



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การวิเคราะห์ความปรกติแบบโฮลเตอร์เชิงทิศทางด้วยผลการแปลงที่เหมาะสม

โดย นายทรงเกียรติ สุเมธกิจการ

มิถุนายน พ.ศ. 2551

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การวิเคราะห์ความปรกติแบบไฮลเดอร์เชิงทิศทางด้วยผลการแปลงที่เหมาะสม

นายทรงเกียรติ สุขเมธิกิจการ

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกว.ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

กิตติกรรมประกาศ

ในอันดับแรก ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย และสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษาสำหรับทุนพัฒนาศักยภาพในการทำงานวิจัยของอาจารย์รุ่นใหม่ ซึ่งเป็นส่วนสำคัญที่ทำให้เกิดผลงานในรายงานฉบับนี้ ข้าพเจ้าต้องขอขอบคุณนาย Jouni Sampo ในฐานะผู้ร่วมวิจัยที่เข้าหากันดี และหน่วยงานที่ให้ทุนนาย Jouni เดินทางมาร่วมทำวิจัยในกรุงเทพฯกับข้าพเจ้าเป็นเวลาหลายเดือน รวมทั้งขอขอบคุณนายภาณุวัฒน์ ละครไชย ที่ได้ช่วยอ่านตรวจทานจนทำให้ได้บทความวิจัยที่สมบูรณ์มากขึ้น อย่างไรก็ตามข้อผิดพลาดทั้งหมดในรายงานและบทความวิจัยนี้เป็นความรับผิดชอบของข้าพเจ้าเพียงผู้เดียว

สุดท้ายนี้ ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ ศ.ดร.กฤษณะ เนียมมณี นักวิจัยพี่เลี้ยงของข้าพเจ้า ที่ได้กรุณาสละเวลามาช่วยชี้แนะแนวทางในการดำเนินงานวิจัยขึ้นนี้

Abstract (บทคัดย่อ)

Project Code: MRG4980023

(รหัสโครงการ)

Project Title: Analysis of directional Hölder regularity by suitable transforms

(ชื่อโครงการ) (การวิเคราะห์ความปรกติแบบโฮลเดอร์เชิงทิศทางด้วยผลการแปลงที่เหมาะสม)

Investigator: นายทรงเกียรติ สุเมธกิจการ

(ชื่อนักวิจัย) ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

E-mail Address: songkiat.s@chula.ac.th, bugweng@yahoo.com

Project Period: 1 กรกฎาคม 2549 ถึงวันที่ 30 มิถุนายน 2551

(ระยะเวลาโครงการ)

Abstract

Wavelet transforms, both continuous and discrete, have proved to be a very efficient tool in detecting point singularities. However, due to its isotropic scaling, wavelet transforms are not ideal tools in detecting one-dimensional singularities like singularity lines or curves. Recently, wavelet-like transforms with parabolic scaling, such as Hart Smith's and curvelet transforms, were introduced and applied successfully in edge detection. Our goal is then to investigate how these transforms can be used in detecting point, line, and curve singularities. New necessary and new sufficient conditions for an $L^2(\mathbb{R}^2)$ function to possess Hölder regularity, uniform and pointwise, with exponent $\alpha > 0$ are given. Similar to the characterization of Hölder regularity by the continuous wavelet transform, the conditions here are in terms of bounds of the Smith and curvelet transforms across fine scales. However, due to the parabolic scaling, the sufficient and necessary conditions differ in both the uniform and pointwise cases, with larger gap in pointwise regularities. Naturally, global conditions for pointwise singularities can be weakened. We then investigate functions with sufficiently smooth background in one direction and potential singularity in the perpendicular direction. Specifically, sufficient and necessary conditions, which include the special case with one-dimensional singularity line, are derived for pointwise Hölder exponent. Inside their “cones” of influence, these conditions are practically the same, giving near-characterization of direction of singularity. There are many interesting research problems worth investigating in the future such as 1) For other transforms with parabolic scaling, do similar theorems hold? 2) For functions with low regularity in the direction perpendicular to a given curve and sufficiently smooth background in the direction of the curve, what are sufficient and necessary conditions in terms of upper bounds of its transform. 3) Can and, if yes, how these theorems be developed into an edge detection algorithm?

บทคัดย่อ

เป็นที่ประจักษ์ชัดแล้วว่า ผลการแปลงเวฟเลตทั้งแบบต่อเนื่องและแบบไม่ต่อเนื่องเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพในการตรวจจับความไม่ราบเรียบรายจุด อย่างไรก็ตาม ลักษณะที่เหมือนกันของฟังก์ชันเวฟเลตที่สเกลต่างๆ กันทำให้ผลการแปลงเวฟเลตไม่ใช่เครื่องมือที่เหมาะสมในการตรวจจับความไม่ราบเรียบบนเส้นตรง หรือเส้นโค้ง ไม่นานมานี้ผลการแปลงที่คล้ายเวฟเลตและใช้สเกลเชิงพาราโบลา เช่น ผลการแปลงของฮาร์ทสมิธ และผลการแปลงเคิร์ฟเลต ได้ถูกคิดค้นขึ้นและประสบความสำเร็จในการนำมาใช้ตรวจจับขอบในภาพถ่าย ดังนั้นเราจึงต้องการศึกษาหาวิธีในการใช้ผลการแปลงเหล่านี้ในการตรวจจับความไม่ราบเรียบบนเส้นตรงหรือเส้นโค้ง ในโครงการนี้เราได้ค้นพบเงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่พอเพียงที่จะทำให้ฟังก์ชันใน $L^2(\mathbb{R}^2)$ มีความราบเรียบแบบโฮลเดอร์ที่กำหนดให้ทั้งแบบรายจุดและแบบสม่ำเสมอ ผลที่ได้มีความคล้ายคลึงกับการตรวจจับความราบเรียบด้วยผลการแปลงเวฟเลตต่อเนื่อง นั่นคือเงื่อนไขที่ได้เป็นเงื่อนไขในรูปขอบเขตของผลการแปลงทั้งสอง สเกลต่าง โดยเฉพาะอย่างยิ่งสเกลละเอียด อย่างไรก็ตามการสเกลเชิงพาราโบลารวมของผลการแปลงทั้งสองทำให้เงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่พอเพียงมีความแตกต่างกัน ทั้งในกรณีของความราบเรียบรายจุดและแบบสม่ำเสมอ และมีความแตกต่างกันมากกว่าในกรณีรายจุด เรายังได้ศึกษาฟังก์ชันซึ่งมีความราบเรียบค่อนข้างสูงในทิศทางหนึ่งๆ และมีความราบเรียบต่ำในทิศทางตั้งฉาก ผลที่ได้คือเงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่พอเพียงในรูปของขอบเขตของผลการแปลงทั้งสอง เงื่อนไขทั้งสองมีความคล้ายคลึงกันมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรวยที่ส่งผล (cones of influence) ปัญหาที่น่าสนใจในการศึกษาวิจัยต่อไปมีมากมายเช่น 1) สำหรับผลการแปลงที่ใช้สเกลเชิงพาราโบลารูปอื่น ๆ ทฤษฎีที่ได้จะมีความคล้ายคลึงหรือแตกต่างกันอย่างไร 2) สำหรับฟังก์ชันที่มีความราบเรียบต่ำในทิศทางตั้งฉากกับเส้นโค้งหนึ่ง และมีความราบเรียบค่อนข้างสูงในทิศทางของเส้นโค้งนั้น เงื่อนไขที่จำเป็นและเงื่อนไขที่พอเพียงในรูปของขอบเขตของผลการแปลงทั้งสองจะเป็นเช่นไร 3) ทฤษฎีที่ได้นี้จะสามารถนำไปพัฒนาเป็นเทคนิคการตรวจจับขอบได้หรือไม่ อย่างไร

Keywords : Hölder regularity, Hart Smith transform, continuous curvelet transform,
(คำหลัก) parabolic scaling, directional regularity

หน้าสรุปโครงการ (Executive Summary)
ทุนพัฒนาศักยภาพในการทำงานวิจัยของอาจารย์รุ่นใหม่

1. ชื่อโครงการ

(ภาษาไทย) การวิเคราะห์ความปกติแบบโฮลเดอร์เชิงทิศทางด้วยผลการแปลงที่เหมาะสม

(ภาษาอังกฤษ) Analysis of directional Holder regularity by suitable transforms

2. ชื่อหัวหน้าโครงการ หน่วยงานที่สังกัด ที่อยู่ หมายเลขโทรศัพท์ โทรสาร และ e-mail

ทรงเกียรติ สุขเมธกิจการ

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท ปทุมวัน กรุงเทพมหานคร 10330

โทรศัพท์ที่ทำงาน 0-2218-5171

โทรสาร 0-2255-2287

โทรศัพท์มือถือ 08-1436-4413

e-mail Songkiat.S@chula.ac.th

3. สาขาวิชาที่ทำการวิจัย คณิตศาสตร์

5. ระยะเวลาดำเนินงาน 2 ปี

6. ได้เสนอโครงการนี้ หรือโครงการที่มีส่วนเหมือนกับเรื่องนี้บางส่วนเพื่อขอทุนต่อแหล่งทุนอื่นที่ใดบ้าง

☒ ไม่ได้เสนอต่อแหล่งทุนอื่น

☐ เสนอต่อ -

ชื่อโครงการที่เสนอ -

กำหนดทราบผล (หรือสถานภาพที่ทราบ) -

7. ปัญหาที่ทำการวิจัย และความสำคัญของปัญหา

ค้นคว้าหาความสัมพันธ์ระหว่างความปกติแบบโฮลเดอร์เชิงทิศทาง(directional Holder regularity) ของฟังก์ชันบน $\mathbb{R}^2$ และสมบัติของผลการแปลงที่เหมาะสม เช่นผลการแปลงริดจ์เลต (ridgelet transform) ผลการแปลงเคิร์ฟเลต(curvelet transform) และ ผลการแปลงของฮาร์ทสมิท (Hart Smith's transform)

นอกจากคุณค่าในเชิงทฤษฎีแล้ว ความสัมพันธ์ที่ได้นี้ยังอาจช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการตรวจหาขอบของวัตถุในภาพ โดยเฉพาะอย่างยิ่งสิ่งผิดปกติในภาพถ่ายทางการแพทย์

8. วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาวิจัยความเป็นไปได้ที่จะใช้ผลการแปลงริดจ์เลต(ridgelet transform) ผลการแปลงเคิร์ฟเลต(curvelet transform) และผลการแปลงของฮาร์ทสมิท(Hart Smith's transform) ในการวิเคราะห์หาความปกติแบบโฮลเดอร์เชิงทิศทาง(directional Holder regularity) ของฟังก์ชันสองตัวแปร
2. เพื่อค้นหาวิธีที่มีประสิทธิภาพในการวิเคราะห์หาความปกติแบบโฮลเดอร์เชิงทิศทาง(directional Holder regularity) ของฟังก์ชันสองตัวแปร

9. ระเบียบวิธีวิจัย

1. ศึกษาทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับเวฟเลต(wavelets) ริดจ์เลต(ridgelets) เคิร์ฟเลต(curvelets) และผลการแปลงของ Hart Smith(Hart Smith's transform)
2. ศึกษาเทคนิควิธีในการวิเคราะห์หาความปกติแบบโฮลเดอร์(Holder regularity) ด้วยผลการแปลงเวฟเลตและสัมประสิทธิ์เวฟเลต
3. ศึกษาวิจัยหาความสัมพันธ์ระหว่างความปกติแบบโฮลเดอร์เชิงทิศทาง ณ จุดต่างๆ ของฟังก์ชันสองตัวแปรและสมบัติของผลการแปลงริดจ์เลต เคิร์ฟเลต และ ผลการแปลงของ Hart Smith
4. หากความสัมพันธ์ที่ได้ในข้อ 3. ยังไม่เป็นที่น่าพอใจ จะศึกษาวิจัยหาวิธีที่มีประสิทธิภาพมากกว่าในการวิเคราะห์หาความปกติแบบโฮลเดอร์เชิงทิศทาง(directional Holder regularity)

10. จำนวนโครงการที่ผู้สมัครกำลังดำเนินการอยู่ โดยขอให้ระบุระยะเวลาเริ่มต้นและสิ้นสุดของแต่ละโครงการ แหล่งทุน และงบประมาณสนับสนุนที่ได้รับ เวลาที่ใช้ทำโครงการวิจัยในแต่ละโครงการ เป็นกี่ชั่วโมงต่อสัปดาห์ ทั้งในฐานะหัวหน้าโครงการ ผู้ร่วมโครงการของแต่ละโครงการที่กำลังดำเนินการอยู่

ไม่มีโครงการที่กำลังดำเนินการอยู่

เนื้อหางานวิจัย

บทนำ

เป็นที่ทราบกันดีว่าเวฟเลตเป็นกล้องจุลทรรศน์เชิงคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพ และยังเป็นเครื่องมือที่เหมาะสมในการวิเคราะห์ความราบเรียบของฟังก์ชัน ข้อมูลความราบเรียบนี้มีประโยชน์ในหลายสาขาเช่น การลดสัญญาณรบกวน (denoising) และการจำแนกสัญญาณ (classification of signals) [16,17,18] เป็นต้น Jaffard [7-11] ได้ค้นพบและศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความปกติแบบโฮลเดอร์ (Holder regularity) ทั้งแบบรายจุดและแบบสม่ำเสมอ และผลการแปลงเวฟเลต (wavelet transform) ของฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร ความสัมพันธ์นี้กล่าวว่าฟังก์ชันหนึ่งจะมีความราบเรียบเอกรูปโฮลเดอร์ (uniform Holder regularity) เป็น α ก็ต่อเมื่อมีค่าคงที่ $C > 0$ ซึ่งทำให้ผลการแปลงเวฟเลตมีค่าสัมบูรณ์ไม่เกิน Ca^α ทุกสเกล $a > 0$ ความราบเรียบรายจุดก็สามารถอธิบายได้ด้วยผลการแปลงเวฟเลตเช่นกัน หากแต่เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอซึ่งขึ้นอยู่กับระยะห่างระหว่างจุดที่กำลังวิเคราะห์และจุดศูนย์กลางของเวฟเลตจะมีอันดับที่ต่างกันเล็กน้อย

อย่างไรก็ตามเวฟเลตกลับไม่ใช่เครื่องมือที่เหมาะสมสำหรับการวิเคราะห์หาลักษณะความไม่ราบเรียบตามเส้น อันเนื่องมาจากรูปทรงที่เหมือนกันของเวฟเลต ณ สเกลต่างๆกัน จนกระทั่งไม่นานมานี้ได้มีการเสนอผลการแปลงที่ใช้สเกลเชิงพาราโบลาเช่น ผลการแปลงเคิร์ฟเลต (curvelet transform) และผลการแปลงคอนทัวร์เลต (contourlet transform) และนำมาใช้ในการวิเคราะห์หาขอบได้อย่างมีประสิทธิภาพ [1-4,19] ในปัญหาของการหาขอบที่เป็นเส้นโค้งที่เรียบพอ (C^2 -curve) ผลการแปลงทั้งสองได้รับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แล้วว่าดีที่สุด [1,2,19] ใน [3,4] Candes และ Donoho ได้ใช้ผลการแปลงเคิร์ฟเลตและผลการแปลงฮาร์ทสมิท [14] ในการจำแนกเซตหน้าคลื่นและปริภูมิ $H^s(x, \theta)$ ซึ่งเป็นเครื่องมือวัดความราบเรียบเชิงทิศทางผ่านทางปริภูมิฟูเรียร์ สำหรับความราบเรียบโฮลเดอร์ซึ่งนิยามบนปริภูมิตั้งต้นโดยไม่ต้องใช้ผลการแปลงฟูเรียร์นั้น Nualtong และ Sumetkijakan [15] ได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความราบเรียบเอกรูปและรายจุด กับขอบเขตของผลการแปลงทั้งสอง เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอมีอันดับที่ต่างกันค่อนข้างมาก

หัวข้อที่น่าสนใจต่อไปคือการจำแนกความราบเรียบแบบต่างๆ โดยใช้ผลการแปลงข้างต้น เพื่อให้ได้เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอที่ใกล้เคียงกันมากขึ้น รวมทั้งการพิจารณาฟังก์ชันที่มีเส้นตรงภาวะเอกฐานและวิธีในการวิเคราะห์ฟังก์ชันดังกล่าวโดยผลการแปลงเคิร์ฟเลตและฮาร์ทสมิท

สรุปงานวิจัย

บทนิยาม 1. ให้ $\alpha > 0$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม เรากล่าวว่า f มีความราบเรียบโฮลเดอร์แบบรายจุดเป็น α ที่จุด u และเขียนแทนด้วย $f \in C^\alpha(u)$ หากมีพหุนาม P_u ที่มีดีกรีน้อยกว่า α และค่าคงที่ C_u ซึ่งทำให้สำหรับ x ในย่านใกล้เคียงของ u

$$|f(x) - P_u(x-u)| \leq C_u \|x-u\|^\alpha \quad (0.1)$$

ให้ Ω เป็นเซตย่อยเปิดของ $\mathbb{R}^2$ ถ้ามีค่าคงที่ $C = C_u$ ที่ไม่ขึ้นกับจุด $u \in \Omega$ ซึ่งทำให้ (0.2) เป็นจริงสำหรับทุก $x, u \in \Omega$ แล้วเรากล่าวว่า f มีความราบเรียบโฮลเดอร์แบบสม่ำเสมอเป็น α บน Ω และเขียนแทนด้วย $f \in C^\alpha(\Omega)$

เราจะนิยามเลขชี้กำลังโฮลเดอร์แบบสม่ำเสมอบน Ω และเลขชี้กำลังโฮลเดอร์แบบรายจุดที่ u เป็น $\alpha_l(\Omega) = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(\Omega)\}$ และ $\alpha_p(u) = \sup\{\alpha : f \in C^\alpha(u)\}$ ตามลำดับ สุดท้ายเรานิยามเลขชี้กำลังโฮลเดอร์แบบเฉพาะที่ของ f ที่จุด u เป็น $\alpha_l(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_l(I_n)$ เมื่อ $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$ เป็นเซตเปิดซึ่งทำให้ $\bigcap_{n=1}^\infty I_n = \{u\}$

บทนิยาม 2. ให้ v เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยใน $\mathbb{R}^2$ และ $u \in \mathbb{R}^2$ เรากล่าวว่า f มีความราบเรียบโฮลเดอร์แบบรายจุดเป็น α ที่จุด u ในทิศทาง v และเขียนแทนด้วย $f \in C^\alpha(u; v)$ หากมีพหุนาม $P_{u,v}$ ที่มีดีกรีน้อยกว่า α และค่าคงที่ $C_{u,v}$ ซึ่งทำให้สำหรับ λ ในย่านใกล้เคียงของ 0 เรามี $|f(u + \lambda v) - P_{u,v}(\lambda)| \leq C_{u,v} |\lambda|^\alpha$

เรากล่าวว่า f มีความราบเรียบโฮลเดอร์แบบสม่ำเสมอเป็น α บนเซตเปิด Ω ในทิศทาง v และเขียนแทนด้วย $f \in C^\alpha(\Omega; v)$ หากเราสามารถเลือก $C_{u,v}$ ที่ไม่ขึ้นกับ u ทุก $u \in \mathbb{R}^2$ ซึ่งทำให้ข้อสมการข้างต้นเป็นจริงสำหรับทุก λ ที่ $u + \lambda v \in \Omega$

ผลการแปลงฮาร์ทสมีธ ถูกนิยามครั้งแรกใน [] แต่เราจะเลือกใช้นิยามใน [] ให้ $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2)$

เรานิยาม $\varphi_{ab\theta}(x) = a^{-\frac{3}{4}} \varphi(D_{1/a} R_{-\theta}(x-b))$ สำหรับ $a > 0$, $b \in \mathbb{R}^2$, และ $\theta \in [0, 2\pi)$

เมื่อ $D_{1/a} = \text{diag}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ และ $R_{-\theta}$ คือเมทริกซ์ที่ก่อให้เกิดการหมุนตามเข็มนาฬิกาเป็นมุม θ

เรานิยาม ผลการแปลงฮาร์ทสมีธของ f จึงนิยามให้เป็น $\langle \varphi_{ab\theta}, f \rangle$ เมื่อ $a > 0$ คือสเกล $b \in \mathbb{R}^2$ คือตำแหน่ง และ $\theta \in [0, 2\pi)$ คือทิศทางของ $\varphi_{ab\theta}$ เพื่อความสะดวก สำหรับเวกเตอร์ $v \in \mathbb{R}^2$ เรานิยามให้ $\|v\|_{a,\theta} = \|D_{1/a} R_{-\theta} v\|$

ทฤษฎีบท 1. มีตัวคูณฟูเรียร์ M ที่มีอันดับเป็น 0 ซึ่งทำให้เมื่อไรก็ตามที่ $f \in L^2(\square^2)$ ที่ $\text{supp } \hat{f} \subseteq \left\{ \xi : \|\xi\| > \frac{2}{a_0} \right\}$ เราได้ว่า $f = \int_0^{a_0} \int_0^{2\pi} \int_{\square^2} \langle \varphi_{ab\theta}, Mf \rangle \varphi_{ab\theta} db d\theta \frac{da}{a^3}$ ใน $L^2(\square^2)$

ผลการแปลงเคิร์ฟเลตซึ่งปรากฏใน Candes และ Donoho ถูกนิยามในพิกัดเชิงขั้ว (r, ω) ของตัวแปรฟูเรียร์ ให้ W เป็นฟังก์ชันค่าบวกที่มีค่าเป็นศูนย์นอกเซต $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ และ V เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีค่าเป็นศูนย์นอกเซต $[-1, 1]$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\int_0^\infty W(r)^2 \frac{dr}{r} = 1 \quad \text{และ} \quad \int_{-1}^1 V(\omega)^2 d\omega = 1$$

สำหรับแต่ละสเกล $a \in (0, a_0)$ เรานิยาม γ_{a00} โดยให้

$$\gamma_{a00}(r \cos \omega, r \sin \omega) = a^{\frac{3}{4}} W(ar) V\left(\frac{\omega}{\sqrt{a}}\right) \quad \text{เมื่อ } r \geq 0 \text{ และ } \omega \in [0, 2\pi)$$

สุดท้ายเรานิยามฟังก์ชันเคิร์ฟเลต $\gamma_{ab\theta}$ สำหรับ $0 < a < a_0$ $b \in \square^2$ และ $\theta \in [0, 2\pi)$ โดย

$$\gamma_{ab\theta}(x) = \gamma_{a00}(R_\theta(x-b)) \quad \text{เมื่อ } x \in \square^2$$

และนิยามผลการแปลงเคิร์ฟเลตของ f เป็น $\langle \gamma_{ab\theta}, f \rangle$

ทฤษฎีบท 2. มีฟังก์ชันตามรัศมี Φ ซึ่งมีผลการแปลงฟูเรียร์เป็นศูนย์นอกเซตที่มีขอบเขตเซตหนึ่ง และทำให้ทุก $f \in L^2(\square^2)$

$$f = \int_{\square^2} \langle \Phi_b, f \rangle \Phi_b db + \int_0^{a_0} \int_0^{2\pi} \int_{\square^2} \langle \gamma_{ab\theta}, f \rangle \gamma_{ab\theta} db d\theta \frac{da}{a^3} \quad \text{ใน } L^2(\square^2)$$

เมื่อ $\Phi_b(x) = \Phi(x-b)$

ในขั้นตอนแรกของงานวิจัย เราได้พิสูจน์สมบัติของทั้งฟังก์ชันฮาร์ทสมิทและฟังก์ชันเคิร์ฟเลตที่จะเป็นประโยชน์ต่อไป สมบัติเหล่านั้นได้แก่โมเมนต์เชิงทิศทางที่เป็นศูนย์ และขอบเขตของอนุพันธ์อันดับต่างๆ เราจำเป็นต้องสมมติในที่นี้ว่ามีจำนวนจริงบวก C_1, C'_1, C_2 ซึ่งทำให้ $\text{supp } \hat{\varphi} \subseteq [C_1, C'_1] \times [-C_2, C_2]$ สำหรับฟังก์ชันฮาร์ทสมิท φ และฟังก์ชันหน้าต่าง V และ W ในนิยามของฟังก์ชันเคิร์ฟเลตอยู่ใน C^∞

บทตั้ง 1. มีค่าคงที่ $C > 0$ ซึ่งทำให้ฟังก์ชันฮาร์ทสมิท $\varphi_{ab\theta}$ และฟังก์ชันเคิร์ฟเลต $\gamma_{ab\theta}$ มีโมเมนต์เชิงทิศทางที่เป็นศูนย์ ณ อันดับ $L < \infty$ ใดๆ ในทิศทาง v ซึ่งทำมุมกับ v_θ ไม่เกิน $C\sqrt{a}$

บทตั้ง 2. สำหรับแต่ละ $N = 1, 2, \dots$ มีค่าคงที่ C_N ซึ่งทำให้

$$|\partial^v \gamma_{ab\theta}(x)| \leq \frac{C_N a^{\frac{3}{4} - |v|}}{1 + \|x-b\|_{a,\theta}^{2N}} \quad \text{ทุก } x \in \square^2$$

จากนั้นเราจึงพิจารณาความราบเรียบโฮลเดอร์แบบสม่ำเสมอ และแบบรายจุดของฟังก์ชัน $f \in L^2(\square^2)$ ที่มีขอบเขต และในทฤษฎีต่างๆที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เราให้ $\phi_{ab\theta}$ แทนฟังก์ชันฮาร์ทส มิธ $\varphi_{ab\theta}$ หรือฟังก์ชันเคิร์ฟเลต $\gamma_{ab\theta}$ เนื่องจากทั้งสองฟังก์ชันมีสมบัติที่จำเป็นในการพิสูจน์เหมือนกัน

ทฤษฎีบท 3. ถ้า $f \in C^\alpha(\square^2)$ แล้วจะมีค่าคงที่ C และสเกล a_0 ซึ่งทำให้

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq Ca^{\alpha+\frac{3}{4}} \quad \text{ทุกๆ } 0 < a < a_0, b \in \square^2, \text{ และ } \theta \in [0, 2\pi)$$

ทฤษฎีบท 4. ให้ $\alpha > 0$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ถ้ามีค่าคงที่ C และสเกล a_0 ซึ่งทำให้

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq Ca^{\alpha+\frac{5}{4}} \quad \text{ทุกๆ } 0 < a < a_0, b \in \square^2, \text{ และ } \theta \in [0, 2\pi)$$

แล้วจะได้ว่า $f \in C^\alpha(\square^2)$

ทฤษฎีบท 5. ถ้า $f \in C^\alpha(u)$ แล้วจะมีค่าคงที่ C และสเกล a_0 ซึ่งทำให้

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq Ca^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{\|b-u\|^\alpha}{a^{\alpha/2}} \right) \quad \text{ทุกๆ } 0 < a < a_0, b \in \square^2, \theta \in [0, 2\pi)$$

ทฤษฎีบท 6. ให้ $\alpha > 0$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ถ้ามีค่าคงที่ C สเกล a_0 และ $\alpha' < 2\alpha$ ซึ่งทำให้

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq Ca^{\alpha+\frac{5}{4}} \left(1 + \frac{\|b-u\|^{\alpha'}}{a^{\alpha'/2}} \right) \quad \text{ทุกๆ } 0 < a < a_0, b \in \square^2, \theta \in [0, 2\pi)$$

แล้วจะได้ว่า $f \in C^\alpha(u)$

หากเราพิจารณาบทพิสูจน์ของ**ทฤษฎีบท 6** อย่างละเอียดจะพบว่าเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ $f \in C^\alpha(u)$ สามารถทำให้อ่อนลงได้อีกดังนี้

ทฤษฎีบท 7. ให้ $\alpha > 0$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ถ้ามีค่าคงที่ A, C สเกล a_0 มุม θ_0 และ $\alpha' < 2\alpha$ ซึ่งทำให้

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq \begin{cases} Ca^{\alpha+\frac{5}{4}} \left(1 + \frac{\|b-u\|^{\alpha'}}{a^{\alpha'/2}} \right), & |\theta - \theta_0| > A\sqrt{a} \\ Ca^{\alpha+\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{\|b-u\|^{\alpha'}}{a^{\alpha'/2}} \right), & |\theta - \theta_0| \leq A\sqrt{a} \end{cases}$$

ทุกๆ $0 < a < a_0, b \in \square^2, \theta \in [0, 2\pi)$ แล้วจะได้ว่า $f \in C^\alpha(u)$

ต่อจากนั้นเราจึงพิจารณาหาเงื่อนไขที่จำเป็นในสถานการณ์เมื่อฟังก์ชันมีความราบเรียบที่ค่อนข้างสูงในทิศทางหนึ่ง และพบว่าได้เงื่อนไขที่คล้ายคลึงกับเงื่อนไขที่เพียงพอในทฤษฎีบท 7

ทฤษฎีบท 8. ให้ f มีเลขชี้กำลังโฮลเดอร์แบบเฉพาะที่ (local Holder exponent) ที่จุด u เป็น $\alpha \in (0,1]$ และมีมุม θ_0 และ $\varepsilon > 0$ ซึ่งทำให้ $f \in C^{2\alpha+1+\varepsilon}(\square^2, v_{\theta_0})$ จะได้ว่ามีค่าคงที่ A, C และ $\alpha' \in [\alpha - \varepsilon, \alpha]$ ซึ่งทำให้

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq \begin{cases} Ca^{\alpha+\frac{5}{4}}, & |\theta - \theta_0| > A\sqrt{a} \\ Ca^{\alpha'+\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{\|b-u\|^{\alpha'}}{a^{\alpha'}} \right), & |\theta - \theta_0| \leq A\sqrt{a} \end{cases}$$

ทุกๆ $a > 0$, $b \in \square^2$, $\theta \in [0, 2\pi)$

เราสามารถปรับแต่งทฤษฎีบท 8. เล็กน้อยเพื่อให้ได้ทฤษฎีที่เน้นให้เห็นถึงเส้นตรงภาวะเอกฐาน

ทฤษฎีบท 9. ให้ f มีความราบเรียบโฮลเดอร์บนเส้นตรงที่ผ่านจุด u และทำมุม θ_0 เรเดียส ในทิศทางตั้งฉากกับเส้นตรงเป็น $\alpha \in (0,1]$ และมีมุม $\varepsilon > 0$ ซึ่งทำให้ $f \in C^{2\alpha+1+\varepsilon}(\square^2, v_{\theta_0})$ จะได้ว่ามีค่าคงที่ A, C ซึ่งทำให้

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq \begin{cases} Ca^{\alpha+\frac{5}{4}}, & |\theta - \theta_0| > A\sqrt{a} \\ Ca^{\alpha+\frac{3}{4}} \left(1 + \frac{\|b-u\|^\alpha}{a^\alpha} \right), & |\theta - \theta_0| \leq A\sqrt{a} \end{cases}$$

ทุกๆ $a > 0$, $b \in \square^2$, $\theta \in [0, 2\pi)$

บทวิจารณ์

เนื่องจากผลการแปลงทั้งสองในงานวิจัยชิ้นนี้มีสเกลเชิงพาราโบลา ผลการแปลงทั้งสองจึงสามารถเลือกดึงข้อมูลของฟังก์ชันในทิศทางหนึ่งๆ ได้ ถึงแม้ว่าจะเป็นประโยชน์ต่อไปในการวิเคราะห์เส้นตรงภาวะเอกฐาน แต่กลับทำให้เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอสำหรับความราบเรียบแบบสม่ำเสมอในทฤษฎีบท 3-4 มีอันดับของสเกลที่ต่างกันถึง $\frac{1}{2}$ ข้าพเจ้าค่อนข้างเชื่อมั่นว่าความต่างกันของอันดับของสเกลนี้ไม่สามารถปรับปรุงได้หากไม่สมมติเงื่อนไขอื่นเพิ่ม สิ่งที่ต้องทำต่อไปจึงเป็นการหาตัวอย่างฟังก์ชันที่จะสนับสนุนข้อกล่าวอ้างนี้

สำหรับความราบเรียบแบบรายจุด เงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอที่ได้ในทฤษฎีบท 5-6 มีอันดับของสเกลที่ต่างกันถึง $\frac{\alpha+1}{2}$ อันเนื่องมาจากการที่เราไม่สามารถใช้เทคนิคเดิมในความราบเรียบแบบสม่ำเสมอได้ ขณะนี้เรายังไม่สามารถปรับปรุงได้และยังไม่พบตัวอย่างค้าน

จากทฤษฎีบท 7-9 ผลการแปลงฮาร์ทสมิทและเคิร์ฟเลตสามารถตรวจจับเส้นตรงภาวะเอกฐานได้ภายใต้เงื่อนไขของความราบเรียบที่มากพอในทิศทางของเส้นตรง ทฤษฎีนี้แสดงให้เห็นถึงความสามารถของการแปลงที่มีสเกลเชิงพาราโบลาในการวิเคราะห์หาเส้นตรงภาวะเอกฐาน เงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอที่ได้นั้นเหมือนกันเลยหากพิจารณาบนกรวยที่ส่งผล ดังนั้นจึงนำศึกษาต่อไปถึงความเป็นไปได้ในการนำไปใช้จริง ทฤษฎีบท 7-9 น่าจะได้รับการศึกษาโดยละเอียดต่อไป ดังหัวข้อที่นำวิจัยต่อไปซึ่งได้สรุปไว้ในข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

เนื่องจากการวิจัยชิ้นนี้เป็นงานวิจัยชิ้นแรกๆ ที่ศึกษาเส้นตรงภาวะเอกฐานที่มีความราบเรียบในทิศตั้งฉากเป็นบวก ต่างจากขอบโดยทั่วไปที่มีความไม่ต่อเนื่องในทิศตั้งฉากนั้น และได้พบความสัมพันธ์ของเส้นตรงภาวะเอกฐานดังกล่าว กับขอบเขตของผลการแปลงฮาร์ทสมิทและผลการแปลงเคิร์ฟเลต ณ สเกลต่างๆ ปัญหาหรือหัวข้องานวิจัยที่น่าสนใจศึกษาต่อไปจึงมีตั้งแต่การปรับปรุงผลที่ได้จนถึงปัญหาใหม่ๆ ที่เกิดจากงานชิ้นนี้ เช่น

1. ขอบเขตของผลการแปลงทั้งสองที่ต่างกันถึง $1/2$ ในทฤษฎีบท 3-4 จะสามารถปรับปรุงได้หรือไม่ นั่นคือบทกลับของทฤษฎีทั้งสองจริงหรือไม่
2. ในทำนองเดียวกัน บทกลับของทฤษฎีบท 5-6 จะสามารถปรับปรุงได้หรือไม่ หากไม่ได้จะสามารถปรับปรุงขอบเขตในเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอให้ใกล้กันมากขึ้นได้หรือไม่
3. ภายใต้สมมติฐานของความราบเรียบเบื้องหลังที่มากพอในทิศทางหนึ่ง หาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอที่ฟังก์ชันจะมีเส้นตรงภาวะเอกฐานเป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง ในรูปของขอบเขตของผลการแปลงข้างต้น ณ สเกลต่างๆ คาดว่าทฤษฎีนี้น่าจะได้มาจากการปรับปรุงทฤษฎีในงานวิจัยนี้
4. หาเงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอที่ฟังก์ชันจะมีเส้นตรงภาวะเอกฐานเป็นเส้นตรง 2 เส้นตัดกัน สถานการณ์เช่นนี้มักเกิดขึ้นที่มุมของวัตถุเหลี่ยมในภาพนั่นเอง
5. หาเงื่อนไขจำเป็นและเงื่อนไขเพียงพอที่ฟังก์ชันจะมีเส้นโค้งภาวะเอกฐานเป็นเส้นโค้งเส้นหนึ่ง โดยอาจเริ่มจากเส้นโค้งง่ายๆ เช่นพาราโบลา หรือ เส้นโค้ง C^2
6. เนื่องจากขอบเขตของผลการแปลงในงานนี้ มีอันดับของสเกลเท่ากันสำหรับผลการแปลงทั้งสอง จึงน่าสนใจศึกษาต่อไปว่าขอบเขตนี้ยังมีอันดับเท่าเดิมหรือไม่หากใช้ผลการแปลงที่มีสเกลเชิงพาราโบลาอื่นๆ เช่นผลการแปลงเชียร์เลต (shearlet transform)
7. สร้างทฤษฎีทั่วไปของการวิเคราะห์หาเส้นตรงภาวะเอกฐาน หรือเส้นโค้งภาวะเอกฐาน โดยผลการแปลงที่มีสเกลเชิงพาราโบลา และสอดคล้องกับเงื่อนไขบางประการ
8. นำผลที่ได้ไปเขียนเป็นโปรแกรมสำหรับตรวจจับขอบในภาพ และเปรียบเทียบประสิทธิภาพกับโปรแกรมอื่นๆ
9. คำถามที่ธรรมชาติอีกคำถามหนึ่งก็คือทฤษฎีเหล่านี้จะยังเป็นจริงหรือไม่ สำหรับความราบเรียบแบบอื่นๆ เช่น ความราบเรียบของคาลเดอรอนและซิกมันด์ (Calderon-Zygmund)

เอกสารอ้างอิง

1. Emmanuel J. Candes and David L. Donoho, Recovering edges in ill-posed inverse problems: Optimality of curvelet frames. *Ann. Stat.* 30(3), 784–842 (2002)
2. Emmanuel J. Candes and David L. Donoho, New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise C^2 singularities, *Commun. Pure Appl. Math.* 57(2), 219–266 (2004)
3. Emmanuel J. Candes and David L. Donoho, Continuous curvelet transform: I. resolution of the wavefront set, *Applied and Computational Harmonic Analysis*. 19(2), 162–197 (2005)
4. Emmanuel J. Candes and David L. Donoho, Continuous curvelet transform: II. discretization and frames, *Applied and Computational Harmonic Analysis* 19(2), 198–222 (2005)
5. Ingrid Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.
6. M. Holschneider and Ph. Tchamitchian, Pointwise analysis of Riemann's "nondifferentiable" function, *Invent. Math.* 105 (1991), no. 1, 157–175.
7. Stephane Jaffard, Some mathematical results about the multifractal formalism for functions, *Wavelets: theory, algorithms, and applications* (Taormina, 1993), Academic Press, San Diego, CA, 1994, pp. 325–361.
8. Stephane Jaffard, Local behavior of Riemann's function, *Harmonic analysis and operator theory* (Caracas, 1994), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 287–307.
9. Stephane Jaffard, The spectrum of singularities of Riemann's function, *Rev. Mat. Iberoamericana* 12 (1996), no. 2, 441–460.
10. Stephane Jaffard, Some open problems about multifractal functions, *Fractals in Engineering* (Evelyn Lutton Jacques Levy Vehel and Claude Tricot, eds.), Springer-Verlag, 1997, pp. 2–18.
11. Stephane Jaffard, Multifractal functions: recent advances and open problems, October 2004, Preprint.

12. Hart F. Smith, A Hardy space for Fourier integral operators, *J. Geom. Anal.* 8 (1998), no. 4, 629–653.
13. Stephane Jaffard and Yves Meyer, Wavelets Methods for pointwise regularity and local oscillations of functions. *Number 587 in Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, September 1996.
14. Hart F. Smith, A Hardy space for Fourier integral operators, *J. Geom. Anal.* 8 (1998), no. 4, 629–653.
15. S. Sumetkijakan and K. Nualtong, Analysis of Holder regularity by wavelet-like transforms with parabolic scaling, *Thai Journal of Mathematics*. 3 (2005), no. 2, 275–283.
16. Stephane Mallat and Wen Liang Hwang, Singularity detection and processing with wavelets, *IEEE Transactions on Information Theory* 38 (1992), no. 2, 617–643.
17. A. Joshi, Rajshekhar, S. Chandhar, S. Phadke, V.K. Jayaraman, B.D. Kulkarni, Arrhythmia classification using local Hölder exponents and support vector machine. In: *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3776/2005, pp. 242–247. Springer, Berlin (2005)
18. M. Rantala, S. Vänskä, S. Järvenpää, M. Kalke, M. Lassas, J. Moberg, S. Siltanen, Wavelet-based reconstruction for limited angle x-ray tomography, *IEEE Trans. Med. Imag.* **25**(2), 210–217 (2006)
19. M.N. Do and M. Vetterli, The contourlet transform: An efficient directional multiresolution image representation, *IEEE Trans. Image Process.* **14**(12), 2091–2106 (2005)

Output จากโครงการวิจัยที่ได้รับทุนจาก สกว.

1. ผลงานตีพิมพ์ในวารสารวิชาการนานาชาติ

Jouni Sampo and Songkiet Sumetkijakan, Estimations of Hölder Regularities and Direction of Singularity by Hart Smith and Curvelet Transforms, *Journal of Fourier Analysis and Applications*. Online First. To appear in print. ตูภาคผนวก

2. การนำผลงานวิจัยไปใช้ประโยชน์

งานวิจัยในโครงการนี้ได้ก่อให้เกิดประโยชน์เชิงวิชาการแก่บุคคลทั้งหลายที่ผ่านเข้ามา ทั้งในฐานะผู้ร่วมวิจัยและในฐานะผู้อ่านงานวิจัย นาย Jouni Sampo เป็นนักศึกษาปริญญาเอก สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ จาก Department of Applied Mathematics, Lappeenranta University of Technology ประเทศฟินแลนด์ เป็นผู้วิจัยร่วมมาตั้งแต่เริ่มโครงการจนกระทั่งได้ผลงานตีพิมพ์ในข้อ 1. และยังร่วมงานกันอยู่ ผลงานที่ได้นี้ยังก่อให้เกิดแนวทางการวิจัยที่เป็นส่วนหนึ่งของวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาเอกของนายภาณุวัฒน์ ละครไชย ต่อไปอีกด้วย

3. อื่นๆ (เช่น ผลงานตีพิมพ์ในวารสารวิชาการในประเทศ การเสนอผลงานในที่ประชุมวิชาการ หนังสือ การจดสิทธิบัตร) --

ภาคผนวก

J. Sampo and S. Sumetkijakan, Estimations of Holder regularities and direction of singularity by Hart Smith and curvelet transforms, *Journal of Fourier Analysis and Applications* **15** (2009), no. 1, 58-79.

Estimations of Hölder Regularities and Direction of Singularity by Hart Smith and Curvelet Transforms

Jouni Sampo · Songkiat Sumetkijakan

Received: 26 December 2006 / Revised: 15 February 2008 / Published online: 19 November 2008
© Birkhäuser Boston 2008

Abstract Using Hart Smith’s and curvelet transforms, new necessary and new sufficient conditions for an $L^2(\mathbb{R}^2)$ function to possess Hölder regularity, uniform and pointwise, with exponent $\alpha > 0$ are given. Similar to the characterization of Hölder regularity by the continuous wavelet transform, the conditions here are in terms of bounds of the transforms across fine scales. However, due to the parabolic scaling, the sufficient and necessary conditions differ in both the uniform and pointwise cases. We also investigate square-integrable functions with sufficiently smooth background. Specifically, sufficient and necessary conditions, which include the special case with 1-dimensional singularity line, are derived for pointwise Hölder exponent. Inside their “cones” of influence, these conditions are practically the same, giving near-characterization of direction of singularity.

Keywords Hölder regularity · Hart Smith transform · Continuous curvelet transform · Parabolic scaling

Mathematics Subject Classification (2000) 26B35 · 42B10

Communicated by Stéphane Jaffard.

J. Sampo

Department of Applied Mathematics, Lappeenranta University of Technology, P.O. Box 20,
53851 Lappeenranta, Finland
e-mail: jouni.sampo@lut.fi

S. Sumetkijakan (✉)

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chulalongkorn University, Phyathai Road,
Patumwan, Bangkok 10330, Thailand
e-mail: songkiat.s@chula.ac.th

1 Introduction

As an efficient mathematical microscope, wavelets have been one of the better tools for analyzing regularity of functions. This regularity information can be used for example in denoising, classification, or re-construction of signals [16, 19, 21]. However, due to its isotropic nature, wavelets are not optimal for analyzing anisotropic features like edges. Recently, transforms that are based on parabolic scaling, e.g. curvelet and contourlet transforms, have proved to be very efficient [7, 24]. For some problems, like non-linear approximation or recovering edges of a real-valued function on $\mathbb{R}^2$ that is smooth apart from discontinuity on a C^2 curve, these new transforms are in some sense even optimal [2, 3, 7]. However, regularity characterizations in terms of these transforms have not been studied as much as they deserve.

The characterization of uniform and pointwise Hölder regularities by wavelet transform was first obtained by Jaffard [10] in his study of two-microlocal spaces. Holschneider and Tchamitchian [8] independently gave wavelet characterizations of uniform Hölder regularities. See also [6, 9, 11–14]. Such characterizations say, roughly, that a function has Hölder exponent α if and only if its wavelet transform satisfies a corresponding bound condition across scales. The Hart Smith's transform, another transform that uses parabolic scaling, was rediscovered and compared to continuous curvelet transform by Candès and Donoho [4, 5] in use of the characterization of the so-called wavefront set and microlocal Sobolev spaces $H^s(x, \theta)$. These measure directional regularity properties by using Fourier-domain definitions. Nualtong and the second named author [20] have done some study on uniform and pointwise Hölder regularity estimation by using Hart Smith and curvelet transforms. As far as we know, these are the only studies on transforms based on parabolic scaling in use of regularity estimation.

In this work, we refine earlier results in [20] for pointwise and uniform regularity and give necessary and sufficient conditions for a special case, which includes the line singularity, by using the curvelet and Hart Smith transforms. The paper is organized in the following way: In Sect. 2, we first give mathematical preliminaries, define Hart Smith and curvelet transforms and finally derive some common properties of those transforms. In Sect. 3, we first investigate uniform and pointwise Hölder regularities and finally directional regularity properties.

2 Transforms Based on Parabolic Scaling

2.1 Definitions and Preliminaries

We first give some basic notation and definitions. Vectors in $\mathbb{C}^d$ are in boldface, e.g. $\mathbf{x}$, while matrices in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ are denoted by capital letters, e.g. M . Partial derivatives of a d -variable real-valued function f are denoted by $\partial^{\mathbf{v}} f := \partial_1^{v_1} \partial_2^{v_2} \cdots \partial_d^{v_d} f$ where ∂_i means the partial derivative with respect to the i th-variable and the index vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ is in $\mathbb{N}_0^d$, the cartesian product of d copies of the non-negative integers $\mathbb{N}_0$, with $|\mathbf{v}| := v_1 + v_2 + \cdots + v_d$. For general (non-index) vectors $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$, we denote $\mathbf{x}^{\mathbf{v}} := \prod_{i=1}^d x_i^{v_i}$ and $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i \bar{x}_i}$.

For $E \subseteq \mathbb{R}^d$ and $f, g \in L^2(E)$, their inner product is $\langle f, g \rangle := \int_E f \bar{g} d\mu$ where μ is Lebesgue measure. Norm in $L^2(E)$ is $\|f\|_{L^2(E)} := \sqrt{\langle f, f \rangle}$. We adopt $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{-2\pi i \mathbf{x} \cdot \xi} d\mathbf{x}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, as our definition of the Fourier transform. So the Plancherel's formula becomes $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$ and the Fourier inversion formula is $f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot \mathbf{x}} d\xi$.

In our derivations we will use a generic constant C whose value may change from one line to the next as long as it remains independent from objects we are trying to estimate.

Hölder regularity of functions of several variables is defined as follows.

Definition 1 Let $\alpha > 0$ and $\alpha \notin \mathbb{N}$. A function $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is said to be *pointwise Hölder regular with exponent α at $\mathbf{u}$* , denoted by $f \in C^\alpha(\mathbf{u})$, if there exists a polynomial $P_{\mathbf{u}}$ of degree less than α and a constant $C_{\mathbf{u}}$ such that for all $\mathbf{x}$ in a neighborhood of $\mathbf{u}$

$$|f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x} - \mathbf{u})| \leq C_{\mathbf{u}} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^\alpha. \quad (2.1)$$

Let Ω be an open subset of $\mathbb{R}^d$. If (2.1) holds for all $\mathbf{x}, \mathbf{u} \in \Omega$ with $C_{\mathbf{u}}$ being a uniform constant independent of $\mathbf{u}$, then we say that f is *uniformly Hölder regular with exponent α on Ω* or $f \in C^\alpha(\Omega)$.

The *uniform* and *pointwise Hölder exponents* of f on Ω and at $\mathbf{u}$ are then defined as

$$\alpha_l(\Omega) := \sup\{\alpha: f \in C^\alpha(\Omega)\}$$

and

$$\alpha_p(\mathbf{u}) := \sup\{\alpha: f \in C^\alpha(\mathbf{u})\}.$$

Following [22], we define local Hölder exponent as follows.

Definition 2 Let $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be a family of nested open sets in $\mathbb{R}^d$, i.e. $I_{n+1} \subset I_n$, with intersection $\bigcap_n I_n = \{\mathbf{u}\}$. The *local Hölder exponent* of a function f at $\mathbf{u}$, denoted by $\alpha_l(\mathbf{u})$, is

$$\alpha_l(\mathbf{u}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_l(I_n).$$

In many situations, local and pointwise Hölder exponents coincide, e.g., if $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\gamma$ then $\alpha_p(\mathbf{0}) = \alpha_l(\mathbf{0}) = \gamma$. However, local Hölder exponent $\alpha_l(\mathbf{u})$ is also sensitive to oscillating behavior of f near the point $\mathbf{u}$. A simple example is $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\gamma \sin(1/|\mathbf{x}|^\beta)$ for which $\alpha_p(\mathbf{0}) = \gamma$ but $\alpha_l(\mathbf{0}) = \frac{\gamma}{1+\beta}$, i.e., α_l is influenced by the wild oscillatory behavior of f near $\mathbf{0}$. See [17, 22] for more on the nature of α_l and α_p .

Finally, we give a definition of directional regularity.

Definition 3 Let $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ be a fixed unit vector and $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$. A function $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is *pointwise Hölder regular with exponent α at $\mathbf{u}$ in the direction $\mathbf{v}$* , denoted by $f \in$

$C^\alpha(\mathbf{u}; \mathbf{v})$, if there exist a constant $C_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$ and a polynomial $P_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$ of degree less than α such that

$$|f(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) - P_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}(\lambda)| \leq C_{\mathbf{u}, \mathbf{v}} |\lambda|^\alpha$$

holds for all λ in a neighborhood of $0 \in \mathbb{R}$.

If one can choose $C_{\mathbf{u}, \mathbf{v}}$ so that it is independent of $\mathbf{u}$ for all $\mathbf{u} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ and the inequality holds for all $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v} \in \Omega$, then we say that f is *uniformly Hölder regular with exponent α on Ω in direction $\mathbf{v}$* or $f \in C^\alpha(\Omega; \mathbf{v})$.

A simple example of functions with varying directional Hölder regularities at the origin is given by $f(\mathbf{x}) = r^{\alpha(\theta)}$ where (r, θ) is the polar coordinates at $\mathbf{x}$ and $\alpha(\theta)$ is any continuous positive function. It is easy to see that $f \in C^{\alpha(\theta)}(\mathbf{0}; (\cos \theta, \sin \theta))$. Whether or not it is possible to prescribe arbitrary directional smoothness at different points is still open. See [15]. In application, the problem of determining directional smoothness arises naturally in medical imaging such as the X-ray pictures of bones [1].

2.2 Hart Smith Transform

The original transform was defined in Fourier domain and used L^1 -normalization [23]. We use here the variation that was described in [4, 5] which adopts L^2 -normalization.

For a given $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^2)$, we define

$$\varphi_{ab\theta}(\mathbf{x}) = a^{-\frac{3}{4}} \varphi\left(D_{\frac{1}{a}} R_{-\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{b})\right),$$

for $\theta \in [0, 2\pi)$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, and $0 < a < a_0$, where a_0 is a fixed coarsest scale, $D_{\frac{1}{a}} = \text{diag}(\frac{1}{a}, \frac{1}{\sqrt{a}})$, and $R_{-\theta}$ is the matrix affecting planar rotation of θ radians in clockwise direction. Inverses of these matrices are therefore $D_{\frac{1}{a}}^{-1} = D_a$ and $R_{-\theta}^{-1} = R_\theta$. Hart Smith's directional wavelet transform can then be defined as

$$\bar{\Gamma}_f(a, \mathbf{b}, \theta) := \langle \varphi_{ab\theta}, f \rangle.$$

Here, a defines the scale, $\mathbf{b}$ the location, and θ the orientation of $\varphi_{ab\theta}$. This gives a true affine transform that uses parabolic scaling, i.e., the family $\{\varphi_{ab\theta}\}$ is generated by translating, rotating, and parabolically dilating a single generating function φ .

For each scale a and direction θ , let us define the norm

$$\|\mathbf{v}\|_{a, \theta} := \|D_{\frac{1}{a}} R_{-\theta} \mathbf{v}\| \quad \text{for } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2.$$

This norm has ellipsoidal unit ball with minor axis pointing in the direction θ and it becomes more and more needle like when a goes to zero. We define vector $\mathbf{v}_\theta := R_\theta(0, 1)^T$ so that $\mathbf{v}_\theta$ is parallel to the major axis of the ellipse $\|\mathbf{v}\|_{a, \theta} = 1$. It follows immediately also that $\frac{\|\mathbf{v}\|}{\sqrt{a}} \leq \|\mathbf{v}\|_{a, \theta} \leq \frac{\|\mathbf{v}\|}{a}$ when $0 < a \leq 1$. Because of this, we can think that the energy of $\varphi_{ab\theta}$ is essentially concentrated on the ellipse centered at $\mathbf{b}$

with minor axis of length “about” a and major axis of length “about” $\sqrt{a}$ pointing in the direction $\mathbf{v}_\theta$. This makes the use of this kind of transforms attractive when studying smooth curves on $\mathbb{R}^2$; if we take a piece of curve with length about $\sqrt{a}$, it will fit to a rectangle that has length about $\sqrt{a}$ and width about a . Actually, some near optimality properties in non-linear approximation and de-noising by using curvelets have been proved [2, 3].

Let us note here that a *high-frequency function* is a square integrable function whose Fourier transform is supported outside a ball of some fixed radius. For high-frequency functions we have the following reconstruction formula. See also [4, 5, 23].

Theorem 1 *There exists a Fourier multiplier M of order 0 so that whenever $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ is a high-frequency function supported in frequency space $\|\xi\| > \frac{2}{a_0}$, then*

$$f = \int_0^{a_0} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \langle \varphi_{ab\theta}, Mf \rangle \varphi_{ab\theta} d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^2). \quad (2.2)$$

The function Mf is defined in the frequency domain by a multiplier formula $\widehat{Mf}(\xi) = m(\|\xi\|)\hat{f}(\xi)$, where m is a standard Fourier multiplier of order 0 (that is, for each $k \geq 0$, there is a constant C_k such that for all $t \in \mathbb{R}$, $|m^{(k)}(t)| \leq C_k(1 + |t|^2)^{-k/2}$).

Notice that the restriction to high frequency functions makes the reconstruction formula a little hard to use in some situations. In the study of regularity, this may not be a problem since we can first divide a general $f \in L^2$ first to low and high frequency parts f_L and f_H , i.e. produce f_L first by lowpass filtering and then set $f_H = f - f_L$. Because f_L is always infinitely differentiable, regularity properties of $f = f_L + f_H$ depends only on f_H and therefore we can assume that we are working only with high frequency functions. However, this kind of preprocessing with lowpass filter is not necessary (see for example Theorem 6).

Another inconvenience in using Hart Smith transform is that we have to use Fourier multiplier M . Generally, by Plancherel's formula we get

$$\langle \varphi_{ab\theta}, Mf \rangle = \langle \widehat{\varphi_{ab\theta}}, m(\|\cdot\|)\hat{f} \rangle = \langle m(\|\cdot\|)\widehat{\varphi_{ab\theta}}, \hat{f} \rangle = \langle M\varphi_{ab\theta}, f \rangle.$$

Because of this and the fact that $\varphi_{ab\theta}$ and $M\varphi_{ab\theta}$ are duals [4, 5], we can write the reconstruction formula also as

$$\begin{aligned} f &= \int_0^{a_0} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \langle M\varphi_{ab\theta}, f \rangle \varphi_{ab\theta} d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3} \\ &= \int_0^{a_0} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \langle \varphi_{ab\theta}, f \rangle M\varphi_{ab\theta} d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3}. \end{aligned}$$

The functions $\varphi_{ab\theta}$ and $M\varphi_{ab\theta}$ are actually very similar. First, since translation in spatial domain means modulation in frequency domain, it's clear that $\mathbf{b}$ will be a parameter that just translates $M\varphi_{ab\theta}$. Secondly, because m is purely a radial function in Fourier domain, it does not affect rotation properties, i.e. θ act as a rotation parameter

also for $M\varphi_{ab\theta}$. True parabolic dilatation is the only property that we lose. However, we will show in Sect. 2.4 that if φ is properly chosen then $\varphi_{ab\theta}$ and $M\varphi_{ab\theta}$ will have essentially the same decay properties (see Lemma 2). Moreover, we will see in theorems of Sect. 3 that one really does not have to mind about the Fourier multiplier when investigating regularity properties.

2.3 Continuous Curvelet Transform

There exists different constructions of curvelets, we will follow mainly the one in Candès and Donoho [4, 5]. Resulting continuous curvelet transform (CCT) has a simpler inversion formula than that of Hart Smith transform and still enjoys properties reminiscent of the parabolic scaling. CCT is defined in the polar coordinates (r, ω) of the Fourier/frequency domain. Let W be a positive real-valued function supported inside $(\frac{1}{2}, 2)$, called a *radial window*, and let V be a real-valued function supported on $[-1, 1]$, called an *angular window*, for which the following admissibility conditions hold:

$$\int_0^\infty W(r)^2 \frac{dr}{r} = 1 \quad \text{and} \quad \int_{-1}^1 V(\omega)^2 d\omega = 1. \quad (2.3)$$

At each scale a , $0 < a < a_0$, γ_{a00} is defined by

$$\widehat{\gamma_{a00}}(r \cos(\omega), r \sin(\omega)) = a^{\frac{3}{4}} W(ar) V(\omega/\sqrt{a}) \quad \text{for } r \geq 0 \text{ and } \omega \in [0, 2\pi).$$

For each $0 < a < a_0$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, and $\theta \in [0, 2\pi)$, a *curvelet* $\gamma_{ab\theta}$ is defined by

$$\gamma_{ab\theta}(\mathbf{x}) = \gamma_{a00}(\mathbf{R}_\theta(\mathbf{x} - \mathbf{b})), \quad \text{for } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.4)$$

Equipped with this family of high-frequency elements $\gamma_{ab\theta}$, we define the continuous curvelet transform

$$\Gamma_f(a, \mathbf{b}, \theta) = \langle \gamma_{ab\theta}, f \rangle \quad \text{for all } 0 < a < a_0, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2, \text{ and } \theta \in [0, 2\pi).$$

We will follow [4] and assume that both V and W are C^∞ , which implies that the curvelets and their derivatives have rapid decay, even though it suffices for our regularity analysis to assume only that V and W are C^N for N large enough. This assumption is then enough to ensure that the resulting curvelets and their derivatives up to desired order (largest α of interest) decay fast enough.

The admissibility conditions (2.3) and the polar coordinate design of curvelets yield the following reconstruction formula for all $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ [5].

Theorem 2 *There exists a bandlimited purely radial function Φ such that for all $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$,*

$$f = \int_{\mathbb{R}^2} \langle \Phi_{\mathbf{b}}, f \rangle \Phi_{\mathbf{b}} d\mathbf{b} + \int_0^{a_0} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \langle \gamma_{ab\theta}, f \rangle \gamma_{ab\theta} d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3} \quad \text{in } L^2, \quad (2.5)$$

where $\Phi_{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{b})$.

Again, for analysis of singularities, the low frequency part $\int_{\mathbb{R}^2} \langle \Phi_{\mathbf{b}}, f \rangle \Phi_{\mathbf{b}} d\mathbf{b}$ is not an issue as it is always C^∞ .

Unlike Smith transform, curvelet transform does not use a true affine parabolic scaling as a slightly different generating function $\gamma_{a\mathbf{0}\mathbf{0}}$ is used at each scale $a > 0$. However, at fine scales, curvelet and Smith transforms have similar decay properties. See Lemma 2.

2.4 Directional Vanishing Moment and Decay Properties

In this section we show that all functions $\varphi_{a\mathbf{b}\theta}$, $M\varphi_{a\mathbf{b}\theta}$, and $\gamma_{a\mathbf{b}\theta}$ do have properties needed in proving theorems in Sect. 3. This will make all of them almost equivalent when investigating Hölder regularities. We consider the case when $\text{supp}(\hat{\varphi}) \subseteq [C_1, C'_1] \times [-C_2, C_2]$ for some $C_1 > 0$. We want to remark that this assumed property of Hart Smith transform is more general than the one used in [4, 5] when comparing Hart Smith and curvelet transforms. Indeed, φ can even be separable. For any nonzero vectors $\mathbf{v}$ and $\mathbf{v}'$ in $\mathbb{R}^2$, let us denote the angle from $\mathbf{v}$ to $\mathbf{v}'$ in clockwise direction by $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$.

Definition 4 A function f of two variables is said to have an L -order *directional vanishing moments along a direction* $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ (suppose that $v_1 \neq 0$; if $v_1 = 0$ then $v_2 \neq 0$ and we can swap the two dimensions) if

$$\int_{\mathbb{R}} t^n f(t, tv_2/v_1 - c) dt = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq n \leq L.$$

Essentially, the above definition means that any 1-D slices of the function have vanishing moments of order L . Notice from the definition that f has directional vanishing moment along direction $\mathbf{v}$ if and only if the same holds along direction $-\mathbf{v}$.

Lemma 1 *There exists $C < \infty$ (independent of $a, \mathbf{b}$ and θ) such that the curvelet functions $\gamma_{a\mathbf{b}\theta}$ have directional vanishing moments of any order $L < \infty$ along all directions $\mathbf{v}$ that satisfy $|\angle(\mathbf{v}_\theta, \mathbf{v})| \geq Ca^{1/2}$. Moreover, if there exists finite and strictly positive constants C_1, C'_1 and C_2 such that $\text{supp}(\hat{\varphi}) \subset [C_1, C'_1] \times [-C_2, C_2]$, then the above is true also for functions $\varphi_{a\mathbf{b}\theta}$ and $M\varphi_{a\mathbf{b}\theta}$.*

Proof Because m is smooth and bounded, the Fourier transforms $\widehat{\varphi_{a\mathbf{b}\theta}}(\boldsymbol{\xi})$ and $m(\|\boldsymbol{\xi}\|)\widehat{\varphi_{a\mathbf{b}\theta}}(\boldsymbol{\xi})$ of functions $\varphi_{a\mathbf{b}\theta}$ and $M\varphi_{a\mathbf{b}\theta}$ have the same compact support (and the same order of differentiability). This makes them equivalent in the sense that both satisfy conditions of the Lemma and therefore it is enough to produce a proof for $\varphi_{a\mathbf{b}\theta}$. Moreover, compact support in frequency domain implies that $\varphi_{a\mathbf{b}\theta}$ and $M\varphi_{a\mathbf{b}\theta}$ are in C^∞ .

Let $a > 0$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ and $\theta = 0$, so $\mathbf{v}_\theta = (0, 1)^T$. Let $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T = (\cos \theta', \sin \theta')^T$ be a unit vector such that $|\angle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v})| \geq Ca^{1/2}$. We make now restriction to values $\theta' \in [0, \pi/2)$, i.e. $0 < \angle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}) \leq \pi/2$. On this interval we always have $\angle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}) < \tan(\angle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}))$. Choose now $C = C_2/C_1$. Because

$$\frac{v_1}{v_2} = \tan(\angle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v})) > \angle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}) \geq Ca^{1/2} = \frac{C_2 a^{-1/2}}{C_1 a^{-1}},$$

it follows that the lines passing through the origin with slopes $\pm \frac{v_1}{v_2}$ do not intersect the rectangle $[a^{-1}C_1, a^{-1}C'_1] \times [-a^{-1/2}C_2, a^{-1/2}C_2]$. In particular, since $\text{supp}(\widehat{\varphi_{ab0}})$ is a subset of the rectangle, it does not intersect with the line $\xi_2 = -\frac{v_1}{v_2}\xi_1$. Now, since rotation commutes with Fourier transform, we have $\text{supp}(\widehat{\varphi_{ab\sigma}}) = R_\sigma \text{supp}(\widehat{\varphi_{ab0}})$ and so

$$\begin{aligned} \text{supp}(\widehat{\varphi_{ab0}}) \cap \left\{ (\xi_1, \xi_2) : \xi_2 = -\frac{v_1}{v_2}\xi_1 \right\} &= \emptyset \\ \iff \text{supp}(\widehat{\varphi_{ab(-\theta')}}) \cap R_{-\theta'} \left\{ (\xi_1, \xi_2) : \xi_2 = -\frac{v_1}{v_2}\xi_1 \right\} &= \emptyset \\ \iff \text{supp}(\widehat{\varphi_{ab(-\theta')}}) \cap \{(\xi_1, \xi_2) : \xi_1 = 0\} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Consequently, all partial derivatives of $\widehat{\varphi_{ab(-\theta')}}$ vanish on the ξ_2 -axis. This property of $\varphi_{ab(-\theta')}$ implies that it has directional vanishing moments along the direction of x_1 -axis of any order L . Indeed, if we denote $g(x_2) := \int x_1^n \varphi_{ab(-\theta')}(x_1, x_2) dx_1$ then differentiating under the integral sign gives

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_1^n \widehat{\varphi_{ab(-\theta')}}(0, \xi_2) \\ &= (-2\pi i)^n \int \left(\int x_1^n \varphi_{ab(-\theta')}(x_1, x_2) dx_1 \right) e^{-2\pi i x_2 \xi_2} dx_2 \\ &= (-2\pi i)^n \int g(x_2) e^{-2\pi i x_2 \xi_2} dx_2 \\ &= (-2\pi i)^n \hat{g}(\xi_2), \end{aligned}$$

for all $\xi_2 \in \hat{\mathbb{R}}$, which implies that $g(x_2) \equiv 0$. Therefore, φ_{ab0} has vanishing moments along the direction $\mathbf{v}$. For angles $\theta' \in (\pi/2, \pi]$ one can make similar derivations since $[a^{-1}C_1, a^{-1}C'_1] \times [-a^{-1/2}C_2, a^{-1/2}C_2]$ is symmetric about the ξ_1 -axis. And proof for the case $\theta = 0$ is complete.

The general case for $\theta \in [0, 2\pi)$ follows easily from the fact that θ just rotates the function $\varphi_{ab\theta}$. Because $\varphi_{ab\theta}$ has directional vanishing moments along the direction $\mathbf{v}$ if and only if φ_{ab0} have directional vanishing moments along direction $R_{-\theta}\mathbf{v}$ and

$$|\angle(\mathbf{v}_\theta, \mathbf{v})| = |\angle(R_{-\theta}\mathbf{v}_\theta, R_{-\theta}\mathbf{v})| = |\angle(\mathbf{v}_0, R_{-\theta}\mathbf{v})|,$$

we can denote $R_{-\theta}\mathbf{v} := (\cos\theta', \sin\theta')^T$ and make exactly same calculations as in the case $\theta = 0$. For curvelets, one can use exactly same proof because clearly $\text{supp}(\widehat{\gamma_{a00}}) \subseteq [a^{-1}C_1, a^{-1}C'_1] \times [-a^{-1/2}C_2, a^{-1/2}C_2]$ for some strictly positive C_1, C'_1 and C_2 . $\square$

Some results on the decay of $\partial^v \varphi_{ab\theta}$, $\partial^v M \varphi_{ab\theta}$, and $\partial^v \gamma_{ab\theta}$ are given below.

Lemma 2 Suppose that the windows V and W in the definition of CCT are C^∞ and have compact supports. Then for each $N = 1, 2, \dots$ there is a constant C_N such that

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad |\partial^v \gamma_{ab\theta}(\mathbf{x})| \leq \frac{C_N a^{-3/4-|v|}}{1 + \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{a,\theta}^{2N}}. \quad (2.6)$$

Moreover, if $\hat{\varphi} \in C^\infty$ and if there exist finite and strictly positive constants C_1, C'_1 , and C_2 such that $\text{supp}(\hat{\varphi}) \subset [C_1, C'_1] \times [-C_2, C_2]$, then (2.6) also holds for functions $\varphi_{ab\theta}$ and $M\varphi_{ab\theta}$.

Proof We produce a proof only for $M\varphi_{ab\theta}$. The proof is identical for $\varphi_{ab\theta}$ and, at the end of the proof, we will point out differences of proof for curvelets.

We first recall the basic properties of the Fourier transform:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= (-2\pi i \mathbf{x})^\nu g(\mathbf{x}) \iff \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \partial^\nu \hat{g}(\boldsymbol{\xi}), \\ f(\mathbf{x}) &= \partial^\nu g(\mathbf{x}) \iff \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = (2\pi i \boldsymbol{\xi})^\nu \hat{g}(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned}$$

Therefore we have

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Delta^k \hat{g}(\boldsymbol{\xi}) e^{2\pi i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi} = (-4\pi^2 \|\mathbf{x}\|^2)^k g(\mathbf{x}), \quad (2.7)$$

where Δ is the Laplacian i.e. $\Delta := \partial_1^2 + \partial_2^2$. We restrict first to the case $\theta = 0$ and $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Fix an index vector $\nu := (\nu_1, \nu_2)$ and define

$$g_a(\mathbf{x}) := M\varphi_{a\mathbf{0}\mathbf{0}}(\mathbf{D}_a \mathbf{x}) \quad \text{and} \quad h_a(\mathbf{x}) := \partial^\nu g_a(\mathbf{x}) = a^{\nu_1 + \frac{\nu_2}{2}} (\partial^\nu M\varphi_{a\mathbf{0}\mathbf{0}})(\mathbf{D}_a \mathbf{x}).$$

A straightforward computation yields

$$\begin{aligned} \hat{h}_a(\boldsymbol{\xi}) &= (i2\pi \boldsymbol{\xi})^\nu \hat{g}_a(\boldsymbol{\xi}) \\ &= (2\pi i \boldsymbol{\xi})^\nu a^{-3/2} \widehat{M\varphi_{a\mathbf{0}\mathbf{0}}}(\mathbf{D}_{1/a} \boldsymbol{\xi}) \\ &= (2\pi i \boldsymbol{\xi})^\nu a^{-3/2} m(\|\mathbf{D}_{1/a} \boldsymbol{\xi}\|) \hat{\varphi}_{a\mathbf{0}\mathbf{0}}(\mathbf{D}_{1/a} \boldsymbol{\xi}) \\ &= (2\pi i \boldsymbol{\xi})^\nu a^{-3/2} m(\|\mathbf{D}_{1/a} \boldsymbol{\xi}\|) a^{-3/4} \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}) a^{3/2} \\ &= (2\pi i \boldsymbol{\xi})^\nu a^{-3/4} m(\|\mathbf{D}_{1/a} \boldsymbol{\xi}\|) \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

If we now replace $\hat{g}$ by $\hat{h}_a$ and $\mathbf{x}$ by $\mathbf{D}_{1/a} \mathbf{x}$ in (2.7) we get

$$\begin{aligned} &|(-4\pi^2 \|\mathbf{D}_{1/a} \mathbf{x}\|^2)^k a^{\nu_1 + \nu_2/2} (\partial^\nu M\varphi_{a\mathbf{0}\mathbf{0}})(\mathbf{x})| \\ &= |(-4\pi^2 \|\mathbf{D}_{1/a} \mathbf{x}\|^2)^k h_a(\mathbf{D}_{1/a} \mathbf{x})| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} (\Delta^k \hat{h}_a)(\boldsymbol{\xi}) e^{2\pi i \mathbf{D}_{1/a} \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi} \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |(\Delta^k \hat{h}_a)(\boldsymbol{\xi})| e^{2\pi i \mathbf{D}_{1/a} \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} |d\boldsymbol{\xi}| \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |(\Delta^k \hat{h}_a)(\boldsymbol{\xi})| d\boldsymbol{\xi} \\ &= a^{-3/4} \int_{\mathbb{R}^2} |\Delta^k ((2\pi i \boldsymbol{\xi})^\nu m(\|\mathbf{D}_{1/a} \boldsymbol{\xi}\|) \hat{\varphi}(\boldsymbol{\xi}))| d\boldsymbol{\xi} \\ &\leq C a^{-3/4}. \end{aligned}$$

In the last step we used the notification that $|\Delta^k((2\pi i\xi)^v m(\|D_{1/a}\xi\|)\hat{\varphi}(\xi))| \leq C$ where C is independent of a . This is a direct consequence of the fact that if $\xi \in \text{supp}(\hat{\varphi})$ then

$$|m^{(n)}(\|D_{1/a}\xi\|)| \leq C \|D_{1/a}\xi\|^{-n} \leq C \|(a^{-1}C_1, 0)^T\|^{-n} = Ca^n. \quad (2.9)$$

When $k = 0$ this reduces to

$$|a^{v_1+v_2/2}(\partial^v M\varphi_{a00})(x)| \leq Ca^{-3/4}.$$

By combining the above estimates, we get

$$\begin{aligned} & a^{v_1+v_2/2}(1+4^k\pi^{2k}\|D_{1/a}x\|^{2k})|\partial^v M\varphi_{a00})(x)| \\ &= |a^{v_1+v_2/2}(\partial^v M\varphi_{a00})(x)| + |(-4\pi^2\|D_{1/a}x\|^2)^k a^{v_1+v_2/2}(\partial^v M\varphi_{a00})(x)| \\ &\leq Ca^{-3/4}, \end{aligned}$$

which finally gives the inequality

$$|\partial^v M\varphi_{a00})(x)| \leq \frac{Ca^{-3/4-v_1-v_2/2}}{1+(2\pi)^{2k}\|D_{1/a}x\|^{2k}} \leq \frac{Ca^{-3/4-v_1-v_2/2}}{1+\|D_{1/a}x\|^{2k}}.$$

Now we give brief arguments how we get estimate for general θ and b . Because translation do not change regularity properties, it is clear that all above would hold also for a general b . Rotation will clearly change properties of partial derivatives of function. However, taking partial derivative of a smooth function $M\varphi_{ab\theta}$ with respect to x_1 is the same as taking directional derivative of $M\varphi_{ab0}$ to direction $R_{-\theta}(1, 0)^T$. Since a directional derivative is a linear combination of partial derivatives, and partial derivatives with respect to x_1 and x_2 in the above calculations produced factors $a^{-v_1-v_2/2}$, in the worst case we will get factor $a^{-v_1-v_2} = a^{-|v|}$ instead of $a^{-v_1-v_2/2}$. For curvelets the only essential difference is that we choose $g_a(x) := \gamma_{a00}(D_a x)$, which leads to formula

$$\begin{aligned} \hat{h}_a(\xi) &= (2\pi i\xi)^v a^{-3/2} \hat{\gamma}_{a00}(D_{1/a}\xi) \\ &= (2\pi i\xi)^v a^{-3/4} W\left(\sqrt{\xi_1^2 + a\xi_2^2}\right) V\left(a^{-1/2} \arctan \frac{a^{1/2}\xi_2}{\xi_1}\right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

From compact supports of V and W we easily see that there exists positive constants C' and C'' such that $\xi \in \text{supp}(\hat{h}_a)$ implicates $C' \leq \xi_1 \leq C''$ and $|\xi_2| \leq C''$ for all sufficiently small a . Therefore it is also easy to see from (2.10) that partial derivatives of $\hat{h}_a(\xi)$ are bounded by $Ca^{-3/4}$, and so we get the same estimate as before. $\square$

We would like to remark that, by geometric arguments, the above lemmas would be valid also when $\text{supp}(\hat{\varphi}) \subset ([-C'_1, -C_1] \cup [C_1, C'_1]) \times [-C_2, C_2]$. This is important if one prefers a real valued function φ .

3 Regularity and Decay of Transforms

In the previous section we showed that $\gamma_{ab\theta}$, $\varphi_{ab\theta}$ and $M\varphi_{ab\theta}$ all have essentially the same vanishing moment and decay properties. In this section we denote any of those functions by $\phi_{ab\theta}$, and dual by $\phi_{ab\theta}^\sharp$. Moreover, we assume that ϕ always has vanishing moments and decay properties as stated in Lemmas 1 and 2. However, we would like to remark that, in some theorems, weaker properties would suffice, as can be seen in the proofs.

3.1 Uniform Regularity

Let us first note here that in the proofs of Theorems 3 and 5 we do not need vanishing moments in more than one direction (for example in the direction of x_1 -axis). In fact,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \phi_{ab\theta}(\mathbf{x}) P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x} - \mathbf{u}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} \phi_{a00}(\mathbf{x}) P_{\mathbf{u}}(R_{\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{u}) + \mathbf{b}) d\mathbf{x} = 0,$$

because $P_{\mathbf{u}}(R_{\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{u}) + \mathbf{b})$ is a polynomial.

The following theorem gives a necessary condition for Hölder regularity in terms of decay of Hart Smith or curvelet transforms.

Theorem 3 *If a bounded function $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^2)$, then there exist a constant C and a fixed coarsest scale a_0 for which*

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq C a^{\alpha + \frac{3}{4}}$$

for all $0 < a < a_0$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, and $\theta \in [0, 2\pi)$.

Proof Without loss of generality, we can assume that $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ and $\theta = 0$. The general case follows by simple translation and rotation of f because uniform regularity is invariant under those operations.

We first recall that uniform regularity of f means that there exist a constant C independent of $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ and, for each $\mathbf{u}$, a polynomial $P_{\mathbf{u}}$ of degree less than α such that

$$|f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x} - \mathbf{u})| \leq C \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^\alpha$$

for all $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Therefore, for each $x_2 \in \mathbb{R}$, there exists a polynomial $P_{(0,x_2)}$ such that, for all $x_1 \in \mathbb{R}$,

$$|f(x_1, x_2) - P_{(0,x_2)}(x_1, 0)| \leq C \|(x_1, x_2) - (0, x_2)\|^\alpha = C |x_1|^\alpha. \quad (3.1)$$

Also, since ϕ_{a00} has rapid decay, the integral $\int_{\mathbb{R}^2} |P_{(0,x_2)}(x_1, 0) \phi_{a00}(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$ is finite which allows us to apply Fubini's theorem and write

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} P_{(0,x_2)}(x_1, 0) \phi_{a00}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} P_{(0,x_2)}(x_1, 0) \phi_{a00}(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} 0 dx_2 = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

where we have used the assumption that ϕ_{a00} has directional vanishing moments of any order along the x_1 -axis for a sufficiently small. By using (3.1), (3.2) and (2.6) we get

$$\begin{aligned}
 |\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} (f(\mathbf{x}) - P_{(0,x_2)}(x_1, 0)) \phi_{a00}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |f(\mathbf{x}) - P_{(0,x_2)}(x_1, 0)| |\phi_{a00}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\
 &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} |x_1|^\alpha |\phi_{a00}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\
 &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} |x_1|^\alpha \left| \frac{a^{-3/4}}{1 + \|\mathbf{x}\|_{a,0}^{2N}} \right| d\mathbf{x} \\
 &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} |ay_1|^\alpha \left| \frac{a^{3/4}}{1 + \|\mathbf{y}\|^{2N}} \right| d\mathbf{y} \\
 &\leq Ca^{\alpha+3/4}. \quad \square
 \end{aligned}$$

A sufficient condition for a function f to be C^α is given in the next theorem. Unfortunately, the condition here is not closed to the necessary condition presented above, due to the effect of parabolic scaling.

Theorem 4 *Let $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ and $\alpha > 0$ a non-integer. If there is a constant $C < \infty$ such that*

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq Ca^{\alpha+\frac{5}{4}},$$

for all $0 < a < a_0$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, and $\theta \in [0, 2\pi)$, then $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^2)$.

We omit the proof of this theorem since it's essentially the same as that for the pointwise case, see Theorem 6.

3.2 Pointwise Regularity

Pointwise regularity estimates are harder to obtain than those for uniform regularity. Necessary conditions and sufficient conditions derived here will differ even more than in the uniform case.

Theorem 5 *If a bounded function $f \in C^\alpha(\mathbf{u})$ then there exists $C < \infty$ such that*

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq Ca^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}} \left(1 + \left\| \frac{\mathbf{b} - \mathbf{u}}{a^{1/2}} \right\|^\alpha \right) \quad (3.3)$$

for all $0 < a < a_0$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, and $\theta \in [0, 2\pi)$.

Proof We would like to remark that because f is bounded, the polynomial approximation property (2.1) holds in all $\mathbb{R}^2$ although by definition it holds only in some

neighborhood of point $\mathbf{u}$. Therefore the proof is similar to that for uniform regularity, but we obviously do not have varying polynomials for different $\mathbf{x}_2$. We do have

$$\begin{aligned}
 |\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\phi_{ab\theta}(\mathbf{x})| |f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x} - \mathbf{u})| d\mathbf{x} \\
 &\leq Ca^{-\frac{3}{4}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^\alpha}{1 + \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{a,\theta}^{2N}} d\mathbf{x} \\
 &= Ca^{-\frac{3}{4}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^\alpha}{1 + \|D_{1/a} R_{-\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{b})\|^{2N}} d\mathbf{x} \\
 &= Ca^{-\frac{3}{4} + \frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\|R_\theta D_a \mathbf{y} + \mathbf{b} - \mathbf{u}\|^\alpha}{1 + \|\mathbf{y}\|^{2N}} d\mathbf{y} \\
 &\leq Ca^{-\frac{3}{4} + \frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\|R_\theta D_a \mathbf{y}\|^\alpha + \|\mathbf{b} - \mathbf{u}\|^\alpha}{1 + \|\mathbf{y}\|^{2N}} d\mathbf{y} \\
 &\leq Ca^{\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{2}} \left(1 + \left\| \frac{\mathbf{b} - \mathbf{u}}{a^{1/2}} \right\|^\alpha \right),
 \end{aligned}$$

since we can choose N large enough so that the last integral is finite. We have also used the fact that $R_\theta D_a$ is a bounded linear operator with norm $\|R_\theta D_a\| = a^{1/2}$. $\square$

Theorem 6 Let $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ and α be a non-integer positive number. If there exist $C < \infty$ and $\alpha' < 2\alpha$ such that

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq Ca^{\alpha + \frac{5}{4}} \left(1 + \left\| \frac{\mathbf{b} - \mathbf{u}}{a^{1/2}} \right\|^{\alpha'} \right), \quad (3.4)$$

for all $0 < a < a_0$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, and $\theta \in [0, 2\pi)$, then $f \in C^\alpha(\mathbf{u})$.

Proof First we divide $f \in L^2(\mathbb{R})$ to low and high frequency parts f_L and f_H . As discussed before, regularity of the function f depends only on regularity of high frequency part f_H , and therefore it's enough to calculate estimates only for f_H . It is clear that, for a small enough, $\langle \hat{\phi}_{ab\theta}, \hat{f}_L \rangle = 0$ as the frequency support of $\phi_{ab\theta}$ is moving farther away from the origin. Because of that and by Plancherel's formula, we have

$$\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle = \langle \phi_{ab\theta}, f_L \rangle + \langle \phi_{ab\theta}, f_H \rangle = \langle \phi_{ab\theta}, f_H \rangle.$$

Therefore the assumption (3.4) gives

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f_H \rangle| \leq C_2 a^{\alpha + \frac{5}{4}} \left(1 + \left\| \frac{\mathbf{b} - \mathbf{u}}{a^{1/2}} \right\|^{\alpha'} \right). \quad (3.5)$$

The rest of the proof follows the one given in [10, 18] for wavelets in $L^2(\mathbb{R})$. We reproduce it here even though there is not much change in higher dimension with parabolic scaling. The reason is that a little modification can be used in later investigation of directional regularity properties.

Without loss of generality, we can choose $a_0 = 1$ in (2.2). We use the notation $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}$, where $\|\mathbf{v}\| = 1$. Here we can set $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, the general case follows by simple translation. The reconstruction formula (2.2) can be rewritten

$$f_H(\mathbf{x}) = \sum_{j=-\infty}^{-1} \Delta_j(\mathbf{x}), \quad (3.6)$$

where

$$\Delta_j(\mathbf{x}) := \int_{2^j}^{2^{j+1}} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \langle \phi_{ab\theta}, f_H \rangle \phi_{ab\theta}^\#(\mathbf{x}) d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3}.$$

We try to approximate f_H by polynomial

$$P_0(\lambda \mathbf{v}) := \sum_{k=0}^{|\alpha|} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=-\infty}^{-1} (\mathbf{v} \cdot \nabla)^k \Delta_j(\mathbf{0}).$$

Next we investigate how fast the terms $(\lambda \mathbf{v} \cdot \nabla)^k \Delta_j(\lambda \mathbf{v})$ go to zero when $j \rightarrow -\infty$. First, by using assumptions of the theorem, implication (3.5) and the decay estimate (2.6), we can derive

$$\begin{aligned} & |\partial_1^{k-l} \partial_2^l \Delta_j(\mathbf{x})| \\ &= \left| \int_{2^j}^{2^{j+1}} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \langle \phi_{ab\theta}, f_H \rangle \partial_1^{k-l} \partial_2^l \phi_{ab\theta}^\#(\mathbf{x}) d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3} \right| \\ &\leq C \int_{2^j}^{2^{j+1}} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} a^{\alpha+5/4} \left(1 + \left\| \frac{\mathbf{b}}{a^{1/2}} \right\|^{\alpha'} \right) \frac{a^{-3/4-k}}{1 + \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{a,\theta}^{2N}} d\mathbf{b} d\theta \frac{da}{a^3} \\ &= C \int_{2^j}^{2^{j+1}} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 + \left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{R}_\theta \mathbf{D}_a \mathbf{y}}{a^{1/2}} \right\|^{\alpha'} \right) \frac{a^{\alpha+5/4-k+3/2-3/4}}{1 + \|\mathbf{y}\|^{2N}} d\mathbf{y} d\theta \frac{da}{a^3} \\ &\leq C \int_{2^j}^{2^{j+1}} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{a^{\alpha-k+2} (1 + a^{-\alpha'/2} (\|\mathbf{x}\|^{\alpha'} + \|\mathbf{R}_\theta \mathbf{D}_a \mathbf{y}\|^{\alpha'}))}{1 + \|\mathbf{y}\|^{2N}} d\mathbf{y} d\theta \frac{da}{a^3} \\ &\leq C \int_{2^j}^{2^{j+1}} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{a^{\alpha-k+2} (1 + \|\mathbf{y}\|^{\alpha'} + a^{-\alpha'/2} \|\mathbf{x}\|^{\alpha'})}{1 + \|\mathbf{y}\|^{2N}} d\mathbf{y} d\theta \frac{da}{a^3} \\ &\leq C \int_{2^j}^{2^{j+1}} a^{\alpha-k-1} (C + a^{-\alpha'/2} \|\mathbf{x}\|^{\alpha'}) da \\ &\leq C 2^{j(\alpha-k)} + C 2^{j(\alpha-k-\alpha'/2)} \|\mathbf{x}\|^{\alpha'}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Therefore

$$\begin{aligned}
 |(\mathbf{v} \cdot \nabla)^k \Delta_j(\lambda \mathbf{v})| &= |(v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2)^k \Delta_j(\lambda \mathbf{v})| \\
 &= \left| \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} v_1^{k-l} v_2^l \partial_1^{k-l} \partial_2^l \Delta_j(\lambda \mathbf{v}) \right| \\
 &\leq C \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} |v_1^{k-l} v_2^l| (2^{j(\alpha-k)} + 2^{j(\alpha-k-\alpha'/2)} |\lambda|^{\alpha'}) \\
 &\leq C (2^{j(\alpha-k)} + 2^{j(\alpha-k-\alpha'/2)} |\lambda|^{\alpha'}). \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Notice that C can be really independent from $\mathbf{v}$ since $|v_1| \leq 1$ and $|v_2| \leq 1$. Equation (3.8) clearly also holds for $k = 0$. Then, by the triangle inequality,

$$\begin{aligned}
 |f_H(\lambda \mathbf{v}) - P_0(\lambda \mathbf{v})| &= \left| \sum_{j=-\infty}^{-1} \Delta_j(\lambda \mathbf{v}) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\lambda^k}{k!} \sum_{j=-\infty}^{-1} (\mathbf{v} \cdot \nabla)^k \Delta_j(\mathbf{0}) \right| \\
 &\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \left| \Delta_j(\lambda \mathbf{v}) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\lambda^k}{k!} (\mathbf{v} \cdot \nabla)^k \Delta_j(\mathbf{0}) \right|.
 \end{aligned}$$

We investigate now coarse and fine scales separately and therefore we choose J such that $2^{J-1} \leq |\lambda| \leq 2^J$. It's essential to notice that our generic constant C can remain independent of J in all calculations. By noticing that each summand is the absolute error of the approximation of $\Delta_j(\lambda \mathbf{v})$ by its Taylor polynomial of degree $[\alpha]$, we get, for coarse scales,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=J}^{-1} \left| \Delta_j(\lambda \mathbf{v}) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\lambda^k}{k!} (\mathbf{v} \cdot \nabla)^k \Delta_j(\mathbf{0}) \right| \\
 &\leq \sum_{j=J}^{-1} \frac{|\lambda|^{[\alpha]+1}}{([\alpha]+1)!} \sup_{h \in [0, \lambda]} |(\mathbf{v} \cdot \nabla)^{[\alpha]+1} \Delta_j(h \mathbf{v})| \\
 &\leq \sum_{j=J}^{-1} C |\lambda|^{[\alpha]+1} (2^{j(\alpha-[\alpha]-1)} + 2^{j(\alpha-[\alpha]-1-\alpha'/2)} |\lambda|^{\alpha'}) \\
 &\leq C |\lambda|^{[\alpha]+1} ((2^{J+1})^{(\alpha-[\alpha]-1)} + (2^{J+1})^{(\alpha-[\alpha]-1-\alpha'/2)} |\lambda|^{\alpha'}) \\
 &\leq C |\lambda|^{[\alpha]+1} (|\lambda|^{(\alpha-[\alpha]-1)} + |\lambda|^{(\alpha-[\alpha]-1-\alpha'/2)} |\lambda|^{\alpha'}) \\
 &\leq C |\lambda|^\alpha,
 \end{aligned}$$

where the estimate (3.8) was used in the second inequality. At fine scales we use directly the estimate (3.8) and get

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-\infty}^{J-1} \left| \Delta_j(\lambda \mathbf{v}) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\lambda^k}{k!} (\mathbf{v} \cdot \nabla)^k \Delta_j(\mathbf{0}) \right| \\ & \leq C \sum_{j=-\infty}^{J-1} \left[(2^{j\alpha} + 2^{j(\alpha-\alpha'/2)} |\lambda|^{\alpha'}) + \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{|\lambda|^k}{k!} 2^{j(\alpha-k)} \right] \\ & \leq C |\lambda|^\alpha. \end{aligned}$$

The assumption $\alpha' < 2\alpha$ was needed to make infinite summations to converge. Because $\|\mathbf{x}\| = |\lambda|$, the theorem is proved. $\square$

3.3 Direction of Singularity

In this section we study what kind of directional information the decay of the transforms can provide. Comparing to previous theorems, we now approve a weaker rate of decay of $|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle|$ for some angle θ_0 . Loosely speaking, this angle can define direction where f has low regularity, for example 1-dimensional singularity. We first consider new sufficient conditions for regularity.

Theorem 7 *Let $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, and assume that $\alpha > 0$ is not an integer. If there exist $\alpha' < 2\alpha$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, and $A, C < \infty$ such that*

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq \begin{cases} Ca^{\alpha+\frac{5}{4}} (1 + \|\frac{\mathbf{b}-\mathbf{u}}{a^{1/2}}\|^{\alpha'}), & \text{if } \theta \notin \theta_0 + Aa^{1/2}[-1, 1], \\ Ca^{\alpha+\frac{3}{4}} (1 + \|\frac{\mathbf{b}-\mathbf{u}}{a^{1/2}}\|^{\alpha'}), & \text{if } \theta \in \theta_0 + Aa^{1/2}[-1, 1] \end{cases}$$

for all $0 < a < a_0$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, and $\theta \in [0, 2\pi)$, then $f \in C^\alpha(\mathbf{u})$.

Proof Let us denote $I_{\theta_0,a} := \theta_0 + Aa^{1/2}[-1, 1]$. The only difference from the proof of Theorem 6 is that, in the derivation of (3.7), we split the integral with respect to the angle θ into

$$\int_{[0,2\pi]} d\theta = \int_{[0,2\pi] \setminus I_{\theta_0,a}} d\theta + \int_{I_{\theta_0,a}} d\theta.$$

The first integral obviously gives the same estimate as in (3.7), while the second yields an extra factor of $2Ca^{1/2}$ instead of 2π . $\square$

We now give a simple example. Let $f(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)|x_1|^\alpha$, where g is a bounded positive $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ function. Then $f \in C^\alpha(\{(0, x_2) | x_2 \in \mathbb{R}\}, \mathbf{v}_{\pi/2}) \cap C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbf{v}_0)$. First we recall that $\phi_{ab\theta}$ has vanishing moments of any order to all directions $\mathbf{v}$ such that $|\angle(\mathbf{v}, \mathbf{v}_\theta)| \geq Aa^{1/2}$. Therefore it is clear that

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq Ca^N \quad \text{whenever } |\angle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_\theta)| \geq Aa^{1/2}$$

for any $N < \infty$. With similar methods as in the uniform regularity case, we can derive

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq C a^{\alpha+3/4} \quad \text{whenever } |\angle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_\theta)| \leq Aa.$$

For angles $Aa \leq |\angle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_\theta)| < Aa^{1/2}$, the same estimate cannot be so easily obtained. The next theorem gives more precise necessary decay condition for special type of functions that includes our example. Essentially these functions might have aligned singularity lines. Because local Hölder exponent is used in the assumption of this theorem, we actually consider not only traditional singularities but also wild oscillatory behavior.

Theorem 8 *Let f be bounded with local Hölder exponent $\alpha \in (0, 1]$ at point $\mathbf{u}$ and $f \in C^{2\alpha+1+\varepsilon}(\mathbb{R}^2, \mathbf{v}_{\theta_0})$ for some $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ with any fixed $\varepsilon > 0$. Then there exist $\alpha' \in [\alpha - \varepsilon, \alpha]$ and $A, C < \infty$ such that for $a > 0$ and $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$,*

$$|\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| \leq \begin{cases} C a^{\alpha+\frac{5}{4}}, & \text{if } \theta \notin \theta_0 + Aa^{1/2}[-1, 1], \\ C a^{\alpha'+\frac{3}{4}}(1 + \|\frac{\mathbf{b}-\mathbf{u}}{a}\|^{\alpha'}), & \text{if } \theta \in \theta_0 + Aa^{1/2}[-1, 1]. \end{cases}$$

Proof From Definition 2, for all $\varepsilon > 0$, there exists a ball $B(\mathbf{u}, r_\varepsilon)$ such that $\alpha_l(B(\mathbf{u}, r_\varepsilon)) \geq \alpha - \varepsilon$. This means that

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq C_\varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{\alpha_l(B(\mathbf{u}, r_\varepsilon))} \leq C_\varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{\alpha-\varepsilon}, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(\mathbf{u}, r_\varepsilon).$$

For simplicity we assume again that $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ and $\theta_0 = 0$, the general case follows by simple translation and rotation. For angles θ such that $|\angle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_\theta)| \leq Aa^{1/2}$ we can write that

$$\begin{aligned} |\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} (f(\mathbf{x}) - f(0, x_2)) \phi_{ab\theta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} \|(x_1, 0)^T\|^{\alpha_l(B(\mathbf{0}, r_\varepsilon))} \left(\frac{a^{-3/4}}{1 + \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{a,\theta}^{2N}} \right) d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} \|\mathbf{x}\|^{\alpha_l(B(\mathbf{0}, r_\varepsilon))} \left(\frac{a^{-3/4}}{1 + \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{a,\theta}^{2N}} \right) d\mathbf{x} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^2} \left((a\|\mathbf{y}\|)^{\alpha_l(B(\mathbf{0}, r_\varepsilon))} + \|\mathbf{b}\|^{\alpha_l(B(\mathbf{0}, r_\varepsilon))} \right) \left(\frac{a^{3/4}}{1 + \|\mathbf{y}\|^{2N}} \right) d\mathbf{y} \\ &= C a^{\alpha_l(B(\mathbf{0}, r_\varepsilon))+3/4} \left(1 + \left\| \frac{\mathbf{b}}{a} \right\|^{\alpha_l(B(\mathbf{0}, r_\varepsilon))} \right). \end{aligned}$$

So we choose $\alpha' = \alpha_l(B(\mathbf{0}, r_\varepsilon))$. We then turn to the investigation of angles θ such that $|\angle(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_\theta)| \geq Aa^{1/2}$. Our method is similar as making the integration of $\langle \phi_{ab\theta}, f \rangle$ by taking line integrals to direction of x_2 . This idea arises from the fact that f has high uniform regularity in that direction. Since the regularity property that we will use now is invariant under translation, the estimate we will get here is the

same for all $\mathbf{b}$ and we can restrict to the case $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. We start by taking the rectangle $A_a := [-a^{-c}, a^{-c}]^2$ for some $0 < c < 1/2$, to be determined later. We notice that $R_\theta D_a A_a$ is oriented similarly to the essential support of $\phi_{a\mathbf{b}\theta}$ and $A_a \rightarrow \mathbb{R}^2$ and $R_\theta D_a A_a \rightarrow \mathbf{0}$ when $a \rightarrow 0$. We will also use here the notation $\mathbf{v}(\mathbf{x}) := x_1 \mathbf{v}_\theta / |\cos(\theta)|$, i.e. $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ lies on major axis of $R_\theta D_a A_a$ and $\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$ is always parallel to x_2 -axis.

$$\begin{aligned} |\langle \phi_{a\mathbf{b}\theta}, f \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} (f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{v}(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{v}(\mathbf{x}))) \phi_{a\mathbf{0}\theta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus R_\theta D_a A_a} (f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{v}(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{v}(\mathbf{x}))) \phi_{a\mathbf{0}\theta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\ &\quad + \left| \int_{R_\theta D_a A_a} (f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{v}(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{v}(\mathbf{x}))) \phi_{a\mathbf{0}\theta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|. \end{aligned}$$

For the first integral we can write

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^2 \setminus R_\theta D_a A_a} (f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{v}(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{v}(\mathbf{x}))) \phi_{a\mathbf{0}\theta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq C a^{-\frac{3}{4}} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus R_\theta D_a A_a} \frac{|f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{v}(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{v}(\mathbf{x}))|}{1 + \|\mathbf{x}\|_{a,\theta}^{2N}} d\mathbf{x} \\ &= C a^{\frac{3}{4}} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus A_a} \frac{|f(R_\theta D_a \mathbf{y}) - P_{\mathbf{y}'}(R_\theta D_a \mathbf{y} - \mathbf{y}')|}{1 + \|\mathbf{y}\|^{2N}} d\mathbf{y} \leq C a^K, \end{aligned}$$

where $\mathbf{y}' = \mathbf{v}(R_\theta D_a \mathbf{y})$ and K can be chosen arbitrarily large. That is because (i) $1 + \|\mathbf{y}\|^{2N}$ will clearly dominate the integration since it grows much faster than $f(R_\theta D_a \mathbf{y}) - P_{\mathbf{y}'}(R_\theta D_a \mathbf{y} - \mathbf{y}')$ when we choose N large enough (since f is bounded) and (ii) $\|\mathbf{y}\| \geq a^{-c}$, i.e., when c is first fixed, we just choose N large enough to make K as large as necessary.

The length l of the part of the line parallel to the x_2 -axis lying inside the rectangle $R_\theta D_a A_a$ is at most $|l| \leq \sqrt{2} a^{1/2-c}$. Let us now assume that $f \in C^{\alpha_s}(\mathbb{R}^2, \mathbf{v}_{\theta_0})$ i.e. for every $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ there exists a polynomial $P_{\mathbf{y}}$ such that

$$|f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{y}}(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq C \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^{\alpha_s}, \quad \text{when } (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \parallel \mathbf{v}_{\theta_0}$$

for all $\mathbf{x}$ in some neighborhood of $\mathbf{y}$. Now $R_\theta D_a A_a \subset B(\mathbf{0}, r)$ clearly for any fixed r when a is just small enough. Therefore, for $\mathbf{x} \in R_\theta D_a A_a$,

$$|f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{v}(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{v}(\mathbf{x}))| \leq C |l|^{\alpha_s} \leq C a^{(1/2-c)\alpha_s}.$$

With these, we obtain an estimate for the second integral

$$\begin{aligned} &\left| \int_{R_\theta D_a A_a} (f(\mathbf{x}) - P_{\mathbf{v}(\mathbf{x})}(\mathbf{x} - \mathbf{v}(\mathbf{x}))) \phi_{a\mathbf{b}\theta}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \\ &\leq C \int_{A_a} \frac{a^{(\frac{1}{2}-c)\alpha_s} a^{\frac{3}{4}}}{1 + \|\mathbf{y}\|^{2N}} d\mathbf{y} \leq C a^{\alpha_s(\frac{1}{2}-c) + \frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Therefore we have the condition

$$\alpha_s(1/2 - c) + 3/4 \geq \alpha_l(\mathbf{0}) + 5/4.$$

Now we remember that we can choose any $c \in (0, 1/2)$ and, therefore, for any small ε we can choose $c = \frac{\varepsilon}{4\alpha_l + 2 + 2\varepsilon}$. With this the above condition is clearly true when

$$\alpha_s \geq 2\alpha_l(\mathbf{0}) + 1 + \varepsilon. \quad \square$$

3.4 Numerical Examples

In this section we demonstrate how Theorems 7 and 8 can be used in practice by a simple numerical example. As generating kernel function ϕ we use the tensor product of the Meyer scaling function ϕ_M and wavelet function ψ_M i.e., $\phi(x_1, x_2) = \psi_M(x_1)\phi_M(x_2)$. Support of this function in Fourier domain meets conditions in Theorems 3 and 4, hence suitable for our analysis. For more details about Meyer scaling function and wavelet, see for example [6]. All implementations are made in MATLAB. Strange behavior in some graphs at fine scales and large angles, where the transform is too small in value, are caused by the size of our sampling grid of 2^{24} points on $[-10, 10]^2$ for ϕ_M and precision of calculations used in numerical algorithms.

We first choose the test set S of functions

$$S = \{f(R_{\theta_0}\mathbf{x}) : f(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}\|_{x_1}^\alpha}, \alpha \in (0, 1], \theta_0 \in [0, \pi]\}.$$

All functions $f \in S$ clearly meets conditions in Theorem 8. Notice also that the local and pointwise Hölder exponents at the origin of every $f \in S$ are the same.

As a test case we pick $f(\mathbf{x}) = e^{-\|\mathbf{x}\|_{x_1}^{0.25}} \in S$. From the formula of f we see clearly that $\alpha = 0.25$ and $\theta_0 = 0$, but can we explore these values from some graphs if we only know that $f \in S$? It turns out that one can read these values from the behavior of the Hart Smith transform of f .

We investigate scales $a = 2^{-s}$, $s \in \mathbb{N}$. Let us define the function

$$I_{\theta\mathbf{b}}(s) := \log_2(|\langle \phi_{2^{-s}\mathbf{b}\theta}, f \rangle|)$$

and numerically evaluate its values when $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. The fact that $Ca^{1/2} = C2^{-s/2}$ is the critical angle is more clearly emphasized once we define

$$g(s, t) := I_{\theta\mathbf{0}}(s) + (\alpha + 3/4)s, \quad \text{where } t := -2\log_2|\theta|,$$

whose graph is shown in Fig. 2. There clearly exists a line $s = t + c$, where c is a constant, that divides the domain of g into two parts, the one where g is approximately constant (these are “small angles” where $I_{\theta\mathbf{0}}(s)$ decays slower) and another one where g still decays (these are “large angles” where $I_{\theta\mathbf{0}}(s)$ decays faster).

Theorem 7 gives estimate $\alpha \geq 0.25$. Figure 1 illustrates that $I_{\theta\mathbf{0}}(s) \approx -(0.25 + 3/4)s + C$ for angles small enough comparing to the scale ($|\theta| < C\pi 2^{-s/2}$), i.e., it satisfies a sufficient condition on small angles for f being in $C^{0.25}(\mathbf{0})$. For $|\theta|$ larger than $C\pi 2^{-s/2}$, we see from Fig. 2 that $I_{\theta\mathbf{0}}(s) \leq -(0.25 + 5/4)s + C$. So sufficient

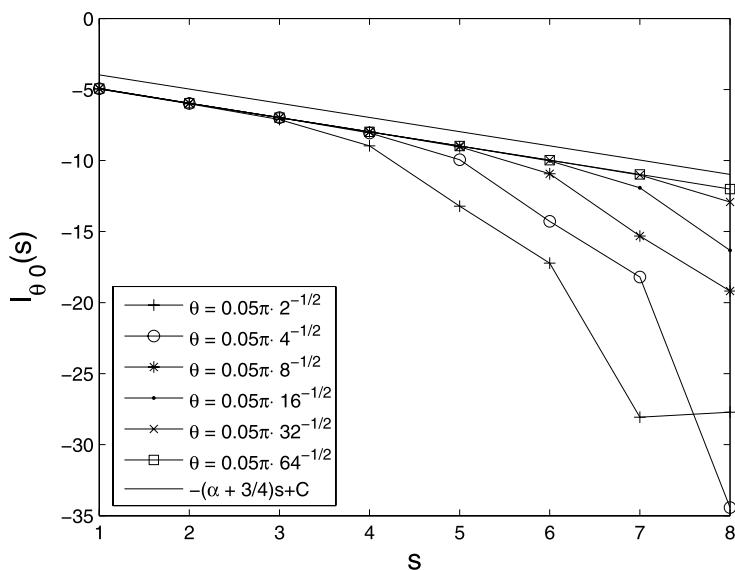


Fig. 1 Decay behavior of $I_{\theta 0}(s)$ across scales s at various angles θ for the function $f(x) = e^{-\|x\|} |x_1|^{0.25}$

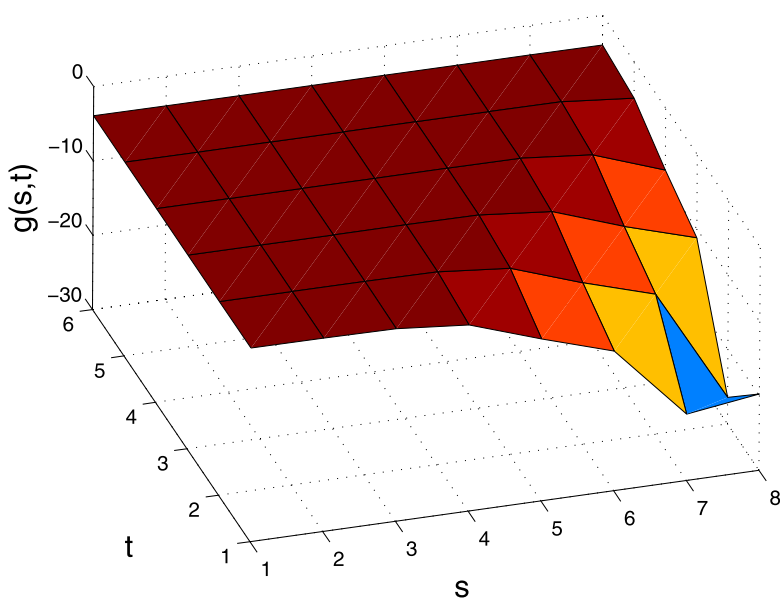


Fig. 2 Graph of $g(s, t)$ with different scales s and angles t for the function $f(x) = e^{-\|x\|} |x_1|^{0.25}$

condition on large angles is also clearly satisfied. By similar calculations we could also verify that sufficient conditions for points $b \neq 0$ are satisfied and that would lead to final result that $f \in C^{0.25}(0)$, i.e. $\alpha \geq 0.25$.

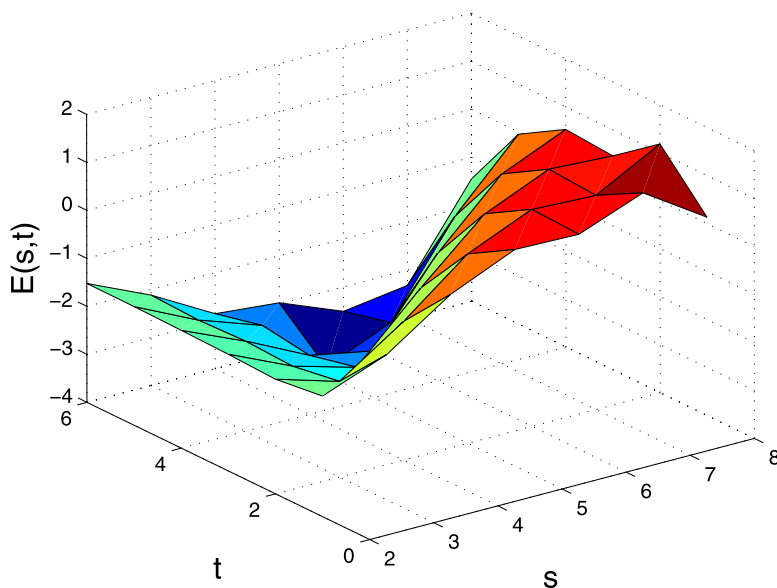


Fig. 3 Estimation error $E(s, t)$ with different scales s and angles t for the function $f(x) = e^{-\|x\|_{|x_1|^{0.25}}$

Since $I_{\theta 0}(s) \approx -(0.25 + 3/4)s + C$ for $|\theta| < C2^{-s/2}$, Theorem 8 says that Hölder exponent cannot be higher than 0.25. Therefore, $\alpha \approx 0.25$. Another contribution of Theorem 8 is that the faster decay of $I_{\theta 0}(s)$ for large angles θ indicates that $\theta_0 \approx 0$.

In this simple example, we actually get a pretty good estimate α_e for α from the investigation of a simple function $\alpha_e(s, \theta) := I_{\theta 0}(s+1) - I_{\theta 0}(s)$. Figure 3 shows how the error $E(s, t) := \log_{10} |\alpha - \alpha_e(s, \theta)|$ behaves. Naturally $E(s, t)$ behaves very similar to $g(s, t)$ and small estimation errors occur only on domain where g is constant. Moreover, these errors seem to decrease along the lines $s = t + c$, i.e., the finer scales (and the smaller angles) we use, the better estimation accuracy we get. However our implementation limits the accuracy of the estimation errors to be about 10^{-3} (this accuracy is achieved in many (s, t) couples), the peak value being $10^{-3.8}$ at scale $s = 5$.

Acknowledgements The first author was supported by Finnish Graduate School of Inverse Problems, and Jenny and Antti Wihuri Foundation. The second author was supported by the Commission on Higher Education and the Thailand Research Fund through grant no. MRG4980023. Both authors wish to thank the referees for their valuable and insightful comments. In fact, Sect. 3.4 owes its existence to both referees.

References

1. Bonami, A., Estrade, A.: Anisotropic analysis of some Gaussian models. *J. Fourier Anal. Appl.* **9**(3), 215–236 (2003)
2. Candès, E.J., Donoho, D.L.: Recovering edges in ill-posed inverse problems: Optimality of curvelet frames. *Ann. Stat.* **30**(3), 784–842 (2002)
3. Candès, E.J., Donoho, D.L.: New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise C^2 singularities. *Commun. Pure Appl. Math.* **57**(2), 219–266 (2004)

4. Candès, E.J., Donoho, D.L.: Continuous curvelet transform. I: Resolution of the wavefront set. Appl. Comput. Harmon. Anal. **19**(2), 162–197 (2005)
5. Candès, E.J., Donoho, D.L.: Continuous curvelet transform. II: Discretization and frames. Appl. Comput. Harmon. Anal. **19**(2), 198–222 (2005)
6. Daubechies, I.: Ten Lectures on Wavelets. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia (1992)
7. Do, M.N., Vetterli, M.: The contourlet transform: An efficient directional multiresolution image representation. IEEE Trans. Image Process. **14**(12), 2091–2106 (2005)
8. Holschneider, M., Tchamitchian, P.: Pointwise analysis of Riemann’s “nondifferentiable” function. Invent. Math. **105**(1), 157–175 (1991)
9. Hwang, W.-L., Mallat, S.: Characterization of self-similar multifractals with wavelet maxima. Appl. Comput. Harmon. Anal. **1**(4), 316–328 (1994)
10. Jaffard, S.: Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients. Publ. Mat. Barc. **35**(1), 155–168 (1991)
11. Jaffard, S.: Some mathematical results about the multifractal formalism for functions. In: Wavelets: Theory, Algorithms, and Applications, Taormina, 1993, pp. 325–361. Academic Press, San Diego (1994)
12. Jaffard, S.: Local behavior of Riemann’s function. In: Harmonic Analysis and Operator Theory, Caracas, 1994, pp. 287–307. Am. Math. Soc., Providence (1995)
13. Jaffard, S.: The spectrum of singularities of Riemann’s function. Rev. Mat. Iberoam. **12**(2), 441–460 (1996)
14. Jaffard, S.: Some open problems about multifractal functions. In: Lutton, E., Lévy Véhel, J., Tricot, C. (eds.) Fractals in Engineering, pp. 2–18. Springer, Berlin (1997)
15. Jaffard, S.: Multifractal functions: recent advances and open problems. October 2004
16. Joshi, A., Rajshekhar, Chandhar, S., Phadke, S., Jayaraman, V.K., Kulkarni, B.D.: Arrhythmia classification using local Hölder exponents and support vector machine. In: Lecture Notes in Computer Science, vol. 3776/2005, pp. 242–247. Springer, Berlin (2005)
17. Kolwankar, K.M., Lévy Véhel, J.: A time domain characterization of the fine local regularity of functions. J. Fourier Anal. Appl. **8**(4), 319–334 (2002)
18. Mallat, S.: A Wavelet Tour of Signal Processing. Academic Press, San Diego (1997)
19. Mallat, S., Hwang, W.L.: Singularity detection and processing with wavelets. IEEE Trans. Inf. Theory **38**(2), 617–643 (1992)
20. Nualtong, K., Sumetkijakan, S.: Analysis of Hölder regularity by wavelet-like transforms with parabolic scaling. Thai J. Math. **3**(2), 275–283 (2005)
21. Rantala, M., Vänskä, S., Järvenpää, S., Kalke, M., Lassas, M., Moberg, J., Siltanen, S.: Wavelet-based reconstruction for limited angle x-ray tomography. IEEE Trans. Med. Imag. **25**(2), 210–217 (2006)
22. Seuret, S., Lévy Véhel, J.: The local Hölder function of a continuous function. Appl. Comput. Harmon. Anal. **13**(3), 263–276 (2002)
23. Smith, H.F.: A Hardy space for Fourier integral operators. J. Geom. Anal. **8**(4), 629–653 (1998)
24. Starck, J.-L., Candès, E.J., Donoho, D.L.: The curvelet transform for image denoising. IEEE Trans. Imag. Proces. **11**(6), 670–684 (2002)