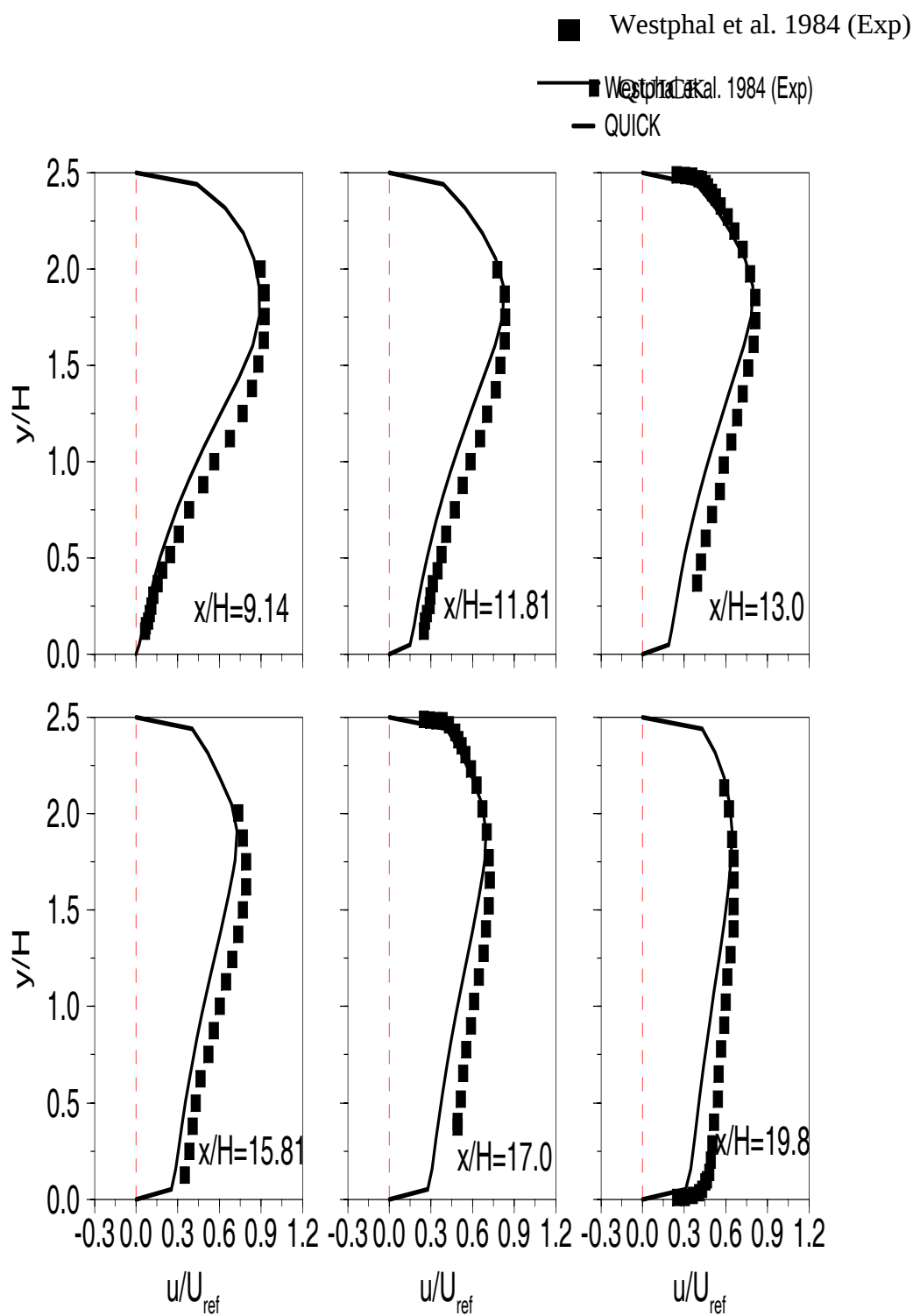
และค่า dissipation rate ของ turbulent kinetic energy (ε) มีค่าดังนี้

$$\varepsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l} \quad (4.22)$$

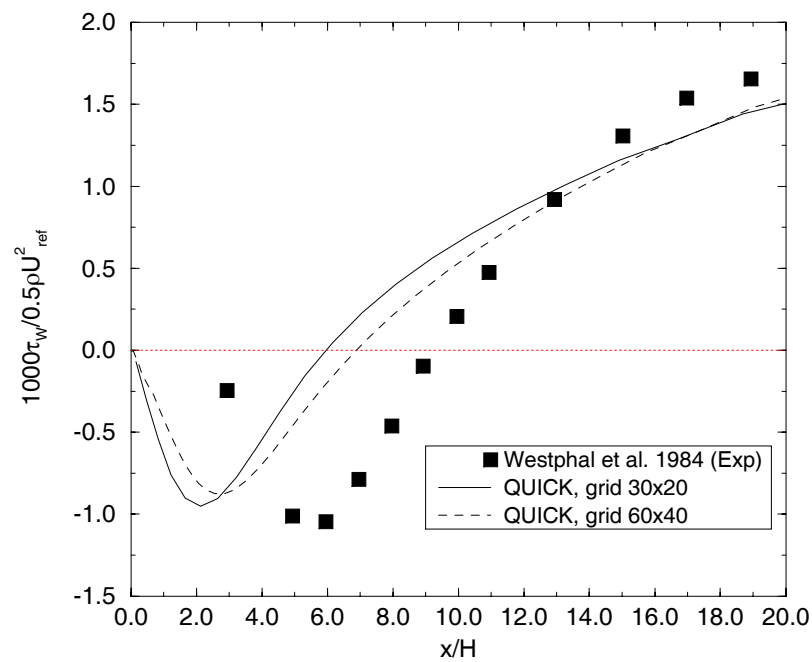
การไหลที่ทางออกถูกสมมติให้เป็นแบบ fully developed ดังนั้นจะใช้เงื่อนไขขอบคือ เกรเดียนต์ของ u เป็นศูนย์ และ v มีค่าเท่ากับศูนย์ ที่ผนังด้านบนและล่างจะใช้ wall functions ช่วยในการคำนวณ



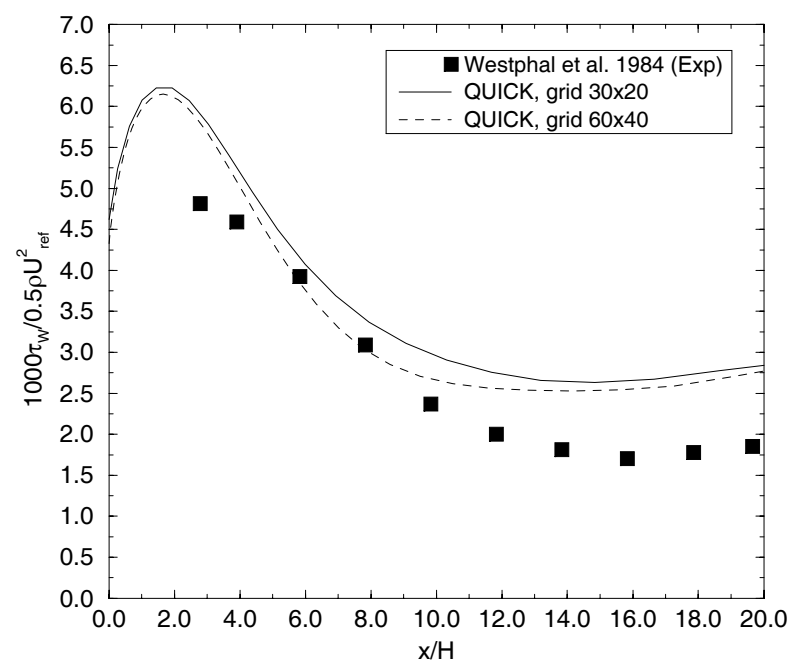
รูปที่ 4.41 โปรไฟล์ความเร็วที่ตำแหน่งต่างๆของการไหลผ่าน inclined backward facing step



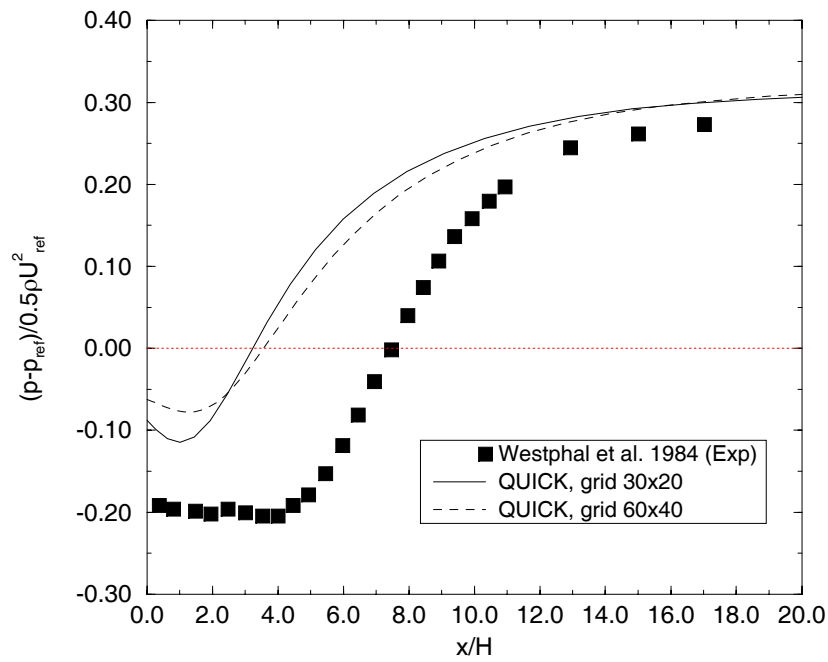
รูปที่ 4.41 (ต่อ) โปรไฟล์ความเร็วที่ตำแหน่งต่างๆของการไหลผ่าน inclined backward facing step



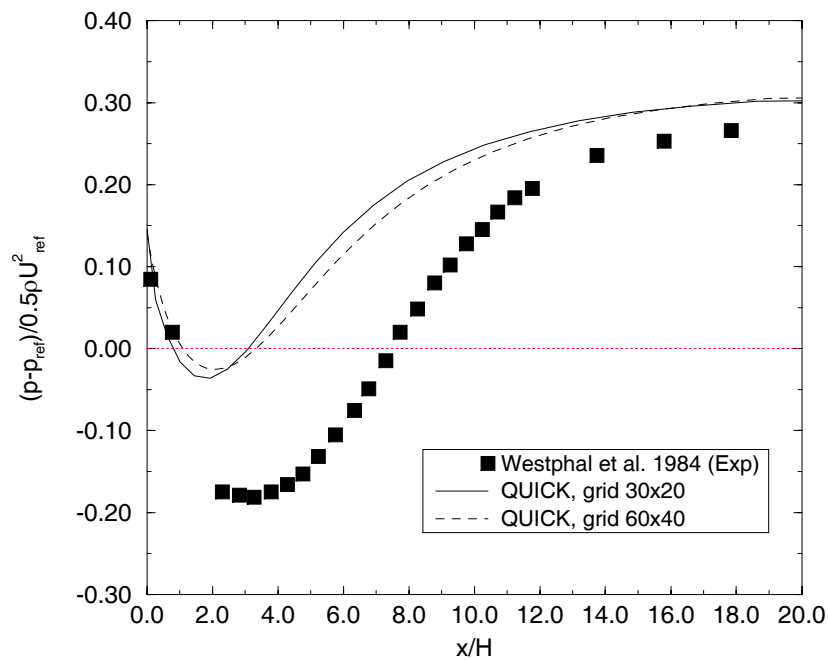
รูปที่ 4.42 ความเค้นเฉือนบนผนังด้านล่าง (ด้านที่มี step) ของช่องทางไหลแบบ inclined backward facing step



รูปที่ 4.43 ความเค้นเฉือนบนผนังด้านบน (ด้านตรงข้าม step) ของช่องทางไหลแบบ inclined backward facing step



รูปที่ 4.44 ความดันบนผนังด้านล่าง (ด้านที่มี step) ของช่องทางไหลแบบ inclined backward facing step



รูปที่ 4.45 ความดันบนผนังด้านบน (ด้านตรงข้าม step) ของช่องทางไหลแบบ inclined backward facing step

ในที่นี้ความเร็วและระยะทางถูกทำให้เป็นตัวแปรไร้มิติโดย U_{ref} และ x นั่นคือ $U = u/U_{\text{ref}}$ และ $X = x/H$ โดยรูปที่ 4.41 แสดงการเปรียบเทียบโปรไฟล์ของความเร็วที่ได้จากผลการคำนวณกับผลการทดลอง ซึ่งจะเห็นว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความสอดคล้องกันดีที่ทุกตำแหน่งในช่องทางไหล

รูปที่ 4.42 และ 4.43 แสดงการกระจายของความเค้นเฉือนไร้มิตินบนผนังด้านบนและด้านล่างของช่องทางไหล ผลการคำนวณมีแนวโน้มไปในทิศทางเดียวกันกับผลการทดลอง แต่ในบริเวณที่เกิดการหมุนวน (recirculation region) ผลการคำนวณมีความแตกต่างพอสมควรเมื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Westphal et al. ความแตกต่างที่เกิดขึ้นนี้มีสาเหตุมาจาก wall functions ที่ใช้ซึ่งไม่สามารถให้ผลที่แม่นยำในบริเวณใกล้ผนังที่มีความดันย้อนกลับ (adverse pressure gradients) ข้อบกพร่องนี้เป็นจุดอ่อนที่เป็นที่ทราบกันดีของการใช้แบบจำลองความปั่นป่วน standard $k-\epsilon$ ร่วมกับ wall functions

รูปที่ 4.44 และ 4.45 เปรียบเทียบความดันไร้มิติ $\frac{p - p_{\text{ref}}}{0.5\rho U_{\text{ref}}^2}$ บนผนังด้านบนและด้านล่างของช่องทางไหลที่ได้จากการคำนวณกับผลการทดลอง โดยความดันอ้างอิง p_{ref} เป็นความดันสถิตย์บนผนังด้านบนที่ทางเข้า จากรูปทั้งสอง แม้ว่าแนวโน้มของกราฟจะคล้ายกัน แต่ค่าความดันไร้มิติที่เป็นลบในบริเวณที่มีความดันย้อนกลับที่ได้จากการคำนวณมีขนาดเล็กกว่าผลการทดลองค่อนข้างมาก ปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นนี้เป็นการยืนยันถึงความไม่แม่นยำของแบบจำลองความปั่นป่วน standard $k-\epsilon$ สำหรับการไหลประเภทนี้

อย่างไรก็ตาม จากผลลัพธ์ที่แสดงในหัวข้อนี้ เราสามารถสรุปได้ว่าแบบจำลองความปั่นป่วน standard $k-\epsilon$ ได้ถูกใส่เพิ่มเข้าไปในโปรแกรมคอมพิวเตอร์อย่างถูกต้อง พร้อมกันนี้ก็ได้ทำการทดสอบ QUICK numerical scheme ไปด้วย

บทที่ 5

กรณีทดสอบสำหรับแบบจำลองความปั่นป่วน

เพื่อให้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาสามารถนำไปใช้ในการคำนวณแก้ปัญหาการไหลที่ซับซ้อนมากๆ เช่น การไหลแบบปั่นป่วนในลักษณะที่เป็นการไหลหมุนวน (recirculating flows) การไหลที่มีการแยกตัว (separating flows) หรือการไหลแบบหมุนควง (swirling flows) ได้ จึงได้มีการศึกษาแบบจำลองความปั่นป่วนอื่นๆ เพิ่มเติม นอกเหนือจากแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ โดยในที่นี้ ได้เลือกแบบจำลอง $k-\omega$ และ $k-\varepsilon-\gamma$ ขึ้นมาศึกษา ซึ่งการที่ยังมุ่งเน้นที่แบบจำลองความปั่นป่วนแบบ two-equation ก็เนื่องมาจากความรวดเร็วในการคำนวณและความสะดวกต่อผู้ใช้ (users) ทั่วไปสำหรับแบบจำลองประเภทนี้

ในการทดสอบแบบจำลองที่กล่าวมานั้น ได้ทำการเปรียบเทียบกับผลการทดลองหรือผลการคำนวณอื่นๆ ของปัญหาแบบง่ายซึ่งมีกริดในลักษณะสี่เหลี่ยมธรรมดา โดยทดสอบแบบจำลอง $k-\omega$ กับปัญหาต่อไปนี้

- 1) การไหลและการถ่ายเทความร้อนแบบปั่นป่วนผ่านช่องทางไหลผนังเรียบ
 - 2) การไหลและการถ่ายเทความร้อนแบบปั่นป่วนผ่าน backward facing step
- และทำการทดสอบแบบจำลอง $k-\varepsilon-\gamma$ กับปัญหาต่างๆ ดังนี้
- 1) การไหลแบบปั่นป่วนผ่านแผ่นเรียบ
 - 2) การไหลแบบปั่นป่วนในท่อ

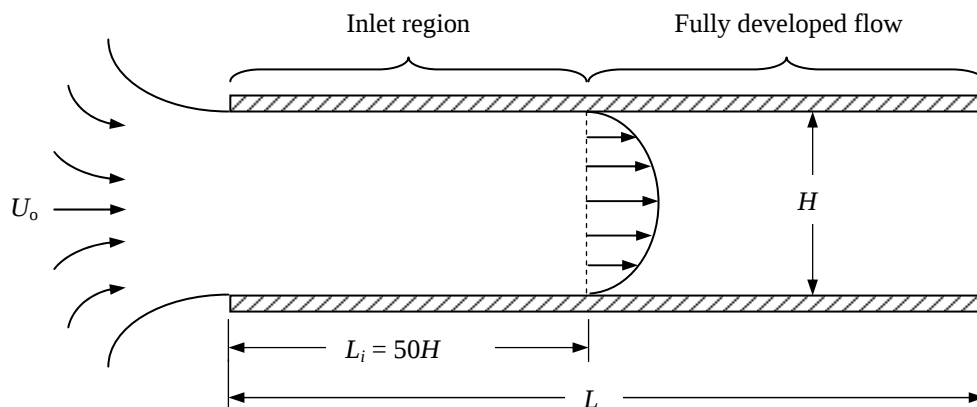
5.1 การไหลและการถ่ายเทความร้อนแบบปั่นป่วนผ่านช่องทางไหลผนังเรียบโดยใช้

แบบจำลอง $k-\omega$

เราจะใช้ผลการคำนวณด้วยวิธี DNS (direct numerical analysis) ของ Mansour et al. (1988) เป็นข้อมูลอ้างอิงในการตรวจสอบความถูกต้องของแบบจำลองความปั่นป่วนที่ใช้ สำหรับปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนผ่านช่องทางไหลผนังเรียบ โดยกำหนดให้ช่องทางไหลมีลักษณะดังแสดงในรูปที่ 5.1 และสามารถหาค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ (Re_H) ของการไหลได้จากสมการ

$$Re_H = \frac{\rho U_o H}{\mu} \quad (5.1)$$

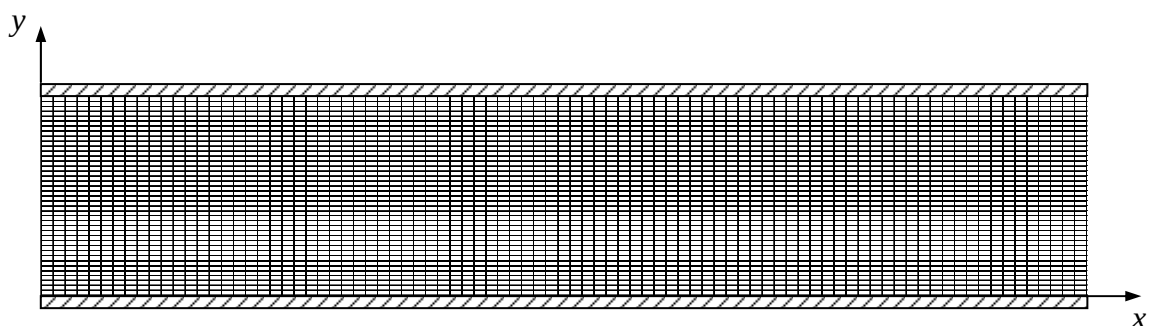
เมื่อ U_o คือ ความเร็วที่ทางเข้า Free stream และ H คือ ความสูงของช่องทางไหล



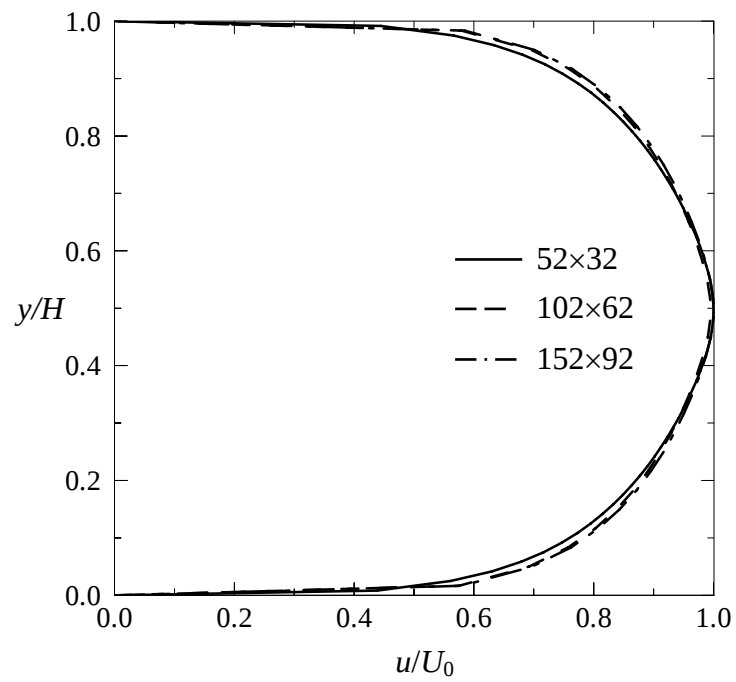
รูปที่ 5.1 ลักษณะของปัญหาการไหลผ่านช่องทางไหลผนังเรียบ

กำหนดให้ช่องทางไหลมีขนาดความยาวและความสูงเท่ากับ 15.24 m และ 0.1524 m ตามลำดับ ซึ่งการไหลจะมีการพัฒนาตัวเข้าสู่การไหลแบบ Fully developed เมื่อบริเวณทางเข้า (Inlet region) มีความยาวประมาณ 50 เท่าของระยะ H (กำหนดให้ของไหลมีความหนาแน่นและความหนืดสัมบูรณ์เท่ากับ 1.19 kg/m^3 และ $1.80 \times 10^{-5} \text{ N.s/m}^2$ ตามลำดับ) สำหรับการไหลที่ $Re_H = 13750$ จะได้ $U_o = 1.36 \text{ m/s}$

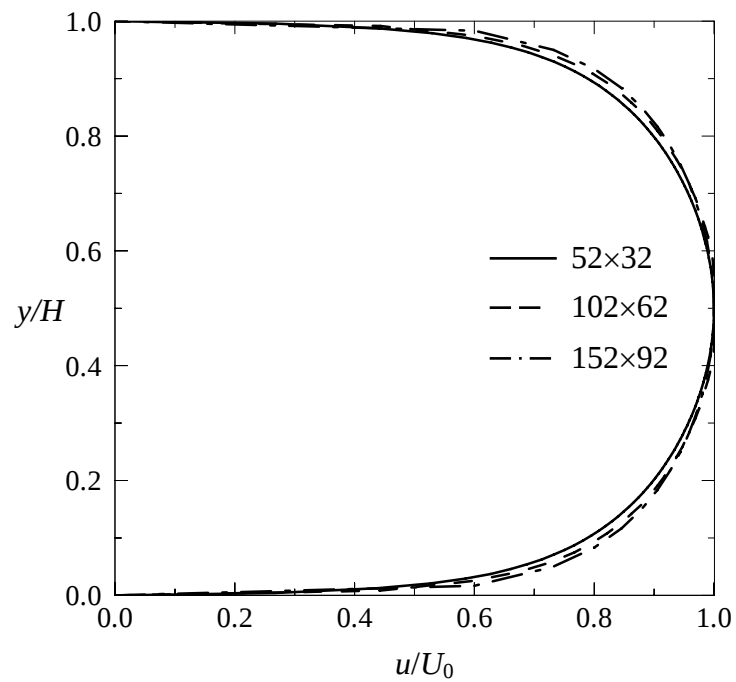
สำหรับการทดสอบความเป็น grid independent ของผลการคำนวณ ได้เลือกใช้กริดแบบสามเหลี่ยมลักษณะเดียวกันกับกริดในรูปที่ 5.2 สามขนาดคือ 52×32 , 102×62 และ 152×92 ซึ่งแสดงผลการคำนวณการกระจายความเร็วของช่องทางไหลที่ทางออกซึ่งได้จากการใช้แบบจำลอง standard $k - \epsilon$ และ $k - \omega$ ดังรูปที่ 5.3 และ 5.4 ตามลำดับ จากรูปทั้งสอง จะพบว่า กริดขนาด 102×62 มีความละเอียดเพียงพอที่จะให้ผลการคำนวณที่ถูกต้องและการเพิ่มจำนวนกริดให้มากกว่านี้จะไม่มีผลต่อผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณมากนัก



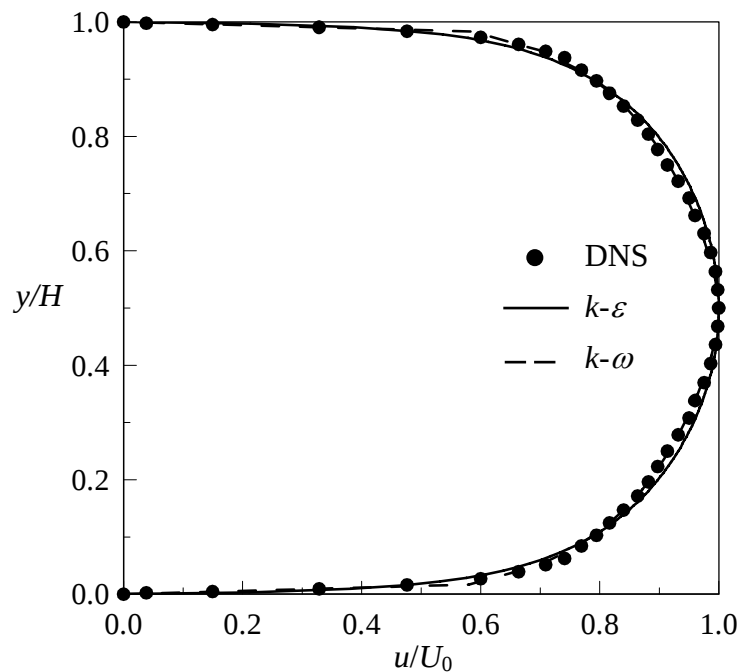
รูปที่ 5.2 ลักษณะของกริดแบบสามเหลี่ยมที่ใช้สำหรับปัญหาการไหลผ่านช่องทางไหลผนังเรียบ (not to scale)



รูปที่ 5.3 ความเร็ว u/U_0 ที่ตำแหน่งทางออกซึ่งได้จากการคำนวณด้วยแบบจำลองความปั่นป่วน standard $k-\varepsilon$ สำหรับ $Re_H = 13750$



รูปที่ 5.4 ความเร็ว u/U_0 ที่ตำแหน่งทางออกซึ่งได้จากการคำนวณด้วยแบบจำลองความปั่นป่วน $k-\omega$ สำหรับ $Re_H = 13750$



รูปที่ 5.5 ความเร็ว u/U_0 ที่ตำแหน่งทางออกซึ่งได้จากการจำลองการไหลเปรียบเทียบกับผลการคำนวณด้วยวิธี DNS สำหรับ $Re_H = 13750$

รูปที่ 5.5 แสดงการเปรียบเทียบค่าความเร็ว u/U_0 ณ ตำแหน่งทางออก (ซึ่งการไหลเป็นแบบ fully developed แล้ว) ที่ได้จากแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ และ $k-\omega$ โดยใช้กริดขนาด 102×62 กับผลการคำนวณด้วยวิธี DNS ซึ่งจะเห็นได้ว่า ค่าความเร็ว u/U_0 ที่ได้จากการคำนวณด้วยแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ และ $k-\omega$ มีความสอดคล้องกันดีกับผลจากวิธี DNS

ต่อไป จะทำการทดสอบแบบจำลองความปั่นป่วนในส่วนของการถ่ายเทความร้อน โดยจากผลการทดลองของ Sparrow et al. (1966) ช่องทางไหลถูกกำหนดให้มีความสูงและความกว้างเท่ากับ 0.01524 m และ 0.0762 m ตามลำดับ และมีความยาวเป็น 140 เท่าของ D_H และกำหนดให้ผนังด้านบนและด้านล่างบริเวณทางเข้าไม่มีการให้ความร้อน (Unheated) เป็นระยะเท่ากับ $40D_H$ (รูปที่ 5.6) เพื่อให้แน่ใจว่าการไหลเป็นแบบ Fully developed ก่อนเข้าสู่บริเวณที่ให้ความร้อนด้วย heat flux, q'' (ระยะนี้ถูกเลือกโดย Harnett et al.(1962)) ผลการทดลองที่ได้ในส่วนของการถ่ายเทความร้อนสามารถแสดงในรูปของ correlation ได้ดังนี้

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} \quad (5.2)$$

เมื่อ Re คือ ค่าเรย์โนลด์ส์นับเบอร์อ้างอิงจากค่า Hydraulic diameter โดย $Re = \frac{\rho u D_H}{\mu}$

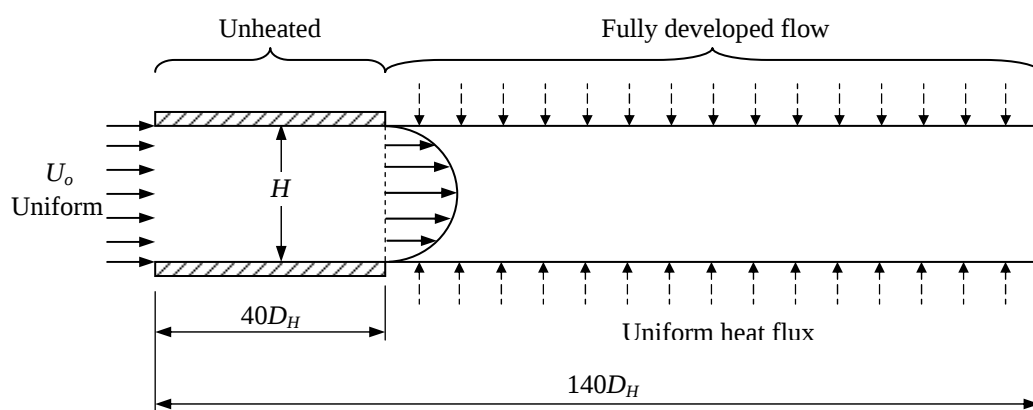
D_H คือ Hydraulic diameter มีค่าเท่ากับ 0.0254 m ซึ่งหาได้จาก $D_H = \frac{4A}{P}$

A คือ พื้นที่หน้าตัดของช่องทางไหล

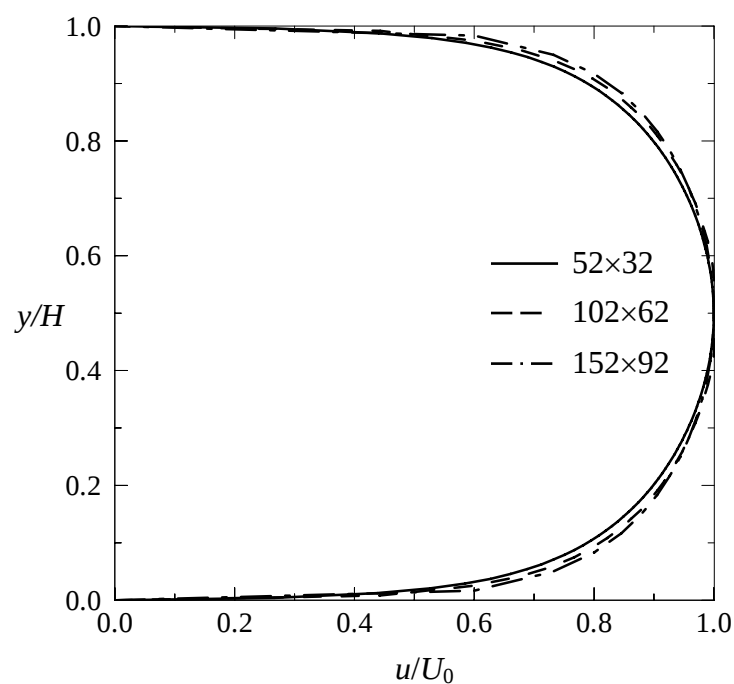
และ P คือ ความยาวรอบรูปหน้าตัดของช่องทางไหล

ในการจำลองปัญหาเพื่อคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ กำหนดให้ของไหลมีคุณสมบัติดังนี้

ความหนาแน่น	เท่ากับ	1.19	kg/m ³
ความหนืดสัมบูรณ์	เท่ากับ	1.80×10^{-5}	N.s/m ²
อุณหภูมิทางเข้า	เท่ากับ	298	K



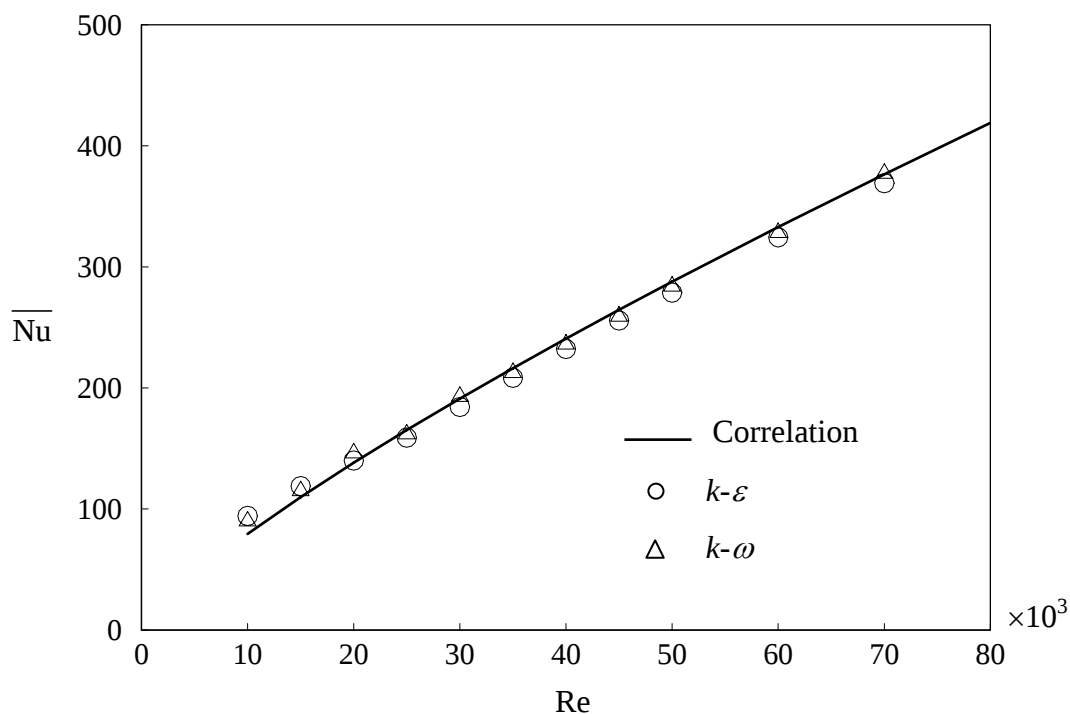
รูปที่ 5.6 ลักษณะของปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนผ่านช่องทางไหลผนังเรียบ



รูปที่ 5.7 ความเร็ว u/U_0 ที่ตำแหน่งทางออก สำหรับ $Re = 20000$

การตรวจสอบความเป็น Grid independent ของผลลัพธ์แสดงดังรูปที่ 5.7 โดยกริดที่เลือกใช้ในการคำนวณต่อไปคือกริดขนาด 102x62

สำหรับผลลัพธ์ในส่วนของการถ่ายเทความร้อนนั้น ถูกแสดงอยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติสเซลล์นัมเบอร์เฉลี่ย (Average Nusselt number, $\overline{Nu}$) โดยรูปที่ 5.8 แสดงค่าสเซลล์นัมเบอร์เฉลี่ยที่เรย์โนลด์นัมเบอร์ต่างๆกัน ซึ่งจะเห็นได้ว่าผลการคำนวณด้วยแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ และ $k-\omega$ มีความใกล้เคียงกัน และเมื่อเปรียบเทียบกับ Correlation ของ Sparrow et al. ก็มีความสอดคล้องกันที่ทุกๆ ค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความถูกต้องของแบบจำลองที่ใช้ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 5.8 ค่าสเซลล์นัมเบอร์เฉลี่ยที่เรย์โนลด์นัมเบอร์ต่างๆ สำหรับ $q'' = 1000 \text{ W/m}^2$

5.2 การไหลและการถ่ายเทความร้อนแบบปั่นป่วนผ่าน backward facing step โดยใช้

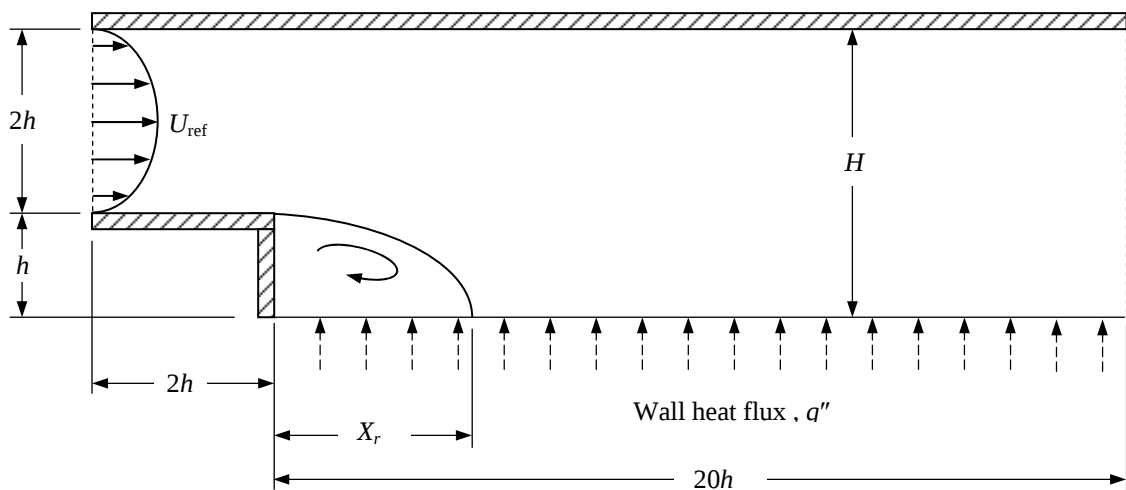
แบบจำลอง $k-\omega$

สำหรับในกรณีนี้ จะทำการคำนวณทั้งในส่วนของการไหลและการถ่ายเทความร้อน โดยการไหลเป็นแบบปั่นป่วนผ่าน backward facing step โดยมีโดเมนของการไหลแสดงดังรูปที่ 5.9 ความสูงของ step เท่ากับ h และมีทางเข้าของช่องทางไหลขนาดเท่ากับ $2h$ โดยความยาวหลัง step และความสูงมีขนาดเท่ากับ $20h$ และ $3h$ ตามลำดับ สำหรับความเร็วทางเข้าจะอ้างอิงเทียบกับ

ความเร็วที่ Free stream (U_{ref}) ซึ่งเมื่อของไหลไหลผ่านช่องทางไหลที่ถูกขยายออกให้กว้างขึ้น จะทำให้เกิดบริเวณของการไหลหมุนวน (recirculation region) ขึ้นที่มุมของผนังด้านล่างเป็นระยะทาง X_r ซึ่งเรียกว่า Reattachment length

ผลการคำนวณด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะถูกนำไปตรวจสอบกับผลการคำนวณด้วยวิธี DNS ของ Avancha and Pletcher (2002) ซึ่งค่าเรย์โนลด์นัมเบอร์สำหรับการไหลลักษณะนี้ ถูกกำหนดโดย

$$Re_h = \frac{\rho U_{ref} h}{\mu} \quad (5.3)$$

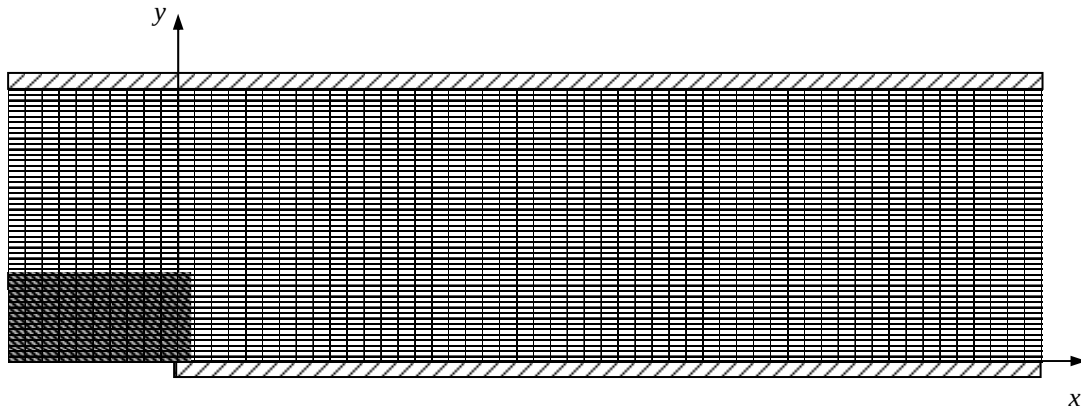


รูปที่ 5.9 ลักษณะของปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนผ่าน backward facing step

ในการจำลองการไหลกำหนดค่า h เท่ากับ 0.041 m ดังนั้นทางเข้าของช่องทางไหลจะมีขนาดเท่ากับ 0.082 m โดยช่องทางไหลที่ขยายออกมีความสูงเท่ากับ 0.123 m ซึ่งทำให้มีอัตราส่วนขยาย (expansion ratio) เท่ากับ 1.5 สำหรับเรย์โนลด์นัมเบอร์เท่ากับ 5540 โดยคุณสมบัติของของไหลที่ใช้มีค่าดังนี้

ความเร็วอ้างอิง (U_{ref})	= 2.063 m/s
ความหนาแน่น (ρ)	= 1.194 kg/m ³
ความหนืดสัมบูรณ์ (μ)	= 1.823×10^{-5} N.s/m ²
ค่าการนำความร้อน (k)	= 0.02574 W/m.K
อุณหภูมิทางเข้า (T_{inlet})	= 293 K
ความจุความร้อนจำเพาะ (C_p)	= 1006 J/kg.K

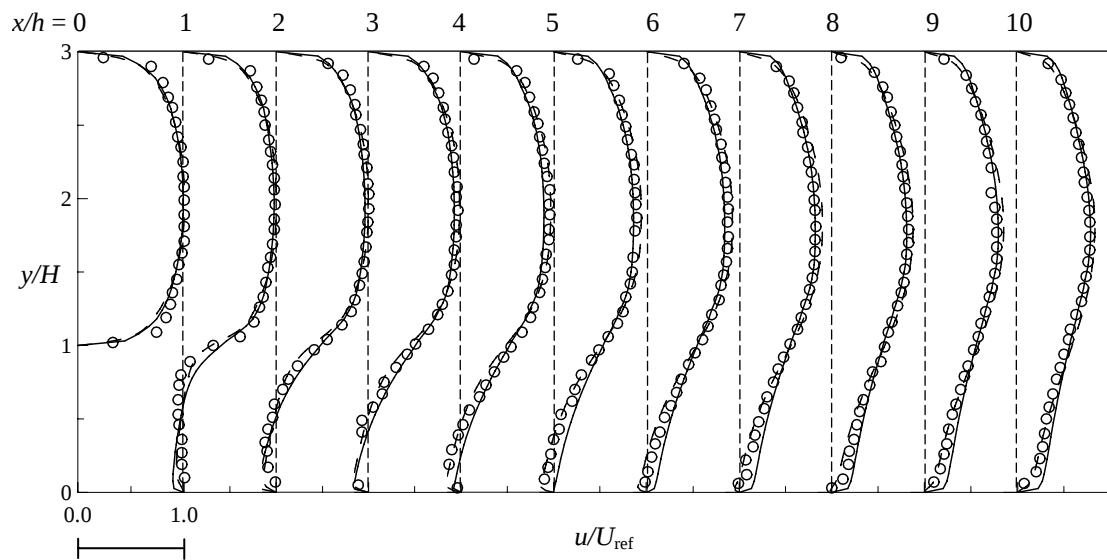
และเลือกใช้กริดขนาด 202x120 ในการคำนวณ (ทดสอบความเป็น grid independent ที่กริดขนาด 102x60, 202x120 และ 252x160) โดยรูปแบบของกริดแสดงดังรูปที่ 5.10



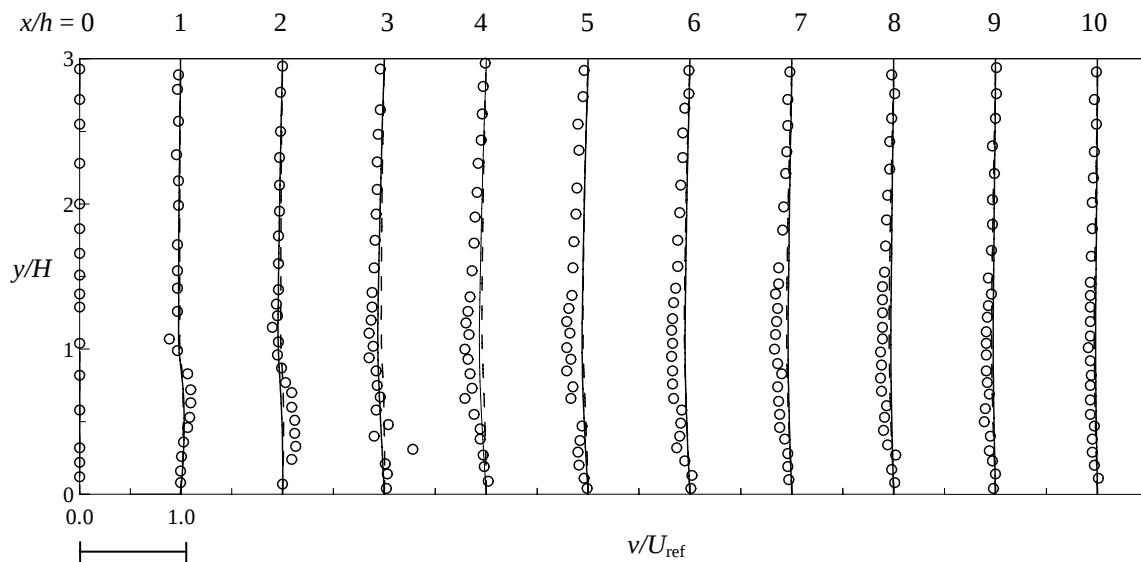
รูปที่ 5.10 รูปแบบกริดที่ใช้ในการจำลองการไหลผ่าน backward facing step สำหรับ $Re_h = 5540$ (not to scale)

รูปที่ 5.11 และ 5.12 แสดงความเร็ว u/U_{ref} และ v/U_{ref} ที่ x/h ต่างๆ กันที่ได้จากการคำนวณด้วยแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ และ $k-\omega$ เปรียบเทียบกับผลจากวิธี DNS สำหรับ $Re_h = 5540$ ตามลำดับ จะเห็นได้ว่า ผลการคำนวณจากแบบจำลองทั้งสองไม่แตกต่างกันมากนักในทุกๆ บริเวณ และพบว่าผลดังกล่าวมีความสอดคล้องกันดีกับผลจากวิธี DNS อย่างไรก็ตาม จะพบว่าแบบจำลอง $k-\omega$ สามารถทำนายผลได้ดีกว่าแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ ในบริเวณที่มีการหมุนวน

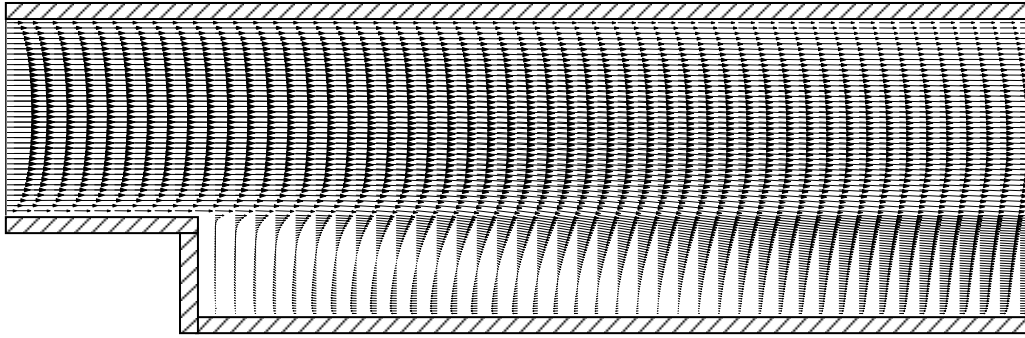
รูปที่ 5.13 และ 5.14 แสดงเวกเตอร์ความเร็วและ streamlines ของการไหลผ่าน backward facing step ที่ได้จากการคำนวณโดย แบบจำลอง $k-\omega$ ซึ่งจะสังเกตเห็นบริเวณการหมุนวนเกิดขึ้นใกล้ผนังด้านล่างติดกับช่องทางไหลที่ขยายออกโดยรายละเอียดของการหมุนวนจะเห็นได้อย่างชัดเจนในภาพขยายในรูปที่ 5.15 โดยจะพบบริเวณการหมุนวนขนาดเล็กเกิดขึ้นที่บริเวณใกล้กับ Step ซึ่งบริเวณนี้จะมีขนาดใหญ่ขึ้นในกรณีที่ขนาดความสูงของ Step เพิ่มขึ้น



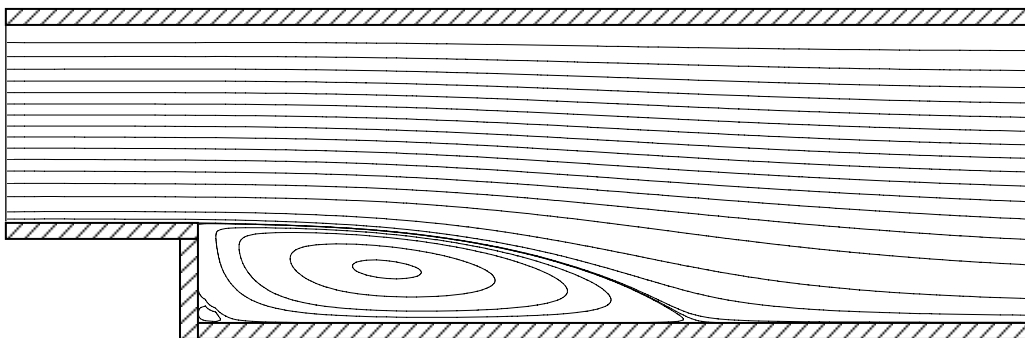
รูปที่ 5.11 ความเร็ว u/U_{ref} ที่ได้จากการจำลองการไหลผ่าน backward facing step
 เปรียบเทียบกับผลจากวิธี DNS สำหรับ $Re_h = 5540$ ที่ x/h ต่างๆ กัน
 ($\circ$ DNS, — standard $k-\varepsilon$, - - $k-\omega$)



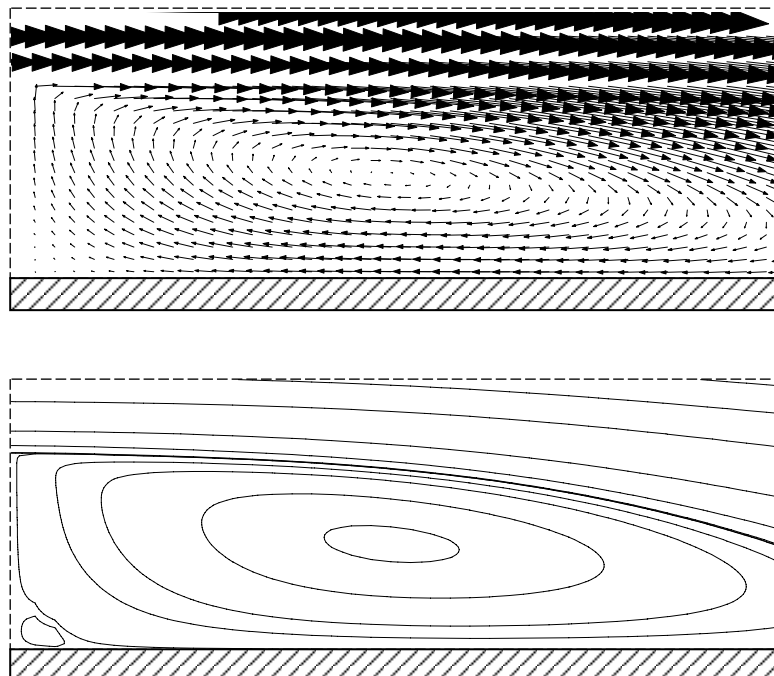
รูปที่ 5.12 ความเร็ว v/U_{ref} ที่ได้จากการจำลองการไหลผ่าน backward facing step
 เปรียบเทียบกับผลจากวิธี DNS สำหรับ $Re_h = 5540$ ที่ x/h ต่างๆ กัน
 ($\circ$ DNS, — standard $k-\varepsilon$, - - $k-\omega$)



รูปที่ 5.13 เวกเตอร์ความเร็วของการไหลผ่าน backward facing step สำหรับ $Re_h = 5540$



รูปที่ 5.14 เส้น streamlines ของการไหลผ่าน backward facing step สำหรับ $Re_h = 5540$



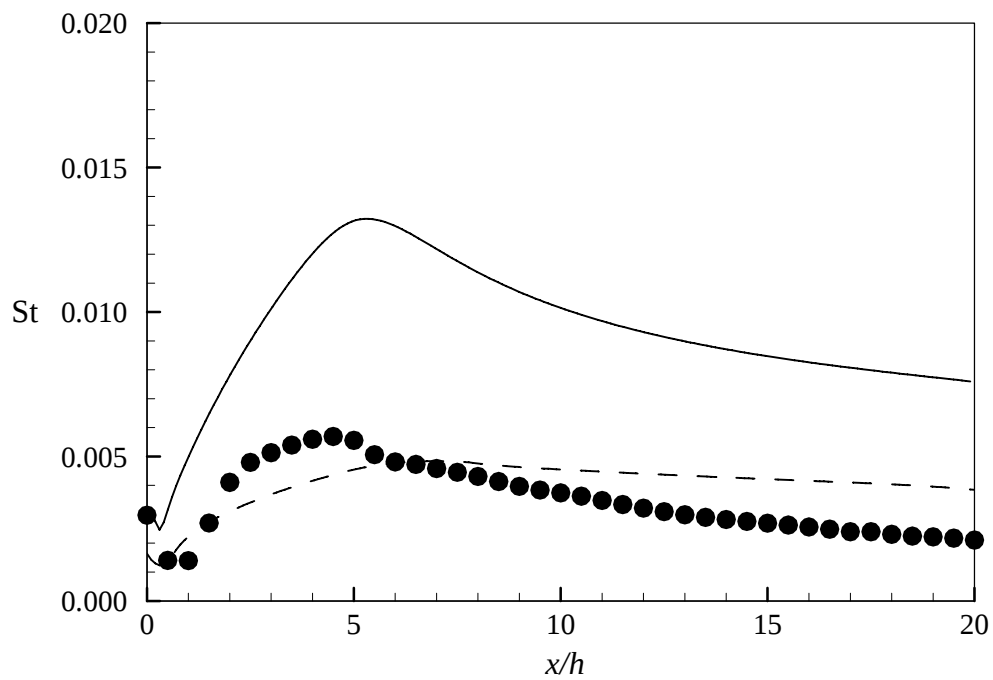
รูปที่ 5.15 รายละเอียดของเวกเตอร์ความเร็วและ streamlines บริเวณที่เกิดการหมุนวน
สำหรับ $Re_h = 5540$

จากรูปที่ 5.9 เมื่อของไหลไหลผ่านช่องทางไหลเข้ามาสู่ช่องทางไหลที่ขยายออกจะมีการกำหนดให้ผนังด้านล่างตลอดความยาวมีการให้ฟลักซ์ความร้อนคงที่ (q'') ปริมาณเท่ากับ 1000 W/m^2 โดยในส่วนนี้เราสนใจพฤติกรรมการถ่ายเทความร้อนที่อาจจะสามารถอธิบายโดยใช้ตัวแปรไร้มิติสแตนต์นัมเบอร์ (St) ซึ่งเป็นค่าอัตราส่วนการพาความร้อนต่อฟลักซ์ความร้อน โดยค่าสแตนต์นัมเบอร์หาได้จาก

$$\text{St} = \frac{h}{\rho u C_p} = \frac{q''}{\rho u C_p [T_w(x) - T_b(x)]} \quad (5.4)$$

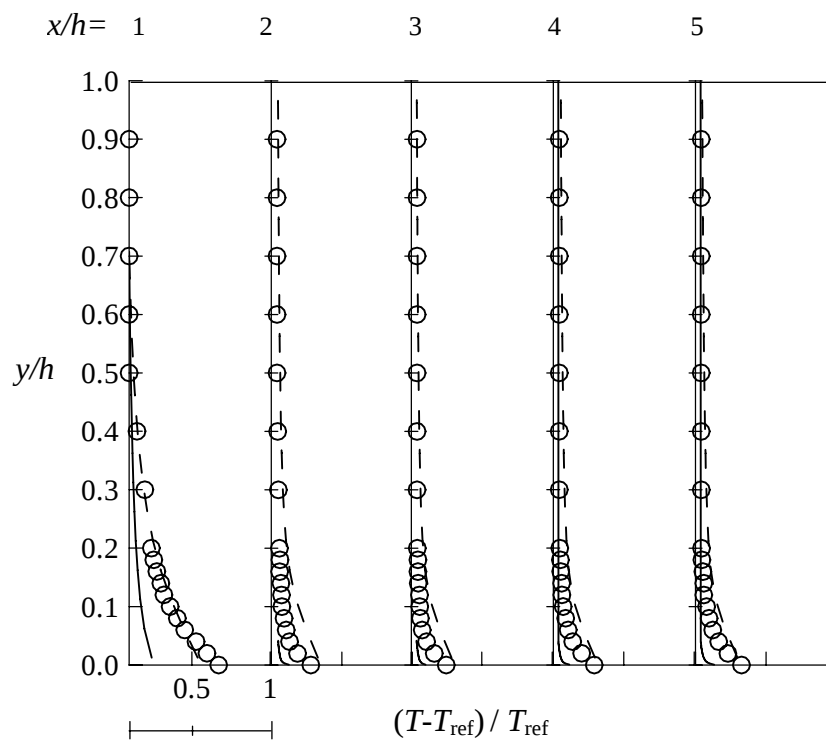
รูปที่ 5.16 แสดงค่าสแตนต์นัมเบอร์หลังการไหลผ่าน backward facing step ที่ x/h ต่างๆ กัน พบว่าผลการคำนวณจากแบบจำลอง $k-\omega$ มีความใกล้เคียงกับผลการคำนวณด้วยวิธี DNS พอสมควร ในขณะที่ การใช้แบบจำลอง Standard $k-\epsilon$ แม้ว่าจะมีแนวโน้มของผลลัพธ์เป็นไปในทิศทางเดียวกันกับผลจากวิธี DNS แต่ก็ให้ผลการทำนายค่า St ที่สูงกว่ากันค่อนข้างมาก

เมื่อพิจารณารูปที่ 5.17 ซึ่งแสดงการกระจายอุณหภูมิไร้มิติ $((T-T_{\text{ref}})/T_{\text{ref}})$ ตลอดความสูงของช่องทางไหลที่ x/h ต่างๆ กันประกอบ ก็จะสังเกตได้ว่าผลลัพธ์จากแบบจำลอง standard $k-\epsilon$ ให้ค่าอุณหภูมิที่ต่ำกว่าผลจากวิธี DNS ที่ทุกตำแหน่ง ในขณะที่ผลจากการใช้แบบจำลอง $k-\omega$ มีสอดคล้องกับผลจากวิธี DNS มากกว่า ดังนั้น จึงอาจสรุปได้ว่าแบบจำลอง $k-\omega$ สามารถทำนายผลทั้งการไหลและการถ่ายเทความร้อนได้แม่นยำกว่า แบบจำลอง standard $k-\epsilon$ สำหรับการไหลประเภทนี้



รูปที่ 5.16 ค่าสแตนต์นัมเบอร์หลังการไหลผ่าน backward facing step ที่ x/h ต่างๆ กัน

(● DNS, — Standard $k-\varepsilon$, -- $k-\omega$)



รูปที่ 5.17 การกระจายอุณหภูมิไร้มิติที่ x/h ต่างๆ กัน

(○ DNS, — standard $k-\varepsilon$, -- $k-\omega$)

5.3 การไหลแบบปั่นป่วนผ่านแผ่นเรียบโดยใช้แบบจำลอง $k-\varepsilon-\gamma$

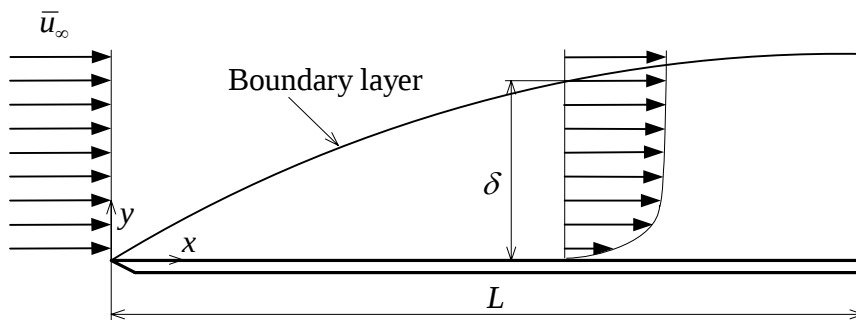
สำหรับการไหลผ่านแผ่นเรียบซึ่งค่าของเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ Re_L มากกว่า 10^6 การไหลจะมีลักษณะเป็นแบบปั่นป่วนและเกิดชั้นขอบแบบปั่นป่วน (turbulent boundary layer) ที่บริเวณใกล้ผิวของแผ่นเรียบดังแสดงในรูปที่ 5.18 โดยเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์มีค่าดังนี้

$$Re_L = \frac{\rho \bar{u}_\infty L}{\mu} \quad (5.5)$$

และกำหนดให้ displacement thickness, δ^* และ momentum thickness, θ มีค่าดังต่อไปนี้

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_\infty}\right) dy \quad (5.6)$$

$$\theta = \int_0^\infty \frac{\bar{u}}{\bar{u}_\infty} \left(1 - \frac{\bar{u}}{\bar{u}_\infty}\right) dy \quad (5.7)$$

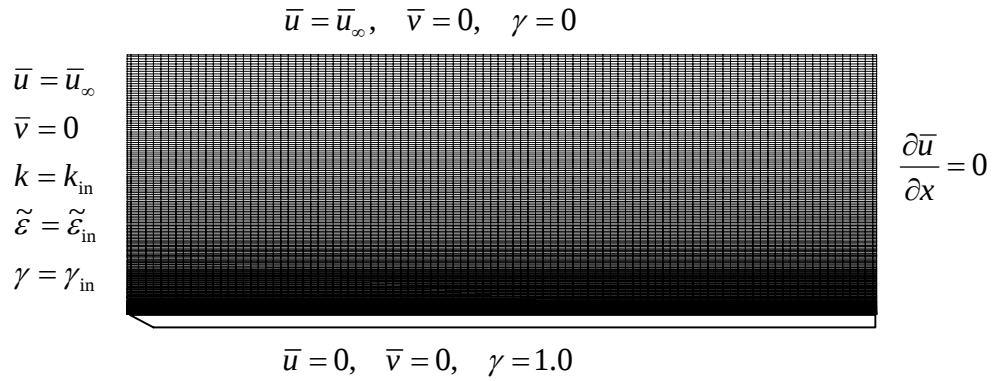


รูปที่ 5.18 ลักษณะของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนผ่านแผ่นเรียบ

Dewan and Arakeri (2000) ได้ทำการศึกษาปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนผ่านแผ่นเรียบด้วยแบบจำลองความปั่นป่วน $k-\varepsilon-\gamma$ ที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 2600$ โดยค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ที่ขึ้นกับค่า momentum thickness นี้ ถูกกำหนดจาก

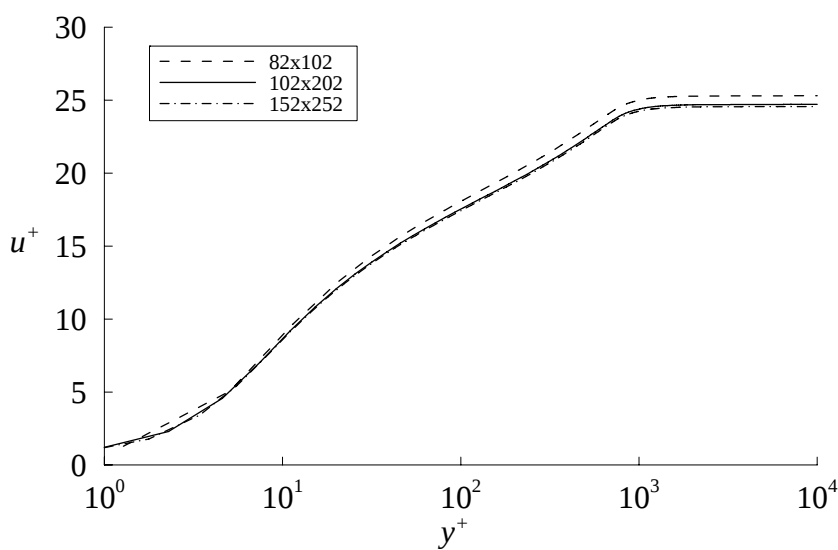
$$Re_\theta = \frac{\rho \bar{u}_\infty \theta}{\mu} \quad (5.8)$$

ดังนั้นจึงกำหนดให้ของไหลเป็นอากาศซึ่งไหลผ่านแผ่นเรียบที่มีความยาวเท่ากับ 1 m และมีความเร็วที่ไหลเข้า $\bar{u}_\infty$ เท่ากับ 50 m/s ($Re_L = 3.23 \times 10^6$)

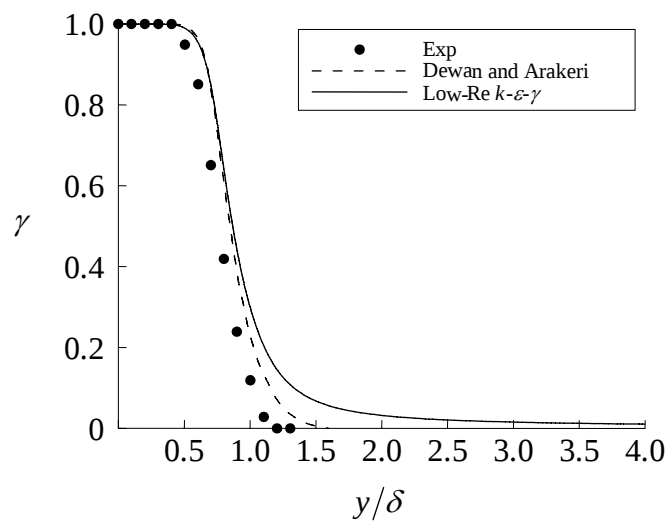


รูปที่ 5.19 เงื่อนไขขอบและกริดที่ใช้ในการคำนวณ (ขนาด 102x202) สำหรับการไหลแบบปั่นป่วนผ่านแผ่นเรียบ (not to scale)

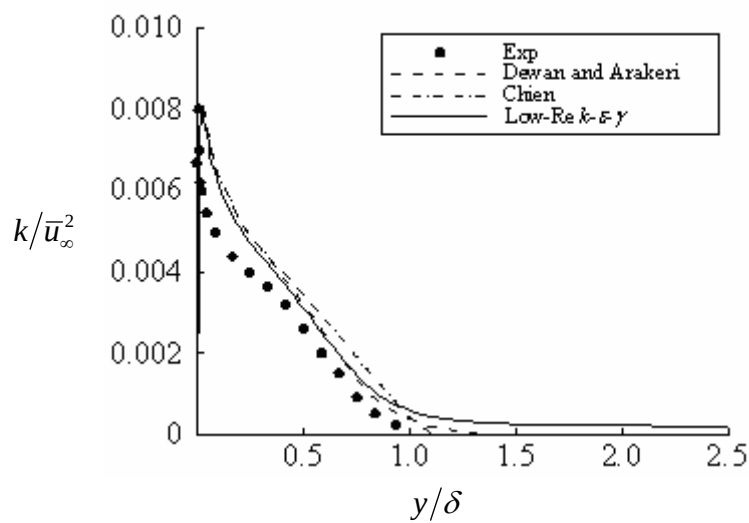
รูปที่ 5.19 แสดงกริดที่ใช้ในการคำนวณและเงื่อนไขขอบของปัญหา โดยในที่นี้ใช้ power-law scheme (scheme เดียวกันกับที่ใช้ในการคำนวณของ Dewan and Arakeri) ในการประมาณพจน์ของการพา สำหรับการทดสอบความเป็น grid independent ของผลลัพธ์เราคำนวณหาลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว u^+ ด้วยจำนวนกริดที่แตกต่างกัน 3 ขนาด คือ 82x102, 102x202 และ 152x252 ดังแสดงในรูปที่ 5.20 ซึ่งจะเห็นว่า กริดขนาด 102x202 ให้ผลลัพธ์ที่มีความเป็น grid independent แล้ว ส่วนในรูปที่ 5.21 และ 5.22 แสดงผลการคำนวณลักษณะการกระจายตัวของ intermittency factor และ turbulent kinetic energy ที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 2600$ ตามลำดับ



รูปที่ 5.20 การกระจายตัวของความเร็ว u^+ ในชั้นขอบที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 2600$ ที่ได้จากการใช้จำนวนกริดที่แตกต่างกันสามขนาด



รูปที่ 5.21 ลักษณะการกระจายตัวของ intermittency factor ที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 2600$

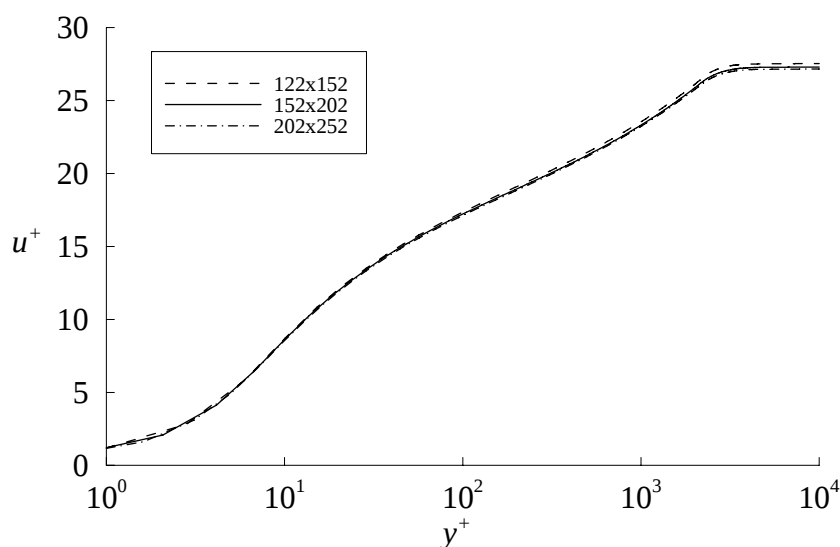


รูปที่ 5.22 ลักษณะการกระจายตัวของ turbulent kinetic energy ที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 2600$

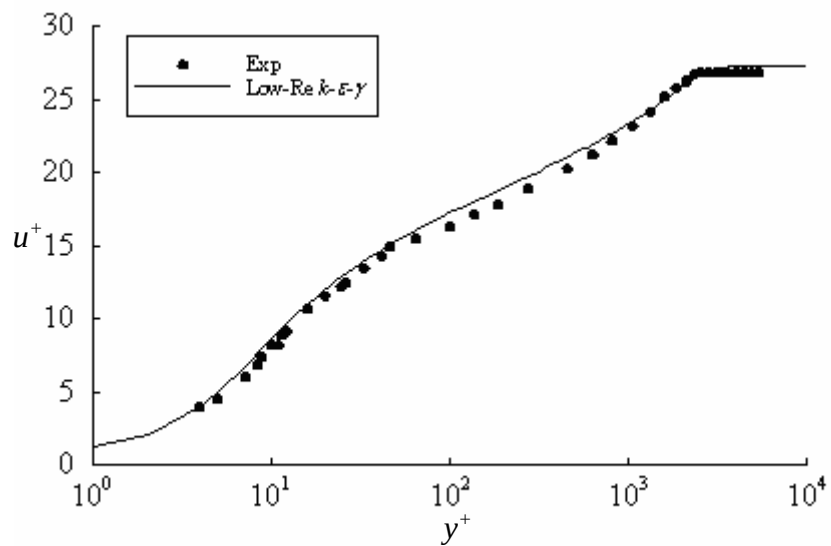
จากรูปที่ 5.21 และ 5.22 จะเห็นได้ว่าผลการคำนวณที่ได้จากแบบจำลองความปั่นป่วน Low-Re $k-\varepsilon-\gamma$ นั้นมีความคล้ายคลึงกับผลการคำนวณของ Dewan and Arakeri และมีความใกล้เคียงกับผลการทดลองของ Klebanoff (1955) มากกว่าผลการคำนวณของ Chien (1982) ที่ใช้แบบจำลอง Low-Re $k-\varepsilon$ ในกรณีของการกระจายค่า turbulent kinetic energy อย่างไรก็ตาม

ผลการคำนวณที่ได้จะมีความแตกต่างกับผลของ Dewan and Arakeri อยู่บ้างในช่วงบริเวณภายนอกชั้นขอบ ($y/\delta > 1$) เนื่องจากที่บริเวณนี้ Dewan and Arakeri ใช้แบบจำลองความปั่นป่วน $k-\varepsilon-\gamma$ ที่ไม่ได้ประกอบด้วย damping function, f_μ , f_1 , f_2 (รายละเอียดแสดงในบทที่ 3)

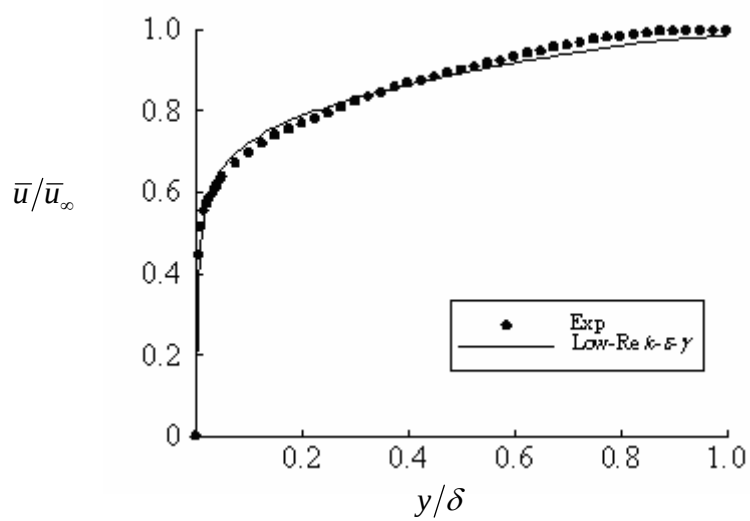
สำหรับการทำนายลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว จะนำผลการคำนวณจากโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาทำการเปรียบเทียบกับผลการทดลองของ Klebanoff (1955) โดยในกรณีนี้กำหนดให้ของไหลเป็นอากาศไหลผ่านแผ่นเรียบที่มีความยาวเท่ากับ 3 m และมีความเร็วที่ไหลเข้า u_∞ เท่ากับ 50 m/s ($Re_L = 9.70 \times 10^6$) โดยก่อนอื่นจะทำการทดสอบความเป็น grid independent จากผลของการกระจายตัวของความเร็วที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 8000$ โดยการใช้กริดที่มีขนาดต่างกันสามขนาดคือ 122x152, 152x202 และ 202x252 ดังแสดงในรูปที่ 5.23 ซึ่งจะเห็นได้ชัดเจนว่ากริดขนาด 152x202 ก็สามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความเป็น grid independent แล้ว



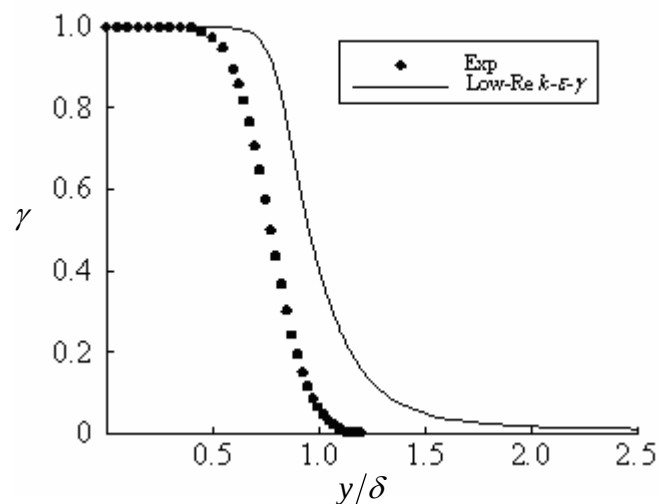
รูปที่ 5.23 การกระจายตัวของความเร็ว u^+ ในชั้นขอบที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 8000$ ที่ได้จากการใช้จำนวนกริดที่แตกต่างกันสามขนาด



รูปที่ 5.24 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว u^+ ในชั้นขอบที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 8000$



รูปที่ 5.25 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วภายในชั้นขอบที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 8000$



รูปที่ 5.26 ลักษณะการกระจายตัวของ intermittency factor ที่ตำแหน่ง $Re_\theta = 8000$

ผลการคำนวณจากระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มที่ประกอบด้วยลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว u^+ , ความเร็ว $\bar{u}/\bar{u}_\infty$ และ intermittency factor แสดงในรูปที่ 5.24 ถึง 5.26 ตามลำดับ ลักษณะการกระจายตัวของความเร็ว u^+ และความเร็ว $\bar{u}/\bar{u}_\infty$ ในชั้นขอบที่คำนวณได้มีความสอดคล้องกับผลการทดลองเป็นอย่างดี แต่ในส่วนของ intermittency factor ถึงแม้ว่าแนวโน้มของกราฟจะเป็นไปในทิศทางเดียวกัน แต่ค่าที่คำนวณได้ก็มีความแตกต่างจากผลการทดลองอยู่พอสมควร ซึ่งความแตกต่างที่เกิดขึ้นนี้อาจเนื่องมาจากการที่สมการ transport ของ intermittency factor ที่ใช้ยังไม่มีแม่นยำเพียงพอสำหรับการคำนวณที่ตำแหน่ง Re_θ สูงๆ เช่นนี้

5.4 การไหลแบบปั่นป่วนในท่อโดยใช้แบบจำลอง $k-\epsilon-\gamma$

การไหลในท่อจะเป็นเริ่มเปลี่ยนเป็นการไหลแบบปั่นป่วน เมื่อค่า $Re > 2300$ และการไหลนี้จะกลายเป็น fully developed flow ที่ตำแหน่ง L ในช่วงประมาณ 25 ถึง 40 เท่าของขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ (D) ดังนั้นจึงกำหนดโดเมนของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อดังแสดงในรูปที่ 5.27 เมื่อค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ (Re) ถูกคำนวณจาก

$$Re = \frac{\rho \bar{u}_{in} D}{\mu} \quad (5.9)$$

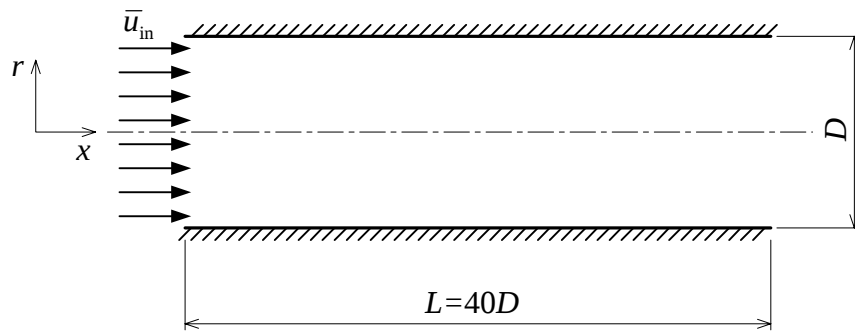
ซึ่งสำหรับโดเมนที่พิจารณาในที่นี้ จะกำหนดให้ $D = 6 \text{ in } (0.1524 \text{ m})$

สำหรับกรณีทดสอบนี้ จะใช้แบบจำลองความปั่นป่วนทั้งแบบ High-Re $k-\varepsilon-\gamma$ และ Low-Re $k-\varepsilon-\gamma$ ในการคำนวณ รวมถึงใช้แบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ ในการเปรียบเทียบกับแบบจำลองทั้งสองด้วย ในส่วนของ numerical scheme จะใช้ hybrid scheme ในการประมาณพจน์ของการพา ผลการคำนวณที่ได้จะถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลการทดลอง (Schlichting, 1979) ที่มีค่าเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์เท่ากับ 4.0×10^3 , 1.5×10^5 และ 3.2×10^6 กริดที่ใช้ในการคำนวณเป็นกริดแบบไม่สม่ำเสมอ (non-uniform) โดยมีเงื่อนไขขอบดังแสดงในรูปที่ 5.28 (เนื่องจากโดเมนของปัญหาที่มีความสมมาตรจึงใช้เงื่อนไขขอบแบบสมมาตรร่วมด้วย) ซึ่งเงื่อนไขขอบที่ทางเข้าสามารถกำหนดได้ดังนี้

$$k_{\text{in}} = 0.005 \bar{u}_{\text{in}}^2 \quad (5.10)$$

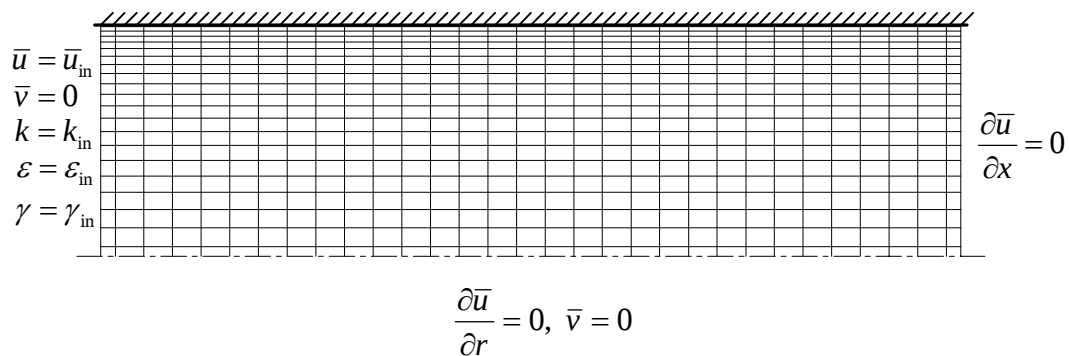
$$\varepsilon_{\text{in}} = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{0.03R} \quad (5.11)$$

และ $\gamma_{\text{in}} = 0.001$



รูปที่ 5.27 ลักษณะของปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อ

$\bar{u} = 0, \bar{v} = 0, \gamma = 1.0$ และใช้ Wall function สำหรับ k และ ε ที่บริเวณใกล้ผนัง

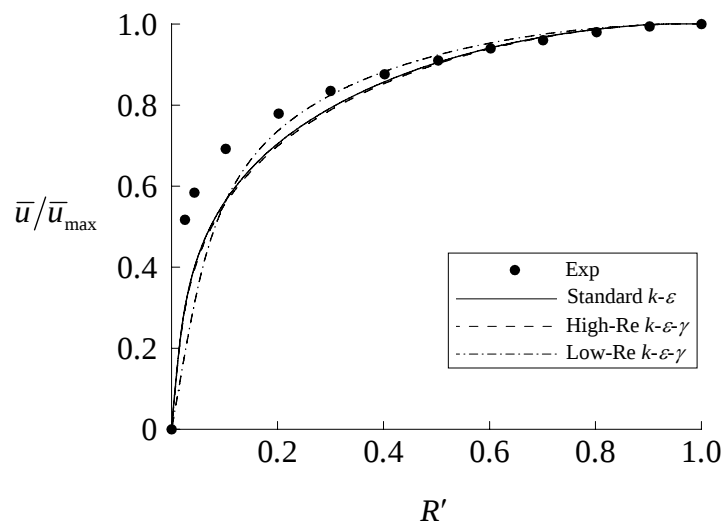


รูปที่ 5.28 เงื่อนไขขอบและกริดขนาด 32x22 ที่ใช้สำหรับปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนในท่อ สำหรับการไหลที่ $Re = 4.0 \times 10^3$ (not to scale)

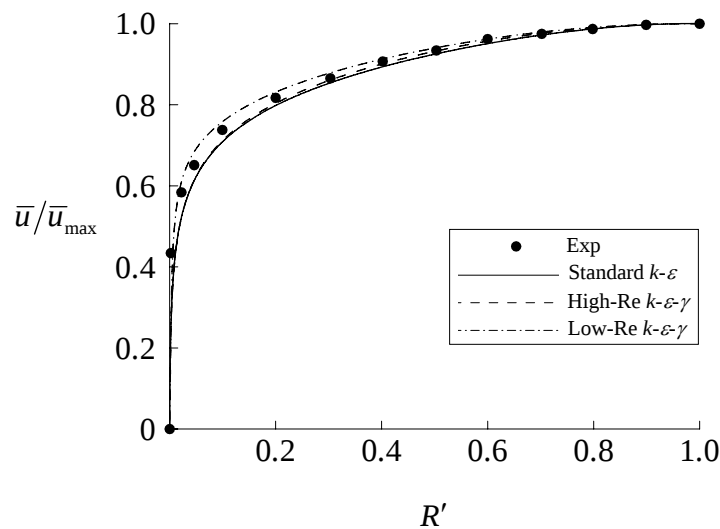
สำหรับการไหลในกรณี $Re = 4.0 \times 10^3$ ได้ทดสอบความเป็น grid independent ของผลการคำนวณสำหรับทั้ง 3 แบบจำลอง โดยใช้กริด 3 ขนาดคือ 22x17, 32x22 และ 52x32 และเลือกใช้กริดขนาด 32x22 สำหรับการคำนวณในกรณีนี้

สำหรับกรณีที่การไหลมี $Re = 1.5 \times 10^5$ เราจะเลือกใช้กริดขนาด 62x42 (ทดสอบความเป็น grid independent ที่กริดขนาด 52x32, 62x42 และ 82x62) และในกรณีที่ $Re = 3.2 \times 10^6$ จะเลือกใช้กริดขนาด 152x202 ในการคำนวณ (ทดสอบความเป็น grid independent ที่กริดขนาด 102x82, 152x202 และ 182x222)

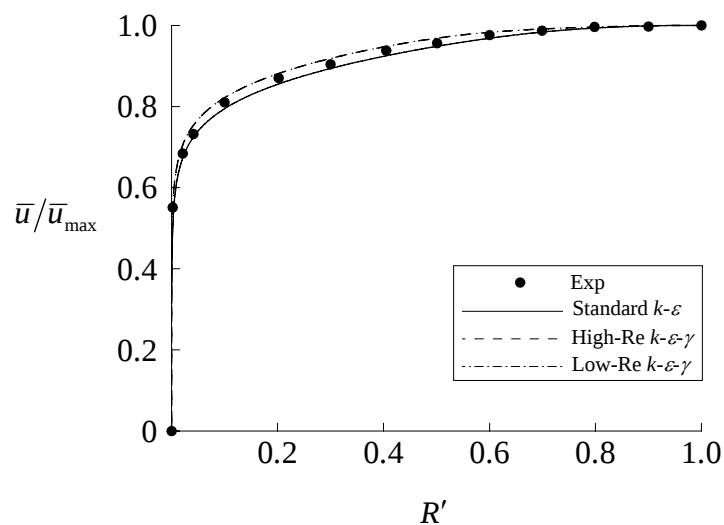
ผลการคำนวณการกระจายตัวของความเร็วตามแนวรัศมีที่ $R' = (R-r)/R$ ต่างๆ ที่ได้จากแบบจำลองความปั่นป่วนทั้งสาม ถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลการทดลอง (Schlichting, 1979) ดังแสดงในรูปที่ 5.29 ถึง 5.31 ที่ตำแหน่งของการไหลเป็นแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว (ตำแหน่ง $L = 30D$ หรือ $x = 4.572 \text{ m}$)



รูปที่ 5.29 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วที่ตำแหน่ง $x = 4.572 \text{ m}$ ($30D$)
กรณี $Re = 4.0 \times 10^3$



รูปที่ 5.30 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วที่ตำแหน่ง $x = 4.572 \text{ m}$ ($30D$)
กรณี $Re = 1.5 \times 10^5$

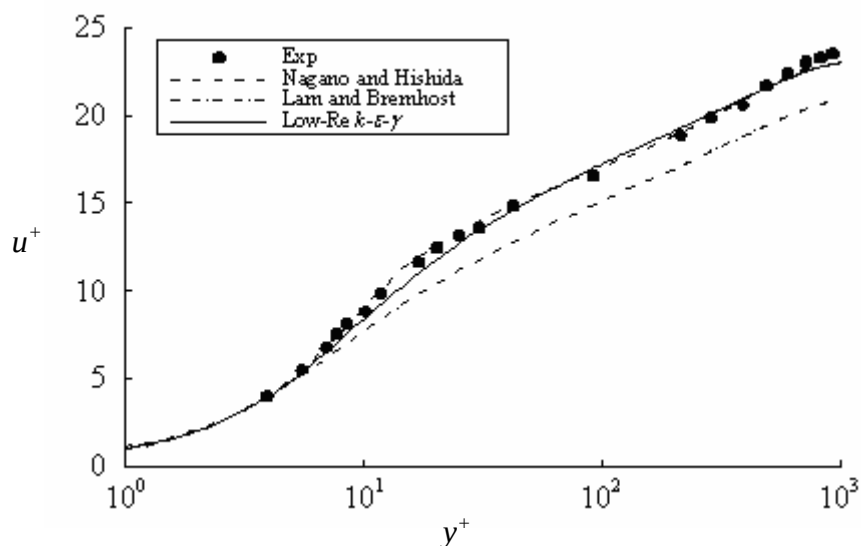


รูปที่ 5.31 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วที่ตำแหน่ง $x = 4.572 \text{ m}$ ($30D$)
กรณี $Re = 3.2 \times 10^6$

จากรูปที่ 5.29 – 5.31 จะสังเกตเห็นได้ว่าผลการคำนวณที่ได้จากแบบจำลองความปั่นป่วนทั้งสามก่อนข้างจะใกล้เคียงกัน ซึ่งในกรณีที่ Re มีค่าสูง ($Re = 1.5 \times 10^5$ และ $Re = 3.2 \times 10^6$) จะพบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความสอดคล้องกับผลการทดลองเป็นอย่างดี อย่างไรก็ตามในกรณีที่ $Re = 4.0 \times 10^3$ ผลการคำนวณที่ได้ก่อนข้างจะแตกต่างจากผลการทดลอง โดยเฉพาะในบริเวณใกล้ผนัง (R' มีค่าน้อยกว่า 0.2) โดยแบบจำลอง Low-Re $k-\epsilon-\gamma$ ให้แนวโน้มที่ดีกว่าแบบจำลอง

standard $k-\varepsilon$ และ High-Re $k-\varepsilon-\gamma$ เล็กน้อย ซึ่งความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น น่าจะเกิดจากการที่การไหลที่ค่า Re นี้ เป็นการไหลในช่วง transition ซึ่งยังไม่เป็นการไหลแบบปั่นป่วนเต็มรูปแบบนั่นเอง จึงทำให้การใช้แบบจำลองความปั่นป่วนในการคำนวณไม่มีประสิทธิภาพเพียงพอ

นอกจากนี้เรายังได้ทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณการกระจายตัวของ u^+ ในชั้นขอบของท่อที่ตำแหน่งของการไหลเป็นแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว (ตำแหน่ง $L = 30D$ หรือ $x = 4.572$ m) สำหรับการไหลที่ $Re = 4.0 \times 10^4$ กับผลการทดลองของ Laufer (1954) ผลการคำนวณของ Nagano and Hishida (1987) ที่ใช้แบบจำลอง Low-Re $k-\varepsilon-\gamma$ แบบเดียวกัน และผลการคำนวณของ Lam and Bremhorst (1981) ที่ใช้แบบจำลอง modified $k-\varepsilon$ ดังแสดงในรูปที่ 5.32 โดยใช้ขนาดท่อเท่าเดิมและเลือกใช้กริดขนาด 152×202 (ทดสอบความเป็น grid independent ที่กริดขนาด 122×152 , 152×202 และ 202×252)



รูปที่ 5.32 ลักษณะการกระจายตัวของความเร็วไร้มิติในชั้นขอบของท่อที่ตำแหน่ง $x = 4.572$ m ($30D$) กรณี $Re = 4.0 \times 10^4$

จากรูปที่ 5.32 จะเห็นได้ว่าผลการคำนวณที่ได้มีความใกล้เคียงกับผลการคำนวณของ Nagano and Hishida และมีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดีกับผลการทดลอง โดยผลการคำนวณที่ได้มีความแม่นยำกว่าผลการคำนวณของ Lam and Bremhorst ที่ใช้แบบจำลอง modified $k-\varepsilon$ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงประสิทธิภาพของแบบจำลองความปั่นป่วน Low-Re $k-\varepsilon-\gamma$ ที่ใช้ในที่นี่

บทที่ 6

สรุปผล

ในโครงการวิจัยนี้ ได้มีการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ขึ้น เพื่อใช้สำหรับการคำนวณการไหลและการถ่ายเทความร้อนในโดเมนที่ซับซ้อน ซึ่งการคำนวณกระทำโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มบนพิกัดแบบกระชับขอบเขต โดยทำการแปลงพิกัด (coordinate transformation) ของสมการครอบคลุมในพิกัดคาร์ทีเซียนให้อยู่ในรูปของสมการในพิกัดแบบกระชับขอบเขต โดยใช้สัมประสิทธิ์ของรูปร่าง (geometric coefficients) เป็นตัวช่วย และทำการดิสครีไทซ์สมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นนี้ ให้อยู่ในรูปของสมการไฟไนต์วอลุ่ม โดยที่การดิสครีไทซ์นี้ทำใน computational space (ในขณะที่ สัมประสิทธิ์ของรูปร่าง คำนวณมาจาก physical space) จากนั้นจึงทำการแก้สมการโดยใช้ numerical scheme และ solver ต่างๆ โดยพิจารณาถึงความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้ (accuracy) และเสถียรภาพของกระบวนการคำนวณ (stability) สำหรับการแก้สมการโมเมนตัมควบคู่กับการหาค่าความดัน ใช้วิธี SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations) ของ Patankar and Spalding (1972) ร่วมกับกริดแบบเชื่อมกัน โดยใช้ตัวประกอบความเร็วแบบคาร์ทีเซียนเป็นตัวแปรตาม เพื่อหลีกเลี่ยงการดิสครีไทซ์สมการที่มี curvature terms เนื่องจากการใช้ตัวประกอบความเร็วแบบ covariant โดยแบบจำลองความปั่นป่วนเบื้องต้นที่ใช้ในงานวิจัย คือแบบจำลอง standard $k-\varepsilon$ ร่วมกับ wall function นอกจากนี้ในงานวิจัยก็ยังมีศึกษาเพิ่มเติมเกี่ยวกับแบบจำลอง $k-\omega$ และ $k-\varepsilon-\gamma$ ในการจำลองการไหลแบบปั่นป่วนด้วย

ในระหว่างการศึกษาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เพื่อให้แน่ใจในความถูกต้องของโปรแกรม ได้มีการเปรียบเทียบความถูกต้องของโปรแกรม (validation) เป็นระยะๆ โดยปัญหาที่นำมาตรวจสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เป็นปัญหาแบบง่ายซึ่งมีผลเฉลยแม่นยำตรง ผลการทดลองหรือมีผลการคำนวณจากนักวิจัยอื่นๆ ที่ได้ทำมาก่อนหน้านี้ โดยเริ่มจากการตรวจสอบโปรแกรมที่มีเฉพาะส่วนการคำนวณการแพร่กระจาย กับปัญหาการนำความร้อนในแผ่นรูปทรงต่างๆ จากนั้นจึงทำการเพิ่มส่วนการคำนวณการไหลและการถ่ายเทความร้อนเข้าไปในโปรแกรม และทำการทดสอบกับปัญหาการไหลแบบราบเรียบผ่าน gradual-expansion channel การไหลผ่านทรงกระบอกกลมที่มีความร้อน จากนั้นจึงได้มีการเพิ่มแบบจำลองความปั่นป่วน standard $k-\varepsilon$ ลงไปในโปรแกรม และทำการทดสอบโปรแกรมกับปัญหาการไหลแบบปั่นป่วนผ่าน inclined backward facing step สำหรับในส่วนของแบบจำลองความปั่นป่วนอื่นๆ ก็ได้มีการทดสอบกับปัญหาการไหลแบบต่างๆ เช่น การไหลภายในช่องทางไหล และการไหลผ่าน backward facing step เป็นต้น

นอกจากนี้ numerical scheme ที่ใช้สำหรับประมาณค่าพจน์การพา ทุก scheme ทั้ง upwind, hybrid, power-law, QUICK หรือ SOU ก็มีการตรวจสอบความถูกต้องทุกครั้ง หลังจากที่มีการเพิ่ม scheme เหล่านี้เข้าไปในโปรแกรม

จากผลการทดสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่เขียนขึ้นมานี้ จะเห็นได้ว่าโปรแกรมมีประสิทธิภาพในระดับที่น่าพอใจ โดยสามารถทำนายผลได้ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรง และผลการทดลองหรือผลการคำนวณต่างๆ ที่นำมาเปรียบเทียบ โดยเฉพาะสำหรับปัญหาทางด้านกลศาสตร์ของไหลและการถ่ายเทความร้อนที่ไม่ซับซ้อนนัก เช่น การนำความร้อนในแผ่นรูปทรงต่างๆ หรือ การไหลแบบราบเรียบโดยทั่วไปนั้น การคำนวณจะให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำค่อนข้างสูง

อย่างไรก็ตาม ในกรณีของปรากฏการณ์การไหลที่ค่อนข้างซับซ้อน เช่น การไหลแบบปั่นป่วนต่างๆ นั้น แม้ว่าผลการคำนวณที่ได้จะมีความสอดคล้องกับผลการทดลอง แต่ก็ยังมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นบ้างในบางบริเวณ เช่น บริเวณการหมุนวนที่มีความดันย้อนกลับ เป็นต้น ซึ่งความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นนี้ ไม่ได้เป็นผลมาจากตัวโปรแกรมหรือจากวิธีการคำนวณโดยรวม แต่เป็นผลมาจากแบบจำลองความปั่นป่วนที่ใช้ เช่น แบบจำลอง standard $k-\epsilon$ มักจะให้ผลที่ไม่ค่อยแม่นยำนักสำหรับการไหลในบริเวณใกล้ผนัง และในบริเวณที่เกิด separation หรือเกิดบริเวณการไหลหมุนวน ซึ่งข้อบกพร่องเหล่านี้ สามารถแก้ไขได้ โดยเลือกใช้แบบจำลองความปั่นป่วนที่มีความเหมาะสมสำหรับการไหลในแต่ละประเภท สำหรับในที่นี้ ก็ได้มีการทดสอบแบบจำลองความปั่นป่วนชนิดอื่นๆ คือแบบจำลอง $k-\omega$ และ $k-\epsilon-\gamma$ ซึ่งพบว่าแบบจำลองทั้งสองมีประสิทธิภาพที่ดีกว่าแบบจำลอง standard $k-\epsilon$ สำหรับปัญหาการไหลที่นำมาทดสอบในที่นี้ โดยสมการ transport ของ intermittency ที่เพิ่มเข้ามาสำหรับแบบจำลอง $k-\epsilon-\gamma$ ทำให้ไม่จำเป็นต้องใช้ wall function ในการคำนวณบริเวณใกล้ผนัง ซึ่งทำให้ผลลัพธ์ที่ได้มีความแม่นยำขึ้น และในกรณีของแบบจำลอง $k-\omega$ ก็สามารถทำนายผลที่เกี่ยวข้องกับการถ่ายเทความร้อนได้ดีกว่า แบบจำลอง standard $k-\epsilon$ อย่างเห็นได้ชัด

จากการตรวจสอบผลการคำนวณที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทั้งหมดที่แสดงในรายงานฉบับนี้ สามารถยืนยันได้ว่าโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมีความถูกต้องเพียงพอที่จะนำไปใช้งาน หรือประยุกต์ใช้ในงานวิจัยระดับสูงต่อไป

ในส่วนของข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยที่ควรทำต่อไปในอนาคต เพื่อให้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมานี้สามารถทำนายผลการไหลที่ซับซ้อนในงานวิจัยระดับสูง ควรมีการพัฒนาเพิ่มเติมในส่วนต่อไปนี้

- 1) ปรับปรุงโปรแกรมให้สามารถใช้แบบจำลอง $k-\omega$ และ $k-\epsilon-\gamma$ ได้อย่างเต็มรูปแบบในการคำนวณการไหลแบบปั่นป่วนบนโดเมนที่ซับซ้อน

- 2) ทำการทดสอบโปรแกรมกับปัญหาประเภทสถานะไม่อยู่ตัว (unsteady)
- 3) ศึกษาการนำวิธี LES (Large Eddy Simulation) ซึ่งเป็นวิธีที่สามารถทำนายผลการไหลแบบปั่นป่วนได้ค่อนข้างแม่นยำ เข้ามาใช้ร่วมกับการคำนวณบนพิกัดกระชับขอบเขต
- 4) เพิ่ม accuracy และ stability ของการคำนวณ โดยใช้ numerical scheme ที่มีประสิทธิภาพสูง เช่น TVD (Total Variation Diminishing) ซึ่งรวมข้อดีทางด้าน accuracy และ stability ของ second order และ first order scheme เอาไว้ด้วยกัน
- 5) ปรับปรุงโปรแกรมให้สามารถคำนวณบนโดเมนที่มีทั้งของแข็งและของไหลอยู่รวมกัน โดยมีการคำนวณปฏิสัมพันธ์ระหว่างของแข็งกับของไหลไปพร้อมกัน เช่น ในกรณีของ conjugate heat transfer หรือ deformation ของของแข็งที่เกิดจากการไหล
- 6) ปรับปรุงโปรแกรมให้มีลักษณะความเป็น user-friendly มากขึ้น
- 7) พัฒนาโปรแกรมให้สามารถคำนวณปัญหาการไหลและการถ่ายเทความร้อนในสามมิติได้

นอกจากนี้ ยังอาจจะทำการพัฒนาให้โปรแกรมสามารถแก้ปัญหาทางวิศวกรรมประเภทต่างๆ เช่น การไหลที่มีการแผ่รังสีความร้อน การไหลที่มีของไหลหลายสถานะผสมกัน (multiphase flow) การไหลที่มีการสั่นดาปเกิดขึ้น หรือการไหลที่ขอบของโดเมนสามารถเคลื่อนไหวได้ (flows with moving boundaries) เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

ภาษาไทย

สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์ (2001), การออกแบบอุปกรณ์อุ่นอากาศจากไอเสียสำหรับกระบวนการผลิตสปริงแผ่น, รายงานฉบับสมบูรณ์ เลขที่สัญญา RDG5/0022/2543, โครงการสนับสนุนผู้ปฏิบัติการวิจัยในภาคอุตสาหกรรม: สาขาพลังงาน (IRAS), สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.)

สมพงษ์ พุทธิวิสุทธิศักดิ์, พงษ์ธร จริญญากรณ์ และ วรวิทย์ มั่นสกุล (2004), การออกแบบอุปกรณ์อุ่นอากาศด้วยไอเสียสำหรับเตาเผาอุตสาหกรรม, วิศวกรรมสารฉบับวิจัยและพัฒนา, ปีที่ 15 ฉบับที่ 2, หน้า 38-47

ภาษาอังกฤษ

Al-Hadhrami L. and Han J.C. (2003) Effect of Rotation on Heat Transfer in Two-Pass Square Channels with Five Different Orientations of 45 Degrees Angled Rib Turbulators. International Journal of Heat and Mass Transfer. 46 (4): 653-669.

Apelt C.J. (1961) The Steady Flow of a Viscous Fluid Past a Circular Cylinder at Reynolds Number 40 and 44. Aeronautical Research Council, Rep. and Memo, number 3175.

Avancha R.V.R. and Pletcher R.H. (2002) Large Eddy Simulation of the Turbulent Flow Past a Backward-Facing Step with Heat Transfer and Property Variations. International Journal of Heat and Fluid Flow. 23: 601-614.

Bredberg B., Peng S.H. and Davison L. (2003) An Improved $k - \omega$ Turbulence Model Applied to Recirculating Flow. International Journal of Heat and Fluid Flow. 23: 731-743.

Buchlin J.M. (2002) Convective Heat Transfer in a Channel with Perforated Ribs. International Journal of Thermal Sciences. 41 (4): 332-340.

Burns A.D. and Wilkes N.S. (1987) A Finite Difference Method for the Computation of Fluid Flows in Complex Three Dimensional Geometries. Technical Report AERE-R 12342, Harwell Laboratory.

Carslaw H.S. and Jaeger J.C. (1959) Conduction of Heat in Solids. Oxford University Press, London.

Chien K.Y. (1982) Prediction of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model. AIAA Journal. 20: 33-38.

- Cliffe K.A., Jackson C.P. and Greenfield A.C. (1982) Finite Element Solutions for Flow in a Symmetric Channel with Smooth Expansion. Technical Report AERE-R 10608. Harwell Laboratory.
- Dechaumphai P. and Kanjanakijkasem W. (1999) A Finite Element Method for Viscous Incompressible Thermal Flows. Science Asia Journal. 25 (3): 165-172.
- Dewan A. and Arakeri J.H. (2000) Use of $k-\varepsilon-\gamma$ Model to Predict Intermittency in Turbulent Boundary-layers. ASME Journal of Fluids Engineering. 122: 542-546.
- Durbin P.A. and Reif B.A.P. (2001) Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows. John Wiley & Sons, Chichester.
- Eckert E.R.G. and Soehngen E. (1952) Distribution of Heat Transfer Coefficient Around Circular Cylinder at Reynolds Numbers from 20-500. Transactions of the ASME. 74: 343-347.
- Fornberg B. (1980) A Numerical Study of Steady Viscous Flow Past a Circular Cylinder. Journal of Fluid Mechanics. 98: 819-855.
- Hah C. (1984) A Navier-Stokes Analysis of Three-Dimensional Turbulent Flows Inside Turbine Blade Rows at Design and Offdesign Conditions. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. 106: 383-390.
- Hallback M., Henningson D.S., Johansson A. and Alfredsson P.H. (1995) The Basics of Turbulence Modeling. In ERCOFTAC Series 2, Turbulence and Transition Modeling (eds Hallback M., Henningson D.S., Johansson A. and Alfredsson P.H.), 81-154, Kluwer Academic Publishers,.
- Harnett J.P., Koh J.C.Y. and McComas S.T. (1962) A Comparison of Predicted and Measured Friction Factors for Turbulent Flow Through Rectangular Ducts. Journal of Heat Transfer. 85: 82-88.
- Hilpert R. (1933) Experimental Study of Heat Transfer from a Heated Wires and Rods in an Air Current, Forschung Gebiete Ingenieur Wesens. 4: 215-224.
- Ikohagi T., Shin B.R. and Daiguji H. (1992) Application of an Implicit Time-Marching Scheme to a Three-Dimensional Incompressible Flow Problem in Curvilinear Coordinate Systems. Computers & Fluids. 21 (2): 163-175.
- Incropera F.P. and Dewitt D.P. (2002) Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 5th ed. John Wiley and Sons, New York.
- Karki, K.C. (1985) A Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Complex Geometries. Ph.D. Thesis. University of Minnesota, USA.

- Kawaguti M. (1953) Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for the Flow Around a Circular Cylinder at Reynolds Number 40. *Journal of Physical Society of Japan*. 8 (6): 747-757.
- Keller H.B. and Tatami H. (1966) Numerical Studies of Steady Viscous Flow About Cylinders. *Proceedings of Symposium on Numerical Solution of Nonlinear Differential Equations*. Wiley, New York.
- Khan J.A., Hinton J. and Baxter S.C. (2002) Enhancement of Heat Transfer with Inclined Baffles and Ribs Combined. *Journal of Enhanced Heat Transfer*. 9 (3-4): 137-151.
- Klebanoff P. S. (1955) Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient. *NACA Report 1247*.
- Lam C.K.G. and Bremhorst K.A. (1981) Modified Form of the $k-\varepsilon$ Model for Predicting Wall Turbulence. *ASME Journal Fluids Engineering*. 103: 456-460.
- Laufer J. (1954) The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow. *NACA Report 1174*.
- Launder, B.E. and Spalding, D.B. (1972) *Mathematical Models of Turbulence*. Academic Press, London.
- Lien F.S. and Leschziner M.A. (1994a) A General Non-Orthogonal Collocated Finite Volume Algorithm for Turbulent Flow at All Speeds Incorporating Second-Moment Turbulence-Transport Closure, Part 1: Computational Implementation. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 114: 123-148.
- Lien F.S. and Leschziner M.A. (1994b) A General Non-Orthogonal Collocated Finite Volume Algorithm for Turbulent Flow at All Speeds Incorporating Second-Moment Turbulence-Transport Closure, Part 2: Application. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 114: 149-167.
- Lumley J.L. (1978) Computation Modeling of Turbulent Flows. *Advance Applied Mechanics*. 18: 123-177.
- Luo S.C., Gan T.L. and Chew Y.T. (1996) Uniform Flow Past One (or Two in Tandem) Finite Length Circular Cylinder(s). *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 59: 69-93.
- Maliska C.R. and Raithby G.D. (1984) A Method for Computing Three Dimensional Flows Using Non-Orthogonal Boundary-Fitted Coordinates. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 4: 519-537.
- Mansour N.N., Kim J. and Moin P. (1988) Reynolds Stress and Dissipation Rate Budgets in Turbulent Channel Flow. *Journal of Fluid Mechanics*. 194: 15-44.

- Matsumoto Y. and Daiguji H. (1992) Convective-Difference Scheme Using a General Curvilinear Coordinate Grid for Incompressible Viscous Flow Problems. JSME International Journal, Series II. 35 (4): 559-564.
- Melaen, M.C. (1990) Analysis of Curvilinear Nonorthogonal Coordinates for Numerical Calculation of Fluid Flow in Complex Geometries, Ph.D. Thesis. University of Trondheim, Norway.
- Menter F.R. (1992) Two-Equation k - ω Turbulence Models for Aerodynamic Flows, NASA-TM-103975.
- Nagano Y. and Hishida M. (1987) Improved Form of the k - ε Model for Wall Turbulent Shear Flows. ASME Journal Fluids Engineering. 109: 156-160.
- Natarajan V. and Chyu M.K. (1994) Convective Heat Transfer from Finite Cylinders Mounted on a Plane Wall. Proceedings of the Tenth International Heat Transfer Conference. 3: 71-76.
- Park C.W. and Lee S.J. (2003) Flow Structure Around Two Finite Circular Cylinders Located in an Atmospheric Boundary Layer: Side-By-Side Arrangement. Journal of Fluids and Structures. 17 (8): 1043-1058.
- Patankar S.V. (1980) Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere, New York .
- Patankar S.V. and Spalding D.B. (1972) A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows. International Journal of Heat and Mass Transfer. 15: 1787.
- Peng S.H., Davidson L. and Holmberg S. (1997) A Modified Low-Reynolds-Number $k - \omega$ Model for Recirculating Flows. ASME Journal of Fluids Engineering. 119: 867-875.
- Peric M. (1985) A Finite Volume Method for the Prediction of Three-Dimensional Fluid Flow in Complex Ducts. Ph.D. Thesis. Imperial College, University of London, UK.
- Pope S. B. (2000) Turbulent Flows. Cambridge University Press, UK.
- Rhie C.M. and Chow W.L. (1983) Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation. AIAA Journal. 21 (11): 1525-1532.
- Schlichting H. (1979) Boundary-Layer Theory, 7th ed. McGraw-Hill, New York.
- Shyy W., Tong S.S. and Correa S.M. (1985) Numerical Recirculating Flow Calculation Using a Body-Fitted Coordinate System. Numerical Heat Transfer. 8: 99-113.

- Shyy W. and Sun C.S. (1991) Development of Pressure-Correction/Staggered-Grid Based Multigrid Solver for Incompressible Recirculating Flows. Technical Report, University of Florida, USA.
- Shyy W., Chen M.H. and Sun C.S. (1992) A Pressure-Based Multigrid Algorithm for Flow at All Speeds. *AIAA Journal*. 30 (11): 2660-2669.
- Sparrow E.M., Lloyd J.P. and Hixon C.W. (1966) Experiments on Turbulent Heat Transfer in an Asymmetrically Heated Rectangular Duct. *Journal of Heat Transfer*. 88: 170-174.
- Spezial C.G. (1989) Turbulence Modeling in Non-inertial Frames of Reference. *Theory of Computation Fluid Dynamics*. 1: 3.
- Taneda S. (1956) Experimental Investigations of the Wakes Behind Cylinders and Plates at Low Reynolds Number. *Journal of Physical Society of Japan*. 11 (3): 302-307.
- Thom A. (1933) The Flow Past Circular Cylinders at Low Speeds. *Proceedings of the Royal Society A*. 141: 651-669.
- Thomson J.F., Thames F.C. and Mastin C.W. (1974) Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing Any Number of Arbitrary Two-Dimensional Bodies. *Journal of Computational Physics*. 15: 299-319.
- Thompson J.F., Warsi Z.U.A., and Mastin C.W. (1982) Boundary-fitted Coordinate Systems for Numerical Solution of Partial Differential Equations - A Review. *Journal of Computational Physics*. 47: 1-108.
- Thompson J.F., Warsi Z.U.A., and Mastin C.W. (1985) *Numerical Grid Generation Foundations and Applications*. Elsevier Science Publishing Co., Inc.
- Tritton D.J. (1959) Experiments on the Flow Past a Circular Cylinder at Low Reynolds Numbers. *Journal of Fluid Mechanics*. 6: 547-567.
- Vanka S.P., Chen B.C.J. and Sha W.T. (1980) A Semi-Implicit Calculation procedure for Flow Described in Body-fitted Coordinate Systems. *Numerical Heat Transfer*. 3: 1-19.
- Versteeg, H. K. and Malalasekera, W. (1995) *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Longman Scientific & Technical, England.
- Vinokur M. (1974) Conservation Equations of Gas Dynamics in Curvilinear Coordinate Systems. *Journal of Computational Physics*. 14: 105-125.
- Wang Y.Q. and Derksen R.W. (1999) Prediction of Developing Turbulent Pipe Flow by a Modified $k-\varepsilon-\gamma$ Model. *AIAA Journal*. 37 (2): 268-270.

- Westphal R.V., Johnston J.P. and Eaton J.K. (1984) Experimental Study of Flow Reattachment in a Single-Sided Sudden Expansion. Technical Report 3765, NASA.
- Wilcox D.C. (1988) Reassessment of the Scale Determining Equation for Advanced Turbulence Models. AIAA Journal. 26: 1299-1310.
- Wilcox D. C. (1993) Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries Inc., California.
- Zijlema M., Segal A. and Wesseling P. (1995) Finite Volume Computation of Incompressible Turbulent Flows in General Co-ordinates on Staggered Grids. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 20: 621-640.

Output ที่ได้จากโครงการวิจัย

ได้มีการนำผลงานวิจัยไปใช้ประโยชน์ในเชิงวิชาการดังต่อไปนี้

- 1) พัฒนาการเรียนการสอน โดยนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมา ไปใช้ประกอบการเรียนการสอน วิชา Advanced Computational Fluid Dynamics ซึ่งเป็น วิชาระดับบัณฑิตศึกษา ของภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- 2) มีส่วนช่วยในการสร้างนักวิจัยใหม่ทางด้าน Computational Fluid Dynamics ทั้งนิสิต และบัณฑิต ของภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัย ดังรายนามต่อไปนี้
 - นายกิตติศักดิ์ คูวรัญญู นิสิตปริญญาเอก หัวข้อวิทยานิพนธ์ “Combined Low-Reynolds $k-\omega$ Turbulence Model with Length Scale Correction Term for Complex Heat Transfer and Flow Phenomena”
 - นางสาวจุฑาทิพย์ ปรมีศณาภรณ์ บัณฑิตปริญญาโท หัวข้อวิทยานิพนธ์ “ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มแบบกระชับขอบเขตสำหรับปัญหาการนำความร้อน”
 - นายณพรัตน์ เกตุขาว บัณฑิตปริญญาโท หัวข้อวิทยานิพนธ์ “แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของการแผ่รังสีความร้อนในห้องปรับอากาศแบบแผ่รังสีทำความเย็น”
 - นายณัฐพล โชคบุญมงคล นิสิตปริญญาโท หัวข้อวิทยานิพนธ์ “การจำลองการไหลแบบหนืดโดยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มรวมกับการใช้ฟังก์ชันกระชับขอบเขต”
 - นายจิรายุส สมจินดา นิสิตปริญญาโท หัวข้อวิทยานิพนธ์ “การจำลองแบบเชิงตัวเลขสำหรับการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตที่มีการพาความร้อนแบบบิสระและแบบบังคับ”
 - นายอาสาฬหัช สุขเกื้อ นิสิตปริญญาโท หัวข้อวิทยานิพนธ์ “Hydrodynamic Study of Drag Reduction in Newtonian and Non-Newtonian Fluid Flows Through Coiled Tubes”