# รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

## เรื่อง การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน ในระดับประถมศึกษาตอนปลาย

(Developing Algebraic Thinking in the Upper Primary School Students)

โดย ดร.ณัชชา กมล

คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

สิงหาคม 2554

# รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

## เรื่อง การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน ในระดับประถมศึกษาตอนปลาย

(Developing Algebraic Thinking in the Upper Primary School Students)

**ดร.ณัชชา กมล**
**มหาวิทยาลัยเชียงใหม่**

สนับสนุนโดยสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษาและสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
(ความคิดเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกอ. และ สกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

# กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยเรื่อง “การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลาย” (Developing Algebraic Thinking in the Upper Primary School Students) ได้รับการสนับสนุนจาก โครงการทุนพัฒนาศักยภาพของนักวิจัยรุ่นใหม่ สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) และสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา (สกอ.) ผู้วิจัยขอขอบคุณหน่วยงานทั้งสองที่ให้โอกาส และสนับสนุนให้นักวิจัยรุ่นใหม่ ได้ทำวิจัยเพื่อพัฒนาศักยภาพทางวิชาการของตนอย่างเต็มที่

นอกจากทุนสนับสนุนการวิจัยแล้ว โครงการวิจัยนี้จะไม่อาจจะดำเนินไปได้อย่างราบรื่นและสมบูรณ์ หากขาดคำแนะนำที่มีคุณค่าจากนักวิจัยที่ปรึกษา ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั้นนิ่ม และ Dr. Yeap Ban Har ที่ได้สละเวลาอันมีค่าของท่านเป็นนักวิจัยที่ปรึกษาของโครงการนี้ ความคิดเห็นและข้อเสนอแนะของท่านมีส่วนสำคัญอย่างยิ่งที่ทำให้งานวิจัยฉบับนี้เสร็จสิ้นลงได้อย่างราบรื่นและสมบูรณ์

ผู้วิจัยขอขอบคุณ อาจารย์ ดร.ดร. รุ่งทิวา แย้มรุ่ง อาจารย์ประจำสาขาวิชาการประถมศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ และอาจารย์ ดร.พรทิพย์ โรจนไพศาล อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่กรุณาสละเวลาอันมีค่าเพื่อช่วยในการวิเคราะห์ข้อมูล และขอขอบคุณคณะครูและนักเรียนโรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่ ที่ให้ความร่วมมือในการเก็บรวบรวมข้อมูล วิจัยฉบับนี้จะเสร็จสมบูรณ์ไม่ได้ ถ้าไม่ได้รับการช่วยเหลือเป็นอย่างดีจากนักศึกษาในระดับปริญญาตรี และบัณฑิตศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ในการเก็บข้อมูลและจัดจัดทำเล่มวิจัย

ท้ายนี้ ผู้วิจัยขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ที่ให้โอกาสผู้วิจัยได้ดำเนินโครงการวิจัยร่วมกับ สกว. และสกอ. อันจะเป็นก้าวหนึ่งแห่งการพัฒนากิจการวิจัยของมหาวิทยาลัยเชียงใหม่สู่ระดับสากลต่อไป

ดร.ณัชชา กมล

สิงหาคม 2554

# บทคัดย่อ

โครงการวิจัยเรื่อง การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายมีวัตถุประสงค์หลัก 2 ประการคือ เพื่อพัฒนากรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย และเพื่อพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบแนะให้รู้คิด ซึ่งตัวบ่งชี้ในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนคือ เรื่องแบบรูป และประโยคเปิดของจำนวน

ดำเนินการวิจัย 2 ระยะ โดยระยะแรกเป็นการสร้างกรอบเบื้องต้นแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน จากนั้นศึกษาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนเพื่อนำมาปรับกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตดังกล่าว กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 – 6 โรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่ ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2550 จำนวน 18 คน เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิต และแบบสัมภาษณ์ นำข้อมูลที่ได้มาวิเคราะห์เพื่อปรับกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน

ส่วนระยะที่ 2 เป็นการนำกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตในระยะแรกมาเป็นฐานในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิดเพื่อพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน โดยกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย คือนักเรียนชั้นประถมศึกษาที่ 5/7 จำนวน 34 คน โรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่ ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2551 เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูลประกอบด้วย แบบทดสอบการคิดเชิงพีชคณิตก่อนและหลังเรียน แผนการจัดการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด และแบบสัมภาษณ์ วิเคราะห์ข้อมูลเพื่อเปรียบเทียบระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนก่อนและหลังเรียน เพื่อหาค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่มีระดับการคิดเปลี่ยนแปลง

ผลการศึกษาในระยะที่หนึ่ง ทำให้ได้กรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ซึ่งนำเสนอระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนเป็น 4 ระดับใน 2 ตัวบ่งชี้ โดยในตัวบ่งชี้แรก เรื่อง*แบบรูป* การคิดของนักเรียนในระดับที่ 1 นักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์ลักษณะของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้ไม่สามารถหาค่าของพจน์ถัดไปและพจน์ต่าง ๆ ของแบบรูปได้ หรือตอบคำถามโดยการเดา นักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในระดับที่ 2 สามารถวิเคราะห์ลักษณะของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่เป็นการวิเคราะห์เพียง 1 มิติคือการมองค่าของแต่ละพจน์ที่เปลี่ยนไป แต่ไม่สนใจตำแหน่งของพจน์ที่เปลี่ยนไป ทำให้ไม่สามารถหาค่าของพจน์ไกล ๆ ได้ ส่วนระดับที่ 3 นักเรียนสามารถวิเคราะห์ทั้งตำแหน่งของพจน์ในแบบรูปและค่าของ

พจน์ในตำแหน่งนั้นได้ ทำให้ได้สูตร/หลักการในการหาคำตอบในแบบรูปได้ แต่ไม่สามารถอธิบายที่มาของสูตรได้ชัดเจน ส่วนระดับที่ 4 นักเรียนสามารถหาข้อสรุปโดยผ่านการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของข้อมูลทั้งหมดในแบบรูปได้อย่างชัดเจน

ในส่วนของประโยคเปิดของจำนวนนั้น ในระดับที่ 1 นักเรียนไม่เข้าใจความสัมพันธ์ของข้อมูลในประโยคเปิด ทำให้มองรูปแบบของประโยคเปิดใหม่ โดยนำจำนวนทั้งหมดที่กำหนดให้ในประโยคเปิดมาดำเนินการกัน แล้วนำคำตอบที่ได้เติมลงในช่องว่าง ในขณะที่ระดับที่ 2 นักเรียนวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูปของโจทย์เท่ากับคำตอบ ดังนั้นนักเรียนจึงดำเนินการกับจำนวนอีกข้างหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ แล้วนำคำตอบที่ได้เติมลงในช่องว่างโดยไม่สนใจจำนวนที่อยู่ข้างเดียวกันกับคำตอบ ในระดับที่ 3 นักเรียนวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของประโยคเปิดที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง โดยมองในรูปของผลลัพธ์ทางซ้ายมือเท่ากับผลลัพธ์ทางขวามือของประโยคเปิด แต่ในการดำเนินการหาคำตอบใช้การคำนวณเป็นหลัก ในขณะที่ระดับที่ 4 นักเรียนมองประโยคเปิดที่กำหนดให้ โดยพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยค จึงทำให้สามารถวิเคราะห์ได้ว่า จำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน

ส่วนผลการศึกษาในระยะที่สอง พบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนแบบการสอนแนะให้รู้คิดมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในระดับ 4 เพิ่มขึ้นร้อยละ 85.29 ส่วนจำนวนนักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตที่อยู่ในระดับ 1 2 และ 3 ลดลง โดยระดับการคิดเชิงพีชคณิตระดับ 2 จำนวนนักเรียนลดลงมากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 41.18 รองมาคือระดับ 3 คิดเป็นร้อยละ 32.35 และระดับ 1 มีจำนวนนักเรียนลดลงน้อยที่สุดคิดเป็นร้อยละ 11.76

# Abstract

The research on the development of algebraic thinking of upper primary school students had 2 main objectives, namely, to develop framework for characterizing the upper primary school students' algebraic thinking and to develop the algebraic thinking of the students who were taught through the cognitively guided instruction (CGI). The indicators for the students' algebraic thinking were pattern and open numbers sentence.

The research was conducted in 2 phases the first of which was for developing basic framework of the students' algebraic thinking. Afterward, the algebraic thinking was examined to modify the framework representing such algebraic thinking. The target group included 18 Prathom Suksa 4-6 students enrolled at Anuban Chiang Mai School in the second semester of 2007 academic year. The instruments used included the algebraic thinking test, and the interview forms from which the collected data were analyzed to adjust the framework representing the students' algebraic thinking.

In the second phase, the students' algebraic thinking framework derived in the first phase was used as the basis for designing the cognitively guided instruction activities to develop the students' algebraic thinking. The sample used was composed of 34 Prahthom Suksa 5/7 students enrolled in the second semester of 2008 academic year. The instruments used to collect the data included algebraic thinking pretest and posttest, cognitively guided instructional plans and the interview forms. The data were analyzed to compare the students' algebraic thinking before and after conducting CGI to find number and percentage of the students whose algebraic thinking had changed.

The result of the study in the first phase was the deriving of the frameworks representing the students' algebraic thinking which came in 4 levels basing on the two indicators. For the first one – thinking pattern, at level 1, the students were not able to analyze the patterns assigned to them making them unable to find the value of the next term and others of the pattern or using guess to answer the question. The students who were at level 2 of the algebraic thinking were able to analyze the characteristic of the pattern assigned to them but could only do it on one aspect by recognizing the term

whose value had changed but paid no attention to the position of the term making them unable to find the value of the terms at the far position. At level 3, the students were able to analyze both the position of the terms in the pattern and find the value of the term at such position leading them to derive the formula and principle to find the answer in the pattern but could not clearly explain the origin of the formula. At level 4, the students could find the conclusion through their clear analysis of all the data related to the pattern.

Regarding the open sentence of the number, at level 1, the students did not understand the relationship of the data in the open sentence and saw the open sentence in different pattern leading them to operate on all numbers in the open sentence and put the acquired answer in the blanks. The students at level 2 analyzed the relationship of the assigned open sentence in form of the equation by which they operated on one side of the equal sign and put the derived answer in the blank without being concerned with the numbers on same side with the answer. At level 3, the students correctly analyzed the relationship of the open sentence by looking for the equality between the product on left and right hands of the open sentence but in operating they derived the answer mainly through computation. Level 4 students, meanwhile, look closely at the assigned open sentence and tried to analyze the relationship of each number in the open sentence leading them to be able to recognize the criteria that the numbers to be filled in the blanks of the open sentence had to be the one that equated the values on both side of the equal sign.

In the second phase of the study, it was found that the students who were taught through the cognitively guided instruction and equipped with level 4 algebraic thinking increased at 85.29%. The number of students with levels 1, 2, and 3 decreased among which that of those with level 2 decreased the most or 41.18% followed by that of level 3 whose 31.35% decreased and level 1 whose number decreased the least or only 11.76%.

# สารบัญ

หน้า


กิตติกรรมประกาศ ค

บทคัดย่อภาษาไทย ง

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ฉ

สารบัญตาราง ฎ

สารบัญภาพ ฎ

บทที่ 1 บทนำ 1

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1

วัตถุประสงค์ของการวิจัย 4

ขอบเขตของการวิจัย 4

ขอบเขตเนื้อหา 5

นิยามศัพท์เฉพาะ 5

ประโยชน์ที่ได้รับ 6

บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 7

พีชคณิตในระดับชั้นประถมศึกษา 7

การคิดเชิงคณิตศาสตร์และการคิดเชิงพีชคณิต 15

แบบจำลองโซโล (SOLO model) 18

แนวคิดในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิต 22

งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 26

บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย 31

ระยะที่ 1 การพัฒนากรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย 32

ขั้นตอนที่ 1 การพัฒนากรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต 33

ขั้นตอนที่ 2 การปรับกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต 36

# สารบัญ (ต่อ)

**หน้า**


ระยะที่ 2 การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย โดยใช้การสอนแบบแนะให้รู้คิด (CGI) 42

1. การออกแบบการวิจัย 42

2. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง 43

3. การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล 43

4. การเก็บรวบรวมข้อมูล 46

5. การวิเคราะห์ข้อมูล 48

บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล 49

ระยะที่ 1 ผลการสร้างกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย 49

ระยะที่ 2 เป็นการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) 76

บทที่ 5 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ 126

สรุปผลการวิจัย 126

อภิปรายผล 127

ข้อเสนอแนะ 130

บรรณานุกรม 132

ภาคผนวก 138

ภาคผนวก ก รายนามผู้วิเคราะห์ข้อมูล 139

ภาคผนวก ข ตัวอย่างแบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิต 141

ภาคผนวก ค ตัวอย่างภาพกิจกรรมการเก็บข้อมูลวิจัย 153

ประวัติผู้วิจัย 159

# สารบัญตาราง


| ตาราง | | หน้า |
|---|---|---|
| 1 | แสดงรูปแบบและระดับของการตอบสนองของนักเรียนตามแบบจำลองโซโล | 22 |
| 2 | แสดงกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต | 33 |
| 3 | แสดงจำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล | 37 |
| 4 | แสดงโครงการสอนและเวลาที่ใช้ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ | 45 |
| 5 | กรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต ของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายในเรื่องแบบรูป | 50 |
| 6 | กรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับ ประถมศึกษาตอนปลายในเรื่องประโยคเปิดของจำนวน | 52 |
| 7 | แสดงจำนวน ร้อยละ และปริมาณการเปลี่ยนแปลงของนักเรียนที่มี ระดับการคิดเชิงพีชคณิตแต่ละระดับ จำแนกตามการทดสอบก่อนและหลัง ได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) | 78 |
| 8 | แสดงจำนวนและร้อยละของนักเรียนจำแนกตามการเปลี่ยนแปลงของระดับ การคิดเชิงพีชคณิต | 79 |
| 9 | แสดงจำนวนร้อยละของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง จำแนกตามการเปลี่ยนแปลงของระดับการคิดเชิงพีชคณิต | 80 |
| 10 | แสดงจำนวนร้อยละของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ปานกลางจำแนกตามการเปลี่ยนแปลงของระดับการคิดเชิงพีชคณิต | 80 |
| 11 | แสดงจำนวนร้อยละของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ จำแนกตามการเปลี่ยนแปลงของระดับการคิดเชิงพีชคณิต | 81 |

# สารบัญภาพ


| ภาพ | | หน้า |
|---|---|---|
| 1 | แสดงลำดับของการคิด | 16 |
| 2 | แสดงลักษณะการตอบสนองของนักเรียนตามแบบจำลองโซโล | 21 |
| 3 | แสดงขั้นตอนในการดำเนินการวิจัยในระยะที่ 1 | 32 |
| 4 | แสดงขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ | 46 |
| 5 | แสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลาย | 54 |
| 6 | แสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตแยกตามระดับชั้น | 55 |
| 7 | แสดงสถานการณ์ปัญหาในแบบทดสอบเรื่องแบบรูปที่เกิดจากการร้อยลูกปัด | 56 |
| 8 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูป ข้อ 1.1 ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 1 | 57 |
| 9 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูป ข้อ 1.2 ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 1 | 58 |
| 10 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดข้อ 1) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 1 | 59 |
| 11 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดข้อ 2) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 1 | 61 |
| 12 | แสดงโจทย์แบบรูปที่เกิดจากการวางก้านไม้ขีดให้เป็นลวดลาย | 61 |
| 13 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูปข้อ 2.1 ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 2 | 62 |
| 14 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูปข้อ 2.2 และ 2.3 ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 2 | 64 |
| 15 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 1) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 2 | 65 |
| 16 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 2) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 2 | 67 |

# สารบัญภาพ (ต่อ)


| ภาพ | | หน้า |
|---|---|---|
| 17 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูปข้อ 1.1 ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 3 | 68 |
| 18 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 1) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 3 | 69 |
| 19 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 2) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 3 | 69 |
| 20 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 3) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 3 | 70 |
| 21 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 4) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 3 | 71 |
| 22 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูปข้อ 1.1) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 4 | 71 |
| 23 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูปข้อ 1.1) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 4 | 72 |
| 24 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูปข้อ 1.2 และ 1.3 ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 4 | 73 |
| 25 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 1) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 4 | 73 |
| 26 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 2) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 4 | 74 |
| 27 | แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 4) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 4 | 75 |
| 28 | แสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตก่อนและหลังเรียนของนักเรียนเป็นรายบุคคล | 77 |
| 29 | แสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตก่อนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำ | 82 |
| 30 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กชายภูมิ ข้อ 2.1 | 83 |

# สารบัญภาพ (ต่อ)


| ภาพ | | หน้า |
|---|---|---|
| 31 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กชายภูมิ ข้อ 2.2 | 84 |
| 32 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูป ข้อ 2.1 ของเด็กชายภูมิ | 85 |
| 33 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูป ข้อ 2.2 ของเด็กชายภูมิ | 86 |
| 34 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กชายพงพัฒน์ | 87 |
| 35 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูป ข้อ 2.1 ของเด็กชายพงพัฒน์ | 88 |
| 36 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูป ข้อ 2.2 ของเด็กชายพงพัฒน์ | 89 |
| 37 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวน ข้อ 4 ของเด็กชายภูมิ | 89 |
| 38 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวน ข้อ 5 ของเด็กชายภูมิ | 90 |
| 39 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวน ข้อ 4 ของเด็กชายภูมิ | 91 |
| 40 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวน ข้อ 5 ของเด็กชายภูมิ | 92 |
| 41 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายพงพัฒน์ | 93 |
| 42 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายพงพัฒน์ | 95 |
| 43 | แสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตก่อนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับปานกลาง | 97 |
| 44 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปข้อ 3.1 ของเด็กชายศิลปาชีพ | 98 |
| 45 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปข้อ 3.2 ของเด็กชายศิลปาชีพ | 99 |
| 46 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูป ข้อ 3.1 ของเด็กชายศิลปาชีพ | 100 |
| 47 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูป ข้อ 3.3 ของเด็กชายศิลปาชีพ | 101 |
| 48 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปข้อ 3.1 ของเด็กชายณัชฎา | 102 |
| 49 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปข้อ 3.2 ของเด็กชายณัชฎา | 103 |

# สารบัญภาพ (ต่อ)


| ภาพ | | หน้า |
|---|---|---|
| 50 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กชายณัชฎา | 104 |
| 51 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายศิลปาชีพ | 105 |
| 52 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายศิลปาชีพในข้อที่ 2 | 106 |
| 53 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายศิลปาชีพในข้อที่ 3 | 107 |
| 54 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายณัชฎา | 108 |
| 55 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายณัชฎา | 110 |
| 56 | แสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตก่อนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูง | 112 |
| 57 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กชายชนาธิปในข้อ 3.1 | 113 |
| 58 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กชายชนาธิปในข้อ 3.2 | 114 |
| 59 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กชายชนาธิป | 115 |
| 60 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กหญิงธิดาในข้อ 3.1 | 116 |
| 61 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กหญิงธิดาในข้อ 3.2 | 117 |
| 62 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กหญิงธิดา | 118 |
| 63 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายชนาธิป | 119 |
| 64 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายชนาธิป | 121 |
| 65 | แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กหญิงธิดา | 122 |
| 66 | แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กหญิงธิดา | 124 |

# บทที่ 1

# บทนำ

## ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ของไทยในปัจจุบัน เน้นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนและการวัดประเมินผลตามแนวคิดของพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2542 (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, 2542) ที่มุ่งเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ซึ่งในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญนั้นเป็นการเรียนการสอนที่ผู้เรียนเป็นผู้กระทำกิจกรรมและสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง มีการประเมินผลในขณะที่ทำกิจกรรมและที่สำคัญคือกระบวนการเรียนการสอนต้องเน้นกระบวนการเรียนรู้ของผู้เรียนมากกว่าความรู้ในเนื้อหาวิชาที่อาศัยการทำแบบฝึกหัดและการบรรยายจากครูผู้สอน การที่จะเปลี่ยนบทบาทของครูให้เป็นไปตามความคาดหวังของการปฏิรูปการศึกษา โดยเฉพาะอย่างยิ่งหลักสูตรสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ แต่ครูผู้สอนคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่ยังไม่มีความเข้าใจเกี่ยวกับทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่เพียงพอ ไม่ทราบว่าทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์คืออะไร นำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนอย่างไร และจะวัดประเมินผลการเรียนรู้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างไร ซึ่งหัวใจสำคัญของการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนคือ การให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ทางด้านเนื้อหาต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ เช่น จำนวนและการดำเนินการ พีชคณิต เรขาคณิต ฯลฯ ควบคู่ไปกับการพัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบด้วย ทักษะการแก้ปัญหา (Problem Solving) การให้เหตุผลและการพิสูจน์ (Reasoning and Proof) การสื่อสาร (Communication) การเชื่อมโยง (Connections) และการนำเสนอ (Representation) (The National Council of Teachers of Mathematics: NCTM, 1989; 2000)

กระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ถือเป็นองค์ประกอบที่สำคัญประการหนึ่งใน การพัฒนากระบวนการเรียนรู้ของนักเรียน เนื่องจากการคิดทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการทำความเข้าใจในเนื้อหาคณิตศาสตร์ โดยธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์จะมีลักษณะเป็นนามธรรมสูงยากต่อการทำความเข้าใจ (Russell, 1999) การพัฒนากระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกิดจากการที่นักเรียนได้ใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการอธิบายหรือแสดงออกถึงความเข้าใจในเนื้อหาคณิตศาสตร์ การที่ผู้เรียนจะอธิบายสิ่งที่ตนเองกระทำหรือแสดง

ได้นั้น ผู้เรียนจะต้องตระหนักถึงกระบวนการคิดของตนเองที่เรียกว่า เมตาคอกนิชัน (Meta-cognition) และอาศัยหลักการเชิงตรรกวิทยาถ่ายทอดออกมาให้ผู้อื่นได้เข้าใจ (Hyde & Hyde, 1991; O'Daffer & Thurnguist, 1993)

พีชคณิตถือเป็นเนื้อหาที่มีความสำคัญต่อการเรียนคณิตศาสตร์ในทุกระดับและในขณะเดียวกันก็เป็นปัญหาใหญ่ของนักเรียนในการทำความเข้าใจมโนทัศน์ สูตร กฎ และหลักการทางพีชคณิต ด้วยลักษณะของเนื้อหาวิชาพีชคณิตที่มีความเป็นนามธรรมมากกว่าเนื้อหาอื่นๆ ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งนักเรียนที่เรียนในระดับชั้นประถมศึกษาตอนปลาย(ป.4 – ป.6) ถือว่าเป็นช่วงที่เป็นรอยต่อระหว่างเนื้อหาเลขคณิตกับเนื้อหาพีชคณิตที่นักเรียนจะต้องก้าวข้ามจากสิ่งที่เป็นตัวเลขไปสู่สิ่งที่แทนจำนวนนั้น ๆ ด้วยสัญลักษณ์ ทำให้นักเรียนเกิดความสับสนไม่เข้าใจในหลักการและมโนทัศน์ที่ควรจะรู้ ส่งผลให้นักเรียนไม่ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และทำให้ความสามารถในการเรียนรู้พีชคณิตในระดับสูงไม่ประสบผลสำเร็จเท่าที่ควร ดังรายงานผลการวิจัยการศึกษานานาชาติทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์(The Third International Mathematics and Science Study :TIMSS) ในปี 1999 (Mullis et al., 2000) พบว่า คะแนนเฉลี่ยในวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนไทยอยู่อันดับที่ 27 (467 คะแนน) จากประเทศที่เข้าร่วมทั้งหมด 38 ประเทศ ซึ่งต่ำกว่าคะแนนเฉลี่ยนานาชาติ (487 คะแนน) ในขณะที่ประเทศสิงคโปร์มีคะแนนเฉลี่ยอยู่ในอันดับที่ 1 เมื่อพิจารณาในรายเนื้อหา พบว่า นักเรียนไทยได้คะแนนในเนื้อหาวิชาพีชคณิตน้อย(สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี: สสวท., 2549)

การที่จะพัฒนาการเรียนรู้พีชคณิตของนักเรียนให้ดีขึ้นนั้น จำเป็นอย่างยิ่งที่นักเรียนจะต้องมีความเข้าใจในการคิดเชิงพีชคณิตเป็นอย่างดี เนื่องจากการคิดเชิงพีชคณิต (Algebraic Thinking) เป็นกระบวนการที่ต้องใช้ทักษะกระบวนการในการอธิบายหรือแสดงออกถึงความเข้าใจในเนื้อหาพีชคณิต (Kriegler, 2006) ถ้าครูผู้สอนรู้ว่านักเรียนคิดอย่างไร และคิดในลักษณะใด ครูผู้สอนก็จะสามารถจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมการคิดของนักเรียนให้พัฒนาสูงขึ้นได้ ถึงแม้ว่าหลักสูตรคณิตศาสตร์จะกล่าวถึงผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่นักเรียนในแต่ละระดับจะต้องมี แต่ในสภาพความเป็นจริงแล้วไม่ใช่นักเรียนทุกคนที่จะเกิดการเรียนรู้ตามที่คาดหวังนั้นได้ ถึงแม้นักเรียนทุกคนจะได้รับความรู้เหมือน ๆ กัน แต่นักเรียนแต่ละคนจะมีการคิดที่หลากหลายแตกต่างกัน ดังนั้น ผู้วิจัยจึงเห็นว่า ถ้าครูผู้สอนมีเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพในการจำแนกลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนแต่ละคน ครูผู้สอนจะสามารถรู้ระดับการคิดของนักเรียนและพัฒนาการคิดดังกล่าวให้อยู่ในระดับที่สูงขึ้นได้ และอาจส่งผลต่อความสามารถในการเรียนพีชคณิตของนักเรียน

จากการศึกษางานวิจัยเกี่ยวกับการคิดของนักเรียนทั้งในและต่างประเทศพบว่า มีการศึกษาและจำแนกระดับการคิดของนักเรียนในหลากหลายเนื้อหาด้วยกัน เช่น การบวกและการลบของจำนวน (Carpenter & Moser, 1984) เรขาคณิต (Van Hiele, 1985) ความรู้สึกเชิงจำนวน (Jones, Thornton & Putt, 1994; Jones et al., 1996) ความน่าจะเป็น (Jones et al., 1997; Tarr & Jones, 1997) สถิติ (Jones et al., 2000 ; Mooney, 2002) แบบรูปของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น (Orton & Orton, 1999) ซึ่งเรื่องแบบรูป ถือเป็นเนื้อหาบางส่วนของพีชคณิต และพีชคณิตของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น (Kamol, 2005) แต่สำหรับพีชคณิตในระดับชั้นประถมศึกษายังไม่มีการพัฒนาอย่างเป็นระบบ ในการพัฒนากรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตนั้น ผู้วิจัยใช้โมเดลการพัฒนาของ Biggs และ Collis (1982) ที่เรียกว่า The SOLO model (Structure of the Observing Learning Outcome Model) ซึ่งนักวิจัยทางการศึกษาส่วนใหญ่ (Cobb et al., 1991; Jones et al., 2000; Mooney, 2002) ลงความเห็นว่า โมเดลดังกล่าวช่วยให้มองเห็นรายละเอียดเกี่ยวกับลักษณะการเรียนรู้ของนักเรียนได้อย่างลึกซึ้งและชัดเจน ทำให้กรอบแสดงลักษณะการคิดที่นักวิจัยพัฒนาขึ้นสามารถนำไปเป็นมาตรฐานในการพัฒนาหลักสูตร การสร้างกิจกรรมการเรียนการสอน ตลอดจนการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ได้เป็นอย่างดี ดังนั้น ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาและพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลาย ซึ่งเป็นงานวิจัยที่สร้างองค์ความรู้จากนักเรียนโดยตรงและเป็นวิจัยนำร่องไปสู่การพัฒนาการคิดในเนื้อหาอื่น ๆ ทางคณิตศาสตร์ต่อไป การวิจัยนี้เป็นการสร้างกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตในระดับต่าง ๆ จากการศึกษาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาตอนปลาย แล้วนำลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่ได้ไปสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน โดยกิจกรรมการเรียนการสอนที่พัฒนาขึ้น ผู้วิจัยใช้รูปแบบการสอนแบบแนะให้รู้คิด (Cognitive Guided Instruction: CGI) ซึ่งเป็นแนวการสอนที่พัฒนาขึ้นโดย Carpenter และคณะ แห่งมหาวิทยาลัยวิสคอนซิน ในปี ค.ศ. 1980 (Carpenter et al., 2000) โดยยึดหลักการว่า การออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ของครูจะอยู่บนพื้นฐานของความรู้และความเชื่อของครูที่เกิดจากการทำความเข้าใจการคิดของนักเรียน และการเรียนคณิตศาสตร์ได้ดีที่สุดต้องเรียนรู้ผ่านการแก้ปัญหา (Carpenter et al., 1989; Fennema et al., 1993)

ดังนั้น การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน โดยใช้การสอนแบบแนะให้รู้คิด(CGI) จึงถือเป็นการจัดการเรียนการสอนโดยใช้องค์ความรู้จากงานวิจัยเป็นฐานในการพัฒนา (Research-based knowledge) ผู้วิจัยคาดหวังว่า ผลจากการวิจัยจะเป็นข้อมูลในการพัฒนา

หลักสูตรคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะเนื้อหาพีชคณิตให้เหมาะสมกับระดับของผู้เรียน ครูผู้สอนสามารถนำกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่ได้ไปประเมินระดับการคิดของนักเรียนและปรับใช้ให้เหมาะสมกับบริบทของโรงเรียนและนักเรียน นอกจากนี้ครูผู้สอนยังสามารถสร้างกิจกรรมการเรียนการสอนตามกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต หรือนำกิจกรรมที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นไปปรับใช้ให้เหมาะสมกับนักเรียนของตน สิ่งเหล่านี้เป็นการสนับสนุนการปฏิรูปการศึกษาที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญให้ประสบความสำเร็จตามเป้าหมาย

**วัตถุประสงค์ของการวิจัย**

1. เพื่อพัฒนากรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาตอนปลาย (ป.4 – ป.6)

2. เพื่อพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลายที่ได้รับการสอนแบบแนะให้รู้คิด (CGI)

**ขอบเขตของการวิจัย**

ในการวิจัยครั้งนี้แบ่งการวิจัยเป็น 2 ระยะ ประกอบด้วย ระยะที่ 1 เป็นการพัฒนากรอบแสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาตอนปลาย ระยะที่ 2 เป็นการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาตอนปลายที่ได้รับการสอนแบบแนะให้รู้คิด (CGI) ดังนั้นจึงนำเสนอเกี่ยวกับขอบเขตของการวิจัยออกเป็น 2 ระยะ ดังนี้

**ระยะที่ 1**

**กลุ่มเป้าหมาย**

กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 – 6 โรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่ จำนวน 18 คน โดยมาจากนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 6 คน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 6 คน และชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 6 คน โดยนักเรียนแต่ละชั้นจะเลือกมาจากนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง 2 คน ปานกลาง 2 คน และต่ำ 2 คน ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2550

**ขอบเขตของเนื้อหา**

เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในช่วงชั้นที่ 2 ซึ่งตัวบ่งชี้ในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในช่วงชั้นที่ 2 ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วยเรื่อง แบบรูป (Pattern) และประโยคเปิดของจำนวน (Open Number Sentence)

**ระยะที่ 2**

**ประชากรและกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย**

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ นักเรียนชั้นประถมศึกษาที่ 5/7 จำนวน 34 คน โรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่ ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2551

**ขอบเขตของเนื้อหา**

เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในช่วงชั้นที่ 2 ซึ่งตัวบ่งชี้ในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในช่วงชั้นที่ 2 ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วยเรื่อง แบบรูป (Pattern) และประโยคเปิดของจำนวน (Open Number Sentence)

**ตัวแปรที่ศึกษา**

ตัวแปรต้น คือ กิจกรรมการสอนแนะให้รู้คิด

ตัวแปรตาม คือ ระดับการคิดเชิงพีชคณิต

**นิยามศัพท์เฉพาะ**

1. **การคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน** (Students' Algebraic Thinking) หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการใช้กระบวนการคิด เพื่ออธิบายหรือแสดงหลักฐานในการทำความเข้าใจสถานการณ์ทางพีชคณิตที่เกี่ยวกับแบบรูป (Patterns) และประโยคเปิดของจำนวน (Open Number Sentences)

1.1 **การคิดเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับแบบรูป** (Algebraic Thinking on Patterns) หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการใช้กระบวนการคิดในการวิเคราะห์แบบรูป และหากรณีทั่วไปของแบบรูป เมื่อนักเรียนเผชิญสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูปที่มีผลต่างระหว่างพจน์เท่ากัน ซึ่งเป็นแบบรูปที่อยู่ในรูปเชิงเส้น

1.2 **การคิดเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับประโยคเปิดของจำนวน** (Algebraic Thinking on Open Number Sentences) หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการใช้กระบวนการคิดในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างนิพจน์ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับในประโยคเปิดของจำนวน เพื่อสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับจำนวนที่หายไปจากประโยคเปิด

2. **กรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน** (A Framework for characterizing Students' Algebraic Thinking) หมายถึง กรอบที่ใช้อธิบายลักษณะการคิดของนักเรียนที่แสดงออกมาขณะเผชิญกับสถานการณ์ทางพีชคณิตในเรื่องแบบรูป และประโยคเปิดของจำนวน โดยแบ่งการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนออกเป็น 4 ระดับ

3. **การสอนแนะให้รู้คิด** (Cognitive Guided Instruction: CGI) หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เกิดจากการพิจารณาพื้นฐานการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนมาช่วยในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ โดยเน้นกิจกรรมการเรียนการสอนผ่านสถานการณ์ปัญหาที่กระตุ้นให้นักเรียนสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง ซึ่งขั้นตอนของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ประกอบด้วย 1) ครูนำเสนอปัญหาหรือสถานการณ์ในชีวิตจริงตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้ เพื่อให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย 2) นักเรียนวิเคราะห์สถานการณ์/ปัญหาดังกล่าว โดยครูเป็นผู้ให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนเกิดข้อคำถามหรือปัญหา เพื่อนำไปสู่การอภิปรายหาคำตอบด้วยตนเอง 3) นักเรียนนำเสนอคำตอบและวิธีการแก้ปัญหาพร้อมทั้งเหตุผลของตนเอง จากนั้นครูและเพื่อนร่วมกันซักถาม เพื่อให้นักเรียนได้แสดงความคิดของตนเองออกมา 4) ครูและนักเรียนร่วมกันอภิปรายคำตอบและวิธีการแก้ปัญหาที่แตกต่างกัน เพื่อหาข้อสรุปที่สมเหตุสมผล

**ประโยชน์ที่ได้รับ**

1. ได้แนวทางในการพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนของครูในโรงเรียนต่างๆ ตามบริบทของแต่ละโรงเรียน เพื่อส่งเสริมการคิดเชิงพีชคณิตสำหรับนักเรียน

2. ได้กรอบการวัดและประเมินระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในช่วงชั้นที่ 2

3. ได้แนวคิดในการพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์ หนังสือเรียนและคู่มือครูในเนื้อหาพีชคณิตระดับชั้นประถมศึกษาตอนปลาย

# บทที่ 2
# เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเพื่อเป็นกรอบและแนวทางพื้นฐานในการดำเนินการวิจัยในด้านต่างๆ โดยนำเสนอตามลำดับ ดังนี้

1. พีชคณิตในระดับชั้นประถมศึกษา
    1.1 หลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา
    1.2 พีชคณิต
    1.3 พีชคณิตในระดับชั้นประถมศึกษา
2. การคิดเชิงคณิตศาสตร์และการคิดเชิงพีชคณิต
    2.1 การคิดทางคณิตศาสตร์
    2.2 การคิดเชิงพีชคณิต
3. แบบจำลองโซโล (SOLO model)
4. แนวคิดในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิต
    4.1 การสอนแนะให้รู้คิด (Cognitive Guided Instruction: CGI)
5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

รายละเอียดในแต่ละประเด็น เป็นดังนี้

**พีชคณิตในระดับชั้นประถมศึกษา**

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้เรียนรู้อย่างต่อเนื่องตามศักยภาพ ทำให้เกิดความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล และเป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างละเอียดถี่ถ้วนรอบคอบ สามารถคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และสามารถนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างเหมาะสม การที่นักเรียนจะมีความสามารถหรือศักยภาพตามที่กล่าวมาข้างต้น หลักสูตรการศึกษาสำหรับผู้เรียนถือว่ามีบทบาทสำคัญในการพัฒนาผู้เรียน หลักสูตรที่ใช้ในระดับประถมศึกษาตอนปลายคือ หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ซึ่งแบ่งกลุ่มสาระต่างๆ ออกเป็น 8 กลุ่มสาระการเรียนรู้ ประกอบด้วย สาระการเรียนรู้ภาษาไทย สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ สาระการเรียนรู้สังคมศึกษา ศาสนา และวัฒนธรรม สาระการเรียนรู้สุขศึกษาและพลศึกษา สาระการเรียนรู้ศิลปะ สาระการเรียนรู้การงานอาชีพและเทคโนโลยี และสาระการเรียนรู้ภาษาต่างประเทศ

**หลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับชั้นประถมศึกษา**

กระทรวงศึกษาธิการ (2545) ได้กำหนดสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2544 ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ไว้ดังนี้

สาระที่ 1 จำนวนและการดำเนินการ

สาระที่ 2 การวัด

สาระที่ 3 เรขาคณิต

สาระที่ 4 พีชคณิต

สาระที่ 5 การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

โดยรายละเอียดของแต่ละสาระการเรียนรู้เป็นดังนี้

**สาระที่ 1 : จำนวนและการดำเนินการ**

มาตรฐาน ค 1.1 : เข้าใจถึงความหลากหลายของการแสดงจำนวนและการใช้จำนวนในชีวิตจริง

มาตรฐาน ค 1.2 : เข้าใจถึงผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการของจำนวนและความสัมพันธ์ ระหว่างการดำเนินการต่างๆ และสามารถใช้การดำเนินการในการ แก้ปัญหาได้

มาตรฐาน ค 1.3 : ใช้การประมาณค่าในการคำนวณและแก้ปัญหาได้

มาตรฐาน ค 1.4 : เข้าใจในระบบจำนวนและสามารถนำสมบัติเกี่ยวกับจำนวนไปใช้ได้

**สาระที่ 2 : การวัด**

มาตรฐาน ค 2.1 : เข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับการวัด

มาตรฐาน ค 2.2 : วัดและคาดคะเนขนาดของสิ่งที่ต้องการวัดได้

มาตรฐาน ค 2.3 : แก้ปัญหาเกี่ยวกับการวัดได้

**สาระที่ 3 : เรขาคณิต**

มาตรฐาน ค 3.1 : อธิบายและวิเคราะห์รูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติได้

มาตรฐาน ค 3.2 : ใช้การนึกภาพ (visualization) ใช้เหตุผลเกี่ยวกับปริภูมิ (spatial reasoning) และใช้แบบจำลองทางเรขาคณิต (geometric model) ในการแก้ปัญหาได้

**สาระที่ 4 : พีชคณิต**

มาตรฐาน ค 4.1 : อธิบายและวิเคราะห์แบบรูป(pattern) ความสัมพันธ์ และฟังก์ชันต่าง ๆ ได้

มาตรฐาน ค 4.2 : ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อื่นๆ แทนสถานการณ์ต่างๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหาได้

**สาระที่ 5 : การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น**

มาตรฐาน ค 5.1 : เข้าใจและใช้วิธีการทางสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูลได้

มาตรฐาน ค 5.2 : ใช้วิธีการทางสถิติและความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์ได้อย่างสมเหตุสมผล

มาตรฐาน ค 5.3 : ใช้ความรู้เกี่ยวกับสถิติและความน่าจะเป็นช่วยในการตัดสินใจและแก้ปัญหาได้

**สาระที่ 6 : ทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์**

มาตรฐาน ค 6.1 : มีความสามารถในการแก้ปัญหา

มาตรฐาน ค 6.2 : มีความสามารถในการให้เหตุผล

มาตรฐาน ค 6.3 : มีความสามารถในการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ

มาตรฐาน ค 6.4 : มีความสามารถในการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ ได้

มาตรฐาน ค 6.5 : มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

**ความมุ่งหมายของหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2544**

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 1 ระดับประถมศึกษาปีที่ 1-3 และช่วงชั้นที่ 2 ระดับประถมศึกษาปีที่ 4 - 6 (กรมวิชาการ, 2545) ได้กำหนดคุณภาพผู้เรียนเมื่อเรียนจบช่วงชั้นที่ 1 ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-3 และช่วงชั้นที่ 2 ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4-6 ว่าผู้เรียนควรมีความสามารถ ดังนี้

**คุณภาพผู้เรียนเมื่อเรียนจบช่วงชั้นที่ 1 (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-3)**

1. มีความคิดรวบยอดและความรู้สึกเชิงจำนวนเกี่ยวกับจำนวนนับและศูนย์ และการดำเนินการของจำนวน สามารถแก้ปัญหาเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนนับพร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้และสามารถสร้างโจทย์ได้

2. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับความยาว ระยะทาง น้ำหนัก ปริมาตร และความจุ สามารถวัดปริมาณดังกล่าวได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม และนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้

3. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติพื้นฐานของรูปเรขาคณิตหนึ่งมิติ สองมิติ และสามมิติ

4. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับแบบรูปและอธิบายความสัมพันธ์ได้

5. รวบรวมข้อมูล จัดระบบข้อมูล และอภิปรายประเด็นต่างๆ จากแผนภูมิรูปภาพและแผนภูมิแท่งได้

6. มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็น ได้แก่ ความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอทางคณิตศาสตร์ การมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์

**คุณภาพผู้เรียนเมื่อเรียนจบช่วงชั้นที่ 2 (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4-6)**

1. มีความคิดรวบยอดและความรู้สึกเชิงจำนวนเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการของจำนวน สามารถแก้ปัญหาเกี่ยวกับการบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนนับ เศษส่วน ทศนิยมและร้อยละ พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบที่ได้และสร้างโจทย์ได้

2. มีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติต่างๆ ของจำนวน พร้อมทั้งสามารถนำความรู้ไปใช้ได้

3. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับความยาว ระยะทาง น้ำหนัก พื้นที่ ปริมาตร และความจุ สามาถวัดปริมาณดังกล่าวได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม และนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้

4. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิตหนึ่งมิติ สองมิติ และสามมิติ

5. มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับแบบรูปและอธิบายความสัมพันธ์ได้

6. สามารถวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหา พร้อมทั้งเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและแก้สมการนั้นได้

7. เก็บรวบรวมข้อมูลและนำเสนอข้อมูลในรูปแผนภูมิต่างๆ สามารถอภิปรายประเด็นต่างๆ จากแผนภูมิรูปภาพ แผนภูมิแท่ง แผนภูมิรูปวงกลม ตาราง และกราฟ รวมทั้งใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นเบื้องต้นในการอภิปรายเหตุการณ์ต่างๆ ได้

8. มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็น ได้แก่ ความสามารถในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลายและใช้เทคโนโลยีที่เหมาะสม การให้เหตุผล การสื่อสาร สื่อความหมายและการนำเสนอทางคณิตศาสตร์ การมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์

ดังนั้นจะพบว่า สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ถือเป็นสาระหนึ่งที่ถูกบรรจุในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 เนื่องจาก สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ถือเป็นพื้นฐานสำคัญที่นักเรียนทุกคนต้องเรียนรู้ โดยคาดหวังว่า เมื่อนักเรียนเรียนจบแล้ว นักเรียนต้องมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ ตระหนักในคุณค่าของคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปพัฒนาคุณภาพชีวิต ตลอดจนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ และเป็นพื้นฐานในการศึกษาในระดับที่สูงขึ้น (กระทรวงศึกษาธิการ, 2545)

**พีชคณิต**

พีชคณิต ถือเป็นสาระหนึ่งในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นที่รู้จักโดยทั่วไปว่าเป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร สมการ อสมการ ฟังก์ชัน กราฟ เป็นต้น ซึ่งในความเป็นจริงแล้วพีชคณิตมีความหมายที่กว้างกว่านั้น โดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา(NCTM, 1989) กล่าวว่า พีชคณิตเป็นเรื่องที่ว่าด้วย ความเข้าใจเกี่ยวกับตัวแปร นิพจน์ สมการ การนำเสนอสถานการณ์และแบบรูปของจำนวนผ่านตาราง กราฟ กฎเกณฑ์ต่างๆ และสมการ การค้นพบความสัมพันธ์ระหว่างการแสดงแทนชนิดต่าง ๆ การวิเคราะห์ตารางและกราฟเพื่อศึกษาสมบัติและความสัมพันธ์ การใช้รูปธรรมและใช้วิธีการที่ไม่เป็นทางการและเป็นทางการในการแก้สมการเชิงเส้น อสมการ และการใช้วิธีการทางพีชคณิตในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และปัญหาในชีวิตประจำวัน และในปี ค.ศ. 2000 สมาคมคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา ได้กล่าวถึงพีชคณิตในหนังสือ Principles and Standards for School Mathematics ไว้ว่า เป็นการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณ การใช้สัญลักษณ์ การจำลองปรากฏการณ์และการศึกษาการเปลี่ยนแปลง โดยเป้าหมายสำคัญของการเรียนพีชคณิตในระดับโรงเรียนคือ การที่นักเรียนเข้าใจแบบรูป ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน สามารถนำเสนอและวิเคราะห์สถานการณ์และโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ โดยใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตได้ ใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการนำเสนอและเข้าใจความสัมพันธ์เชิงปริมาณและวิเคราะห์ความเปลี่ยนแปลงของบริบทต่าง ๆ (NCTM, 2000)

ในขณะที่ Christmas และ Fey (1993) ได้ให้ความคิดเห็นเกี่ยวกับความหมายของพีชคณิตว่า ประกอบด้วยสองส่วนหลัก ๆ คือ ส่วนของความคิดรวบยอดทางเนื้อหาพีชคณิต ได้แก่ เรื่องตัวแปร ฟังก์ชัน ความสัมพันธ์ สมการ อสมการและกราฟ และส่วนของหลักการทางพีชคณิต ได้แก่ สมบัติของจำนวนจริงและเซตของจำนวนจริง ซึ่งทั้งสองส่วนนี้จะประกอบกันขึ้นเป็นระบบสัญลักษณ์ที่สามารถนำไปใช้ในการอธิบายและสรุปความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณต่างๆได้ นอกจากนี้ Lodholz (1993) ยังกล่าวเพิ่มเติมว่า การที่นักเรียนจะประสบความสำเร็จในวิชาพีชคณิตนั้น จะต้องเข้าใจในภาษาทางพีชคณิต ความคิดรวบยอดเกี่ยวกับตัวแปร ความสัมพันธ์ และฟังก์ชัน สอดคล้องกับ Usiskin (1997) กล่าวว่า พีชคณิตคือ ภาษา ซึ่งในภาษาทางคณิตศาสตร์จะเกี่ยวข้องกับตัวไม่ทราบค่า สูตร รูปทั่วไป การแทนค่า และความสัมพันธ์

นอกจากนักคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาข้างต้น ยังมีนักคณิตศาสตร์ท่านอื่นได้กล่าวถึงพีชคณิตไว้ดังนี้

Peck และ Jencks (1988) กล่าวว่า พีชคณิตเป็นผลผลิตจากการกระทำทางเลขคณิต

Kieran (1992) แนะว่า พีชคณิตถือเป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสัญลักษณ์ที่นำไปสู่กรณีทั่วไปของความสัมพันธ์เชิงจำนวนและโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ และเกี่ยวข้องกับการดำเนินการบนโครงสร้างดังกล่าว

Wagner และ Parker (1993) เสนอแนวคิดเกี่ยวกับพีชคณิตไว้ 2 แนวทางคือ ประการแรก พีชคณิตคือระบบของการนำเสนอเกี่ยวกับแบบรูป ความสัมพันธ์ และขั้นตอนทางคณิตศาสตร์ โดยใช้สัญลักษณ์ อาทิเช่น ตัวอักษรในอักขระต่างๆ ประการที่สอง พีชคณิตคือ ภาษาที่ใช้ในการอธิบายการกระทำและความสัมพันธ์ของปริมาณ

Vance (1998) ให้ความเห็นว่า พีชคณิตบางครั้งถูกมองในรูปของกรณีทั่วไปของเลขคณิต หรือภาษาที่แทนกรณีทั่วไปของเลขคณิต อย่างไรก็ตาม พีชคณิตมิใช่เป็นเพียงแค่เซตของกฎเกณฑ์ในการดำเนินการของสัญลักษณ์เท่านั้น แต่ยังหมายถึงวิธีการคิดด้วย

Kaput (1999) ได้ให้มุมมองเกี่ยวกับพีชคณิตไว้ 5 ประเด็นคือ 1) พีชคณิตเป็นการดำเนินการให้อยู่ในรูปทั่วไปหรือการสร้างกฎเกณฑ์ 2) พีชคณิตเป็นการจัดการโครงสร้างของสูตร 3) พีชคณิตเป็นศึกษาโครงสร้างที่เป็นนามธรรมจากการคำนวณและความสัมพันธ์ 4) พีชคณิตเป็นการศึกษาฟังก์ชัน ความสัมพันธ์และรูปแบบร่วมกัน และ 5) พีชคณิตเป็นกลุ่มของภาษาที่เป็นแบบจำลองและภาษาเกิดจากปรากฏการณ์ที่ถูกควบคุม

ดังนั้นจึงพอสรุปเกี่ยวกับความหมายของพีชคณิตได้ว่า สามารถมองได้เป็น 2 แนวคิดหลัก คือ แนวคิดแรกเป็นเรื่องเกี่ยวกับตัวแปร ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน สมการและอสมการ ส่วนแนวคิดที่

สองเป็นเรื่องที่เกี่ยวกับการดำเนินการต่างๆ ที่นำไปสู่กฎ สูตร หลักการทางพีชคณิตที่ต้องอาศัยภาษาทางพีชคณิต

**พีชคณิตในระดับประถมศึกษา**

การจัดการเรียนการสอนพีชคณิตในระดับประถมศึกษานั้น ส่วนใหญ่มองว่าการเรียนการสอนในระดับประถมศึกษาไม่ควรเน้นเนื้อหาพีชคณิต แต่ในสภาพความเป็นจริงแล้ว ครูผู้สอนได้จัดการเรียนการสอนที่สอดแทรกเนื้อหาพีชคณิตเข้าไปอยู่แล้ว โดยเฉพาะการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในสาระจำนวนและการดำเนินการที่ได้นำแนวคิดในเรื่องพีชคณิตเข้าไปเกี่ยวข้อง เช่น เรื่องสมบัติการสลับที่ของการบวก สมบัติการกระจายของจำนวนนับ เป็นต้น นอกจากนี้ยังพบว่าในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ยังได้กล่าวถึงมาตรฐานการเรียนรู้ช่วงชั้นที่นักเรียนในระดับประถมศึกษาปีที่ 1-3 ทุกคนจะต้องสามารถบอกแบบรูปและความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ได้ และสามารถวิเคราะห์สถานการณ์ หรือปัญหาและสามารถเขียนให้อยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์ได้ ส่วนนักเรียนในระดับประถมศึกษาปีที่ 4-6 ทุกคนจะต้องสามารถอธิบายแบบรูปและความสัมพันธ์และนำความรู้ไปใช้ได้ สามารถวิเคราะห์สถานการณ์หรือปัญหาที่ซับซ้อนและสามารถจำลองสถานการณ์นั้นให้อยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์ที่มีตัวไม่ทราบค่าได้ และสามารถแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่กำหนดให้ได้ โดยในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 เรียนเกี่ยวกับจำนวนและความสัมพันธ์ในแบบรูปของจำนวนที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงทีละเท่าๆกัน แบบรูปของรูปภาพและความสัมพันธ์ในแบบรูปที่กำหนดให้ ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 เรียนเกี่ยวกับจำนวนและความสัมพันธ์ในแบบรูปของจำนวนที่กำหนดให้ ส่วนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 เรียนเกี่ยวกับการแก้ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูปสมการเชิงเส้นที่มีตัวไม่ทราบค่าหนึ่งตัว และการแก้สมการโดยใช้สมบัติของการเท่ากันเกี่ยวกับการบวก ลบ คูณ และหาร (สสวท., 2544)

นอกจากนี้ ยังมีนักคณิตศาสตร์ และนักคณิตศาสตร์ศึกษาได้กล่าวถึงพีชคณิตในระดับประถมศึกษาไว้อย่างน่าสนใจ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

Battista และ Brown (1998) กล่าวว่า การที่นักเรียนจะเข้าใจเนื้อหาพีชคณิตได้อย่างแท้จริงนั้น จำเป็นอย่างยิ่งที่การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนจะต้องเน้นความเข้าใจวิธีคิดมากกว่าการกระทำของสัญลักษณ์ นักเรียนควรมีโอกาสในการสะท้อนและอภิปรายเกี่ยวกับกระบวนการที่นำไปสู่รูปทั่วไปในการกระทำเกี่ยวกับจำนวนและปริมาณ นักเรียนได้คิดและตระหนักเกี่ยวกับขั้นตอนการดำเนินการของจำนวนในระดับประถมศึกษาต่อเนื่องมาจนกระทั่งนักเรียนสามารถแสดงหรือสะท้อนเกี่ยวกับกระบวนการที่ใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิต

Falkner, Levi และ Carpenter (1999) ได้ให้ข้อเสนอแนะในการสอนพีชคณิตระดับประถมศึกษาว่า พีชคณิตควรถูกสอนตั้งแต่ในระดับประถมศึกษาตอนต้น ถึงแม้ว่านักเรียนจะมีความยุ่งยากในการทำความเข้าใจก็ตาม แต่นักเรียนจะมีพัฒนาการทางได้กระบวนการคิดที่ดีขึ้น ซึ่งพวกเขาได้นำเสนอแนวคิดในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องการเท่ากัน โดยเฉพาะความเข้าใจเกี่ยวกับเครื่องหมายเท่ากับ ในสถานการณ์ปัญหา เช่น 8 + 4 = □ + 5 เป็นต้น สอดคล้องกับ MacGregor และ Stacey (1999) ที่ได้ให้แนวคิดในการสอนพีชคณิตในระดับประถมศึกษาว่า ครูควรเน้นความเข้าใจเกี่ยวกับการเท่ากันและเครื่องหมายเท่ากับ การตระหนักในการดำเนินการต่างๆ ของจำนวน การมองและใช้จำนวนที่มีขอบเขตที่กว้างขึ้น การเข้าใจสมบัติที่สำคัญๆ ของจำนวน และการอธิบายแบบรูปและฟังก์ชัน

ในขณะที่ Carpenter, Franke และ Levi (2003) กล่าวว่า นักเรียนในระดับประถมศึกษาควรได้เรียนรู้เลขคณิต ไปพร้อมๆกับการนำความรู้จากเลขคณิตไปเป็นพื้นฐานในการเรียนพีชคณิต นั่นคือ ในขณะที่นักเรียนทำความเข้าใจในเลขคณิตอยู่นั้น ผู้สอนควรกระตุ้นให้นักเรียนมีความรู้พื้นฐานที่เพียงพอในการขยายความรู้ในเรื่องเลขคณิตไปสู่การเรียนพีชคณิต ซึ่งแนวคิดที่สำคัญในการพัฒนาพีชคณิตในระดับประถมศึกษาคือ ความเข้าใจเกี่ยวกับการเท่ากัน (Equity) สมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการของจำนวน ซึ่งข้อคิดเห็นดังกล่าวสอดคล้องกับ Kieran และ Louise (1999) ที่กล่าวว่า การจัดการเรียนการสอนพีชคณิตเบื้องต้นซึ่งเป็นเปลี่ยนแปลงจากเลขคณิตไปสู่พีชคณิต หรือเป็นการเชื่อมต่อระหว่างการใช้จำนวนในเลขคณิตกับการใช้สัญลักษณ์ในพีชคณิตนั้นไม่ค่อยสอดคล้องกัน ดังนั้นแนวทางการสอนพีชคณิตจึงควรมีการใช้สัญลักษณ์ในการนำเสนอจำนวนและตระหนักถึงวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของสัญลักษณ์ทั้งในการใช้จำนวนและสัญลักษณ์ นั่นคือ นักเรียนตระหนักถึงความสัมพันธ์เชิงจำนวนในสถานการณ์ปัญหา แล้วร่วมกันอภิปรายถึงความสัมพันธ์ดังกล่าวโดยใช้ภาษาของตนเองหรือภาษาที่ใช้ในชีวิตประจำวัน จากนั้นจึงเรียนรู้ที่จะนำเสนอความสัมพันธ์นั้นในรูปสัญลักษณ์ต่อไป

นอกจากนี้ Ferrini-Mundy, Lappan และ Phillips (1999) ยังได้สรุปแนวคิดเกี่ยวกับพีชคณิตไว้ว่า เป็นการศึกษาเกี่ยวกับแบบรูปถือเป็นแนวทางที่มีประสิทธิภาพแนวทางหนึ่งในการที่จะพัฒนาการให้เหตุผลเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษา

ดังนั้น การจัดการเรียนการสอนพีชคณิตในระดับประถมศึกษานั้น ครูผู้สอนควรกระตุ้นนักเรียนให้มีความคุ้นเคยในเรื่องแบบรูป ขณะเดียวกันก็ควรสอดแทรกพีชคณิตเข้าไปในการสอนเลขคณิต โดยเฉพาะอย่างยิ่งเรื่องความเข้าใจเกี่ยวกับการเท่ากัน หรือเครื่องหมายเท่ากับนั่นเอง

**การคิดเชิงคณิตศาสตร์และการคิดเชิงพีชคณิต**

**การคิดเชิงคณิตศาสตร์**

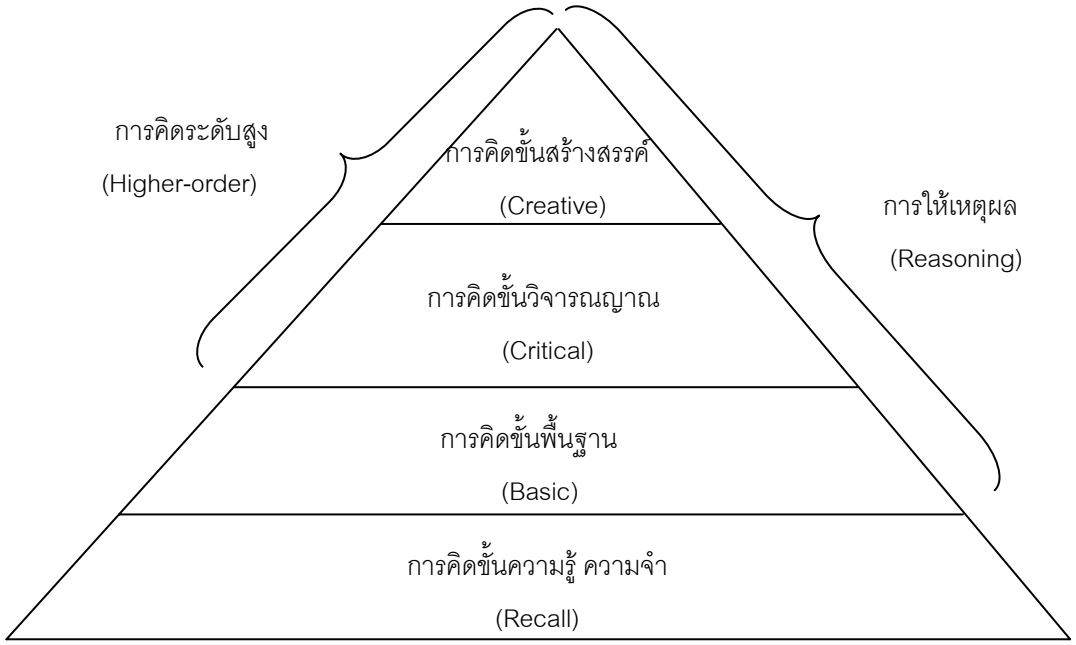
การคิดเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Thinking) ถือเป็นลักษณะหนึ่งของการคิดโดยทั่วไป (Rickart, 1996) ที่เกี่ยวข้องกับการคิดในเชิงการคำนวณ การคิดแก้ปัญหา การให้เหตุผล ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ตลอดจนการคิดเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ แล้วนำเสนอความคิดผ่านการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ให้บุคคลอื่นรับรู้ได้ รวมทั้งความสามารถในการตรวจสอบหรือควบคุมการรู้คิดของตนเอง (Metacognition) ได้อีกด้วย (Hyde & Hyde, 1991; Reys et al., 2004) สอดคล้องกับ Krulik และ Rudnick (1993) ที่กล่าวว่า การคิด หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการวิเคราะห์และได้มาซึ่งข้อสรุปที่สมเหตุสมผลจากข้อมูลที่กำหนดให้ ซึ่งนักเรียนต้องสร้างข้อคาดการณ์ หาข้อสรุปจากความสัมพันธ์ของสถานการณ์ แล้วแสดงเหตุผล อธิบายข้อสรุปและยืนยันข้อสรุปนั้น

ดังนั้น การคิดเชิงคณิตศาสตร์ จึงเป็นการคิดที่เกี่ยวข้องกับโครงสร้างทางสติปัญญาของนักเรียนในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เป็นการใช้ทักษะการคิดที่หลากหลายเพื่อสร้างความเข้าใจในเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งสัมพันธ์กับวิชาย่อยหลายวิชา เช่น เลขคณิต พีชคณิต และ เรขาคณิต (O' Daffer & Thomquist, 1993; Caroll, 1996) เพื่อทำความเข้าใจแนวคิด ค้นหาความสัมพันธ์ระหว่างแนวคิด สร้างข้อสรุปหรือสนับสนุนข้อสรุปเกี่ยวกับแนวคิดและความสัมพันธ์ของแนวคิดและแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับแนวคิดนั้น โดยอาจจำแนกเป็นองค์ประกอบที่เป็นทักษะพื้นฐานของการคิดที่หลากหลาย เช่น ความมีเหตุผลเชิงปริมาณ ความมีเหตุผลเชิงอุปมาอุปมัยที่ครอบคลุมไปถึงการให้เหตุผลเชิงอุปนัยและนิรนัยความลุ่มลึกด้านวิธีการเฉพาะ เช่น การสร้างตัวแทนของปัญหา (การใช้ตัวแบบ) การนึกภาพ การสร้างข้อความคาดการณ์ การคิดย้อนกลับ และการคิดยืดหยุ่น (Carroll, 1996; Dreyfus & Eisenberg, 1996)

ขณะที่ Greenwood (1993) กล่าวว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการเข้าใจแบบรูป หาสถานการณ์ร่วมของปัญหา ระบุข้อผิดพลาด และการสร้างยุทธวิธีใหม่ การคิดทางคณิตศาสตร์ทำให้เกิดวิธีการเชิงระบบสำหรับปัญหาเชิงปริมาณที่เป็นผลของการเรียนรู้และการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เป็นการเน้นการเรียนรู้มากกว่าการมุ่งเพียงคำตอบหรือผลลัพธ์ ซึ่งถ้าสนับสนุนจุดเน้นนี้ให้เกิดขึ้นในการเรียนคณิตศาสตร์จะเป็นประโยชน์ ไม่เพียงแต่การเรียนรู้ในเนื้อหาเท่านั้น แต่จะเกิดความสามารถในการคิดและการให้เหตุผลในตัวนักเรียนด้วย

นอกจากนี้ยังพบว่า การคิดกับการให้เหตุผลมีส่วนที่เกี่ยวข้องกัน ซึ่งถ้านักเรียนมีการคิดที่ดีก็จะส่งผลต่อการให้เหตุผลที่ดีด้วย ดังที่ Krulik และ Rudnick ได้อธิบายถึงความเกี่ยวข้องกัน

ระหว่างการคิดกับการให้เหตุผลไว้ว่า การให้เหตุผลถือเป็นส่วนหนึ่งของการคิดที่อยู่สูงกว่าการคิดในขั้นความรู้ความจำ โดยการคิดนั้นแบ่งได้เป็น 4 ระดับคือ ขั้นความรู้ ความจำ (Recall) ขั้นพื้นฐาน (Basic) ขั้นวิจารณญาณ (Critical) และขั้นสร้างสรรค์ (Creative) ดังภาพที่ 1




ภาพ 1 แสดงลำดับของการคิด

ที่มา: Krulik, S. & Rudnick, J. (1993). *Reasoning and Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers*. Needham Heights, Mass: Allyn and Bacon.

การคิด ถือเป็นกระบวนการที่มีความซับซ้อน แต่ละขั้นของการคิดจะไม่สามารถแยกออกกันได้อย่างสิ้นเชิง ซึ่งแต่ละขั้นจะมีส่วนที่เหลื่อมล้ำกันอยู่ จากภาพที่ 1 จะเห็นว่า การให้เหตุผลจัดอยู่ในการคิดขั้นพื้นฐาน ขั้นวิจารณญาณ และขั้นสร้างสรรค์ สำหรับการคิดขั้นวิจารณญาณ และการคิดขั้นสร้างสรรค์นั้น ถือเป็นการคิดระดับสูง (Higher-Order Thinking) ซึ่งสอดคล้องกับ O' Daffer (1990) ได้กล่าวว่า การให้เหตุผลเป็นส่วนหนึ่งของการคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับการสร้างหลักการ การวิเคราะห์และสรุปแนวคิดที่สมเหตุสมผลและการหาความสัมพันธ์ของแนวคิดนั้น

สรุปได้ว่า การคิดเชิงคณิตศาสตร์เป็นวิธีการคิดของบุคคลในการทำคณิตศาสตร์ โดยการใช้ความรู้ ทักษะและวิธีการที่หลากหลายทางคณิตศาสตร์ในการทำความเข้าใจ ค้นหา

คำตอบของปัญหา สร้างความสัมพันธ์หรือสร้างข้อสรุปเกี่ยวกับข้อมูลหรือสถานการณ์ต่างๆ รู้จักตรวจสอบการคิดของตนเอง และสามารถสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ให้บุคคลอื่นเข้าใจ

**การคิดเชิงพีชคณิต**

การคิดเชิงพีชคณิตเป็นส่วนหนึ่งของการคิดทางคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบด้วยทักษะการคิดและเนื้อหาทางพีชคณิต นั่นคือ การใช้ทักษะการคิดทางคณิตศาสตร์เช่น ทักษะการให้เหตุผล การแสดงแทน การแก้ปัญหา และอื่น ๆ ในการเข้าใจความคิดรวบยอดทางเนื้อหาพีชคณิต การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตยังสัมพันธ์กับการแสดงแทน การให้เหตุผลเกี่ยวกับสัดส่วน ความสมดุล ความหมายของตัวแปร แบบรูปและฟังก์ชัน ตลอดจนการให้เหตุผลเชิงอุปนัย และการให้เหตุผลเชิงนิรนัย (Greenes & Findell, 1999) สอดคล้องกับ Arens และ Meyer (2000) ที่กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิตถูกนำมาใช้ในกระบวนการทางคณิตศาสตร์เพื่อให้นักเรียนค้นหาแบบรูปและความสัมพันธ์ ประเภทและการจัดประเภท กฎเกณฑ์ที่เป็นสูตร และค้นหาวิธีการแก้ปัญหา

ขณะที่ MacGregor และ Stacey (1999) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิต เป็นการคิดที่เกี่ยวกับการดำเนินการทางเลขคณิตที่อยู่ในรูปทั่วไปและการดำเนินการบนปริมาณที่ไม่ทราบค่า ตลอดจนการตระหนักถึงความสมเหตุสมผล การวิเคราะห์แบบรูปและการดำเนินการในรูปทั่วไปของแบบรูป โดยใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ โดยมองว่า ภาษาทางเลขคณิตคือคำตอบ ในขณะที่ภาษาทางพีชคณิตคือการมองเชิงความสัมพันธ์ นอกจากนี้ Herbert และ Brown (1999) ยังกล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิตเป็นการใช้เครื่องมือและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาที่แตกต่าง โดยการดึงข้อมูลจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ จากนั้นนำเสนอข้อมูลดังกล่าวในเชิงคณิตศาสตร์ทั้งในรูปของข้อความ แผนภาพ ตาราง กราฟ และสมการ แล้วประยุกต์และตีความข้อค้นพบทางคณิตศาสตร์ดังกล่าว ไปสู่สถานการณ์ที่ใกล้เคียงกันหรือสถานการณ์ใหม่ เช่น การแก้ปัญหาสำหรับตัวไม่ทราบค่า การทดสอบข้อคาดการณ์ การพิสูจน์ความสัมพันธ์ เป็นต้น ซึ่ง Kriegler (2009) ได้ให้ความหมายของการคิดเชิงพีชคณิตในบทความของเขาที่ชื่อ Just What is Algebraic Thinking? ในลักษณะที่ใกล้เคียงกันว่า การคิดเชิงพีชคณิตประกอบด้วย 2 องค์ประกอบคือ องค์ประกอบทางด้านการพัฒนาเครื่องมือในการคิดทางคณิตศาสตร์ และองค์ประกอบทางด้านการศึกษาพื้นฐานการคิดเชิงพีชคณิต ซึ่งเครื่องมือในการคิดทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ ทักษะการแก้ปัญหา ทักษะการให้

เหตุผล และทักษะการสื่อสาร ส่วนพื้นฐานการคิดเชิงพีชคณิตนั้นคือสิ่งที่เครื่องมือการคิดทางคณิตศาสตร์สามารถถูกพัฒนาขึ้นมา

นอกจากนี้ยังมีนักคณิตศาสตร์ศึกษาหลายทางที่แสดงความคิดเห็นเกี่ยวกับการคิดเชิงพีชคณิตดังนี้

Kaput (1993) กล่าวว่า การคิดเชิงพีชคณิตเป็นการสร้างและการนำเสนอเกี่ยวข้องกับแบบรูป กฎเกณฑ์ การทำให้อยู่ในรูปทั่วไป การค้นหาและการสร้างข้อคาดการณ์

Kieran และ Chalouh (1993) ให้ข้อคิดเห็นเกี่ยวกับการคิดเชิงพีชคณิตว่า เป็นการพัฒนาการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในกรอบแนวคิดทางพีชคณิต โดยการอธิบายความหมายหรือคำจำกัดความของสัญลักษณ์และการดำเนินการเชิงพีชคณิตในรูปของเลขคณิต

Driscoll (1997) เสนอว่า การคิดเชิงพีชคณิตสัมพันธ์กับความสามารถในการคิดเกี่ยวกับฟังก์ชันและการทำงานของฟังก์ชัน และการคิดเกี่ยวกับผลของการดำเนินการภายใต้ระบบดังกล่าว

สรุปได้ว่า การคิดเชิงพีชคณิต เป็นวิธีการคิดของบุคคลในการเรียนรู้พีชคณิต ผ่านการใช้กระบวนการคิด เพื่ออธิบายหรือแสดงหลักฐานในการทำความเข้าใจสถานการณ์ทางพีชคณิตต่างๆ เช่น แบบรูป ความสัมพันธ์ การแก้ปัญหาสำหรับตัวไม่ทราบค่า ฟังก์ชัน เป็นต้น

**แบบจำลองโซโล** (SOLO model)

แบบจำลองโซโล ถือเป็นกรอบแนวคิดหนึ่งที่พัฒนาขึ้นโดย Biggs และCollis ในปี 1982 เพื่อเป็นแนวทางในการวิเคราะห์และจำแนกระดับความสามารถของผู้เรียนในการเรียนรู้เนื้อหาวิชาต่างๆว่า ผู้เรียนมีความเข้าใจต่อสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้อย่างไร โดยพิจารณาจากโครงสร้างของผลการเรียนรู้ที่ผู้เรียนตอบสนอง ซึ่งแบบจำลองโซโล (SOLO model) เรียกอีกชื่อว่า โซโลเทคโซโนมี (SOLO Taxonomy) ถือว่าเป็นกรอบแนวคิดหนึ่งที่ได้รับความนิยมแพร่หลายในหลากหลายสาขาวิชา อาทิเช่น สาขาวิชาประวัติศาสตร์ ภาษาอังกฤษ ภูมิศาสตร์ แม้กระทั่งในสาขาคณิตศาสตร์เองก็ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลาย (Biggs & Collis, 1982) โดยมีนักวิชาการทางคณิตศาสตร์ศึกษาได้นำกรอบแนวคิดดังกล่าวมาใช้อ้างอิง เพื่อจำแนกและการประเมินความรู้ ความเข้าใจ การคิดและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในสาขาต่างๆ เช่น ความรู้สึกเชิงจำนวน (Jones, Thornton & Putt, 1994; Jones et al., 1996) ความน่าจะเป็น (Jones et al., 1997; Tarr & Jones, 1997) สถิติ (Jones et al., 2000 ; Mooney, 2002) พีชคณิตของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น (Kamol, 2005)

แบบจำลองโซโล มีโครงสร้างของการทำงานอยู่ 2 องค์ประกอบ คือ องค์ประกอบแรกเป็นการมองที่รูปแบบการตอบสนอง (Modes) ส่วนองค์ประกอบที่ 2 เป็นการพิจารณาที่ระดับของการตอบสนองในแต่ละรูปแบบ (Levels within each modes) โดยรูปแบบของการตอบสนองในองค์ประกอบแรกจำแนกเป็น 5 ขั้น คือ ขั้นประสาทสัมผัส(Sensori-motor stage) ขั้นคิดเป็นภาพ (Iconic stage) ขั้นรูปธรรม-สัญลักษณ์ (Concrete-Symbolic stage) ขั้นคิดเป็นแบบแผน (Formal stage) และขั้นคิดเหนือแบบแผน (Post-formal stage) ซึ่งทั้ง 5 ขั้นข้างต้นมีความหมายและลักษณะคล้ายคลึงกับขั้นพัฒนาการทางสติปัญญาของเพียเจต์ (Piaget's Stages of Intellectual Development) โดยมีขั้นของการพัฒนาที่ค่อยๆเปลี่ยนแปลงไปจากระดับการคิดที่อาศัยสิ่งที่เป็นรูปธรรมไปสู่การคิดที่มีลักษณะที่เป็นนามธรรมมากขึ้นเรื่อยๆ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. ขั้นการใช้ประสาทสัมผัส (Sensori-motor stage) เป็นช่วงระยะแรกเกิด ที่เด็กในวัยนี้จะมีพัฒนาการการเรียนรู้จากการตอบสนองต่อสิ่งรอบตัว ในรูปธรรมเท่านั้น

2. ขั้นใช้ภาพ (Iconic stage) ช่วงอายุประมาณ 2 ปี เด็กในช่วงวัยนี้จะมีพัฒนาการกว่าขั้นการใช้ประสาทสัมผัส โดยเด็กสามารถเรียนรู้ผ่านการจินตนาการภายในหรือผ่านรูปภาพ

3. ขั้นรูปธรรม-สัญลักษณ์ (Concrete-Symbolic stage) ช่วงอายุประมาณ 6 ปี เด็กในช่วงวัยนี้มีพัฒนาการการเรียนรู้คาบเกี่ยวระหว่างการเรียนรู้เชิงรูปธรรมกับการเรียนรู้เชิงนามธรรมในรูปของสัญลักษณ์ โดยเด็กจะสามารถแปลงสิ่งต่าง ๆ รอบตัวที่เป็นรูปธรรมให้เป็นระบบของสัญลักษณ์โดยใช้ภาษาของตนเองและนำสัญลักษณ์นั้นไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวัน

4. ขั้นการคิดแบบเป็นทางการ (Formal stage) ช่วงอายุประมาณ 15-16 ปี เด็กในช่วงวัยนี้มีการพัฒนาการทางความคิดที่มีลักษณะเป็นนามธรรม มีระบบ ระเบียบมากขึ้น สามารถสร้างสมมุติฐานเพื่อกำหนดทางเลือกในการแก้ปัญหา

5. ขั้นการคิดเหนือแบบทางการ (Post-formal stage) ช่วงอายุประมาณ 22 ปี ซึ่งช่วงวัยดังกล่าวถือว่าเป็นช่วงวัยที่มีพัฒนาการสูงสุด นั่นคือนอกจากสามารถมองสิ่งต่างๆ ในเชิงนามธรรมได้แล้ว ยังสามารถประยุกต์ใช้แนวคิดเพื่อนำไปสู่ทฤษฎีหรือการสร้างทฤษฎีใหม่ๆได้ด้วยตัวเอง เกิดเป็นนวัตกรรมระดับสูงในหลายๆ สาขาวิชา

การตอบสนองของนักเรียนในแต่ละบริบทอาจมีระดับที่แตกต่างกัน เช่น นักเรียนที่ตอบสนองออกมาในรูปแบบของขั้นใช้ภาพในบริบทของวิชาสังคมศาสตร์ไม่จำเป็นจะต้องตอบสนองออกมาในรูปแบบของขั้นใช้ภาพในวิชาวิทยาศาสตร์ นั่นคือ การตอบสนองของนักเรียนในแต่ละบริบทอาจไม่เหมือนกันก็ได้ นอกจากนี้นักเรียนในช่วงวัยเดียวกันบางคนอาจมีรูปแบบการ

ตอบสนองที่แตกต่างจากคนอื่นๆ เช่น รูปแบบการตอบสนองขั้นรูปธรรม-สัญลักษณ์ หรืออาจมีบางคนที่สามารถตอบสนองในรูปแบบที่เป็นขั้นใช้ภาพ เป็นต้น ซึ่งนักเรียนในระดับประถมศึกษาและมัธยมศึกษาส่วนใหญ่จะมีการตอบสนองออกมาในรูปแบบรูปธรรม-สัญลักษณ์ (Biggs; & Collis, 1991) ในแต่ละรูปแบบการตอบสนองที่กล่าวมาข้างต้น ยังสามารถจำแนกในรายละเอียดโดยแบ่งเป็นระดับย่อยๆ ในแต่ละรูปแบบเป็น 5 ระดับดังต่อไปนี้

ระดับ 1 ก่อนมองโครงสร้าง (Prestructural) เป็นระดับการเรียนรู้ของนักเรียนที่ตอบสนองต่อสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ต่ำกว่ารูปแบบความเข้าใจในช่วงวัยของตนเอง โดยลักษณะการตอบสนองของนักเรียนคือ การแสดงออกในรูปของคำพูด หรือท่าทางที่แสดงความสับสน ไม่เข้าใจในประเด็นปัญหาหรือเข้าใจผิด โดยอาจจะใช้ลักษณะหรือประเด็นที่ไม่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ที่กำหนดให้มาให้เหตุผล โดยนักเรียนกลุ่มนี้จะไม่สามารถแก้ปัญหาที่เหมาะสมกับช่วงวัยของตนได้

ระดับ 2 มองโครงสร้างเดียว (Unistructural) เป็นระดับการเรียนรู้ของนักเรียนที่อยู่ในช่วงวัยของตนเอง แต่อยู่ในระดับต่ำ กล่าวคือ นักเรียนที่แสดงออกในระดับนี้จะมีความเข้าใจในประเด็นปัญหาที่เผชิญ แต่ใช้ข้อมูลหรือลักษณะที่ตรงประเด็นเพียงลักษณะเดียวในการหาข้อสรุป ทำให้อาจได้ข้อสรุปที่ไม่สมเหตุสมผลหรือไม่ถูกต้อง

ระดับ 3 มองหลายโครงสร้าง (Multistructural) เป็นระดับการเรียนรู้ที่สูงกว่าระดับมองโครงสร้างเดียว นั่นคือ เมื่อนักเรียนเผชิญสถานการณ์ปัญหา นอกจากนักเรียนจะสามารถเข้าใจปัญหาได้อย่างท่องแท้แล้ว นักเรียนยังสามารถใช้ข้อมูลหรือลักษณะที่ตรงประเด็นในการแก้ปัญหาตั้งแต่สองลักษณะขึ้นไป แต่ยังไม่สามารถสังเคราะห์หรือเชื่อมโยงความสัมพันธ์แต่ละลักษณะเข้าด้วยกันเพื่อประโยชน์ในการแก้ปัญหาได้ แม้ว่าบางครั้งอาจทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้องก็ตาม

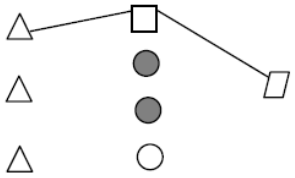
ระดับ 4 มองเชื่อมโยง (Relational) เป็นระดับการเรียนรู้ที่นักเรียนมองปัญหาที่เผชิญในเชิงโครงสร้างที่สัมพันธ์กัน กล่าวคือ นักเรียนสามารถใช้ข้อมูลหรือลักษณะที่ตรงประเด็นทั้งหมดมาใช้แก้ปัญหา และสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลทั้งหมดได้อย่างสมเหตุสมผลและสอดคล้องกันทั้งหมดจนทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์ด้วยเหตุและผล

ระดับ 5 ขยายความคิด (Extended abstract) เป็นระดับการเรียนรู้ที่นักเรียนสามารถใช้การให้เหตุผลที่นอกเหนือไปจากข้อมูลที่มีอยู่ สามารถสร้างองค์ความรู้หรือสมมุติฐานใหม่จากข้อมูลที่มีอยู่เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหาที่ถูกต้องสมบูรณ์

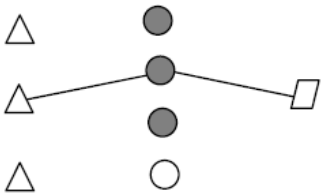
จากลักษณะการตอบสนองของนักเรียนในแต่ละระดับตามแนวคิดของ Biggs และCollis ที่กล่าวมาข้างต้น Chick(1998) ได้ออกแบบแผนภาพ เพื่อใช้ในการอธิบายรูปแบบหรือลักษณะการตอบสนองของนักเรียนในแต่ละระดับ เมื่อนักเรียนเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาได้

ดังภาพประกอบที่ 2 โดยกำหนดให้ △ แทนข้อมูลที่กำหนดให้ในสถานการณ์ปัญหา □ แทนการอ้างสิ่งไม่เหมาะสมหรือการใช้ข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ปัญหา ● แทนข้อมูลที่เกี่ยวข้องและกำหนดให้ในสถานการณ์ปัญหา ○ แทนข้อมูลที่ได้จากสมมุติฐานที่สร้างขึ้นเองจากสถานการณ์ปัญหา และ ▱ แทนการตอบสนองของนักเรียน ดังรายละเอียดต่อไปนี้

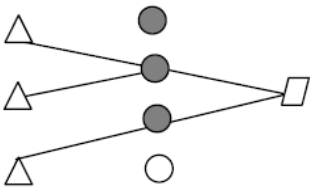
ระดับ 1 ก่อนมองโครงสร้าง



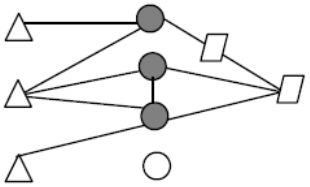
ระดับ 2 มองโครงสร้างเดียว



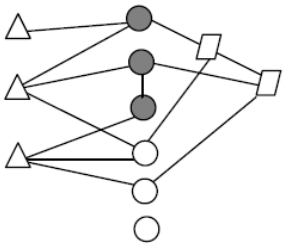
ระดับ 3 มองหลายโครงสร้าง



ระดับ 4 มองเชื่อมโยง



ระดับ 5 ขยายความคิด



ภาพ 2 แสดงลักษณะการตอบสนองของนักเรียนตามแบบจำลองโซโล

ที่มา: Chick, H. (1998). Cognition in the Formal Modes: Research Mathematics and the SOLO Taxonomy. *Mathematics Education Research Journal.* p. 7.

นอกจากนี้ Biggs และ Collis (1991) ยังได้เสนอแนะเกี่ยวกับการจำแนกลักษณะการตอบสนองของนักเรียนแต่ละคนไว้ว่า เมื่อนักเรียนแสดงการตอบสนองต่อสถานการณ์ปัญหานั้นๆ ลำดับแรกให้พิจารณาก่อนว่า นักเรียนคนดังกล่าวมีรูปแบบการตอบสนองโดยธรรมชาติอยู่ในขั้นใด จากนั้นจึงดำเนินการวิเคราะห์ต่อ เพื่อจำแนกว่า นักเรียนคนดังกล่าวมีลักษณะการตอบสนองอยู่ในระดับ(Levels)ใด จึงถือว่าสิ้นสุดขั้นตอน ซึ่งโดยปกติ นักเรียนส่วนใหญ่จะมี

ลักษณะการตอบสนองอยู่ในสามระดับตรงกลางนั่นคือ ระดับมองโครงสร้างเดียว ระดับมองหลายโครงสร้าง และระดับมองเชื่อมโยง ส่วนระดับก่อนมองโครงสร้างจะตกอยู่ในรูปแบบที่อยู่ก่อนหน้า และระดับขยายความคิดจะตกอยู่ในรูปแบบที่สูงขึ้นไป ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังตารางที่ 1

ตาราง 1 แสดงรูปแบบและระดับของการตอบสนองของนักเรียนตามแบบจำลองโซโล

| **รูปแบบ (Modes)** | **ระดับ (Levels)** |
|---|---|
| รูปแบบที่สูงขึ้น (Next) | 5 ขยายความคิด (Extended abstract) |
| รูปแบบเป้าหมาย (Target) | 4 มองเชื่อมโยง (Relational)<br>3 มองหลายโครงสร้าง (Multistructural)<br>2 มองโครงสร้างเดียว (Unistructural) |
| รูปแบบที่ต่ำลง (Previous) | 1 ก่อนมองโครงสร้าง (Prestructural) |

ที่มา: Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1991). Multimodal learning and intelligent behavior. *Reconceptuaization and Measurement Intelligence*. p. 65.

ในการวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนนั้น จะต้องพิจารณาก่อนเสมอว่านักเรียนที่ทำการวิเคราะห์นั้นมีรูปแบบการตอบสนองโดยธรรมชาตินั้นอยู่ในขั้นใด จากนั้นจึงพิจารณาว่า นักเรียนคนดังกล่าวมีลักษณะการตอบสนองอยู่ในระดับใดของขั้นการตอบสนอง ซึ่งโดยปกติจะมีลักษณะการตอบสนองอยู่ในสามระดับตรงกลางคือ ระดับมองโครงสร้างเดียว ระดับมองหลายโครงสร้าง และระดับมองเชื่อมโยง ดังนั้น นักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาตอนปลายที่ดำเนินการศึกษาสำหรับการวิจัยครั้งนี้ มีรูปแบบการตอบสนองตรงกับขั้นรูปธรรม-สัญลักษณ์ (Concrete-Symbolic) และอาจมีลักษณะการตอบสนองอยู่ในสามระดับตรงกลางคือ ระดับมองโครงสร้างเดียว ระดับมองหลายโครงสร้าง และระดับมองเชื่อมโยง

**แนวคิดในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิต**

การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตนั้น คนส่วนใหญ่มองว่า เริ่มตั้งแต่ระดับมัธยมศึกษาตอนต้นขึ้นไป ซึ่งในความเป็นจริงแล้วสามารถที่จะพัฒนาและส่งเสริมการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนตั้งแต่ในระดับประถมศึกษา ซึ่งในหลาย ๆ ประเทศได้ให้ความสำคัญกับการพัฒนาการคิดเชิง

พีชคณิตในระดับประถมศึกษา โดยได้ตีพิมพ์วารสารฉบับพิเศษในหัวข้อ “Developing Algebraic Thinking in the Earlier Grades from an International Perspective” ลงในวารสาร The Mathematics Education ของประเทศสิงค์โปร์ (2004) ที่ได้วิเคราะห์แนวคิดในการสอนพีชคณิตในระดับประถมศึกษาของแต่ละประเทศ พบว่า ส่วนใหญ่ส่งเสริมให้นักเรียนคุ้นเคยกับพีชคณิตตั้งแต่ในระดับประถมศึกษา ซึ่งเนื้อหาพีชคณิตในระดับประถมศึกษาจะเน้นเนื้อหาง่ายๆ มีความเป็นรูปธรรมสูง โดยนำเสนอผ่านรูปภาพเป็นส่วนใหญ่ ซึ่งไม่เน้นการสอนพีชคณิตอย่างเป็นทางการ แต่จะสอดแทรกผ่านเลขคณิตในรูปของตัวไม่ทราบค่า แบบรูป สอดคล้องกับแนวคิดของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000) ที่ระบุว่า การสอนพีชคณิตในระดับประถมศึกษาไม่ควรเน้นเนื้อหาที่ยากเกินไป ควรเป็นเนื้อหาหรือสถานการณ์ที่ง่ายๆ แต่เน้นกระตุ้นให้นักเรียนได้ลองสำรวจ สร้างข้อคาดการเกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ส่งผลให้นักเรียนรู้จักให้เหตุผลเชิงพีชคณิต ซึ่งสิ่งเหล่านี้จะเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการทำความเข้าใจในเนื้อหาทางพีชคณิตที่เป็นทางการมากขึ้นในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและมัธยมศึกษาตอนปลาย เช่น การให้นักเรียนมีประสบการณ์เกี่ยวกับจำนวนและสมบัติของจำนวนจะเป็นพื้นฐานในการทำความเข้าใจเรื่องตัวแปรและนิพจน์ทางพีชคณิต เป็นต้น (NCTM, 2000) ในขณะที่ Battista และ Brown (1998) เสนอแนะว่า การสอนพีชคณิตในระดับชั้นประถมศึกษาควรเริ่มต้นจากการสอนให้เข้าใจความหมายของจำนวนและสมบัติต่าง ๆ ก่อน โดยเปิดโอกาสให้เด็กคิดและแสดงความคิดเกี่ยวกับเรื่องของจำนวนและสมบัติของจำนวน จนกว่านักเรียนจะสามารถใช้สัญลักษณ์ทางพีชคณิตได้อย่างเป็นธรรมชาติ โดยไม่ใช่มุ่งไปที่การใช้สัญลักษณ์เพียงอย่างเดียว

ดังนั้น แนวคิดในการจักการเรียนการสอนเพื่อพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตในระดับประถมศึกษานั้น เพื่อให้นักเรียนคุ้นเคยกับพีชคณิต ผ่านกิจกรรมหรือสถานการณ์ที่ง่ายๆ ในเชิงรูปธรรม หรือสถานการณ์ที่นักเรียนคุ้นเคย แต่มองในอีกแง่มุม เพื่อที่จะกระตุ้นให้นักเรียนแสดงการคิดเชิงพีชคณิตในลักษณะต่างๆ ตามธรรมชาติของผู้เรียน ซึ่งกระบวนการคิดดังกล่าว จะเป็นปัจจัยพื้นฐานที่สำคัญสำหรับการเรียนรู้พีชคณิตที่เป็นทางการมากขึ้นในระดับสูง

**การสอนแนะให้รู้คิด**

การสอนแนะให้รู้คิด (Cognitive Guided Instruction: CGI) เป็นแนวการสอนที่ถูกพัฒนาขึ้นโดย Carpenter และคณะ ในปี ค.ศ. 1980 (2000) ซึ่งยึดแนวทางบนพื้นฐานความรู้และความเชื่อของครูที่เกิดจากการทำความเข้าใจการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนแล้วนำมาใช้ในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ ซึ่งการสอนแนะให้รู้คิด หรือเรียกสั้น ๆ ว่า CGI ถือเป็นแนวการสอนที่ออกแบบมาเพื่อช่วยให้ครูเข้าใจถึงความคิดของเด็กและใช้ความรู้นั้นมาประมวล เพื่อทำการ

ตัดสินใจในการจัดการเรียนรู้ให้กับนักเรียนกลุ่มดังกล่าว ดังนั้น CGI จึงเกี่ยวข้องกับกระบวนการจัดการเรียนรู้ในห้องเรียน โดยครูต้องคิดและตัดสินใจเลือกจัดการเรียนรู้โดยต้องเข้าใจถึงความคิดของนักเรียน แล้วจัดการเรียนรู้ให้สอดคล้องกับความคิดของนักเรียนนั้นจะส่งผลต่อผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนเป็นอย่างดี ซึ่งวิธีการสอนโดยส่วนใหญ่จะใช้การแก้ปัญหาเป็นหลัก โดยมีหลักการ ดังนี้

1. การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนควรเน้นพัฒนาความเข้าใจของนักเรียนโดยให้ความสำคัญกับทักษะและการแก้ปัญหา ใช้การแก้ปัญหาเป็นศูนย์กลางของการเรียนการสอน

2. การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนควรจัดสถานการณ์ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมและสร้างความรู้ด้วยตนเอง

3. กระตุ้นให้นักเรียนได้เชื่อมโยงปัญหา มโนทัศน์หรือทักษะ กับความรู้เดิมที่มีอยู่

4. มีการวัดและประเมินผลการเรียนรู้อย่างสม่ำเสมอ โดยประเมินรอบด้านทั้งความสามารถในการแก้ปัญหา กระบวนการแก้ปัญหาแบบต่าง ๆ และวิธีแก้ปัญหา รวมถึงกระบวนการคิดของนักเรียน

Carpenter และคณะ (1999; 2000) ได้อธิบายขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามรูปแบบของ CGI ไว้ 4 ขั้นตอน ดังนี้

*ขั้นตอนที่หนึ่ง* เป็นขั้นตอนที่ครูนำเสนอปัญหาตามวัตถุประสงค์และความมุ่งหมายที่ตั้งไว้ โดยในการเลือกปัญหาครูควรเลือกปัญหาที่น่าสนใจและควรมีความสอดคล้องกับบริบทในชีวิตจริงของนักเรียน เน้นให้นักเรียนมีประสบการณ์ในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย

*ขั้นตอนที่สอง* เป็นขั้นตอนที่ครูช่วยแนะให้นักเรียนมีความเข้าใจในปัญหา และเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แก้ปัญหาตามความถนัดและความเข้าใจของนักเรียน ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนมีอิสระในการแก้ปัญหาและให้เวลากับนักเรียนเพื่อทำความเข้าใจในปัญหา นอกจากนี้ครูควรอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับสื่อ อุปกรณ์ หรือเครื่องมือต่างๆ ในขณะที่นักเรียนแก้ปัญหาดังกล่าว

*ขั้นตอนที่สาม* เป็นขั้นที่ครูเปิดโอกาสให้นักเรียนได้รายงานคำตอบและวิธีการแก้ปัญหาของตนเองกับเพื่อนคนอื่น ๆ โดยครูอาจจะเลือกถามนักเรียนเป็นรายบุคคลถึงวิธีการที่พวกเขาใช้ในการแก้ปัญหาพร้อมเหตุผลเพื่อนำเสนอต่อนักเรียนในชั้นเรียน และในระหว่างที่นักเรียนรายงานคำตอบนั้นครูอาจใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนแสดงแนวคิดของตนเองออกมา

*ขั้นตอนที่สี่* เป็นขั้นที่ครูและนักเรียนช่วยกันอภิปรายคำตอบและวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหา โดยการที่ครูใช้คำถามให้นักเรียนทั้งชั้นช่วยกันอภิปรายถึงคำตอบและวิธีการที่แตกต่าง

ดังนั้นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนแบบ CGI นั้น ครูผู้สอนถือว่ามีบทบาทสำคัญอย่างยิ่งต่อการเรียนรู้ของนักเรียน ซึ่ง Carpenter และคณะ (1999) ได้กล่าวถึงบทบาทของครูผู้สอนไว้ดังนี้

1. ในขณะจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ครูผู้สอนควรใช้คำถามหรือการชี้แนะกับนักเรียนเมื่อนักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาได้

2. ครูควรมีการสังเกตและพยายามทำความเข้าใจถึงความคิดของนักเรียนแต่ละคนอย่างกระตือรือร้นและพยายามพัฒนาความสามารถในการทำความเข้าใจถึงความคิดของนักเรียนอย่างต่อเนื่องและสม่ำเสมอ

3. ครูควรเตรียมสื่อ วัสดุ อุปกรณ์ต่าง ๆ เพื่อเอื้ออำนวยความสะดวกในการแก้ปัญหาของนักเรียน

4. ครูควรสร้างบรรยากาศในชั้นเรียน เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้ใช้กระบวนการคิดในการแก้ปัญหาได้เต็มศักยภาพและเกิดความรู้สึกที่ดีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ครูควรเปิดโอกาสให้นักเรียนสามารถสื่อสารแนวคิดและเหตุผลที่หลากหลายของตนเอง ทั้งในรูปของการพูด การเขียน หรือการวาดภาพ

5. ครูควรนำเสนอปัญหา สถานการณ์หรือกิจกรรมที่เหมาะสมกับนักเรียนทุกคน และสามารถพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้

6. ครูควรจัดสภาพแวดล้อมที่เอื้อต่อการเรียนรู้ของนักเรียน เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้สร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตนเอง

7. ครูควรส่งเสริมให้นักเรียนทำงานเป็นกลุ่ม และมีการอภิปรายแนวคิดของตนเองกับผู้อื่น ส่งเสริมให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์กันในชั้นเรียน

8. ครูควรให้เวลาที่เหมาะสมแก่นักเรียนในการแก้ปัญหาต่างๆ

9. ครูไม่ควรเตรียมแนวทางการสอนที่ชัดเจน ตายตัว หรือใช้สื่ออุปกรณ์การเรียนการสอนที่เฉพาะเจาะจง แต่ครูควรเตรียมการสอนอย่างกว้าง และปรับกิจกรรมการเรียนการสอนตามความต้องการหรือแนวการคิดของนักเรียน

ดังนั้นจะพบว่า การสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ถือเป็นแนวการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่อยู่บนพื้นฐานการทำความเข้าใจในการคิดของนักเรียน เพื่อนำความรู้และความเข้าใจดังกล่าวมาใช้ในการออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอน โดยเน้นให้นักเรียนพัฒนาความเข้าใจด้วยตนเองผ่านขั้นตอนการสอน 4 ขั้นตอนคือ ขั้นการนำเสนอปัญหา ขั้นการลงมือแก้ปัญหา ขั้นการนำเสนอแนวคิดในการแก้ปัญหาและขั้นสรุปความรู้ความเข้าใจ

**งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง**

ในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนนั้น มีงานวิจัยหลายฉบับที่กล่าวถึงการคิดและการพัฒนาการคิดของนักเรียนในเนื้อหา เช่น งานวิจัยเกี่ยวกับการคิดเชิงเรขาคณิตของ Pierre และ Dina van Hiele ทำให้เกิดทฤษฎีแวน ฮีรี (Theory of Van Hiele) ขึ้นมา โดยทฤษฎีดังกล่าวเป็นการจัดระดับของการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนออกเป็น 5 ระดับที่แตกต่างกัน นอกจากนี้ยังมีความพยายามในการจัดระดับการคิดในสาระการเรียนรู้จำนวนและการดำเนินการ (Carpenter, & Moser, 1984; Jones, Thornton & Putt, 1994; Jones et al., 1996) สาระการเรียนรู้สถิติและความน่าจะเป็น (Jones et al., 1997; 1999; 2002) เป็นต้น

Carpenter และ Moser (1984) ได้ศึกษาระดับความสามารถของนักเรียนเกรด1-3 ในการแก้ปัญหาพื้นฐานทางการบวกและการลบเป็น 5 ระดับ คือ

ระดับ 0 เป็นระดับที่เด็กไม่สามารถแก้ปัญหาการบวกและการลบได้

ระดับ 1 เด็กในระดับนี้มีข้อจำกัดในวิธีการที่ใช้ เนื่องจากสามารถใช้เฉพาะวิธีการที่ลงมือปฏิบัติจริง โดยใช้ส่วนของร่างกายหรือนิ้วมือ เด็กใช้วิธีการการนับในการแก้ปัญหาการบวกทุกปัญหา และจะใช้วิธีการการนับเพิ่ม การจำแนก และการจับคู่เพื่อแก้ปัญหาการลบ นอกจากนี้เด็กในระดับนี้จะไม่สามารถแก้ปัญหาระคนที่มีทั้งการบวกและการลบได้

ระดับ 2 เด็กในระดับนี้มีความสามารถในการส่งผ่านวิธีการที่สร้างตัวแบบโดยตรงไปสู่วิธีการการนับ และยังสามารถใช้วิธีการทั้งสองเพื่อแก้ปัญหา รวมทั้งใช้วิธีการนับสิ่งของและการนับเพิ่ม

ระดับที่ 3 เด็กในระดับนี้แสดงออกถึงลักษณะที่อยู่ในภายในตัวแบบโดยตรง และส่วนใหญ่จะใช้การนับอย่างต่อเนื่องเพื่อแก้ปัญหาที่เป็นลักษณะเฉพาะในระดับนี้ เด็กอาจจะใช้การนับนิ้วมือของพวกเขา เพื่อให้การนับดำเนินไปอย่างต่อเนื่องโดยไม่ใช้เครื่องหมายสำหรับการนับ (Tally) เด็กส่วนมากจะใช้วิธีนับสิ่งของ และการนับเพิ่ม-นับลดในการแก้ปัญหาการบวกและการลบ

ระดับ 4 เด็กในระดับนี้ใช้การระลึกหรือการนำความจริงเกี่ยวกับจำนวนมาแก้ปัญหาการบวกและการลบ โดยพวกเขาได้ผ่านระดับต่างๆ ที่มีความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นฐานทางการบวกและการลบมาแล้ว

Jones, Thornton และ Putt (1994) ได้พัฒนาโครงร่างการคิดของเด็กในสถานการณ์เกี่ยวกับจำนวนหลายหลัก โดยได้จำแนกแนวคิดที่เกิดขึ้นเกี่ยวกับความรู้สึกในจำนวนหลายหลักเป็น 4 ประเภทคือ การนับ (Counting) การแบ่งเป็นส่วนย่อย (Partitioning) การจัดกลุ่ม

(Grouping) และความสัมพันธ์ของจำนวน (Number Relationships) สำหรับความคิดที่เกิดขึ้นในแต่ละประเภทนั้นจะประกอบไปด้วยระดับของความคิดที่แตกต่างกัน 4 ระดับ คือ ระดับที่ 1 ระดับก่อนค่าประจำหลัก (Pre-Place Value) ระดับที่ 2 ระดับค่าประจำหลักเบื้องแรก (Initial Place Value) ระดับที่ 3 ระดับขยายค่าประจำหลัก 1 (Extended Place Value # 1) และระดับที่ 4 ระดับขยายค่าประจำหลัก 2 (Extended Place Value # 2) โดยพวกเขาได้ใช้วิธีการสัมภาษณ์เพื่อศึกษาเป็นรายกรณีกับนักเรียนเกรด 1 จำนวน 6 คน เพื่อยืนยันและพัฒนาโครงร่างที่พวกเขาสรุปไว้ ผลการศึกษาพบว่า

นักเรียนในระดับที่ 1 มองจำนวนว่าเกิดจากการสะสมทีละหนึ่ง จำนวนทั้งหมดเกิดจากส่วนประกอบย่อยๆ เป็นสิบและเป็นหน่วย นักเรียนจะไม่แบ่งจำนวนออกเป็นกลุ่มของสิบ การจัดกลุ่มจำนวนเป็นห้าหรือสิบจะมีความยากสำหรับนักเรียนระดับนี้ นักเรียนในระดับนี้ยังไม่เข้าใจแนวคิดเกี่ยวกับสิ่งของที่มีจำนวนสิบในฐานะหนึ่งหน่วย พวกเขาจะระลึกได้เพียงจำนวนที่กำหนดให้มีค่ามากกว่าหรือน้อยกว่า แต่ไม่สามารถบอกได้ว่ามีค่ามากว่าหรือน้อยกว่าเท่าไร

นักเรียนในระดับที่ 2 สามารถนับเพิ่มทีละสิบและทีละหนึ่งได้ และเมื่อใช้ตัวแบบของจำนวนหลายหลักนักเรียนสามารถนึกถึงจำนวนที่อยู่ในรูปของ 10 ในฐานะหนึ่งหน่วยได้ นักเรียนในระดับนี้ยังเข้าใจความหมายของ “สิบ” โดยใช้ลำดับสำหรับจำนวนที่มีสองหลัก

นักเรียนในระดับที่ 3 สามารถสร้างตัวแทนหลักสิบและหลักหน่วยสำหรับจำนวนที่มีสองหลัก และใช้วิธีการการนับทั้งหมดโดยนับสิบครั้งของหนึ่งหน่วย นักเรียนในระดับนี้จัดรูปตัวแทนจำนวนสองจำนวนบนพื้นฐานหลักสิบและหลักหน่วย และสามารถดำเนินการทางคณิตศาสตร์กับตัวแทนจำนวนทั้งสองได้

นักเรียนในระดับที่ 4 จะใช้วิธีการการแบ่งส่วนในการบวกจำนวนสองหลักและสามหลัก นั่นคือนักเรียนในระดับนี้จะนับและใช้วิธีคิดในใจสำหรับจำนวนหลายหลัก แต่พวกเขาไม่สามารถนำเสนอจำนวนสามหลักในรูปของสิบได้

ในปี ค.ศ.1996 Jones และคณะ(1996) ได้ขยายและพัฒนาโครงร่างที่อธิบายถึงการคิดของเด็กเกี่ยวกับความรู้สึกเชิงจำนวนหลายหลัก โดยระดับการคิดจะเพิ่มเป็น 5 ระดับ คือ ระดับที่ 1 ระดับก่อนค่าประจำหลัก ระดับที่ 2 ระดับค่าประจำหลักเบื้องแรก ระดับที่ 3 ระดับการพัฒนาค่าประจำหลัก ระดับที่ 4 การขยายค่าประจำหลัก และระดับที่ 5 ส่วนประกอบที่สำคัญของค่าประจำหลัก จากการสัมภาษณ์นักเรียนในเกรดหนึ่งและสอง ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนที่ระดับก่อนค่าประจำหลักจะไม่มองจำนวนในรูปของหน่วยประกอบแต่จะมองเป็นหน่วยเดี่ยวแทน เช่น ในการมอง “ห้าสิบหก” (56) นักเรียนจะมองแยกเป็นห้าสิบและหกหน่วยนักเรียนในระดับนี้จะ

ไม่ใช้การนับโดยสังเกตหลักสิบและหลักหน่วยพร้อมกัน นอกจากนี้นักเรียนในระดับนี้ยังไม่เห็นความจำเป็นที่จะนำเสนอจำนวนโดยใช้การรวมกลุ่มครั้งละสิบ และการแบ่งส่วนจำนวนโดยใช้การรวมกลุ่มครั้งละสิบ พวกเขาจะใช้การนับ เพื่อกำหนดความสัมพันธ์ของจำนวน(เช่น มากกว่าหรือน้อยกว่า) อย่างไรก็ตามนักเรียนในระดับนี้สามารถกำหนดขนาดของความสัมพันธ์ได้ ตัวอย่างเช่น นักเรียนคนหนึ่งรู้ว่าจำนวนที่กำหนดให้มีค่ามากกว่า 5 แต่ไม่สามารถบอกได้ว่ามากกว่าเท่าไร นักเรียนที่ระดับค่าประจำหลักเบื้องแรกจะศึกษาการแสดงความสำคัญของ “สิบ” เช่น เครื่องชี้นำที่สำคัญในลำดับจำนวนสองหลัก นักเรียนในระดับนี้จะแสดงหลักฐานบางอย่างเกี่ยวกับการใช้การนับโดยสังเกตหลักสิบและหลักหน่วยพร้อมกัน พวกเขาจะจำแนก 10 ออกเป็นหนึ่งหน่วยในการแทนจำนวนสองหลัก เพื่อทำการเปรียบเทียบ นักเรียนในระดับนี้สามารถสร้างจำนวนในรูป “สิบ-หน่วย”

ความสามารถในการใช้ความสัมพันธ์ของส่วนย่อย-ส่วนย่อย-ส่วนรวม (Part-Part-Whole) เป็นคุณลักษณะเฉพาะที่สำคัญที่ทำให้นักเรียนเลื่อนระดับจากระดับค่าประจำหลักเบื้องแรกไปสู่ระดับการพัฒนาค่าประจำหลัก นักเรียนในระดับการพัฒนาค่าประจำหลักยึดมั่นที่จะใช้หลักสิบและหลักหน่วยพร้อมกันและทำการแบ่งส่วนปัญหา นักเรียนในระดับนี้ยังสามารถดำเนินการและเปรียบเทียบการนำเสนอตัวแทนความคิดของสองสิ่งในเวลาเดียวกันเมื่อต้องเข้าไปเกี่ยวข้องกับการรวมกลุ่มและความสัมพันธ์ของจำนวน นักเรียนที่ระดับการขยายค่าประจำหลักจะเริ่มต้นขยายความรู้สึกเชิงจำนวนของพวกเขาไปสู่จำนวนสามหลัก ขณะที่นักเรียนในระดับนี้สามารถมอง 100 เช่นหนึ่งหน่วยเชิงเดี่ยว หรือกลุ่มของ 100 ที่เป็นหน่วย ๆ แล้ว นักเรียนในระดับนี้ยังสามารถมอง 100 ในรูปของสิบ 10 ตัว และยังใช้คำตอบที่แตกต่างกันในสมอง นอกจากนั้นยังบูรณาการการนับการแบ่งเป็นส่วนย่อย การรวมกลุ่มและวิธีการการจัดลำดับเมื่อแก้ปัญหา ความสามารถในการจำแนก 100 ออกเป็นสิบ 10 ตัว เป็นคุณลักษณะเฉพาะที่สำคัญที่จะจัดนักเรียนเข้าสู่ระดับส่วนประกอบที่สำคัญของค่าประจำหลัก ซึ่งเป็นคุณลักษณะเฉพาะที่จัดรวมอยู่ในระดับการขยายค่าประจำหลักนั้นเช่นกัน แต่ Jones และคณะให้ข้อสังเกตว่าที่ระดับส่วนประกอบที่สำคัญของค่าประจำหลักนี้ นักเรียนจะแสดงความชอบในการนำเสนอตัวแทนความคิดในใจมากกว่าการใช้การนำเสนอทางกายภาพหรือการทดลงบนกระดาษ นักเรียนในระดับนี้มีความเข้าใจในการเชื่อมโยงทั้งหมดของโครงสร้างทั้งสี่ข้างต้นด้วย

นอกจากนี้ในปี ค.ศ.1997 และ ค.ศ.1999 Jonesและผู้ร่วมงานของเขายังได้พัฒนาโครงร่างของการรู้คิดที่อธิบายถึงการสังเคราะห์การคิดของเด็กในเรื่องความน่าจะเป็น ต่อมาในปี

ค.ศ.2000 Jones และคณะยังได้พัฒนาโครงร่างเพื่ออธิบายและทำนายการคิดเชิงสถิติของเด็กอีกด้วย (Jones et al., 2002)

ในประเทศไทย ได้มีความพยายามในการนำแนวคิดการจำแนกระดับการคิดของนักเรียนมาใช้ โดย ณัชชา กมล (Kamol, 2005) ได้พัฒนากรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยได้พิจารณาตัวบ่งชี้การคิดเชิงพีชคณิตในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น 3 ตัวบ่งชี้ คือ แบบรูป ตัวแปร และการนำเสนอ ซึ่งการจำแนกลักษณะการคิดของนักเรียนแต่ละระดับนั้นใช้รูปแบบการวิเคราะห์ลักษณะการคิดของนักเรียนตามรูปแบบของ Biggs และ Collis (1982) ผลการศึกษาพบว่า ความคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนสามารถจำแนกได้เป็น 4 ระดับได้แก่

ระดับ 1 นักเรียนสับสนหรือไม่เข้าใจในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ทั้งสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป ตัวแปร และการนำเสนอ โดยแสดงออกมาในรูปของการหลีกเลี่ยงที่จะตอบคำถาม หรือในบางครั้งตอบคำถาม โดยไม่ได้นำข้อมูลที่ได้จากสถานการณ์ปัญหาดังกล่าวมาช่วยในการตอบ หรือตอบไม่ตรงประเด็นคำถาม โดยนักเรียนมักจะใช้การเดาในการตอบ

ระดับ 2 นักเรียนแสดงความสามารถเพิ่มขึ้นจากระดับที่ 1 โดยแสดงออกถึงความเข้าใจในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ทั้งสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป ตัวแปร และการนำเสนอ โดยนักเรียนสามารถบอกได้ว่าโจทย์ปัญหาดังกล่าวต้องการถามอะไร แต่นักเรียนไม่รู้จะตอบคำถามอย่างไร หรือบางครั้งพยายามที่จะตอบคำถามแต่เป็นการตอบโดยใช้ข้อมูลเพียงส่วนเดียวซึ่งไม่สามารถครอบคลุมคำตอบที่เป็นไปได้

ระดับ 3 นักเรียนแสดงความเข้าใจในสถานการณ์ปัญหาได้อย่างชัดเจน ซึ่งนักเรียนแสดงออกโดยการสามารถใช้ข้อมูลที่ให้มาในสถานการณ์ปัญหาตั้งแต่ 2 ข้อมูลหรือ 2 ประเด็นขึ้นไป มาช่วยในการตอบคำถาม ทำให้มีแนวการตอบที่ตรงประเด็นสอดคล้องกับข้อคำถามและตอบคำถามได้ถูกต้องก็ตาม แต่นักเรียนกลุ่มนี้ยังขาดการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลแต่ละอย่างเข้าด้วยกัน

ระดับ 4 นักเรียนสามารถตอบคำถามจากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ทั้งสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป ตัวแปร และการนำเสนอได้ถูกต้องชัดเจนเช่นเดียวกับนักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในระดับที่ 3 แต่นักเรียนกลุ่มนี้มีลักษณะของการมองสถานการณ์ปัญหาที่ซับซ้อนขึ้น กล่าวคือ มองสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ในเชิงการวิเคราะห์และเชื่อมโยงความสัมพันธ์จากข้อมูลในลักษณะต่าง ๆ เข้าด้วยกัน แล้วนำความความสัมพันธ์ที่ได้มาช่วยในการค้นหาคำตอบที่ต้องการ

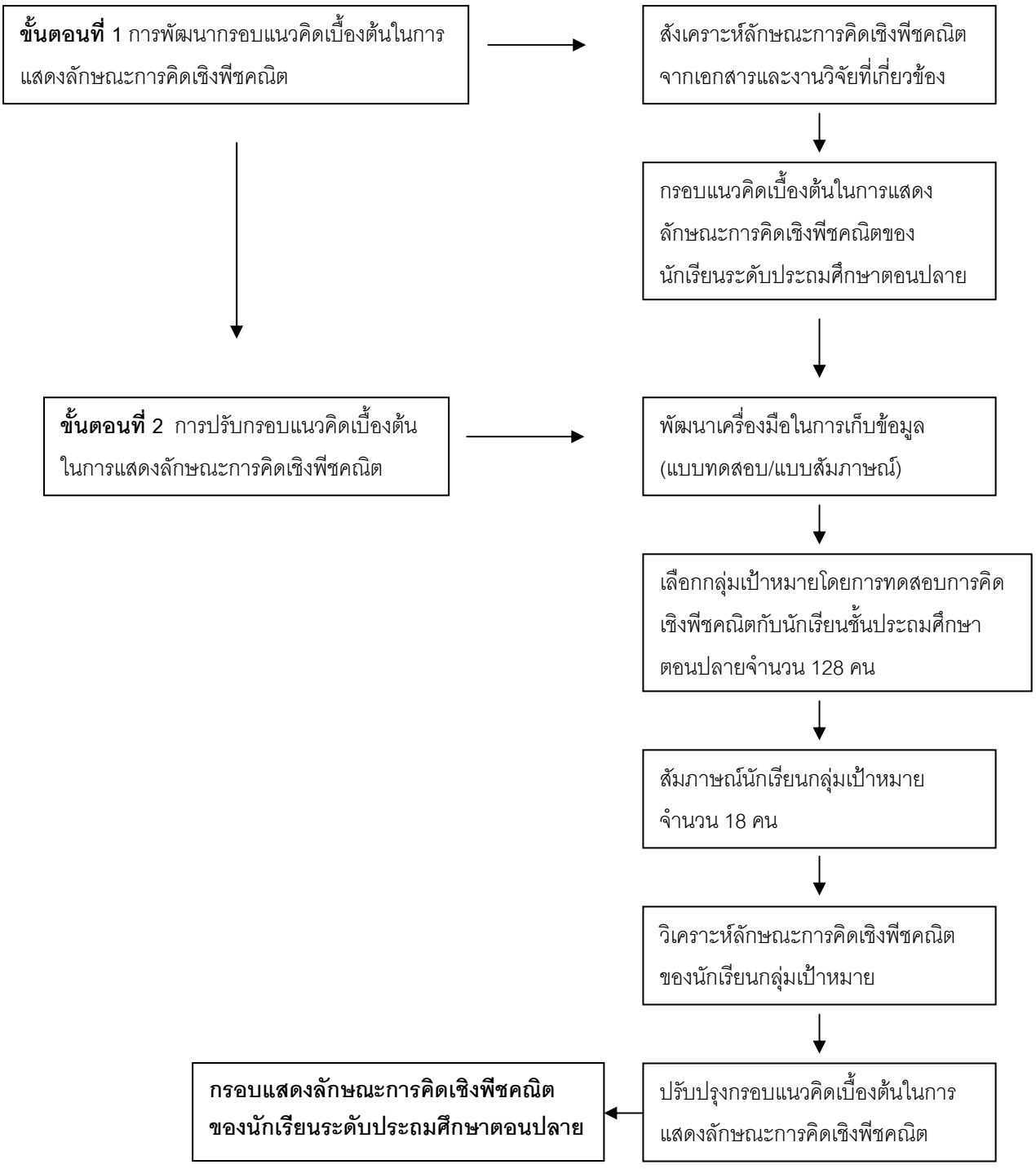
จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ และการคิดเชิงพีชคณิต พบว่า มีนักวิชาการศึกษาหลายท่านได้นำรูปแบบการวิเคราะห์ลักษณะการคิดของนักเรียนตามรูปแบบของ Biggs และ Collis มาใช้ในการศึกษาการคิดของนักเรียน ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงได้นำแนวคิดดังกล่าวมาเป็นฐานในการวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษา ทั้งยังนำผลการวิเคราะห์ที่ได้มาออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนแบบการสอนแนะให้รู้คิด (Cognitive Guided Instruction: CGI) ตามแนวคิดของ Carpenter และคณะ ซึ่งออกแบบการสอนตามลักษณะการคิดของนักเรียนอย่างแท้จริง

# บทที่ 3
# วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยในลักษณะการวิจัยและพัฒนา (Research and Development) ที่มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนากรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย และศึกษาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ที่ได้รับการสอนแบบแนะให้รู้คิด (CGI) โดยการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้กำหนดขั้นตอนในการดำเนินการวิจัยออกเป็น 2 ระยะ ได้แก่ ระยะที่ 1 เป็นการพัฒนากรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ระยะที่ 2 เป็นการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่ได้รับการสอนแบบแนะให้รู้คิด (CGI) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

**ระยะที่ 1 การพัฒนากรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย**

ในการพัฒนากรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ผู้วิจัยได้ดำเนินการเป็น 2 ขั้นตอน โดยขั้นตอนที่ 1 เป็นการสร้างกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายจากการสังเคราะห์เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ขั้นตอนที่ 2 การปรับกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นระดับประถมศึกษาตอนปลาย โดยกรอบแนวคิดในการดำเนินการวิจัยดังแสดงในภาพที่ 3




ภาพ 3 แสดงขั้นตอนในการดำเนินการวิจัยในระยะที่ 1

จากภาพข้างต้นสามารถอธิบายรายละเอียดของแต่ละขั้นตอนได้ดังนี้

**ขั้นตอนที่** 1 การพัฒนากรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องเพื่อใช้ในการพัฒนากรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในระดับประถมศึกษาตอนปลาย โดยสังเคราะห์ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตจากทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการคิด การคิดทางคณิตศาสตร์ และเอกสารงานวิจัยทางด้านการคิดเชิงคณิตศาสตร์ การคิดเชิงพีชคณิต แบบรูป ประโยคเปิดเป็นต้น แล้วนำข้อมูลที่ได้มาสร้างกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ดังแสดงในตารางที่ 2

ตาราง 2 แสดงกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต

| **ตัวบ่งชี้** / **ระดับ** | **แบบรูป** | **ประโยคเปิด** |
|---|---|---|
| **ระดับ** 1 | P11 ไม่สามารถอธิบายได้ว่าแต่ละพจน์ในแบบรูปมีความสัมพันธ์กันอย่างไร หรือไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูป<br><br>P12 ไม่สามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ๆ พจน์ที่อยู่ไกล และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้<br><br>P13 เหตุผลที่ใช้ในการหาคำตอบเกิดจากการเดาหรือใช้วิธีการที่เกิดจากการอ้างเหตุผลที่ไม่ถูกต้อง หรืออ้างหลักฐานที่ไม่เกี่ยวข้องและไม่เข้าประเด็นมาใช้ในการสร้างข้อสรุป<br><br>P14 ลักษณะการอธิบายเหตุผลจะใช้วิธีเชิงประจักษ์ โดยการเลือกเอาข้อมูล | S11 มองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูปแบบใหม่ โดยการแปลงประโยคเปิดดังกล่าวให้อยู่ในรูป “โจทย์ = คำตอบ”<br><br>S12 ไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างจะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน<br><br>S13 ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิดหรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด<br><br>S14 หาคำตอบโดยการนำจำนวนที่กำหนดให้ทั้งหมดในประโยคเปิดมา |

| ตัวบ่งชี้ / ระดับ | แบบรูป | ประโยคเปิด |
|---|---|---|
| | เฉพาะส่วนใดส่วนหนึ่งจากที่กำหนดให้มาใช้ในการสร้างข้อสรุป เช่น ใช้ข้อมูลจากพจน์ใดพจน์หนึ่งของแบบรูปมาตอบ | ดำเนินการกัน แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้เติมลงในช่องว่าง โดยไม่สนใจว่าช่องว่างจะอยู่ในตำแหน่งใด ซึ่งเป็นการดำเนินการภายใต้การแปลงประโยคเปิดที่กำหนดให้ให้อยู่ในรูป “โจทย์ = คำตอบ” |
| **ระดับ** 2 | P21 สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูป ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในมิติเดียวออกมาได้<br><br>P22 ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในสองมิติออกมาได้<br><br>P23 สามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ๆของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่ไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกลๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้<br><br>P24 การได้มาซึ่งข้อสรุปเกิดจากการมองความสัมพันธ์แบบเวียนเกิดในรูป ค่าของพจน์ถัดไป = ค่าของพจน์ก่อนหน้า + ผลต่างระหว่างพจน์ นั่นคือนักเรียนต้องอาศัยค่าของพจน์ก่อนหน้าในการหาค่าของพจน์ถัดไปเสมอ | S21 มองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป โจทย์ = คำตอบ โดยไม่สนใจจำนวนอื่นที่อยู่ข้างเดียวกันกับคำตอบ (ถ้ามี)<br><br>S22 ไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างจะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน<br><br>S23 ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด<br><br>S24 หาคำตอบ โดยการนำตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับในประโยคเปิดมาบวกกันแล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาเติมลงในช่องว่างทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ |

| ตัวบ่งชี้ / ระดับ | แบบรูป | ประโยคเปิด |
|---|---|---|
| **ระดับ** 3 | P31 สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ได้ว่าอยู่ในรูป ค่าของพจน์ถัดไป = ค่าของพจน์ก่อนหน้า + ผลต่างระหว่างพจน์<br><br>P32 สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นได้โดยใช้การอุปนัย โดยพยายามค้นหาสูตรแทนความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกับค่าของทุกพจน์ต้นๆ ที่กำหนดให้ แล้วสรุปว่าสูตรที่สร้างขึ้นต้องเป็นจริงกับทุกๆพจน์ โดยไม่สนใจว่าจำนวนที่นำมาดำเนินการในสูตรนั้นจะมีที่มาหรือความหมายอย่างไร แล้วใช้สูตรดังกล่าวหาค่าของพจน์ต่างๆ ที่ต้องการ<br><br>P33 สามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล หรือพจน์ใดๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ | S31 มองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป ผลลัพธ์ข้างซ้าย = ผลลัพธ์ทางขวา<br><br>S32 สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน<br><br>S33 ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด<br><br>S34 หาคำตอบ โดยใช้เหตุผลเชิงการคำนวณ นั่นคือ คำนวณผลลัพธ์ทางด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับแล้วนำมาลบกับจำนวนที่เหลือที่อยู่อีกด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ |
| **ระดับ** 4 | P41 สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ได้ว่าอยู่ในรูป ค่าของพจน์ถัดไป = ค่าของพจน์ก่อนหน้า + ผลต่างระหว่างพจน์ | S41 มองประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูป นิพจน์ทางซ้าย = นิพจน์ทางขวา<br><br>S42 สามารถวิเคราะห์ได้ว่า จำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยค |

| ตัวบ่งชี้ / ระดับ | แบบรูป | ประโยคเปิด |
|---|---|---|
| | P42 สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในแต่ละตำแหน่งได้ โดยไม่ใช้วิธีการอุปนัย ซึ่งนักเรียนในกลุ่มนี้จะพยายามค้นหาสูตรแทนความสัมพันธ์ของแบบรูปที่กำหนดให้ แล้วสรุปว่าสูตรที่สร้างขึ้นเป็นจริง โดยสามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าจำนวนที่ปรากฏอยู่ในสูตรทั่วไปของแบบรูปมีที่มาและความหมายอย่างไร<br><br>P43 สามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล หรือพจน์ใดๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ | เปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน<br><br>S43 มองประโยคเปิดในลักษณะที่เป็นองค์รวมทั้งประโยค ไม่ได้แยกพิจารณาเป็นส่วนๆ จึงทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด<br><br>S44 หาคำตอบโดยใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ที่เกิดจากการพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยค |

**ขั้นตอนที่ 2 การปรับกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต**

ในการปรับกรอบแนวคิดเบื้องต้นนั้น ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

1. **การกำหนดกลุ่มเป้าหมาย**

**กลุ่มเป้าหมาย** เป็นนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาตอนปลายจำนวน 18 คน เป็นนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 ชั้นละ 6 คน จากโรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่ ซึ่งเป็นโรงเรียนประถมศึกษาขนาดใหญ่ในจังหวัดเชียงใหม่ เปิดสอนตั้งแต่ชั้นเด็กเล็กจนถึงชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 นักเรียนส่วนใหญ่มาจากหลากหลายครอบครัวทั่วจังหวัดเชียงใหม่ ทำให้นักเรียนมีระดับความสามารถแตกต่างกัน และเป็นนักเรียนที่กล้าแสดงออกในหลายๆ ด้าน กล้าคิด กล้าทำ นอกจากนี้ผู้วิจัยยังได้รับความร่วมมือเป็นอย่างดีจากทางโรงเรียนที่อนุญาตให้ผู้วิจัยเข้าไปศึกษาและเก็บรวบรวมข้อมูล รวมทั้งยังได้รับความช่วยเหลือเป็นอย่างดีจากครูผู้สอนในการให้ข้อมูลเกี่ยวกับนักเรียน ทำให้ผู้วิจัยสามารถสร้างความคุ้นเคยกับนักเรียน(ผู้ให้ข้อมูล)

เพื่อลดช่องว่างต่างๆ เป็นผลให้การเก็บข้อมูลเป็นไปด้วยดีและนักเรียนให้ความร่วมมือกับการวิจัยครั้งนี้ด้วยความเต็มใจ

ในการคัดเลือกนักเรียนกลุ่มเป้าหมายทั้ง 18 คนนั้น ผู้วิจัยคัดเลือกมาจากกลุ่มนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 ชั้นละ 1 ห้อง เป็นนักเรียนจำนวน 128 คน โดยนักเรียนทั้ง 128 คน ได้ทำการทดสอบวัดลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตจากแบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิต จากนั้นผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้มาทำการคัดเลือกนักเรียนให้เหลือระดับชั้นละ 6 คน เพื่อให้ได้นักเรียนกลุ่มเป้าหมายจำนวน 18 คน

ในการคัดเลือกนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยทั้ง 128 คนนั้น ผู้วิจัยเลือกนักเรียนแบบเจาะจงจากนักเรียนในระดับประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 ชั้นละ 10 ห้อง ให้ได้นักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 5 และ 6 ชั้นละ 1 ห้อง เนื่องจากนักเรียนแต่ละห้องเป็นนักเรียนที่คละความสามารถ กล่าวคือ นักเรียนในแต่ละห้องมีทั้งนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูง ปานกลาง และต่ำ ในสัดส่วนที่ใกล้เคียงกัน โดยพิจารณาจากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในภาคเรียนที่ผ่านมา ดังนั้นจึงสามารถเลือกนักเรียนแบบเจาะจงระดับชั้นละ 1 ห้องเรียนเป็นตัวแทนได้เลย รายละเอียดของจำนวนนักเรียนกลุ่มเป้าหมายกลุ่มนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย เป็นดังตารางที่ 3 ต่อไปนี้

ตาราง 3 แสดงจำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

| ระดับชั้น | จำนวนห้องเรียน | ชั้นที่ถูกเลือก | จำนวนนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย | จำนวนนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย |
|---|---|---|---|---|
| ป. 4 | 10 | ป. 4/1 | 43 | 6 |
| ป. 5 | 10 | ป. 5/2 | 46 | 6 |
| ป. 6 | 10 | ป. 6/7 | 39 | 6 |
| | | **รวม** | **128** | **18** |

2. **การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล**

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลในการวิจัยครั้งนี้ ประกอบด้วย แบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิต แบบสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้าง และแบบบันทึกผลการสัมภาษณ์ ในการสร้างเครื่องมือดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยใช้กรอบแนวคิดเบื้องต้นแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่สังเคราะห์ขึ้นในขั้นตอนที่ 1 เป็นแนวทางในการสร้าง

2.1 **แบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิต** เป็นแบบทดสอบแบบเติมคำตอบพร้อมแสดงวิธีคิดในการตอบคำถามโดยเขียนอธิบายวิธีคิดลงในข้อสอบแต่ละข้ออย่างละเอียด ซึ่งแบบทดสอบถูกแบ่งเป็น 2 ตอน ประกอบด้วย ตอนที่ 1 เป็นแบบทดสอบเรื่องแบบรูป จำนวน 3 ข้อใหญ่ และในแต่ละข้อมีคำถามย่อยจำนวน 3 ข้อ ซึ่งเป็นคำถามให้นักเรียนหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ไกล และความสัมพันธ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูป พร้อมทั้งเขียนแสดงวิธีคิดโดยละเอียด โดยข้อสอบในแต่ละข้อใหญ่มีการกำหนดแบบรูปมาให้นักเรียน ซึ่งเป็นแบบรูปเพิ่มแบบคงที่ ส่วนตอนที่ 2 เป็นแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวน จำนวน 4 ข้อ ลักษณะของคำถามเป็นการกำหนดประโยคเปิดของจำนวนมาให้ แล้วให้นักเรียนเติมจำนวนที่คิดว่าถูกต้องลงในช่องว่าง พร้อมทั้งเขียนแสดงวิธีคิดโดยละเอียด (ภาคผนวก ข หน้า 141-152 )

หลังจากสร้างแบบทดสอบเสร็จแล้ว ผู้วิจัยได้นำแบบทดสอบดังกล่าวไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลายโรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่ที่ไม่ใช่นักเรียนกลุ่มที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยจำนวน 10 คน โดยเลือกนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูงจำนวน 3 คน ระดับปานกลาง 4 คน และระดับต่ำ 3 คน เพื่อตรวจสอบความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ และระดับความยากง่ายของข้อสอบแต่ละข้อ และเพื่อศึกษาแนวทางหรือรูปแบบในการตอบคำถามของนักเรียน จากนั้นนำข้อมูลที่ได้มาปรับปรุงแบบทดสอบจนได้แบบทดสอบฉบับสมบูรณ์ ที่พร้อมจะนำไปใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

2.2 **แบบสัมภาษณ์** แบบสัมภาษณ์ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นแบบสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้างโดยออกแบบแนวคำถามที่ใช้ในการสัมภาษณ์ออกเป็น 3 ลักษณะประกอบด้วย *แนวคำถามหลัก (Main Questions)* แนวคำถามขยายรายละเอียด*(Probes)* และแนวคำถามตามประเด็น *(Follow – Up Questions)* ซึ่งในแต่ละแนวคำถามจะมีเป้าหมายและลักษณะที่แตกต่างกันดังนี้

*แนวคำถามหลัก* เป็นแนวคำถามที่มีเป้าหมายเพื่อมุ่งตอบคำถามจุดประสงค์ของการวิจัย เป็นคำถามที่ใช้เปิดประเด็น และมีการเรียงลำดับการถามก่อนหลังให้สอดคล้องกับแบบทดสอบในแต่ละข้อ เพื่อไม่ให้ผู้วิจัยหลุดประเด็น เช่น ตัวอย่างคำถามต่อไปนี้ “โจทย์กำหนดอะไรมาให้” “สิ่งที่กำหนดให้นำมาช่วยในการแก้ปัญหาอย่างไร” “ได้คำตอบมาได้อย่างไร” “ทำไมถึงคิดเช่นนั้น” เป็นต้น

*แนวคำถามขยายรายละเอียด* เป็นแนวคำถามที่ต้องการให้ผู้ถูกสัมภาษณ์ขยายรายละเอียดในการตอบคำถามให้ชัดเจนยิ่งขึ้น โดยใช้ถามหลังจากที่ผู้ให้สัมภาษณ์ตอบคำถาม

หลักแล้ว แต่การตอบยังไม่ชัดเจนพอ หรือมีประเด็นใหม่ที่น่าสนใจและสนับสนุนแนวคิดหลัก ตัวอย่างแนวคำถาม เช่น นักเรียนช่วยอธิบายให้ละเอียดอีกครั้งได้ไหม

*คำถามเพื่อตามประเด็น* เป็นแนวคำถามที่ต้องการเจาะลึกข้อมูลที่ได้ให้ชัดเจนยิ่งขึ้น และเป็นแนวคำถามที่ผู้วิจัยต้องการจะตรวจสอบสมมุติฐานที่ตนเองตั้งขึ้นขณะสัมภาษณ์ ดังนั้น แนวคำถามที่ใช้จึงเป็นคำถามที่ผู้สัมภาษณ์คิดขึ้นในขณะที่กำลังสัมภาษณ์อยู่ เช่น ถ้า..... นักเรียนมีวิธีคิดอย่างไร

หลังจากสร้างแนวคำถามเสร็จแล้ว ผู้วิจัยได้ไปทดลองใช้กับนักเรียน 3 คนที่ผ่านการทดสอบจากแบบทดสอบวัดลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตก่อนการนำไปใช้จริงเพื่อปรับแนวคำถามที่ใช้อีกครั้ง ก่อนนำไปใช้จริง โดยในขณะสัมภาษณ์ผู้วิจัยได้จดข้อบกพร่องของข้อคำถามและบันทึกเสียงการสัมภาษณ์เพื่อนำข้อมูลมาถอดเทปและนำไปทดลองวิเคราะห์ข้อมูลกับผู้วิเคราะห์ข้อมูลทั้ง 2 ท่าน ซึ่งในการใช้แนวคำถามทั้ง 3 ลักษณะ จะมีลักษณะยืดหยุ่นไปตามสถานการณ์

2.3 **แบบบันทึกผลการสัมภาษณ์** เป็นแบบบันทึกที่สร้างขึ้น เพื่อให้ผู้สัมภาษณ์ใช้จดบันทึกประเด็นสำคัญต่าง ๆ ที่ได้จากการสัมภาษณ์ เช่น บันทึกลักษณะการคิดของนักเรียนในขณะให้สัมภาษณ์เกี่ยวกับแบบรูปและประโยคเปิดของจำนวน รวมถึงการสรุปความคิดเห็นเบื้องต้นของผู้สัมภาษณ์เกี่ยวกับลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่ถูกสัมภาษณ์ เมื่อพิจารณาเทียบกับระดับการคิดในกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต เพื่อนำข้อมูลเหล่านี้ไปใช้ประกอบการตัดสินใจในขั้นของการวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

**3. การเก็บรวบรวมข้อมูล**

ในการเก็บรวบรวมข้อมูลในขั้นตอนที่ 2 ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

3.1 นำแบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิตไปทดสอบกับนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัย โดยเป็นนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาตอนปลายที่เลือกไว้ จำนวน 128 คน ซึ่งการทดสอบจะดำเนินการทดสอบทีละระดับ เริ่มจากนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 43 คน ก่อน จากนั้นผู้วิจัยนำผลการทดสอบมาตรวจเพื่อพิจารณาว่า นักเรียนแต่ละคนมีลักษณะการคิดอย่างไร แล้วแบ่งกลุ่มนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ โดยแบ่งนักเรียนตามลักษณะการคิดที่นักเรียนเขียนแสดงในแบบทดสอบเป็นแนวทางในการแบ่ง โดยนักเรียนที่มีลักษณะการคิดแบบเดียวกันอยู่กลุ่มเดียวกัน โดยเทียบกับกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต ซึ่งการแบ่งกลุ่มลักษณะการคิดของนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ นั้น ผู้วิจัยพิจารณาจากภาพรวมของการแสดงการคิดของนักเรียนในแบบทดสอบในแต่ละตัวบ่งชี้ เนื่องจากการแสดงการคิดของนักเรียนต่อสถานการณ์ปัญหาแต่ละข้อในแบบทดสอบบางครั้งไม่คงเส้นคงวา จากนั้นผู้วิจัยพิจารณาลักษณะ

การคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนแต่ละกลุ่มแล้วเลือกนักเรียนจำนวน 6 คน ที่ผู้วิจัยวิเคราะห์จากการเขียนตอบของนักเรียนแล้วเห็นว่ามีลักษณะการคิดที่แตกต่างกันอย่างชัดเจน และคาดว่าจะเป็นตัวแทนที่ดีของนักเรียนแต่ละกลุ่ม โดยพิจารณาควบคู่ไปกับผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน

3.2 ทำการสัมภาษณ์นักเรียนทั้ง 6 คนเป็นรายบุคคล โดยก่อนทำการสัมภาษณ์ผู้วิจัยอ่านผลการทดสอบของนักเรียนแต่ละคน เพื่อพิจารณาลักษณะการคิดและตั้งประเด็นคำถามเพิ่มเติมจากแนวคำถามในแบบสัมภาษณ์ เพื่อตอบข้อสงสัยที่ผู้วิจัยไม่แน่ใจในการคิดของนักเรียน ตลอดจนไม่สามารถวิเคราะห์การคิดจากคำตอบของนักเรียนได้ เพื่อหาข้อมูลเชิงลึกจากการสัมภาษณ์ ในระหว่างการสัมภาษณ์ผู้วิจัยให้นักเรียนอธิบายสิ่งที่นักเรียนทำในแบบทดสอบพร้อมทั้งตอบข้อซักถามจากผู้วิจัย และในขณะเดียวกันผู้วิจัยจดบันทึกประเด็นสำคัญลงในแบบบันทึกการสัมภาษณ์และมีการบันทึกวีดีทัศน์และบันทึกเสียง เพื่อนำข้อมูลที่ได้ไปถอดเทปและใช้ในประกอบการวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

3.3 เมื่อทำการสัมภาษณ์นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 6 คนเสร็จแล้ว ผู้วิจัยดำเนินการเก็บข้อมูลกับนักเรียนที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิจัยในชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 และ 6 ตามลำดับ โดยดำเนินการตามขั้นตอนเดียวกันกับที่เก็บข้อมูลกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 (ตามข้อ 3.1-3.2) จนครบตามจำนวนนักเรียนที่เป็นกลุ่มเป้าหมาย

3.4 ทำการถอดเทปการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มเป้าหมายทั้ง 18 คน จากนั้นนำบทสัมภาษณ์ที่ได้มารวมกับแบบทดสอบและแบบบันทึกการสัมภาษณ์ของนักเรียนแต่ละคน เพื่อเตรียมข้อมูลสำหรับวิเคราะห์ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนต่อไป โดยผู้วิจัยได้ส่งข้อมูลดังกล่าวพร้อมแบบบันทึกผลการวิเคราะห์ข้อมูลให้ผู้วิเคราะห์แต่ละคน นำไปวิเคราะห์โดยอิสระ

**4. การวิเคราะห์ข้อมูล**

ในการวิเคราะห์ข้อมูลของระยะที่ 1 ผู้วิจัยนำผลการทดสอบจากการทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิต ผลการถอดเทปบทสัมภาษณ์และแบบบันทึกการสัมภาษณ์ของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายทั้ง 18 คน มาทำการวิเคราะห์ โดยในการวิเคราะห์จะใช้ผู้วิเคราะห์ทั้งหมด 3 คน ประกอบด้วย ผู้วิจัย อาจารย์ผู้สอนทางด้านคณิตศาสตร์ศึกษาในระดับมหาวิทยาลัยจำนวน 2 คน ซึ่งก่อนจะเริ่มการวิเคราะห์จริง ผู้วิจัยได้นำแบบทดสอบที่ได้ทดสอบกับนักเรียนที่ไม่ใช่นักเรียนกลุ่มที่เกี่ยวข้องกับการวิจัยจำนวน 3 คน พร้อมผลการถอดเทปบทสัมภาษณ์และแบบบันทึกการ

สัมภาษณ์ของนักเรียนมาให้ผู้วิเคราะห์อีก 2 ท่าน (รายชื่อผู้วิเคราะห์ข้อมูลในภาคผนวก ก หน้า 139) ทดลองวิเคราะห์และหาความสอดคล้องของการให้รหัสเพื่อสร้างความเข้าใจตรงกันในการวิเคราะห์ จากนั้นผู้วิจัยได้จัดเตรียมข้อมูลให้ผู้วิเคราะห์ข้อมูลแต่ละท่านแยกกันวิเคราะห์โดยใช้กรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่พัฒนาขึ้นจากขั้นตอนที่ 1 ช่วยในการจำแนกลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย หลังจากที่ผู้วิเคราะห์ทั้งสามคนให้รหัสการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนแต่ละคนเรียบร้อยแล้ว ผู้วิจัยได้นำผลที่ได้มาหาค่าความเชื่อมั่นระหว่างผู้วิเคราะห์แต่ละคน โดยใช้สูตรการหาค่าความเชื่อมั่นของ Miles and Huberman (1994) และ Boyatzis (1998) ตามสูตรต่อไปนี้

$$r = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$$

เมื่อ r คือ ค่าความเชื่อมั่น

$n_1$ คือ จำนวนครั้งที่ผู้วิเคราะห์ทั้งสามคนมีความเห็นสอดคล้องกัน

$n_2$ คือ จำนวนครั้งที่ผู้วิเคราะห์ทั้งสามคนมีความเห็นแตกต่างกัน

ซึ่งค่าความเชื่อมั่นที่สามารถยอมรับได้ต้องเป็น 70% ขึ้นไป (Boyatzis, 1998) สำหรับการวิจัยในครั้งนี้ พบว่ามีค่าความเชื่อมั่น 84 %

ในกรณีที่ผู้วิเคราะห์ข้อมูลทั้งสามคนให้รหัสไม่สอดคล้องกันผู้วิเคราะห์ข้อมูลทั้งสามคนร่วมกันอภิปรายแสดงเหตุผลในการวิเคราะห์ข้อมูลของแต่ละคน ถ้าตกลงกันไม่ได้ผู้วิเคราะห์ข้อมูลทั้งสามคนใช้การดูเทปวีดีทัศน์การสัมภาษณ์ประกอบแล้วร่วมกันลงข้อสรุปอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งผลจากข้อสรุปร่วมกันดังกล่าว ผู้วิจัยได้นำไปประกอบการตัดสินใจในขั้นของการปรับปรุงกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตต่อไป

**5. การปรับปรุงกรอบแนวเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต**

ข้อมูลที่ได้จากการวิเคราะห์ ผู้วิจัยจะนำมาจัดกลุ่มโดยใช้เงื่อนไขว่า นักเรียนที่มีลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตแบบเดียวกันจะอยู่กลุ่มเดียวกัน จากนั้นผู้วิจัยจะสังเคราะห์รายละเอียดเกี่ยวกับลักษณะและรูปแบบการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนแต่ละกลุ่มออกมา แล้วนำมาเปรียบเทียบกับลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่อยู่ในกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตโดยแบ่งเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้าลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตใดของนักเรียนที่แสดงออกมาเหมือนกันกับคำอธิบายลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตในกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงการคิดเชิงพีชคณิต ผู้วิจัยยังคงคำอธิบายดังกล่าวไว้ในกรอบเช่นเดิม

กรณีที่ 2 ถ้าลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตใดที่นักเรียนแสดงออกมาแล้วไม่ตรงกับลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่ถูกกำหนดไว้ในกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงการคิดเชิงพีชคณิต ผู้วิจัยดำเนินการปรับเอาลักษณะดังกล่าวออกจากกรอบแนวคิดเบื้องต้น แล้วนำเอาลักษณะที่พบจากการแสดงออกของนักเรียนเข้าไปแทนที่

กรณีที่ 3 ถ้าลักษณะการคิดของนักเรียนที่แสดงออกมาไม่มีในกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตมาก่อน ผู้วิจัยจะนำลักษณะการคิดของนักเรียนดังกล่าวเพิ่มเข้าไปในกรอบแนวคิดเบื้องต้น

จากนั้นจึงปรับปรุงภาษาที่ใช้ในกรอบแนวคิดให้มีความชัดเจน และง่ายต่อการทำความเข้าใจหรือการนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

**ระยะที่ 2 การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายโดยใช้การสอนแบบแนะให้รู้คิด** (CGI)

ในการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย โดยใช้การสอนแบบแนะให้รู้คิด (CGI) นั้น ผู้วิจัยนำกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่ได้ปรับปรุงแล้วในระยะที่ 1 มาเป็นฐานในการออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอน แบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิต โดยเป็นการวิจัยกึ่งทดลอง (Quasi Experimental Study) ที่ประกอบด้วยกลุ่มทดลอง 1 กลุ่ม ทดสอบลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตก่อนและหลังเรียน โดยมีขั้นตอนในการดำเนินการดังนี้

**1. การออกแบบการวิจัย**

ในการทดลองครั้งนี้ ผู้วิจัยใช้การทดลองแบบกลุ่มเดียวและมีการทดสอบก่อนและหลังเรียน (one-group pretest-posttest only design) ซึ่งมีลักษณะดังนี้

$$O_1 \quad x \quad O_2$$

เมื่อ x เป็นการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI)

$O_1$ เป็น pretest

$O_2$ เป็น posttest

2. **การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง**

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5/7 จำนวน 34 คน โรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่ ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2551 ผู้วิจัยเลือกตัวอย่างประชากร โดยใช้เทคนิคการสุ่มกลุ่มตัวอย่างแบบเจาะจงเป็นนักเรียนในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 เนื่องจากนักเรียนระดับชั้นดังกล่าวเป็นระดับชั้นที่อยู่กึ่งกลางระหว่างระดับชั้นประถมศึกษาที่ 4 กับระดับชั้นประถมศึกษาที่ 6 ซึ่งน่าจะเป็นตัวแทนที่ดีของประชากรทั้งหมด จากนั้นผู้วิจัยทำการจับฉลากห้องเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 มา 1 ห้องเรียนจากจำนวนห้องเรียนทั้งหมด 10 ห้องเรียน เนื่องจากนักเรียนแต่ละห้องเป็นนักเรียนที่คละความสามารถ ที่มีทั้งนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูง ปานกลาง และต่ำ ในสัดส่วนที่ใกล้เคียงกัน โดยพิจารณาจากผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ในภาคเรียนที่ผ่านมา ทำให้ได้กลุ่มตัวอย่างสำหรับการวิจัยในครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาที่ 5/7 จำนวน 34 คน ตามต้องการ

3. **การพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล**

เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลในการวิจัยในระยะที่ 2 ประกอบด้วย แบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิต แบบสัมภาษณ์แบบกึ่งโครงสร้าง แบบบันทึกผลการสัมภาษณ์ และแผนการจัดการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ในการสร้างเครื่องมือดังกล่าวข้างต้น ผู้วิจัยใช้กรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่ได้พัฒนาขึ้นในระยะที่ 1 เป็นแนวทางในการสร้าง

3.1 **แบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิต** เป็นแบบทดสอบแบบเติมคำตอบและแสดงวิธีคิดในการตอบคำถามโดยเขียนอธิบายวิธีคิดลงในข้อสอบแต่ละข้อโดยละเอียด แบบทดสอบถูกแบ่งเป็น 2 ตอน ประกอบด้วย ตอนที่ 1 เป็นแบบทดสอบเรื่องแบบรูป จำนวน 3 ข้อใหญ่ โดยในแต่ละข้อมีการกำหนดแบบรูปมาให้นักเรียน ซึ่งเป็นแบบรูปเพิ่มแบบคงที่ จากนั้นให้นักเรียนหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ไกล และความสัมพันธ์ในกรณีทั่วไปของแบบรูป พร้อมทั้งแสดงวิธีคิดโดยละเอียด และตอนที่ 2 เป็นแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวน จำนวน 10 ข้อ ลักษณะของคำถามจะกำหนดประโยคเปิดของจำนวนมาให้ แล้วให้นักเรียนเติมจำนวนที่คิดว่าถูกต้องลงในช่องว่าง พร้อมทั้งแสดงวิธีคิดโดยละเอียด ในขณะเดียวกันผู้วิจัยได้สร้างแบบทดสอบคู่ขนานขึ้นมาอีก 1 ฉบับเพื่อใช้เป็นแบบทดสอบหลังเรียน

หลังจากสร้างแบบทดสอบเสร็จแล้ว ผู้วิจัยได้นำแบบทดสอบทั้ง 2 ชุดไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่ ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 20 คน โดยแบ่งเป็นกลุ่มที่ทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิตก่อนเรียนจำนวน 10 คน และกลุ่มที่ทดสอบด้วยแบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิตหลังเรียนจำนวน 10 คน ซึ่งนักเรียนในแต่ละกลุ่มถูกเลือกมาจากนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงจำนวน 3 คน ปานกลางจำนวน 4 คน และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำจำนวน 3 คน เพื่อตรวจสอบความเหมาะสมของภาษาที่ใช้ และระดับความยากง่ายของข้อสอบแต่ละข้อ จากนั้นนำข้อมูลที่ได้มาปรับปรุงแก้ไขแบบทดสอบทั้ง 2 ฉบับอีกครั้งจนได้แบบทดสอบฉบับสมบูรณ์ ที่พร้อมจะนำไปใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

3.2 **แบบสัมภาษณ์** เป็นแบบสัมภาษณ์ที่ผู้วิจัยปรับมาจากแบบสัมภาษณ์ที่ถูกใช้ไปแล้วในระยะที่ 1 โดยนำแบบสัมภาษณ์ดังกล่าวมาปรับแนวคำถามให้กระชับและชัดเจนยิ่งขึ้น แต่ยังคงลักษณะของแนวคำถามในการสัมภาษณ์ทั้ง 3 ลักษณะไว้เช่นเดิม คือ *แนวคำถามหลัก (Main Questions) คำถามขยายรายละเอียด(Probes)* และ*แนวคำถามตามประเด็น (Follow – Up Questions)* แต่ผู้วิจัยได้ปรับคำถามย่อยในแต่ละลักษณะให้กระชับและชัดเจนขึ้น เพื่อเตรียมสำหรับใช้ในการสัมภาษณ์ในการเก็บข้อมูล ซึ่งในการนำแบบสัมภาษณ์ไปใช้จริงนั้น ผู้วิจัยสามารถยืดหยุ่นในการใช้แนวคำถามทั้ง 3 ลักษณะ ขึ้นอยู่กับสถานการณ์ที่พบ

3.3 **แบบบันทึกผลการสัมภาษณ์** เป็นแบบบันทึกที่ผู้สัมภาษณ์ใช้บันทึกประเด็นสำคัญต่าง ๆ ที่สังเกตพบในขณะที่ทำการสัมภาษณ์ ซึ่งแบบบันทึกผลการสัมภาษณ์ที่ใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลในระยะที่ 2 ผู้วิจัยใช้การปรับแบบบันทึกเดิมที่เคยใช้ในการเก็บรวบรวมข้อมูลในระยะที่ 1 โดยผู้วิจัยขยายช่องการเติมข้อมูลมากขึ้นและเพิ่มข้อเสนอแนะเพิ่มเติมในหัวข้อสุดท้ายเพื่อเปิดช่องให้ผู้สัมภาษณ์สามารถใส่ข้อมูลเกี่ยวกับความคิดเห็น ข้อข้องใจจากการสัมภาษณ์ ซึ่งในการบันทึกข้อมูลผู้สัมภาษณ์เป็นผู้บันทึกข้อมูลด้วยตนเอง โดยใช้ควบคู่กับแบบสัมภาษณ์และผลการทดสอบลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน เพื่อนำข้อมูลที่ได้ไปใช้ประกอบการตัดสินใจในขั้นของการวิเคราะห์ข้อมูลต่อไป

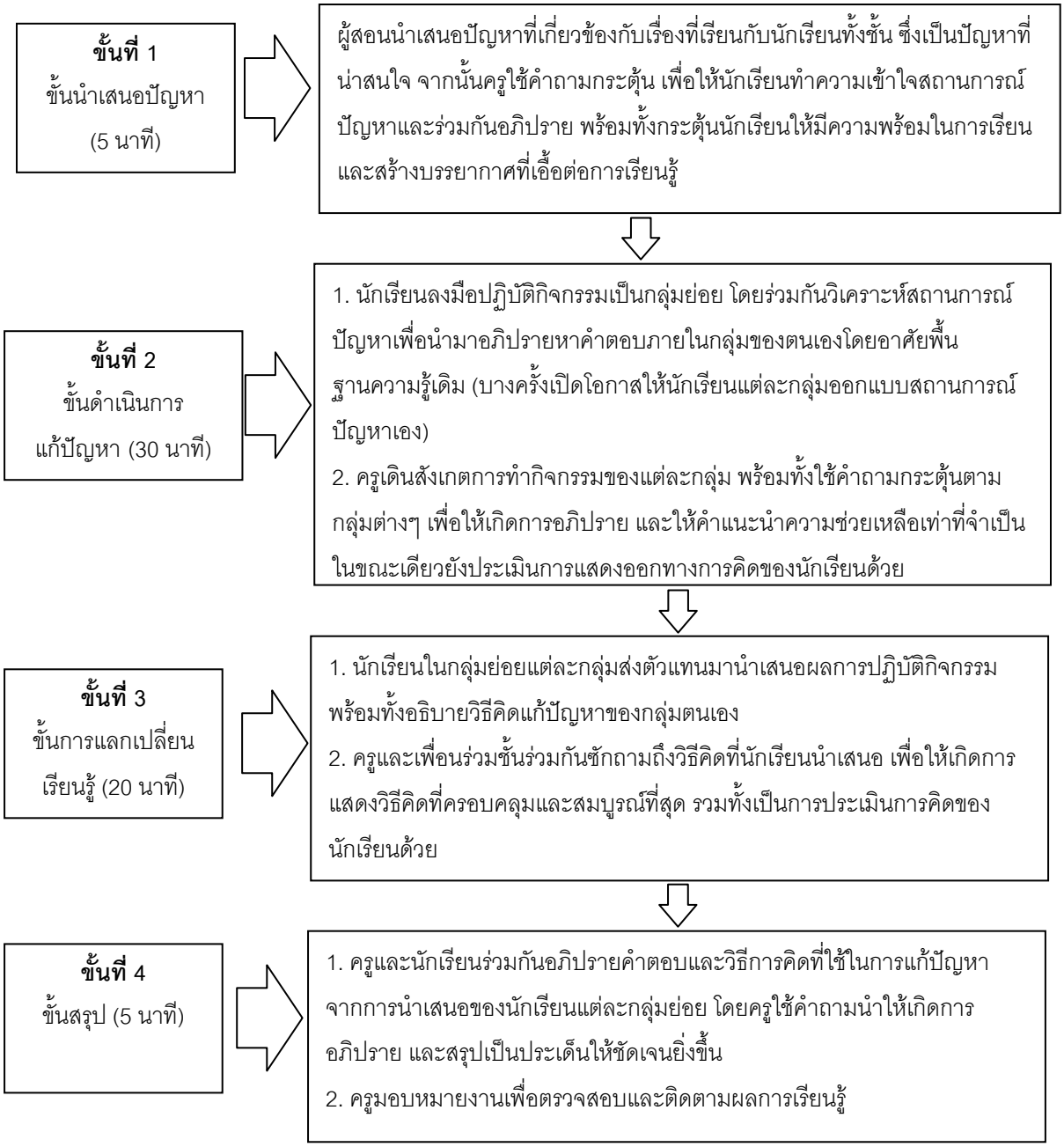
3.4 **แผนการจัดการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด** (CGI) จำนวน 8 แผน ในแต่ละแผนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนการสอน สื่อการเรียนรู้ การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้ บันทึกผลหลังการสอน โดยผู้วิจัยได้ศึกษาหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และ กรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่ได้พัฒนาขึ้นในระยะที่ 1 เป็นแนวทางในการกำหนดโครงการสอน หน่วยการเรียนรู้

จำนวน 2 หน่วย แผนการจัดการเรียนรู้และจำนวนชั่วโมงที่ใช้จำนวน 15 ชั่วโมง ดังรายละเอียดในตารางที่ 4

ตาราง 4 แสดงโครงการสอนและเวลาที่ใช้ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้

| ลำดับ | หน่วยการเรียนรู้ | จำนวนแผน | แผนการจัดการเรียนรู้ | จำนวนชั่วโมง |
|---|---|---|---|---|
| 1 | แบบรูป | 5 | การให้เหตุผล และแบบรูป | 2 |
| | | | แบบรูปของรูปภาพ | 2 |
| | | | แบบรูปของรูปเรขาคณิต | 2 |
| | | | แบบรูปของจำนวน | 2 |
| | | | การประยุกต์เกี่ยวกับแบบรูป | 2 |
| 2 | ประโยคเปิดของจำนวน | 3 | การใช้เครื่องหมายเท่ากับแสดงการเท่ากัน | 1 |
| | | | เครื่องหมายเท่ากับในประโยคสัญลักษณ์ | 2 |
| | | | เครื่องหมายเท่ากับในประโยคเปิด | 2 |
| **รวม** | | **8** | - | **15** |

ผู้วิจัยดำเนินการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิดสำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 8 แผน โดยในการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้นั้น ผู้วิจัยได้นำกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่ได้พัฒนาขึ้นในระยะที่ 1 และผลการทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิตก่อนเรียนของนักเรียนมาวิเคราะห์ลักษณะการคิดของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5/7 เพื่อเป็นข้อมูลในการออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอน โดยรูปแบบของกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้ในการเรียนการสอนแต่ละแผนใช้วิธีการเรียนโดยการแบ่งกลุ่มนักเรียนคละลักษณะการคิด และใช้สื่อประกอบการเรียนรู้ที่หลากหลาย โดยให้นักเรียนได้ทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มและเดี่ยว และออกแบบลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวการสอนแบบแนะให้รู้คิด (CGI) 4 ขั้นตอน คือ ขั้นนำเสนอปัญหา ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา ขั้นการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ และขั้นสรุป ดังแสดงในแผนผังการจัดกิจกรรมในภาพที่ 4




ภาพ 4 แสดงขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมการเรียนรู้ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้

**4. การเก็บรวบรวมข้อมูล**

ผู้วิจัยได้ดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูลตามลำดับขั้น ดังต่อไปนี้

4.1 ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบวัดลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต ก่อนการเรียนกับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5/7 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่างจำนวน 34 คน

4.2 ผู้วิจัยดำเนินการตรวจแบบทดสอบการคิดเชิงพีชคณิตก่อนเรียนของนักเรียนทั้ง 34 คน พร้อมทั้งวิเคราะห์ลักษณะการคิดของนักเรียนแต่ละคน ซึ่งในการวิเคราะห์ลักษณะการคิดของนักเรียนนั้น ผู้วิจัยได้นำข้อมูลเกี่ยวกับลักษณะการคิดของนักเรียนทั้ง 34 คนมาตรวจสอบความสอดคล้องกับลักษณะการคิดในแต่ละระดับของกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่ได้พัฒนาขึ้นในการระยะที่ 1 ซึ่งผลการตรวจสอบแสดงให้เห็นว่า ลักษณะการคิดของนักเรียนทั้ง 34 คนสอดคล้องกับลักษณะการคิดในแต่ละระดับของกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิต และผู้วิจัยยังนำลักษณะการคิดของนักเรียนทั้ง 34 คนมาเป็นแนวทางในการออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนอีกด้วย ส่วนข้อมูลระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนแต่ละคนถูกเตรียมไว้สำหรับวิเคราะห์เปรียบเทียบระดับการคิดจากแบบทดสอบหลังเรียนอีกครั้ง

4.3 ผู้วิจัยคัดเลือกนักเรียนจำนวน 6 คนจากนักเรียนทั้ง 34 คน เพื่อทำการศึกษาแบบเจาะลึกลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียน โดยนักเรียนทั้ง 6 คนประกอบด้วยนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง จำนวน 2 คน กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนปานกลาง จำนวน 2 คน และกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ จำนวน 2 คน โดยนักเรียนทั้ง 6 คนนี้ผู้วิจัยเลือกมาจากผลการวิเคราะห์การคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนในแบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิตก่อนเรียนแล้วเห็นว่านักเรียนทั้ง 6 คนดังกล่าวมีลักษณะการคิดที่แตกต่างกันอย่างชัดเจน และคาดว่าจะเป็นตัวแทนที่ดีของนักเรียนในการอธิบายลักษณะการคิดในแต่ละระดับ จากนั้นทำการสัมภาษณ์นักเรียนทีละคนโดยใช้แบบบันทึกผลการสัมภาษณ์พร้อมกับบันทึกเสียงสัมภาษณ์และบันทึกวีดีทัศน์ของการสัมภาษณ์ด้วย

4.4 ผู้วิจัยดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ตามที่วางไว้จำนวน 15 ชั่วโมง ขณะทำการสอนในแต่ละครั้งมีผู้วิจัยและผู้สังเกตการสอน จำนวน 2 คน ซึ่งเป็นนักศึกษาที่กำลังศึกษาระดับปริญญาโท สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ร่วมกันสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนจากการทำกิจกรรมกลุ่มและเดี่ยวของนักเรียน โดยสังเกตพฤติกรรมในการแสดงออกในการอธิบายหรือเขียนแสดงวิธีในการหาคำตอบ ซึ่งการสังเกตจะเวียนการสังเกตแต่ละกลุ่มไปเรื่อย ๆ ข้อมูลจากการสังเกตถูกนำมาอภิปรายเกี่ยวกับการคิดของนักเรียน เพื่อนำไปเป็นแนวทางในการปรับแนวคำถามเพื่อกระตุ้นการคิดในกิจกรรมการเรียนการสอนของแผนการจัดการเรียนรู้ต่อ ๆ ไป

4.5 หลังจากสอนจบทั้ง 8 แผน ผู้วิจัยดำเนินการทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนอีกครั้งด้วยแบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิตหลังเรียน จากนั้นสัมภาษณ์นักเรียนจำนวน

6 คนที่เป็นนักเรียนกลุ่มเดิมที่เคยถูกสัมภาษณ์ก่อนการเรียน โดยทำการสัมภาษณ์นักเรียนทีละคน พร้อมทั้งบันทึกผลการสัมภาษณ์ บันทึกเสียงสัมภาษณ์และบันทึกวีดีทัศน์ของการสัมภาษณ์

**5. การวิเคราะห์ข้อมูล**

การวิเคราะห์ข้อมูลมีทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ โดยแบ่งออกเป็น 2 ส่วน ดังนี้

5.1 วิเคราะห์ระดับการคิดเชิงพีชคณิต โดยนำผลการทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิตก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียนแต่ละคนมาวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงพีชคณิต

5.2 วิเคราะห์ระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนแบบเจาะลึกรายกรณี

ผู้วิจัยนำข้อมูลของนักเรียนทั้ง 6 คนที่เป็นกรณีศึกษา โดยเป็นข้อมูลจากแบบบันทึกผลการสัมภาษณ์ ผลการทดสอบวัดระดับการคิดเชิงพีชคณิตก่อนเรียนและหลังเรียน การถอดเทปบทสัมภาษณ์ และผลการให้ระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนแต่ละคนมาวิเคราะห์ ตีความและสรุป โดยเสนอผลที่ได้ในรูปของความเรียงในลักษณะการพรรณนาความ

# บทที่ 4

# ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยในครั้งนี้ดำเนินการเป็น 2 ระยะ โดยระยะที่ 1 เป็นการพัฒนากรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ทำการศึกษานักเรียนกลุ่มเป้าหมายรวมทั้งสิ้น 18 คน จาก 3 ระดับชั้น (ชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 – 6) จำนวนชั้นละ 6 คน ทำการวิเคราะห์ข้อมูลจากผลการทำแบบทดสอบและการสัมภาษณ์ โดยผู้วิเคราะห์ข้อมูลจำนวน 3 คน ได้แก่ ผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยจำนวน 2 คน ระยะที่ 2 เป็นการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่ได้รับการสอนแบบแนะให้รู้คิด (CGI) ทำการศึกษากับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5/7 จำนวน 37 คน ซึ่งเป็นนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย และดำเนินการวิเคราะห์ข้อมูลในลักษณะเดียวกับระยะที่ 1 โดยรายชื่อนักเรียนที่ใช้อ้างอิงในงานวิจัยฉบับนี้ เป็นนามที่สมมุติขึ้นทั้งหมด ซึ่งผลการวิจัยในแต่ละระยะมีรายละเอียดดังนี้

**ระยะที่ 1 ผลการสร้างกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย**

ในการปรับปรุงกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ผู้วิจัยใช้ข้อมูลการผลการทดสอบ ผลการสัมภาษณ์และการบันทึกผลการสัมภาษณ์การคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่เป็นกลุ่มเป้าหมายมาช่วยในการปรับกรอบแนวคิดเบื้องต้น ซึ่งผลการปรับกรอบแนวคิดเบื้องต้นในเรื่องแบบรูปดังแสดงในตารางที่ 5 ส่วนผลการปรับกรอบแนวคิดเบื้องต้นในเรื่องประโยคเปิดของจำนวนดังแสดงในตารางที่ 6 ซึ่งในตารางดังกล่าวแสดงให้เห็นถึงการปรับปรุงกรอบแนวคิดเบื้องต้น โดย

*ตัวอักษรที่ขีดเส้นใต้ในตาราง* หมายถึง ลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่ได้จากการตอบสนองของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายในการทดสอบและสัมภาษณ์ ซึ่งสอดคล้องกับลักษณะการคิดที่มีอยู่ในกรอบแนวคิดเบื้องต้น แต่มีการปรับข้อความในกรอบแนวคิดให้กระชับและชัดเจนยิ่งขึ้น

*ตัวอักษรที่ถูกเน้นสีในตาราง* หมายถึงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตที่ได้จากการตอบสนองของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายในการทดสอบและสัมภาษณ์ ซึ่งบางส่วนมีอยู่ในกรอบแนวคิดเบื้องต้นอยู่ก่อนแล้ว แต่ในบางส่วนถูกเพิ่มลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนเข้าไป เพื่อให้กระชับและชัดเจนยิ่งขึ้น

ตาราง 5 กรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายในเรื่องแบบรูป

| ระดับที่ 1 | ระดับที่ 2 | ระดับที่ 3 | ระดับที่ 4 |
|---|---|---|---|
| P11 ไม่สามารถวิเคราะห์ลักษณะของแบบที่กำหนดให้ได้ โดยไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปและความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์กับค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นได้ | P21 สามารถวิเคราะห์ลักษณะของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ โดยสามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปได้ว่า ค่าของพจน์ถัดไปเกิดจากค่าของพจน์ก่อนหน้าบวกกับผลต่างระหว่างพจน์ แต่ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์กับค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นได้ | P31 สามารถวิเคราะห์ลักษณะของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ โดยสามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปได้ว่า ค่าของพจน์ถัดไปเกิดจากค่าของพจน์ก่อนหน้าบวกกับผลต่างระหว่างพจน์ และยังสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นได้ แต่เป็นการอธิบายความสัมพันธ์โดยพิจารณาเพียงตัวเลขที่ได้จากแบบรูปเพียงอย่างเดียว ไม่พิจารณารูปภาพที่กำหนดให้ในแบบรูป | P41 สามารถวิเคราะห์ลักษณะของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ โดยสามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปได้ว่า ค่าของพจน์ถัดไปเกิดจากค่าของพจน์ก่อนหน้าบวกกับผลต่างระหว่างพจน์ และยังสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์กับค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นได้ ซึ่งเป็นการอธิบายความสัมพันธ์โดยพิจารณาทั้งจากตัวเลขที่ได้จากแบบรูปและรูปภาพที่กำหนดให้ในแบบรูป |
| P12 ไม่สามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ๆ พจน์ | P22 สามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ ๆ ของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่ | P32 สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล หรือพจน์ใดๆ ของ | P42 สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ใกล้ พจน์ที่อยู่ไกล หรือ |

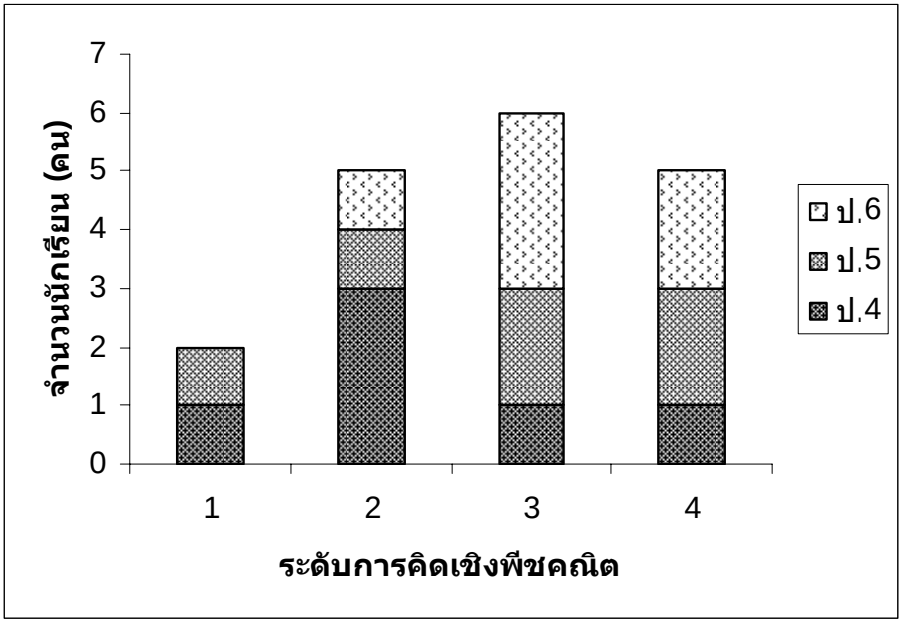
| ระดับที่ 1 | ระดับที่ 2 | ระดับที่ 3 | ระดับที่ 4 |
|---|---|---|---|
| ที่อยู่ไกล และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ซึ่งวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบเกิดจากการเดาหรือใช้วิธีการที่เกิดจากการอ้างเหตุผลที่ไม่ถูกต้อง เช่น การอ้างข้อมูลบางพจน์ในแบบรูปมาเป็นแนวทางในการตอบ เป็นต้น | ไม่สามารถหาค่าของพจน์ที่อยู่ไกลๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ซึ่งวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบเกิดจากการสรุปความสัมพันธ์ระหว่างค่าของแต่ละพจน์ในแบบรูปที่ว่า ค่าของพจน์ถัดไปเกิดจากค่าของพจน์ก่อนหน้าบวกกับผลต่างระหว่างพจน์ ทำให้การหาค่าของแต่ละพจน์จะต้องทำทราบค่าของพจน์ที่อยู่ก่อนหน้าเสมอ | แบบรูปที่กำหนดให้ได้ซึ่งวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบเกิดจากการสร้างสูตรขึ้นมาเพื่อแทนพจน์ทั่วไปที่ต้องการหา โดยสูตรดังกล่าวเกิดจากการสุ่มหาสูตรที่ใช้ได้กับพจน์ต้นๆ ของแบบรูปตามที่โจทย์กำหนดให้ แล้วสรุปว่าสูตรที่ได้เป็นจริงกับทุกๆ พจน์ | พจน์ใดๆ ของแบบรูปได้ ซึ่งวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบเกิดจากการสร้างสูตรขึ้นมาเพื่อแทนพจน์ทั่วไปที่ต้องการหา โดยสูตรดังกล่าวเกิดจากการวิเคราะห์ว่า ค่าของพจน์ในตำแหน่งที่ต้องการหาเกี่ยวข้องกับตำแหน่งของพจน์นั้นอย่างไร |
| P13 การได้มาซึ่งข้อสรุปเกิดจากการเดา หรือการอ้างเหตุผลที่ไม่สมเหตุสมผล เช่น การเลือกเอาข้อมูลบางส่วนในแบบรูปมาใช้ในการสร้างข้อสรุป | P23 การได้มาซึ่งข้อสรุปเกิดจากการมองความสัมพันธ์ในรูปของค่าของพจน์ถัดไปเกิดจากค่าของพจน์ก่อนหน้าบวกกับผลต่างระหว่างพจน์ | P33 การได้มาซึ่งข้อสรุปเกิดจากการพยายามค้นหาสูตรแทนความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกับค่าของทุกพจน์ต้นๆ ที่กำหนดให้ แล้วสรุปว่าสูตรที่สร้างขึ้นต้องเป็นจริงกับทุกๆพจน์ โดยไม่สนใจว่าจำนวนที่นำมาดำเนินการในสูตรนั้นจะมีที่มาหรือความหมายอย่างไร | P43 การได้มาซึ่งข้อสรุปเกิดจากการพยายามค้นหาสูตรจากความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์กับค่าของพจน์ในตำแหน่งต่าง ๆ ของแบบรูป โดยสามารถอธิบายได้อย่างชัดเจนว่าจำนวนที่ปรากฏอยู่ในสูตรทั่วไปของแบบรูปมีที่มาและความหมายอย่างไร |

ตาราง 6 กรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายในเรื่องประโยคเปิดของจำนวน

| ระดับที่ 1 | ระดับที่ 2 | ระดับที่ 3 | ระดับที่ 4 |
|---|---|---|---|
| S11 วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูปแบบใหม่ โดยพยายามแปลงประโยคเปิดดังกล่าวใหม่ ด้วยการนำจำนวนทั้งหมดที่ให้มารวมอยู่ข้างเดียวกันในรูปของโจทย์และนำเครื่องหมายเท่ากับมาต่อจากโจทย์ที่สร้างขึ้นใหม่เพื่อหาคำตอบ | S21 วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของประโยคเปิดที่กำหนดให้ว่าอยู่ในรูปของโจทย์เท่ากับคำตอบ โดยด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับคือโจทย์ ส่วนอีกด้านของเครื่องหมายเท่ากับคือคำตอบ ดังนั้นจึงไม่สนใจจำนวนอื่นที่อยู่ข้างเดียวกันกับคำตอบ | S31 วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูปของผลลัพธ์ทางซ้ายมือเท่ากับผลลัพธ์ทางขวามือของประโยคเปิด | S41 วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูปของ นิพจน์ทางซ้ายมือเท่ากับนิพจน์ทางขวามือของประโยคเปิด |
| S12 มองประโยคเปิดเป็น 2 กลุ่มคือ กลุ่มของจำนวนที่กำหนดให้ทั้งหมดกับกลุ่มของคำตอบที่เป็นผลจากการดำเนินการของกลุ่มของจำนวน จึงไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด | S22 มองประโยคเปิดเป็น 2 ส่วนคือส่วนของจำนวนที่อยู่ด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับกับส่วนของคำตอบ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด | S32 มองประโยคเปิดเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนของผลลัพธ์ทางซ้ายมือกับส่วนของผลลัพธ์ทางขวามือ ทำให้ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคออกมาได้ หรือมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด | S42 มองประโยคเปิดในลักษณะที่เป็นองค์รวมทั้งประโยค ไม่ได้แยกพิจารณาเป็นส่วนๆ จึงทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด |

| ระดับที่ 1 | ระดับที่ 2 | ระดับที่ 3 | ระดับที่ 4 |
|---|---|---|---|
| S13 หาคำตอบของประโยคเปิด โดยการนำจำนวนที่กำหนดให้ทั้งหมดในประโยคเปิดมาดำเนินการกัน แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้เติมลงในช่องว่าง โดยไม่สนใจว่าช่องว่างจะอยู่ในตำแหน่งใด ซึ่งเป็นการดำเนินการภายใต้การแปลงประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูปแบบใหม่ ทั้งยังไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างจะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน | S23 หาคำตอบ โดยการนำตัวเลขที่อยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับในประโยคเปิดมาดำเนินการกันแล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาเติมลงในช่องว่างโดยไม่ได้พิจารณา หรือให้ความสนใจกับจำนวนอื่นที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ ซึ่งเป็นผลให้ไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะเติมลงในช่องว่างจะต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน | S33 หาคำตอบ โดยใช้เหตุผลเชิงการคำนวณ นั่นคือ คำนวณผลลัพธ์ทางด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ แล้วนำมาลบกับจำนวนที่เหลือที่อยู่อีกด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ จึงทำให้สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน | S43 หาคำตอบโดยใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ที่เกิดจากการพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยค จึงทำให้สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน |

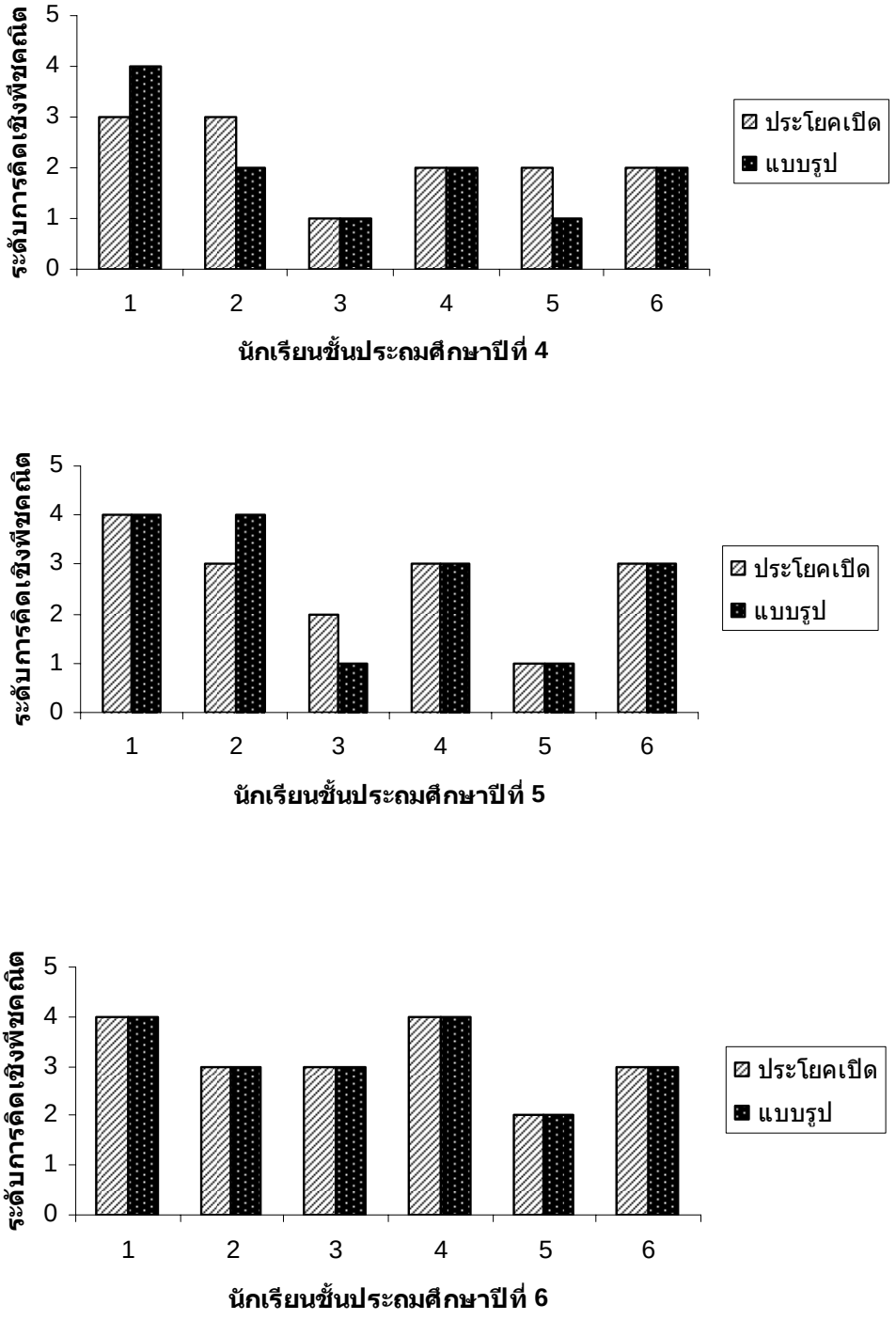
ผลการวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลายแสดงได้ดังภาพที่ 5 ดังนี้




ภาพ 5 แสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลาย

จากรูปภาพที่ 5 นักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตอยู่ในระดับที่ 1 มีจำนวน 2 คน เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 1 คน และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 1 คน นักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตอยู่ในระดับที่ 2 มีจำนวน 5 คน เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 3 คน นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 1 คน และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 1 คน นักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตอยู่ในระดับที่ 3 มีจำนวน 6 คน เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 1 คน นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 2 คน และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 3 คน นักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตอยู่ในระดับที่ 4 มีจำนวน 5 คน เป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 1 คน นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 2 คน และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 จำนวน 2 คน

ผลการวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดและแบบรูปของนักเรียนแต่ละคนแยกตามระดับชั้นแสดงได้ดังภาพที่ 6 ดังนี้




ภาพ 6 แสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตแยกตามระดับชั้น

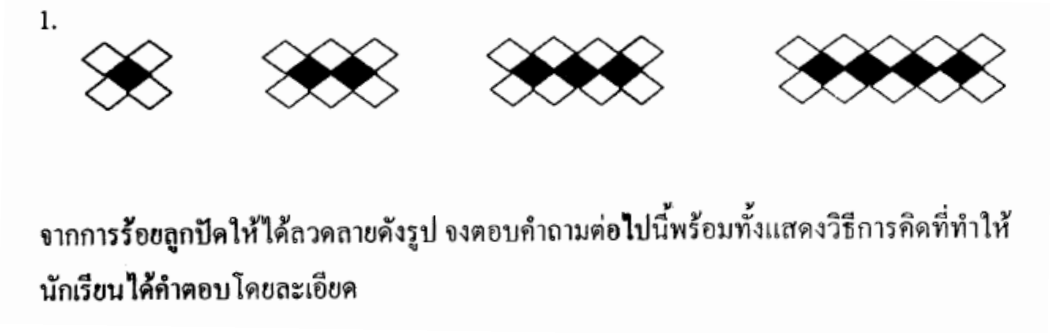
จากภาพที่ 6 นักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดและแบบรูปอยู่ในระดับเดียวกันมี 13 คน ส่วนนักเรียนอีกจำนวน 5 คนมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดและแบบรูปต่างกันอยู่ 1 ระดับ

นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดและแบบรูปอยู่ในระดับเดียวกันจำนวน 3 คน ส่วนนักเรียนอีกจำนวน 3 คนมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดและแบบรูปต่างกันอยู่ 1 ระดับ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดและแบบรูปอยู่ในระดับเดียวกันจำนวน 4 คน ส่วนนักเรียนอีกจำนวน 2 คน มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดและแบบรูปต่างกันอยู่ 1 ระดับ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดและแบบรูปอยู่ในระดับเดียวกันทั้งหมดทุกคน

ผลการวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาตอนปลายแยกตามระดับการคิดเป็นดังนี้

**ระดับที่ 1** นักเรียนที่มีระดับการคิดอยู่ในระดับนี้มีความสับสนและไม่เข้าใจสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ทำในแบบทดสอบ นักเรียนจะไม่ตอบคำถาม หรือบางคนตอบคำถามโดยการเดาโดยไม่สนใจใช้ข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้

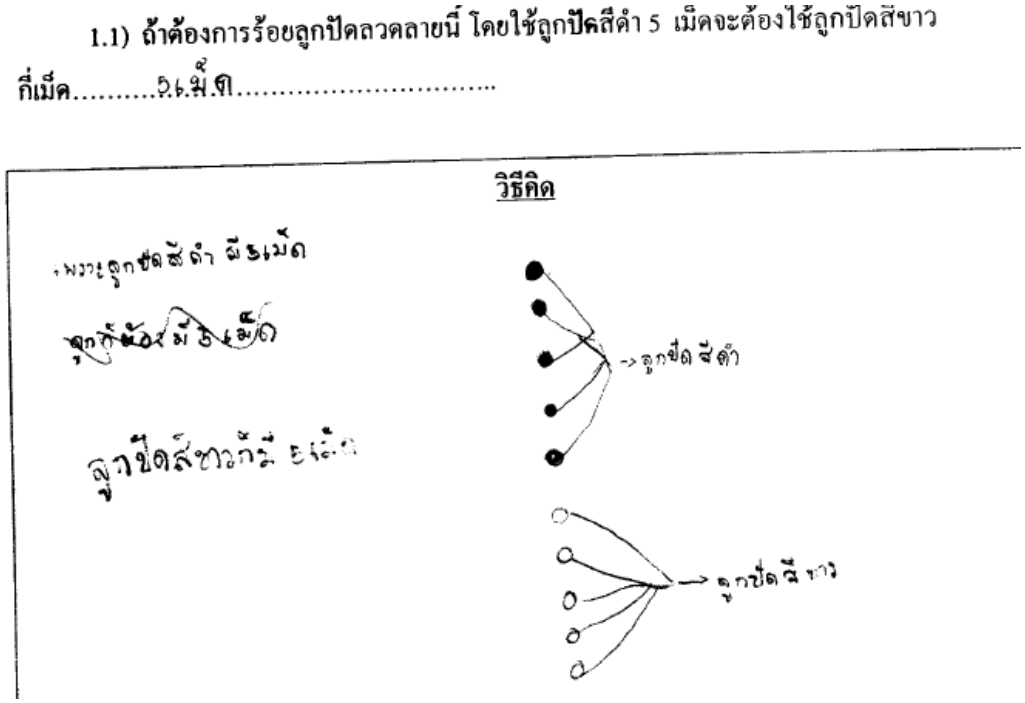
ในเรื่องแบบรูป นักเรียนไม่สามารถอธิบายความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ของแบบรูปที่กำหนดให้ เนื่องจากเมื่อกำหนดแบบรูปให้นักเรียนไม่สามารถหาพจน์ถัดไป หรือพจน์ใกล้เคียง หรือพจน์ที่อยู่ไกล และไม่สามารถหาพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ ตัวอย่างเช่น เมื่อกำหนดแบบรูปจากการร้อยลูกปัดให้ได้ลวดลายดังภาพที่ 7




ภาพ 7 แสดงสถานการณ์ปัญหาในแบบทดสอบเรื่องแบบรูปที่เกิดจากการร้อยลูกปัด

จากภาพที่ 7 โจทย์ต้องการให้นักเรียนหาพจน์ถัดไปของแบบรูปนี้โดยถามว่าถ้าต้องการร้อยลูกปัดลวดลายนี้โดยใช้ลูกปัดสีดำ 5 เม็ด จะต้องใช้ลูกปัดสีขาวกี่เม็ด เด็กชายนักรบ ซึ่งเป็น

นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ตอบว่าจะต้องใช้ลูกปัดสีขาว 5 เม็ด เท่ากับลูกปัดสีดำ โดยไม่สนใจแบบรูปของลวดลายลูกปัดที่โจทย์กำหนดให้ ดังภาพที่ 8




ภาพ 8 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูป ข้อ 1.1 ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 1

จากภาพที่ 8 พบว่า เด็กชายนักรบคิดว่าจำนวนลูกปัดสีขาวจะต้องเท่ากับจำนวนลูกปัดสีดำที่กำหนดให้ ฉะนั้นเมื่อโจทย์กำหนดลูกปัดสีดำให้ 5 เม็ด เด็กชายนักรบจึงตอบว่าต้องใช้ลูกปัดสีขาว 5 เม็ดเช่นกัน โดยไม่ได้คำถึงความสัมพันธ์ของแบบรูปที่เกิดจากลวดลายของลูกปัดเลย ดังบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

| | |
|---|---|
| ครู | อ่านโจทย์ซิคะ โจทย์ให้อะไรมาบ้างค่ะ |
| นักเรียน | ถ้าต้องการร้อยลูกปัดลวดลายนี้ โดยใช้ลูกปัดสีดำ 5 เม็ด จะต้องใช้ลูกปัดสีขาวกี่เม็ด |
| ครู | ค่ะ แล้วต้องใช้ลูกปัดสีขาวกี่เม็ดคะ |
| นักเรียน | 5 เม็ดครับ |
| ครู | หนูได้มาได้ยังไงคะ |

นักเรียน เพราะลูกสีดำมี 5 เม็ดครับ

ครู อืม ลูกสีดำมี 5 เม็ด หนูก็เลยได้ลูกสีขาว...

นักเรียน 5 เม็ด เท่ากันครับ

ครู ค่ะ ไหนลองดูโจทย์ดี ๆ แล้วบอกครูซิโจทย์ให้อะไรเรามาบ้างค่ะ

นักเรียน ให้ลูกปัดสีดำ 5 เม็ด แล้วให้หาลูกปัดสีขาวครับ

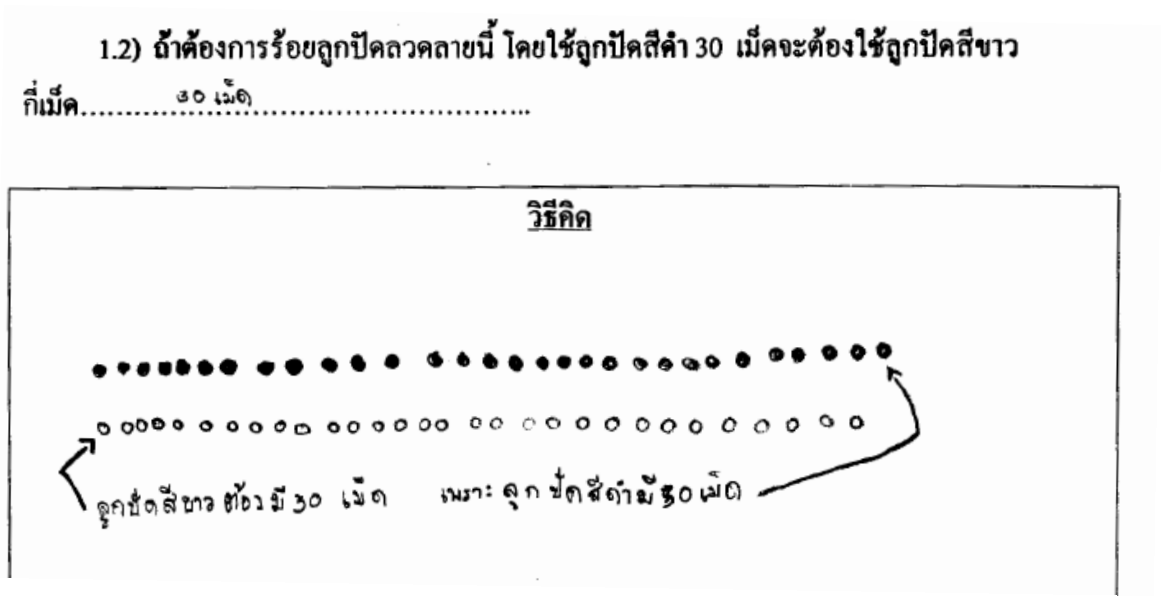
ครู แล้วตรงนี้หละรู้ไหมคะว่าคืออะไร (ครูชี้ไปที่แบบรูปในโจทย์)

นักเรียน ไม่รู้ครับ

ครู แล้วตอนหาคำตอบหนูได้ดูตรงนี้บ้างไหมคะ (ครูชี้ไปที่แบบรูปในโจทย์)

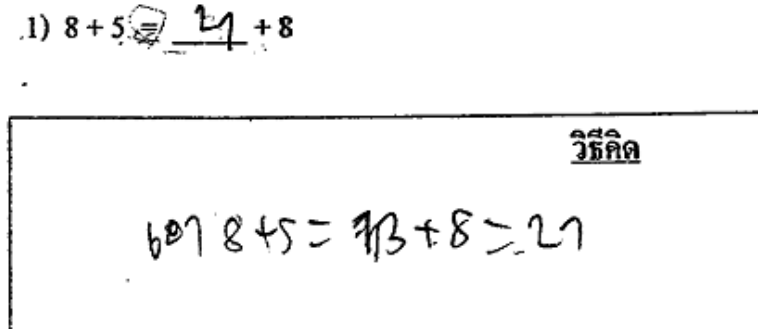
นักเรียน ไม่ครับ ผมดูแค่ว่ามีลูกปัดสีดำกี่ลูก

เมื่อโจทย์ต้องการให้นักเรียนหาพจน์ที่อยู่ไกลออกไป โดยถามว่าถ้าต้องการร้อยลูกปัดลวดลายนี้โดยใช้ลูกปัดสีดำ 30 เม็ด จะต้องใช้ลูกปัดสีขาวกี่เม็ด เด็กชายนักรบยังคงตอบในทำนองเดียวกันกับข้อ1.1 ข้างต้น ว่าใช้ลูกปัดสีขาว 30 เม็ด ดังภาพที่ 9




ภาพ 9 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูป ข้อ 1.2 ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 1

ในเรื่องการคิดเชิงพีชคณิตเกี่ยวกับประโยคเปิดของจำนวน นักเรียนจะมีความสับสนและไม่มีความเข้าใจเกี่ยวกับประโยคเปิด เนื่องจากนักเรียนไม่สามารถหาจำนวนที่เป็นคำตอบของประโยคเปิดได้ เช่น เมื่อกำหนดประโยคเปิด $8+5=_____+8$ จำนวนที่อยู่ในช่องว่างซึ่งเป็นคำตอบของประโยคเปิดนี้คือ 5 เนื่องจากเมื่อเติม 5 ลงในช่องว่างแล้วจะได้ว่าประโยค $8+5=\underline{\ 5\ }+8$ เป็นจริง เด็กชายก้องภพ ซึ่งเป็นนักเรียนที่อยู่ในระดับนี้จะหาคำตอบด้วยการนำ 8 บวกกับ 5 ได้ผลลัพธ์เป็น 13 จากนั้นนำ 13 ไปบวกกับ 8 ซึ่งเป็นจำนวนที่อยู่อีกข้างหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ แล้วได้คำตอบเป็น 21 ดังภาพที่ 10




ภาพ 10 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดข้อ 1) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 1

จากภาพที่ 10 พบว่า เด็กชายก้องภพนำ 8 5 และ 8 มาบวกกันทั้งหมดได้คำตอบเป็น 21 โดยไม่ได้สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ ซึ่งจากการสัมภาษณ์เด็กชายก้องภพกล่าวว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างซึ่งเป็นคำตอบนั้น จะต้องเป็นผลลัพธ์ของการนำจำนวนทางซ้ายมือและขวามือของเครื่องหมายเท่ากับมาบวกหรือลบกันทั้งหมดตามเครื่องหมายที่ปรากฏ ดังบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

| | |
|---|---|
| ครู | โจทย์เขาให้ทำอะไรค่ะ |
| นักเรียน | เอา 8 บวก 5 ได้เท่ากับเท่าไร แล้วก็เอามาบวก 8 อีกทีครับ |
| ครู | แล้วหนูทำอย่างไงค่ะ |
| นักเรียน | ก็เอา 8 บวก 5 เท่ากับ 13 แล้วเอา13 มาบวก 8 ได้เท่ากับ 21 เลยตอบ 21 ครับ |
| ครู | แสดงว่าช่องตรงนี้ ( ชี้ตรงช่องว่างที่โจทย์ _____ ) เป็นอะไรคะ |
| นักเรียน | เป็นคำตอบครับ |

ครู อืม หนูเอาจำนวนที่เขาให้มาบวกกัน คือ 8 บวก 5 ได้เท่าไรแล้วหนูก็เอาไปบวกกับ 8 ต่อใช่ไหมคะ

นักเรียน ใช่ครับ

ครู ทำไมหนูถึงเอาไปบวกกับ 8 ต่อทำไมหนูถึงไม่ลบด้วย 8 ค่ะ

นักเรียน เพราะว่าเครื่องหมายเป็นเครื่องหมายบวกครับ

ครู ไหน ตรงไหนเป็นเครื่องหมายบวกค่ะ

นักเรียน ตรงนี้ครับ (เด็กชี้เครื่องหมายบวกหน้าเลข 8 ทางฝั่งขวาของเครื่องหมายเท่ากับ)

ครู แสดงว่า ถ้าคุณครูให้เป็น 3 + 4 + 2 = _____ - 5 หนูจะทำอย่างไรค่ะ

นักเรียน เอา 3 มาบวก 4 ได้ 7 แล้วเอา 7 มาบวก 2 อีกทีได้ 9 เสร็จแล้วก็เอา 9 ลบ 5 ก็จะได้ 4 ครับ

ครู แล้วหนูเอา 4 ไปใส่ตรงไหนคะ

นักเรียน ตรงช่องว่างครับ เพราะเป็นคำตอบ

ครู ค่ะ งั้นคุณครูขอถามหนูหน่อยว่า อันนี้คืออะไรคะ (ครูชี้เครื่องหมาย = ที่โจทย์)

นักเรียน เครื่องหมายเท่ากับครับ

ครู หมายความว่าอย่างไรคะ

นักเรียน ให้เขียนคำตอบลงในช่องว่างครับ

ครู แล้วคำตอบหามาจากไหนค่ะ

นักเรียน หาจากการเอามาบวก ลบ คูณ หาร ครับ

ครู เอาอะไรมาบวก ลบ คูณ กันคะ

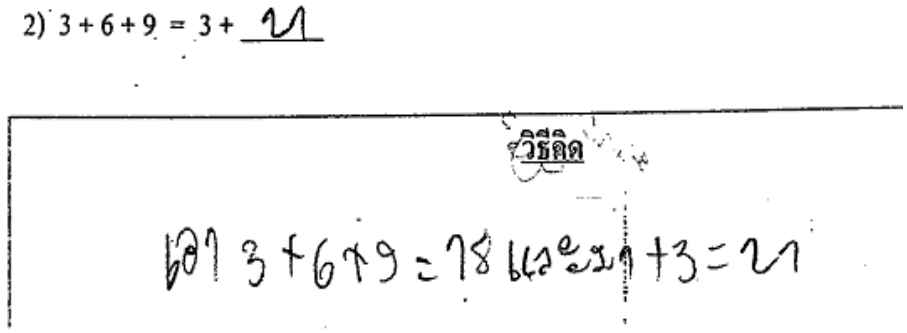
นักเรียน ก็เอาตัวเลขที่โจทย์ให้มาบวก ลบ คูณ หาร กันครับ

ครู เอามาบวก ลบ กันหมดเลยตามเครื่องหมายที่หนูเห็นในโจทย์เหมือนที่ทำให้ครูดูเมื่อกี๊ใช่มั้ยค่ะ

นักเรียน ครับ พอได้แล้วก็ตอบในช่องว่าง

เมื่อกำหนดประโยคเปิด $3+6+9=3+$_____ วิธีการหาคำตอบของประโยคเปิดซึ่งเป็นจำนวนที่อยู่ในช่องว่างนี้หาได้จากนำ 6 บวกกับ 9 ได้ผลลัพธ์เท่ากับ 15 เมื่อนำไปเติมลงในช่องว่างจะได้ว่าประโยค $3+6+9=3+$ 15 เป็นจริง เด็กชายก้องภพจะหาคำตอบของประโยคเปิดข้อนี้ในทำนองเดียวกันกับประโยคข้างต้น โดยหาผลลัพธ์ของนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมาย

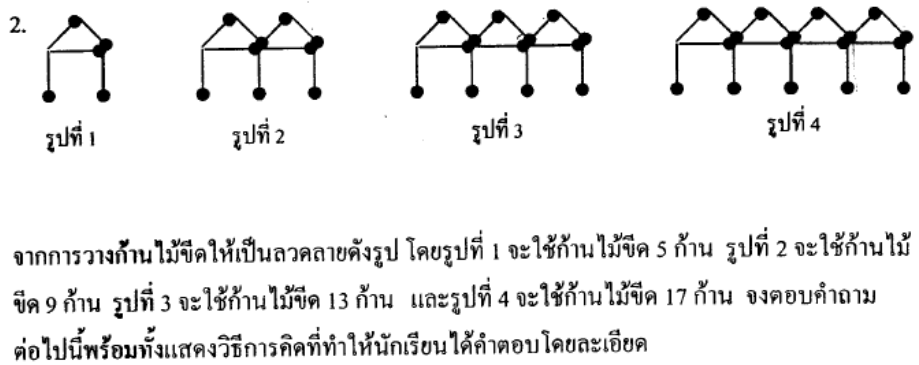
เท่ากับนั่นคือนำ 3 บวก 6 บวก 9 ได้ผลลัพธ์เท่ากับ 18 จากนั้นนำ 18 ไปบวกกับ 3 ซึ่งอยู่อีกข้างของเครื่องหมายเท่ากับแล้วได้คำตอบของประโยคเปิดเท่ากับ 21 ดังภาพที่ 11




ภาพ 11 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดข้อ 2) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 1

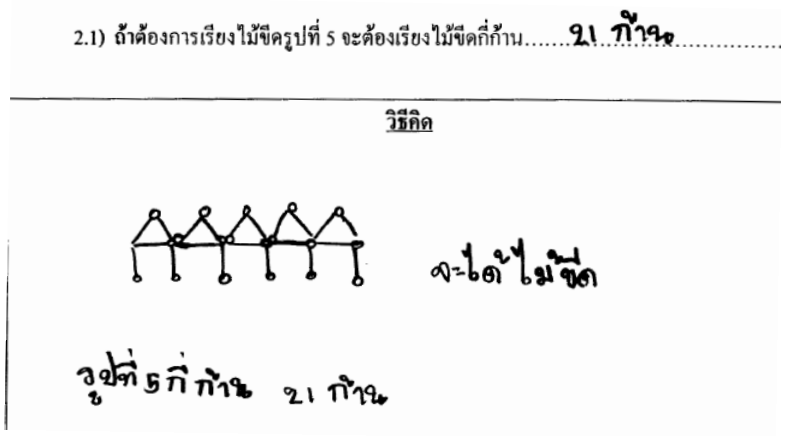
**ระดับที่ 2** นักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตอยู่ในระดับนี้มีความเข้าใจสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ทำในแบบทดสอบ นักเรียนสามารถตอบคำถามเกี่ยวกับแบบรูปได้ แต่ยังไม่สามารถตอบคำถามในเรื่องประโยคเปิดเกี่ยวกับจำนวนได้ถูกต้อง

ในเรื่องเกี่ยวกับแบบรูป นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวกับแบบรูป สามารถหาพจน์ถัดไป พจน์ใกล้เคียง พจน์ที่อยู่ไกลของแบบรูปที่กำหนดให้ได้โดยการบวกด้วยจำนวนที่เป็นผลต่างระหว่างพจน์ที่กำหนดให้ แต่ยังไม่สามารถหาพจน์ทั่วไปได้ถูกต้อง เช่น โจทย์กำหนดให้นักเรียนหาพจน์ต่างๆ ของแบบรูป โดยกำหนดแบบรูปที่เกิดจากการวางก้านไม้ขีดให้เป็นลวดลายดังภาพที่ 12




ภาพ 12 แสดงโจทย์แบบรูปที่เกิดจากการวางก้านไม้ขีดให้เป็นลวดลาย

จากภาพที่ 12 รูปที่ 1 จะใช้ก้านไม้ขีด 5 ก้าน รูปที่ 2 จะใช้ก้านไม้ขีด 9 ก้าน รูปที่ 3 จะใช้ก้านไม้ขีด 13 ก้าน และรูปที่ 4 จะใช้ก้านไม้ขีด 17 ก้าน เด็กหญิงธารา ซึ่งเป็นนักเรียนในระดับนี้สามารถหาจำนวนก้านไม้ขีดในรูปที่ 5 ซึ่งเป็นพจน์ถัดไปได้ โดยอาศัยการวาดรูป ดังแสดงในภาพที่ 13




ภาพ 13 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูปข้อ 2.1 ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 2

จากภาพที่ 13 พบว่า เด็กหญิงธาราได้คำตอบเป็น 21 โดยคำตอบที่ได้มาจากการวาดรูปในลักษณะเดียวกันกับแบบรูปที่โจทย์กำหนดให้ ซึ่งจากการสัมภาษณ์เด็กหญิงธารากล่าวว่า ในการวาดรูปที่ 5 ก็วาดเหมือนรูปที่ 4 แต่ต้องเพิ่มไม้ขีดอีก 4 ก้าน และถ้าจะวาดรูปต่อไปก็ต้องเพิ่มไม้ขีดไปอีก 4 ก้านเรื่อยๆ ดังบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

| | |
|---|---|
| ครู | โจทย์ให้อะไรมาบ้างคะ |
| นักเรียน | ให้ไม้ขีดไฟ เค้าให้วาดไม้ขีดไฟเป็นรูปบ้าน |
| ครู | แล้วหนูทำไงคะ |
| นักเรียน | วาดรูปแล้วจะได้ไม้ขีดรูปที่ 5 21 ก้าน |
| ครู | หนูวาดอย่างไงค่ะ |
| นักเรียน | วาดอย่างนี้ (นักเรียนชี้ไปที่รูปวิธีคิด) |
| ครู | แล้วหนูรู้ได้อย่างไงว่าจะต้องวาดเป็นอย่างนี้คะ (ครูชี้ไปที่รูปวิธีคิด) |
| นักเรียน | ก็ดูตามตรงนี้ค่ะ (นักเรียนชี้รูปที่ 4 ในโจทย์) |
| ครู | แบบตรงนี้บอกอะไรหนูบ้างคะ (ครูชี้ไปที่รูป 4 ในโจทย์) |
| นักเรียน | รู้ว่าจะได้วาดยังไง |

ครู แล้วทำไมหนูไม่วาดรูปที่ 5 ให้เหมือนรูปที่ 4 เลยหละคะ

นักเรียน มันแทนกันไม่ได้ค่ะ

ครู เพราะอะไรค่ะ

นักเรียน เพราะว่าไม้ขีดไฟยังไม่ครบ

ครู ไม่ครบอย่างไงคะ หนูรู้ได้อย่างไงว่ายังไม่ครบ

นักเรียน ตรงนี้ (ชี้รูปที่ 1) จะใช้ไม้ขีด 5 ก้าน รูปที่ 2 จะใช้ไม้ขีด 9 ก้าน รูปที่ 3 ใช้ไม้ขีด 13 ก้าน รูปที่ 4 ใช้ไม้ขีด 17 ก้าน

ครู ค่ะแล้วอย่างไงต่อ

นักเรียน เค้าถามรูปที่ 5 หนูเลยวาดต่อไปอีก 4 ก้าน

ครู หนูรู้ได้อย่างไงคะว่าต้องวาดไม้ขีดเพิ่มไปอีก 4 ก้าน หนูดูตรงไหนคะ

นักเรียน ดูจากตรงนี้ค่ะ อันนี้เค้าต้องเติมไม้ขีด 4 ก้าน จึงจะได้ 17 ก้าน (นักเรียนชี้รูปที่ 4 ในโจทย์)

ครู อ๋อ ถ้าไม่เติมล่ะเป็นรูปที่เท่าไหร่คะ

นักเรียน เป็นรูปที่ 3

ครู แล้วรูปที่ 2 กับรูปที่ 3 ล่ะ มันต่างกันยังไงคะ

นักเรียน ต่างไม้ขีดอีก 4 ก้าน ค่ะ

ครู ทีนี้เวลาหนูวาดรูปที่ 5 หนูวาดอย่างไงคะ

นักเรียน เอามาจากรูปที่ 4 แล้วเติมไปอีก 4 ก้าน ค่ะ

ครู แล้วทำยังไงต่อล่ะทีนี้หนูจึงจะได้คำตอบ

นักเรียน แล้วนับ

ครู นับแล้วได้กี่ก้านคะ

นักเรียน 21 ก้าน ค่ะ

ครู ถ้าครูให้หาไม้ขีดในรูปที่ 6 ล่ะ หนูจะทำยังไงคะ

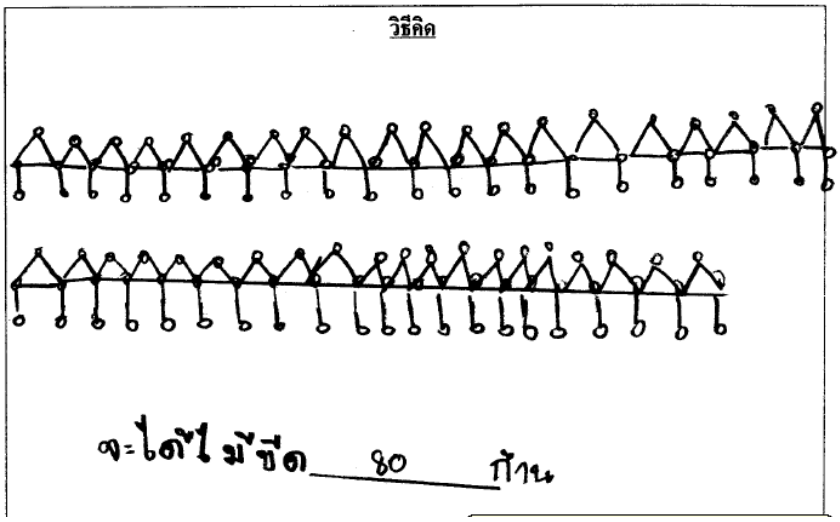
นักเรียน เราก็ต้องเพิ่มไม้ขีดอีก 4 ก้านค่ะ

ครู ถ้าหารูปที่ 7 ล่ะ ทำไง

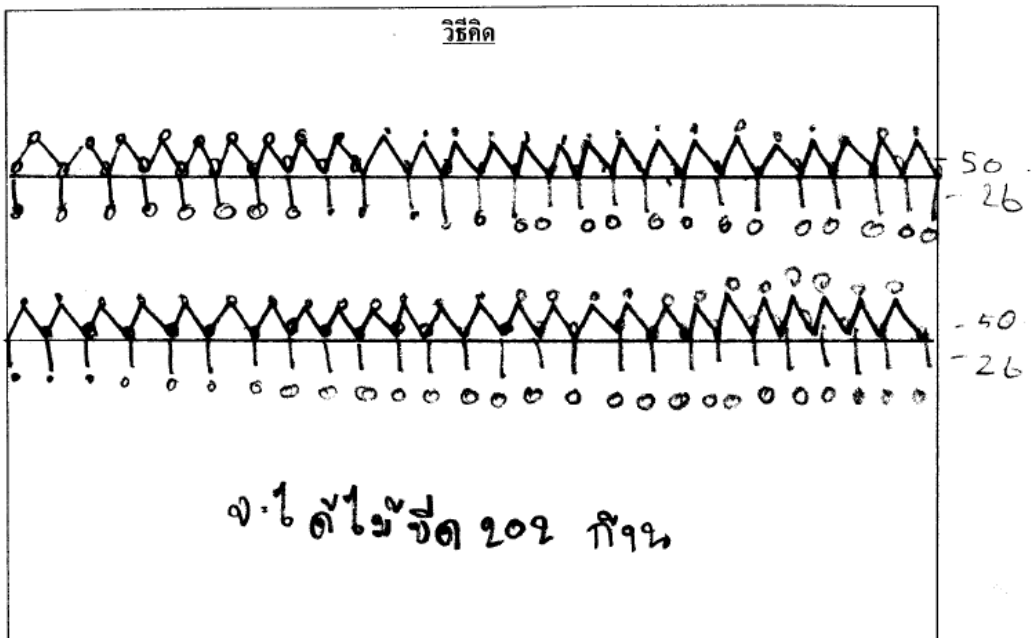
นักเรียน ก็ต้องเติมไปอีก 4 ก้าน เรื่อยๆ

เมื่อโจทย์กำหนดให้หาพจน์ที่อยู่ไกล เด็กหญิงธารายังคงใช้วิธีการวาดรูปซึ่งเป็นการบวกด้วยผลต่างร่วมไปเรื่อยๆ จนถึงพจน์ที่โจทย์กำหนดให้ ดังภาพที่ 14

2.2) ถ้าต้องการเรียงไม้ขีดรูปที่ 40 จะต้องเรียงไม้ขีดกี่ก้าน.....80 ก้าน.....



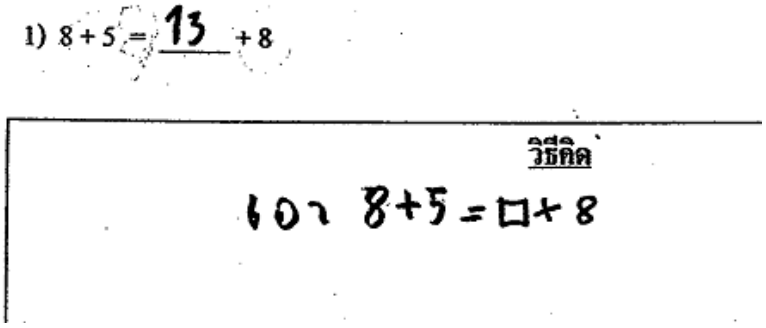

2.3) ถ้าต้องการเรียงไม้ขีดรูปที่ 100 จะต้องเรียงไม้ขีดกี่ก้าน.....202.....




ภาพ 14 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูปข้อ 2.2 และ 2.3 ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 2

จากภาพที่ 14 จะเห็นว่า เมื่อโจทย์กำหนดให้หาจำนวนไม้ขีดในรูปที่ 40 และรูปที่ 100 เด็กหญิงธาราจะหาคำตอบโดยใช้การวาดรูปจนกระทั่งถึงรูปที่ 40 และรูปที่ 100

ในเรื่องประโยคเปิดของจำนวน นักเรียนในระดับนี้ยังไม่เข้าใจความหมายของประโยคเปิดที่มีเครื่องหมายเท่ากับ (=) นักเรียนจะเข้าใจว่านิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับจะเป็นโจทย์ส่วนที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับจะเป็นคำตอบที่ได้จากการดำเนินการของนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับ เช่น เมื่อกำหนดให้หาคำตอบหรือจำนวนที่อยู่ในช่องว่างของประโยคเปิด $8+5=_____+8$ คำตอบในช่องว่างของประโยคเปิดนี้คือ 5 ซึ่งเป็นจริงตามสมบัติการสลับที่ของการบวก และจะได้ว่าประโยค $8+5=\underline{\ 5\ }+8$ เป็นจริง แต่เด็กชายวายุ ซึ่งเป็นนักเรียนในระดับนี้จะหาคำตอบโดยการหาผลบวกของนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับด้วยการหาผลบวกของ 8 กับ 5 ซึ่งได้ผลลัพธ์เท่ากับ 13 ดังนั้นนักเรียนจึงเข้าใจว่าจำนวนที่อยู่ในช่องว่างทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับคือ 13 โดยไม่สนใจว่าประโยคที่นักเรียนได้คือ $8+5=\underline{\ 13\ }+8$ เป็นเท็จ ดังแสดงในภาพที่ 15




ภาพ 15 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 1) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 2

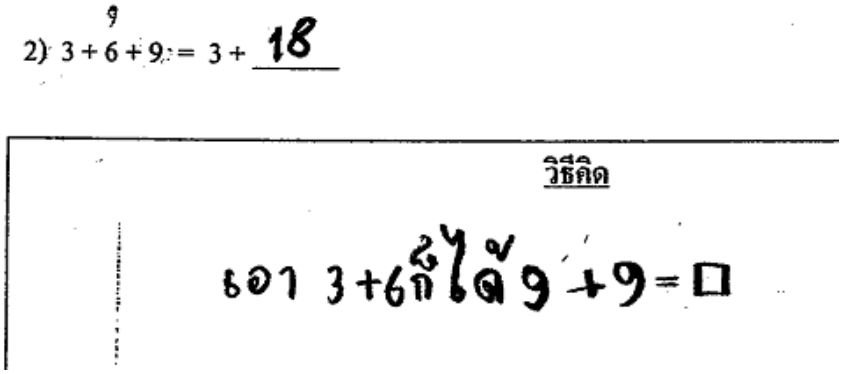
จากภาพที่ 15 พบว่า เด็กชายวายุได้คำตอบเป็น 13 โดยคำตอบที่ได้เกิดจากการนำ 8 และ 5 ซึ่งอยู่ทางซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับมาบวกกัน โดยเด็กชายวายุไม่สนใจเลข 8 ที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับเลย ซึ่งจากการสัมภาษณ์เด็กชายวายุกล่าวว่า หลังเครื่องหมายเท่ากับจะเป็นคำตอบที่ได้จากการคิดคำนวณตัวเลขที่อยู่ทางด้านหน้าของเครื่องหมายเท่ากับ ดังบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

ครู โจทย์ให้ทำอะไรคะ

นักเรียน ให้เติมจำนวนลงในช่องว่าง พร้อมทั้งแสดงวิธีการคิดที่ทำให้นักเรียนได้คำตอบมาโดยละเอียด

| | |
|---|---|
| ครู | ค่ะ แล้วข้อนี้หนูทำอย่างไงคะ |
| นักเรียน | เอา 8 มาบวกกับ 5 ได้ 13 แล้วก็มาใส่ในช่องครับ |
| ครู | ทำไมหนูเอา 8 มาบวกกับ 5 แล้วเอามาใส่คะ |
| นักเรียน | เพราะคุณครูเคยสอนไว้ |
| ครู | อืม แล้ว 8 ตัวนี้หละ (ครูชี้เลข 8 ทางด้านขวาของเครื่องหมายเท่ากับในโจทย์) ต้องใช้ในการหาคำตอบมั้ยคะ |
| นักเรียน | ไม่รู้ครับ |
| ครู | งั้นคุณครูถามว่าอันนี้เครื่องหมายอะไรคะ ... (ครูชี้ไปที่ “=”) |
| นักเรียน | เท่ากับครับ |
| ครู | หมายความว่ายังไงคะ |
| นักเรียน | ไม่รู้ครับ เออ...พอเวลาเราหาคำตอบได้ก็เอามาเขียนใส่ด้านหลังเท่ากับครับ |
| ครู | อ๋อ แสดงว่าด้านหลังเครื่องหมายเท่ากับจะเป็นคำตอบ เหรอครับ |
| นักเรียน | ครับ |
| ครู | แล้วคำตอบที่จะเอามาใส่หลังเท่ากับจะหามาจากไหนค่ะ |
| นักเรียน | ก็คิดเลข พอคิดเสร็จก็เอามาใส่ |
| ครู | เอาเลขตรงไหนมาคิดคะ |
| นักเรียน | ก็ข้างหน้าเท่ากับที่โจทย์ให้มา |
| ครู | อ๋อ เอาเลขข้างหน้าเครื่องหมายเท่ากับมาคิด แล้วเลขข้างหลังเท่ากับหละ คิดมั้ย |
| นักเรียน | ไม่รู้ครับ ผมเข้าใจแบบนี้ |

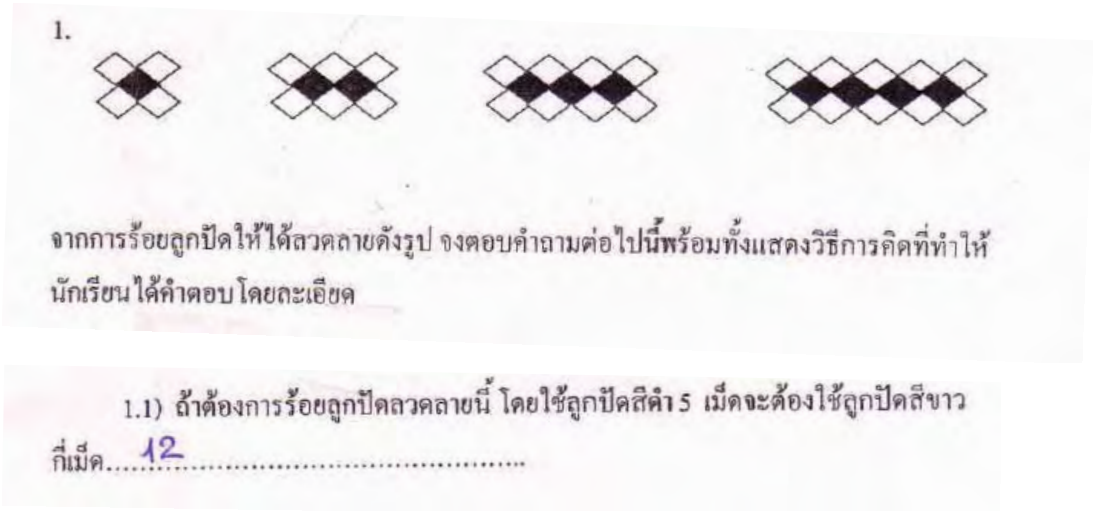
เมื่อกำหนดประโยคเปิดที่มีจำนวนนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับให้มี 3 พจน์ นักเรียนก็ยังคงหาคำตอบของประโยคเปิดด้วยการหาผลบวกของทั้งสามพจน์เหมือนเดิม เช่น หาคำตอบของ $3+6+9=3+_____$ คำตอบในช่องว่างของประโยคเปิดนี้หาได้จากผลบวกของ 6 กับ 9 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 15 และจะได้ว่าประโยค $3+6+9=3+\underline{\ 15\ }$ เป็นจริง แต่เด็กชายวายุจะหาคำตอบโดยการหาผลบวกของนิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับกล่าวคือ นำ 3 , 6 และ 9 มาบวกกัน ได้ผลลัพธ์เท่ากับ 18 โดยไม่สนใจว่าประโยคที่นักเรียนได้คือ $3+6+9=3+\underline{\ 18\ }$ เป็นเท็จ ดังภาพที่ 16

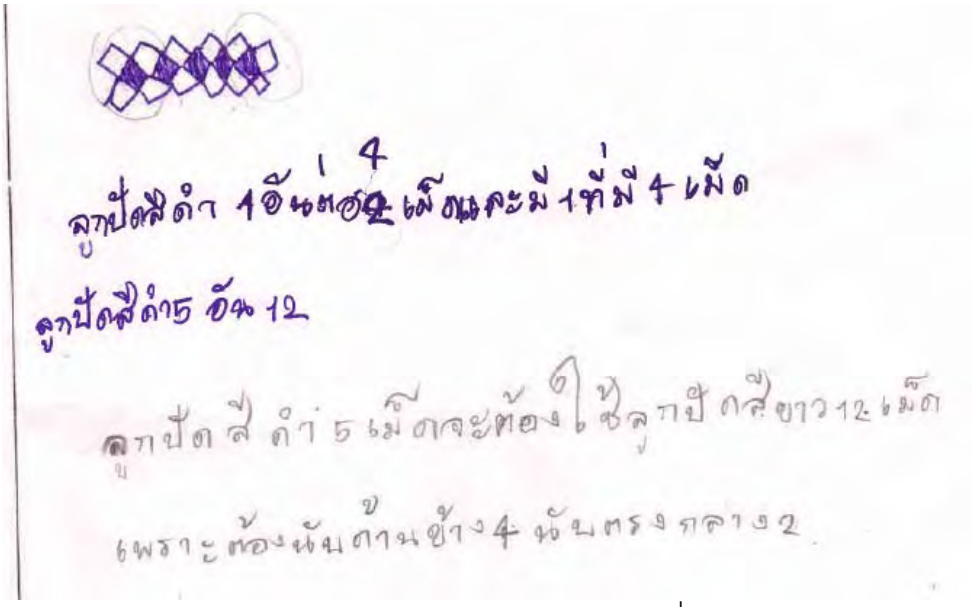



ภาพ 16 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 2) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 2

**ระดับที่** 3 นักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตอยู่ในระดับนี้จะสามารถตอบคำถามสิ่งที่โจทย์กำหนดในแบบทดสอบได้ แต่นักเรียนจะไม่สามารถแสดงวิธีการคิดหรืออธิบายวิธีคิดหาคำตอบได้อย่างชัดเจน

ในเรื่องแบบรูป เมื่อกำหนดแบบรูปให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของแบบรูปและสามารถใช้สูตรหาพจน์ที่อยู่ใกล้ หรือพจน์ที่อยู่ไกลได้อย่างถูกต้อง แต่จะไม่สามารถแสดงหรืออธิบายที่มาของสูตรที่นักเรียนใช้ได้อย่างถูกต้องชัดเจน เช่น เมื่อกำหนดแบบรูปที่เกิดจากลวดลายที่ได้การร้อยลูกปัดดังภาพที่ 17

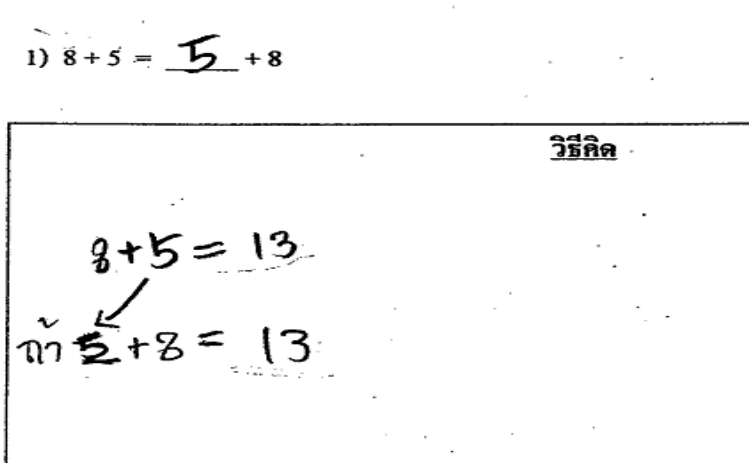





ภาพ 17 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูปข้อ 1.2 ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 3

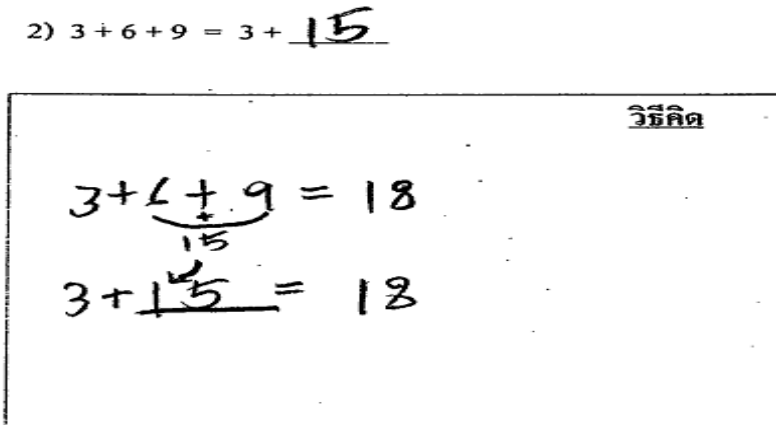
จากภาพที่ 17 จะเห็นว่า นักเรียนไม่ได้มองความสัมพันธ์ของแบบรูปในลักษณะการเพิ่มขึ้นกล่าวคือ ลูกปัดสีดำ 1 ลูก ใช้ลูกปัดสีขาว 4 ลูก ลูกปัดสีดำ 2 ลูก ใช้ลูกปัดสีขาว 6 ลูก นั่นคือจำนวนลูกปัดสีดำเพิ่มขึ้น 1 ลูก จำนวนลูกปัดสีขาวจะเพิ่มขึ้นทีละ 2 ลูก แต่นักเรียนสามารถมองความสัมพันธ์ระหว่างอัตราส่วนของจำนวนลูกปัดสีดำต่อจำนวนลูกปัดสีขาวในแต่ละรูป จากภาพวิธีคิดหาคำตอบของนักเรียนนั้นสรุปได้ว่า ลูกปัดสีดำ 1 ลูก จะต้องใช้ลูกปัดสีขาว 2 ลูก แต่ลูกปัดสีดำ 1 ลูกที่อยู่ด้านหน้าสุด จะใช้ลูกปัด 4 ลูก

ในเรื่องประโยคเปิดของจำนวน นักเรียนเข้าใจความหมายของประโยคเปิดที่มีเครื่องหมายเท่ากับ สามารถหาคำตอบของประโยคเปิดที่มีเครื่องหมายเท่ากับที่กำหนดให้โดยใช้การคิดคำนวณหาจำนวนที่แทนค่าในช่องว่างแล้วทำให้ได้นิพจน์ที่อยู่ทางซ้ายและขวาของเครื่องหมายเท่ากับแสดงแทนจำนวนที่เท่ากัน เช่น การหาคำตอบของประโยคเปิด $8+5=____+8$ นักเรียนหาผลบวกของจำนวนที่อยู่ทางด้านซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับซึ่งได้ 13 จากนั้นนักเรียนจึงพิจารณานิพจน์ที่อยู่ทางด้านขวาของเครื่องหมายเท่ากับพบว่าเมื่อเติม 5 ในช่องว่างแล้วก็จะได้ผลบวกเท่ากับ 13 เช่นกัน ดังนั้นนักเรียนจึงได้คำตอบของประโยคเปิดเป็น 5 ดังภาพที่ 18



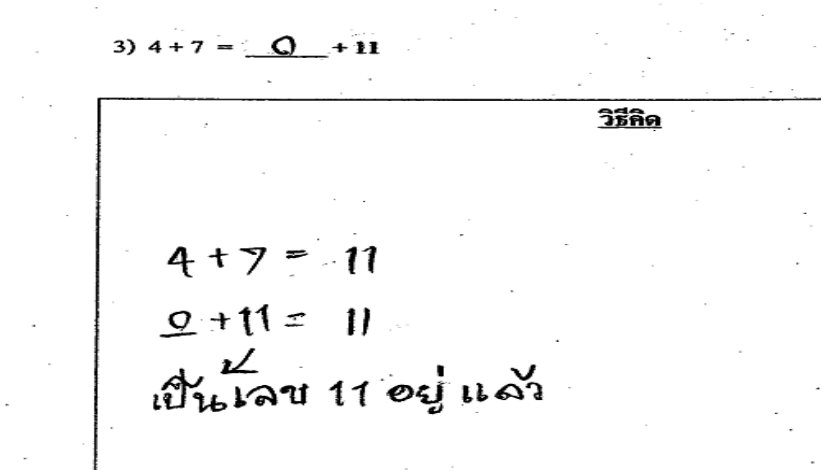

ภาพ 18 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 1) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 3

เมื่อกำหนดประโยคเปิดที่มีนิพจน์ที่มี 3 พจน์ เช่น ประโยคเปิด $3+6+9=3+____$ นักเรียนจะใช้การคิดคำนวณหาผลบวกของนิพจน์ทางซ้ายคือผลบวกของ 3, 6 และ 9 ซึ่งมีค่าเท่ากับ 18 จากนั้นนักเรียนพิจารณานิพจน์ที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับโดยการคิดคำนวณพบว่าผลรวมระหว่าง 6 กับ 9 ซึ่งมีเท่ากับ 15 จะเป็นคำตอบของประโยคเปิด ดังภาพที่ 19



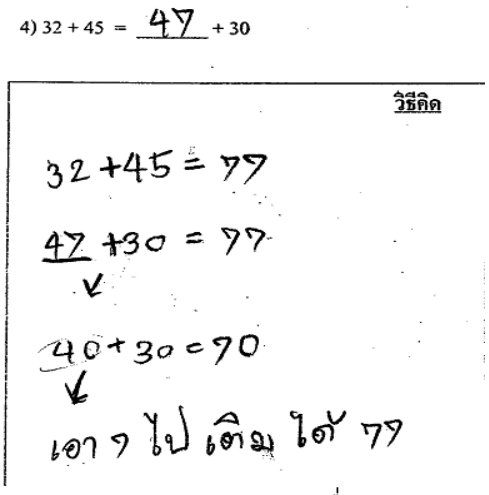

ภาพ 19 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 2) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 3

เมื่อกำหนดประโยคเปิดที่มีเครื่องหมายเท่ากับ โดยที่นิพจน์ทางซ้ายและนิพจน์ทางขวามีตัวเลขที่ต่างกันไปเช่น ประโยคเปิด $4+7=____+11$ นักเรียนก็คงยังสามารถใช้การคิดคำนวณหาคำตอบได้ถูกต้อง โดยการหาผลบวกของ 4 กับ 7 มีค่าเท่ากับ 11 ซึ่งนักเรียนพบว่าคำตอบของประโยคเปิดนี้คือ 0 ด้วยการคิดคำนวณ ดังภาพที่ 20




ภาพ 20 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 3) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 3

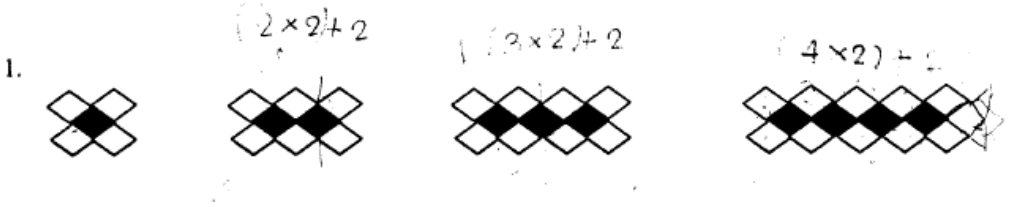
นอกจากนั้น นักเรียนยังสามารถใช้การคิดคำนวณในรูปแบบที่ช่วยให้เห็นคำตอบได้ง่ายขึ้น เช่น การหาคำตอบของประโยคเปิด $32+45=_____+30$ นักเรียนหาผลบวกของ 32 และ 45 ได้ผลลัพธ์เท่ากับ 77 ดังนั้นคำตอบที่อยู่ในช่องอาจจะทำได้โดยการนำ 77 ลบด้วย 30 ก็จะได้ว่า 47 เป็นคำตอบ นั่นคือ $32+45=\underline{47}+30$ แต่นักเรียนคิดคำนวณโดยเริ่มจากการบวกจำนวนเต็มสิบก่อนนั่นคือผลบวกของ 40 กับ 30 เท่ากับ 70 ดังนั้นนักเรียนจึงได้ว่าผลบวกของ 47 กับ 30 จะมีค่าเท่ากับ 77 นักเรียนได้คำตอบของประโยคเปิดนี้คือ 47 ดังภาพที่ 21




ภาพ 21 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 4) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 3

**ระดับที่ 4** นักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในระดับนี้ มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลหรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ สามารถนำข้อมูลหรือสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เหล่านั้นไปใช้แก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

ในเรื่องแบบรูป เมื่อกำหนดแบบรูปให้นักเรียนสามารถหาสูตรหรือพจน์ทั่วไปเพื่อใช้สำหรับการหาพจน์ถัดไป พจน์ใกล้ หรือพจน์ไกลได้ถูกต้อง ดังแสดงภาพที่ 22

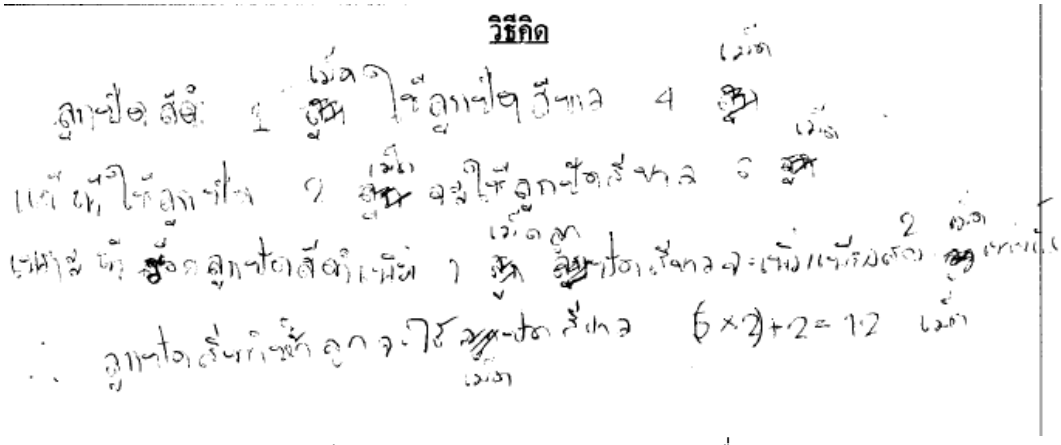



**จากการร้อยลูกปัดให้ได้ลวดลายดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมทั้งแสดงวิธีการคิดที่ทำให้นักเรียนได้คำตอบโดยละเอียด**

**1.1) ถ้าต้องการร้อยลูกปัดลวดลายนี้ โดยใช้ลูกปัดสีดำ 5 เม็ดจะต้องใช้ลูกปัดสีขาวกี่เม็ด**.....12 เม็ด.....

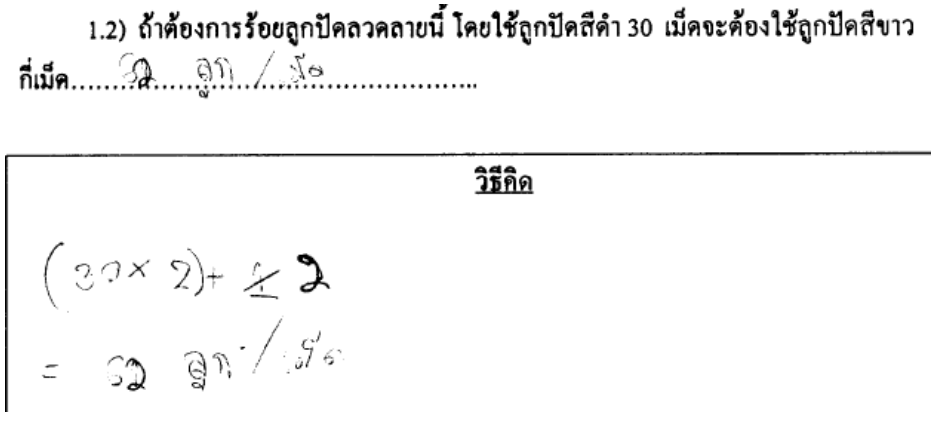
ภาพ 22 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูปข้อ 1.1) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 4

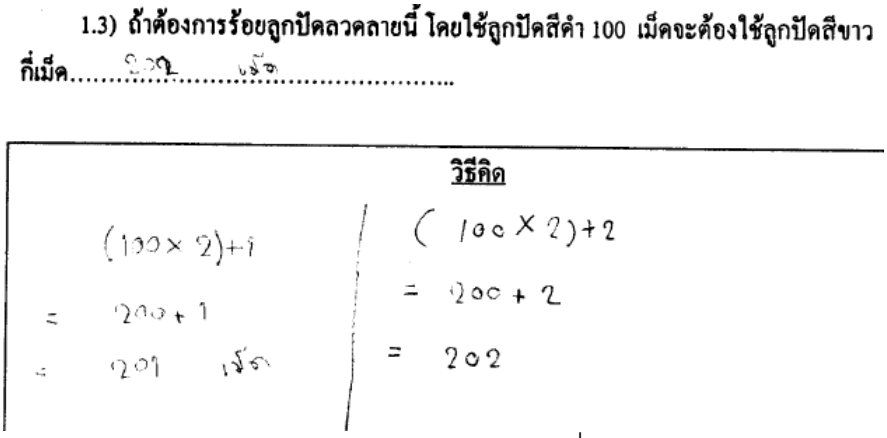
จากภาพที่ 22 เมื่อโจทย์กำหนดแบบรูปของลวดลายลูกปัดมาให้นักเรียนสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนลูกปัดสีขาวกับจำนวนลูกปัดสีดำรูปที่สองซึ่งมีลูกปัดสีดำ 2 ลูก สีขาว 6 ลูก หรือนักเรียนเขียนไว้เหนือภาพไว้เป็น $(2\times 2)+2$ รูปที่สามมีลูกปัดสีดำ 3 ลูก สีขาว 8 ลูก และนักเรียนเขียนไว้เหนือภาพไว้เป็น $(3\times 2)+2$ รูปที่สี่มีลูกปัดสีดำ 4 ลูก สีขาว 10 ลูก นักเรียนเขียนแสดง $(4\times 2)+2$ เมื่อโจทย์กำหนดให้นักเรียนหาจำนวนลูกปัดสีขาวในรูปที่ห้า นักเรียนเขียนแสดงวิธีการหาจำนวนลูกปัดสีขาวได้เป็น $(5\times 2)+2$ ดังภาพที่ 23




ภาพ 23 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูปข้อ 1.1)
ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 4

จากภาพวิธีหาจำนวนลูกปัดสีขาวของนักเรียนทำได้โดยการลำดับของรูปคูณด้วย 2 แล้วบวกด้วย 2 อีกครั้ง แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถหาสูตรหรือพจน์ทั่วไปของความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนลูกปัดสีขาวกับจำนวนลูกปัดสีดำได้ และสามารถใช้สูตรหรือพจน์ทั่วไปนั้นหาจำนวนลูกปัดในพจน์ที่อยู่ไกลเช่นพจน์ที่ 30 หรือพจน์ที่ 100 ได้ดังภาพที่ 24

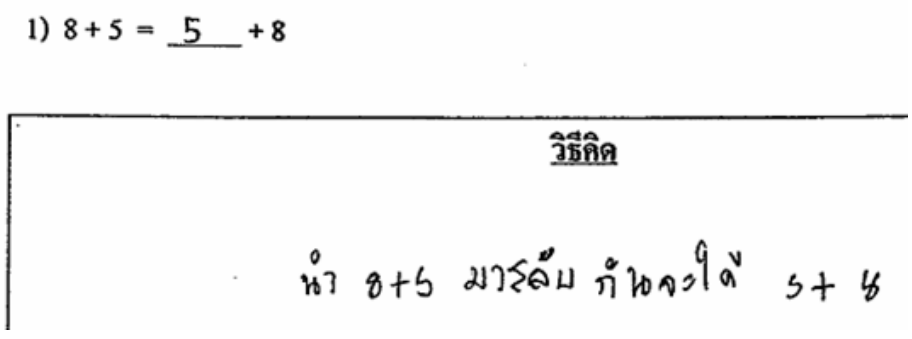





ภาพ 24 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องแบบรูปข้อ 1.2 และ 1.3 ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 4

จากภาพที่ 24 นักเรียนเขียนแสดงวิธีหาจำนวนลูกปัดสีขาวในรูปที่ 30 ได้จากความสัมพันธ์ได้เป็น $(30\times 2)+2$ ส่วนจำนวนลูกปัดในรูปที่ 100 หาได้จากความสัมพันธ์ $(100\times 2)+2$

ในเรื่องของประโยคเปิด นักเรียนในระดับนี้มีความเข้าใจประโยคเปิดที่มีเครื่องหมายเท่ากับ สามารถหาคำตอบของประโยคเปิดได้โดยอาศัยความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน เช่น เด็กชายเมฆา ซึ่งเป็นนักเรียนในระดับนี้หาคำตอบของประโยคเปิด $8+5=____+8$ โดยอาศัยสมบัติการสลับที่กันของจำนวนเต็มบวกนั่นคือ $8+5$ มีค่าเท่ากับ $5+8$ และได้คำตอบของประโยคเปิดคือ 5 ดังภาพที่ 25

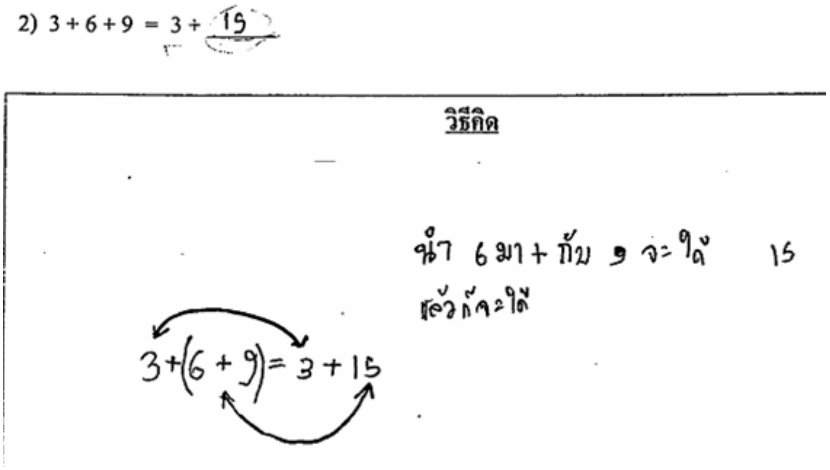



ภาพ 25 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 1) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 4

จากภาพที่ 25 พบว่า เด็กชายเมฆาไม่ได้หาคำตอบโดยการคำนวณ แต่หาคำตอบจากการมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนและใช้คุณสมบัติของการสลับที่การบวกเข้ามาช่วย ซึ่งจากการสัมภาษณ์เด็กชายเมฆากล่าวว่า การหาคำตอบในข้อนี้สามารถใช้การสลับที่การบวกได้ เนื่องจากเมื่อสลับที่กันแล้วยังคงให้ค่าที่เท่ากัน ดังบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

| | |
|---|---|
| ครู | ข้อนี้เราทำอย่างไงคะ |
| นักเรียน | เอาสองตัวนี้มาสลับที่ของการบวกครับ |
| ครู | เพราะอะไรค่ะ ทำไมถึงเอามาสลับที่กัน |
| นักเรียน | เพราะ 8 บวก 5 เท่ากับเอา 5 อยู่ที่นี่ (ชี้ที่ช่องว่างในโจทย์) บวก 8 ครับ |
| ครู | แล้วไม่ต้องคิดเหรอคะว่า 8 บวก 5 ได้เท่าไร |
| นักเรียน | ไม่ต้องครับ เพราะ 8 บวก 5 เท่ากับ 5 บวก 8 |

ในการหาคำตอบของประโยคเปิด $3+6+9=3+____$ เด็กชายเมฆาสามารถเขียนแสดงการเชื่อมโยงให้เห็นความสัมพันธ์ของจำนวนที่อยู่ทางซ้ายและทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ ดังภาพที่ 26




ภาพ 26 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 2) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 4

จากภาพที่ 26 พบว่า เด็กชายเมฆาเขียนลูกศรเชื่อมกันระหว่างเลข 3 ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับกับเลข 3 ที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ แสดงให้เห็นว่าจำนวนทั้งสอง

มีค่าเท่ากัน ดังนั้นนักเรียนจึงเขียนวงเล็บ $6+9$ ไว้ แล้วเขียนลูกศรจาก $(6+9)$ซึ่งอยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับโยงไปหา 15 ซึ่งอยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับแสดงให้เห็นว่า $(6+9)$ มีค่าเท่ากับ 15 จากความสัมพันธ์ดังกล่าวนักเรียนจึงสรุปได้ว่าคำตอบของประโยคเปิดนี้คือ 15 ซึ่งจากการสัมภาษณ์เด็กชายเมฆากล่าวว่า เลข 3 มีอยู่ทั้งสองข้างอยู่แล้วจึงไม่ต้องนำมาคิด คำตอบที่ได้จึงมาจากการนำ 6 กับ 9 มาบวกกัน ดังบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

ครู ข้อนี้ทำอย่างไงคะ

นักเรียน 3 มีอยู่แล้ว ในช่องนี้ (ชี้ที่ช่องว่างในโจทย์) ก็เอา 6 มาบวก 9 ได้ 15 มาใส่ครับ

ครู อืม ทำไมไม่เอา 3 มาคิดด้วยคะ

นักเรียน ก็มันมีอยู่แล้วทั้งสองข้างครับ

ครู สองข้างไหน สองข้างของอะไรคะ

นักเรียน ของเท่ากับ (ชี้ที่เครื่องหมายเท่ากับในโจทย์)

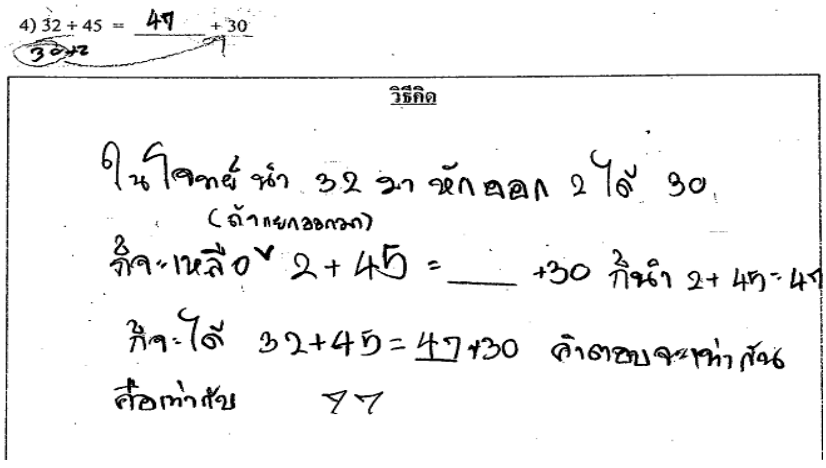
ครู เหมือนที่เราโยงในวิธีคิดตรงนี้ (ชี้วิธีคิดของนักเรียน) ใช่มั้ยคะ

นักเรียน ครับ

ครู เราโยงทำไมคะ

นักเรียน จะได้รู้ว่ามันเท่ากันครับ

แม้ว่าประโยคเปิดที่กำหนดให้มีความซับซ้อนเช่นประโยคเปิด $32+45=____+30$ นักเรียนที่อยู่ในระดับนี้ก็ยังสามารถหาคำตอบได้ โดยการใช้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนสามจำนวนที่อยู่ในประโยคเปิดได้แก่ 32, 45 และ 30 ดังภาพที่ 27

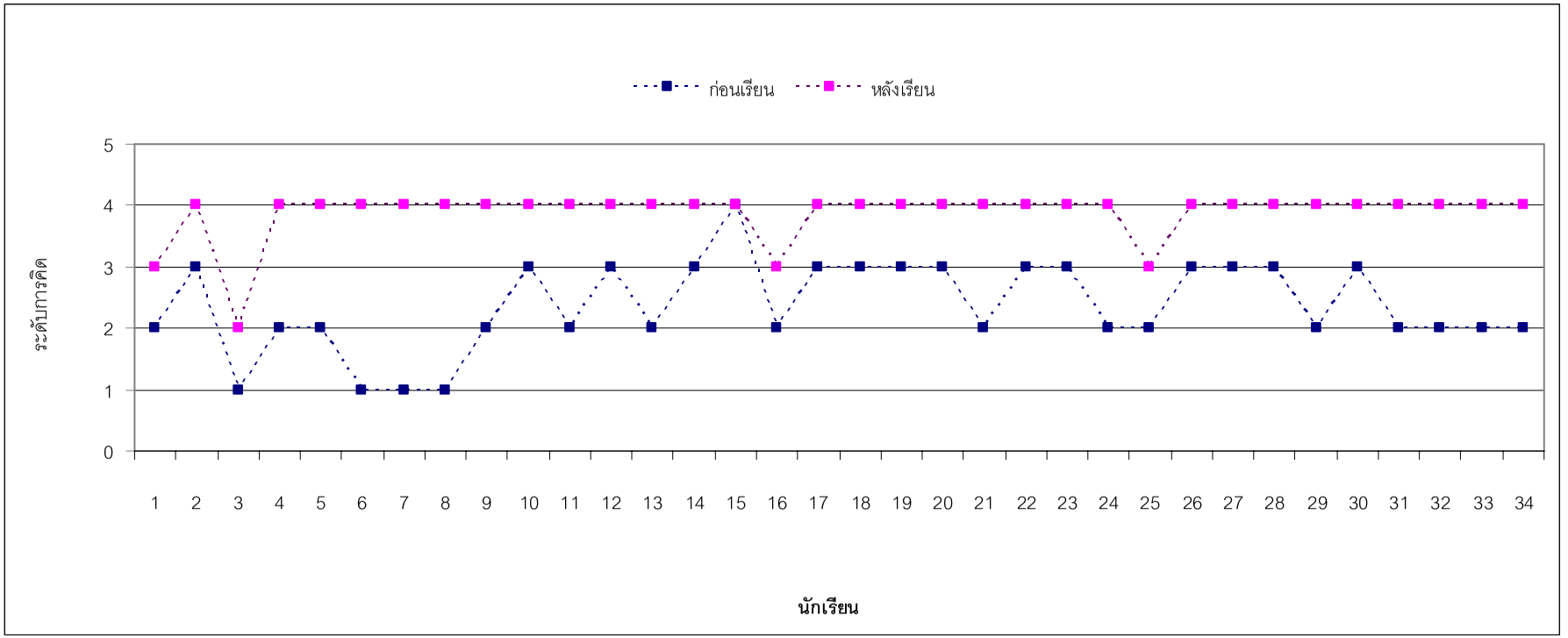



ภาพ 27 แสดงวิธีการคิดหาคำตอบในแบบทดสอบเรื่องประโยคเปิดของจำนวนข้อ 4) ของนักเรียนที่อยู่ในระดับ 4

จากภาพนักเรียนมองหาความสัมพันธ์ระหว่าง 32 ซึ่งอยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับ กับ 30 ซึ่งอยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับโดยเปลี่ยน 32 ให้เหลือ 30 โดยการลบออก 2 จากนั้นนำ 2 ไปบวกกับ 45 มีค่าเท่ากับ 47 โดยที่ 47 นี้จะเป็นจำนวนที่อยู่ในช่องว่างทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับและเป็นคำตอบของประโยคเปิด

**ระยะที่** 2 **เป็นการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่ได้รับการสอนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด** (CGI)

**ตอนที่** 1 ผลการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) โดยผลการเปรียบเทียบระดับการคิดเชิงพีชคณิตก่อนและหลังเรียนของนักเรียนเป็นรายบุคคล ดังในภาพที่ 28 และผลการเปรียบเทียบจำนวนนักเรียนทั้งก่อนและหลังเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตแต่ละระดับดังแสดงในตารางที่ 7




ภาพ 28 แสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตก่อนและหลังเรียนของนักเรียนเป็นรายบุคคล

ตาราง 7 แสดงจำนวน ร้อยละ และปริมาณการเปลี่ยนแปลงของนักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตแต่ละระดับ จำแนกตามการทดสอบก่อนและหลังได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI)

| การทดสอบวัดระดับการคิดเชิงพีชคณิต | ระดับการคิดเชิงพีชคณิต | | | | รวม (ร้อยละ) |
|---|---|---|---|---|---|
| | ระดับ 1 (ร้อยละ) | ระดับ 2 (ร้อยละ) | ระดับ 3 (ร้อยละ) | ระดับ 4 (ร้อยละ) | |
| ก่อนได้รับการสอน | 4 (11.76) | 15 (44.12) | 14 (41.18) | 1 (2.94) | 34 (100) |
| หลังได้รับการสอน | 0 (0) | 1 (2.94) | 3 (8.82) | 30 (88.24) | 34 (100) |
| การเปลี่ยนแปลง | ลดลง 4 (11.76) | ลดลง 14 (41.18) | ลดลง 11 (32.35) | เพิ่มขึ้น 29 (85.29) | |

จากตารางที่ 7 พบว่า ก่อนได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) มีนักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตอยู่ในระดับ 2 มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 44.12 รองลงมาคือระดับ 3 คิดเป็นร้อยละ 41.18 ต่อมาคือระดับ 1 คิดเป็นร้อยละ 11.76 และนักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตอยู่ในระดับ 4 น้อยที่สุด คิดเป็นร้อยละ 2.94 แต่หลังได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) นักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตอยู่ในระดับ 4 มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 88.24 รองมาคือระดับ 3 คิดเป็นร้อยละ 8.82 นักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตอยู่ในระดับ 2 น้อยที่สุดคิดเป็นร้อยละ 2.94 และไม่มีนักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตอยู่ในระดับ 1

หลังได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) นักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในระดับ 4 เพิ่มขึ้นร้อยละ 85.29 ส่วนในจำนวนนักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตที่อยู่ในระดับ 1, 2 และ 3 ลดลง โดยระดับการคิดเชิงพีชคณิตระดับ 2 จำนวนนักเรียนลดลงมากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 41.18 รองมาคือระดับ 3 คิดเป็นร้อยละ 32.35 และระดับ 1 มีจำนวนนักเรียนลดลงน้อยที่สุดคิดเป็นร้อยละ 11.76

**ตอนที่** 2 ผลการวิเคราะห์ระดับการคิดเชิงพีชคณิตที่เปลี่ยนแปลงไปและคงที่ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 ที่ได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ดังแสดงในตารางที่ 8

ตาราง 8 แสดงจำนวนและร้อยละของนักเรียนจำแนกตามการเปลี่ยนแปลงของระดับการคิดเชิงพีชคณิต

| การเปลี่ยนแปลงของระดับการคิดเชิงพีชคณิต | ระดับการคิดเชิงพีชคณิต | | จำนวนนักเรียน (คน) | ร้อยละ |
|---|---|---|---|---|
| | ก่อนได้รับการสอน | หลังได้รับการสอน | | |
| ระดับคงที่ | | | 1 | 2.94 |
| | ระดับ 4 | ระดับ 4 | 1 | 2.94 |
| เพิ่มขึ้น 1 ระดับ | | | 18 | 52.94 |
| | ระดับ 1 | ระดับ 2 | 1 | 2.94 |
| | ระดับ 2 | ระดับ 3 | 3 | 8.82 |
| | ระดับ 3 | ระดับ 4 | 14 | 41.18 |
| เพิ่มขึ้น 2 ระดับ | | | 12 | 35.29 |
| | ระดับ 2 | ระดับ 4 | 12 | 35.29 |
| เพิ่มขึ้น 3 ระดับ | | | 3 | 8.82 |
| | ระดับ 1 | ระดับ 4 | 3 | 8.82 |
| รวม | | | 34 | 100 |

จากตารางที่ 8 พบว่า หลังได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) นักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตเพิ่มขึ้น 1 ระดับมากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 52.94 โดยมีจำนวนนักเรียนที่พัฒนาจากระดับ 3 เป็นระดับ 4 จำนวนมากที่สุดคิดเป็นร้อยละ 41.18 รองลงมาคือมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตเพิ่มขึ้น 2 ระดับ โดยพัฒนาจากระดับ 2 เป็นระดับ 4 คิดเป็นร้อยละ 35.29 รองลงมาเป็นนักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตเพิ่มขึ้น 3 ระดับ โดยพัฒนาจากระดับ 1 เป็นระดับ 4 คิดเป็นร้อยละ 8.82 และอยู่ในระดับคงที่เป็นจำนวนน้อยที่สุด ซึ่งคงที่อยู่ในระดับ 4 คิดเป็นร้อยละ 2.94

ตาราง 9 แสดงจำนวนร้อยละของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงจำแนกตามการเปลี่ยนแปลงของระดับการคิดเชิงพีชคณิต

| การเปลี่ยนแปลงของระดับการคิดเชิงพีชคณิต | ระดับการคิดเชิงพีชคณิต | | จำนวนนักเรียน (คน) | ร้อยละ |
|---|---|---|---|---|
| | ก่อนได้รับการสอน | หลังได้รับการสอน | | |
| ระดับคงที่ | | | 1 | 10 |
| | ระดับ 4 | ระดับ 4 | 1 | 10 |
| เพิ่มขึ้น 1 ระดับ | | | 4 | 40 |
| | ระดับ 3 | ระดับ 4 | 4 | 40 |
| เพิ่มขึ้น 2 ระดับ | | | 5 | 50 |
| | ระดับ 2 | ระดับ 4 | 5 | 50 |
| | รวม | | 10 | 100 |

จากตารางที่ 9 พบว่าหลังได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตที่ระดับการคิดเพิ่มขึ้น 2 ระดับ มากที่สุด โดยพัฒนาจากระดับ 2 เป็นระดับ 4 คิดเป็นร้อยละ 50 รองลงมามีระดับการคิดเชิงพีชคณิตเพิ่มขั้น 1 ระดับ โดยพัฒนาจากระดับ 3 เป็นระดับ 4 คิดเป็นร้อยละ 40 ลำดับสุดท้ายมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตคงที่อยู่ที่ระดับ 4 คิดเป็นร้อยละ 10

ตาราง 10 แสดงจำนวนร้อยละของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลางจำแนกตามการเปลี่ยนแปลงของระดับการคิดเชิงพีชคณิต

| การเปลี่ยนแปลงของระดับการคิดเชิงพีชคณิต | ระดับการคิดเชิงพีชคณิต | | จำนวนนักเรียน (คน) | ร้อยละ |
|---|---|---|---|---|
| | ก่อนได้รับการสอน | หลังได้รับการสอน | | |
| เพิ่มขึ้น 1 ระดับ | | | 9 | 56.25 |
| | ระดับ 2 | ระดับ 3 | 1 | 6.25 |
| | ระดับ 3 | ระดับ 4 | 8 | 50.00 |
| เพิ่มขึ้น 2 ระดับ | | | 7 | 43.75 |
| | ระดับ 2 | ระดับ 4 | 7 | 43.75 |
| | รวม | | 16 | 100 |

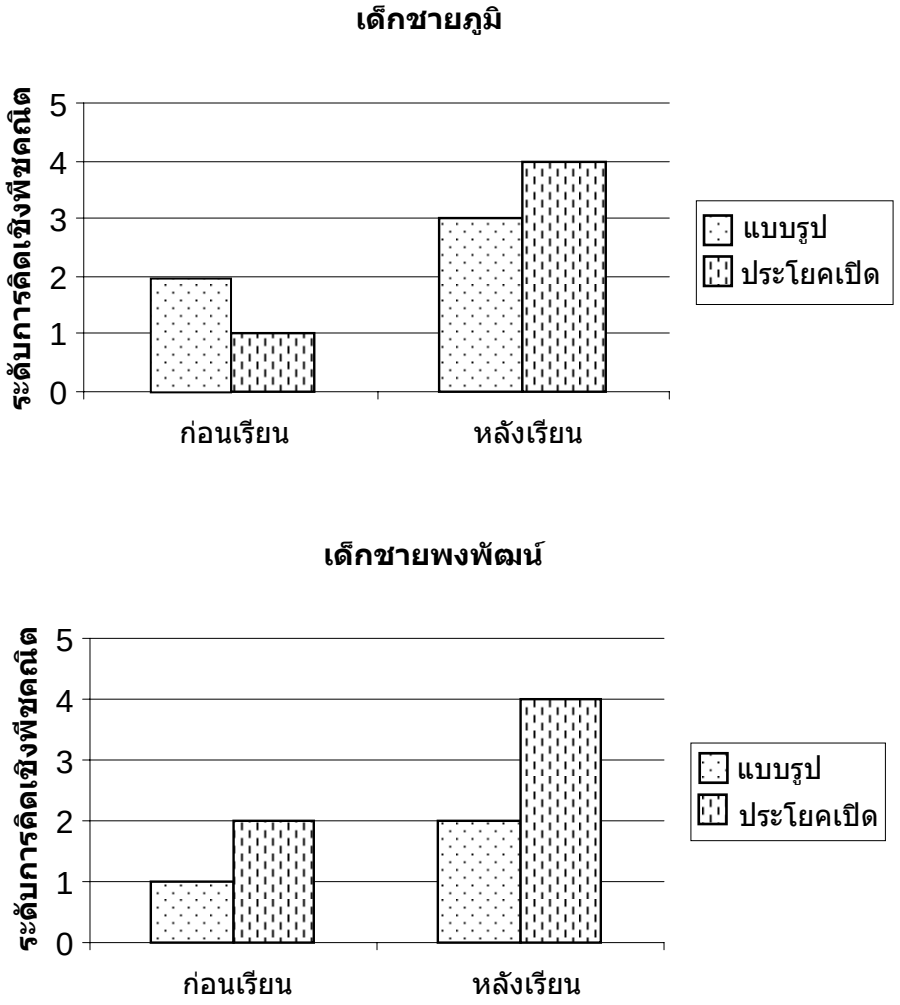
จากตารางที่ 10 พบว่าหลังได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลางมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตที่ระดับการคิดเพิ่มขึ้น 1 ระดับ มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 56.25 โดยพัฒนาจากระดับ 3 เป็นระดับ 4 มากที่สุดคิดเป็นร้อยละ 50 และพัฒนาจากระดับ 2 เป็นระดับ 3 คิดเป็นร้อยละ 6.25 รองลงมามีระดับการคิดเชิงพีชคณิตเพิ่มขั้น 2 ระดับ โดยพัฒนาจากระดับ 2 เป็นระดับ 4 คิดเป็นร้อยละ 43.75

ตาราง 11 แสดงจำนวนร้อยละของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำจำแนกตามการเปลี่ยนแปลงของระดับการคิดเชิงพีชคณิต

| การเปลี่ยนแปลงของระดับการคิดเชิงพีชคณิต | ระดับการคิดเชิงพีชคณิต | | จำนวนนักเรียน (คน) | ร้อยละ |
|---|---|---|---|---|
| | ก่อนได้รับการสอน | หลังได้รับการสอน | | |
| เพิ่มขึ้น 1 ระดับ | | | 5 | 62.50 |
| | ระดับ 1 | ระดับ 2 | 1 | 12.50 |
| | ระดับ 2 | ระดับ 3 | 2 | 25.00 |
| | ระดับ 3 | ระดับ 4 | 2 | 25.00 |
| เพิ่มขึ้น 3 ระดับ | | | 3 | 37.50 |
| | ระดับ 1 | ระดับ 4 | 3 | 37.50 |
| รวม | | | 8 | 100 |

จากตารางที่ 11 พบว่าหลังได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตที่ระดับการคิดเพิ่มขึ้น 1 ระดับ มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 62.50 โดยพัฒนาจากระดับ 2 เป็นระดับ 3 เป็นร้อยละ 25 เท่ากับจำนวนนักเรียนที่พัฒนาจากระดับ 2 เป็นระดับ 3 คิดเป็นร้อยละ 25 และพัฒนาจากระดับ 1 เป็นระดับ 2 คิดเป็นร้อยละ 12.50 รองมามีระดับการคิดเพิ่มขึ้น 3 ระดับ โดยพัฒนาจากระดับ 1 เป็นระดับ 4 คิดเป็นร้อยละ 37.50

**กรณีตัวอย่างของการศึกษาระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำ**

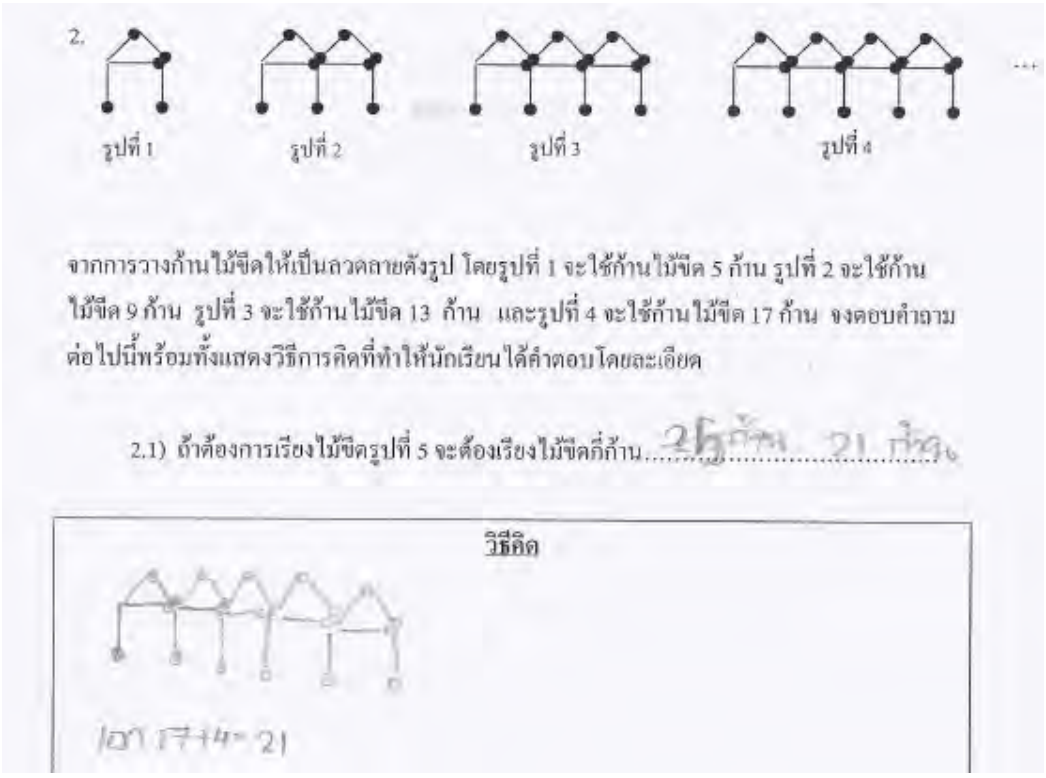



ภาพ 29 แสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตก่อนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำ

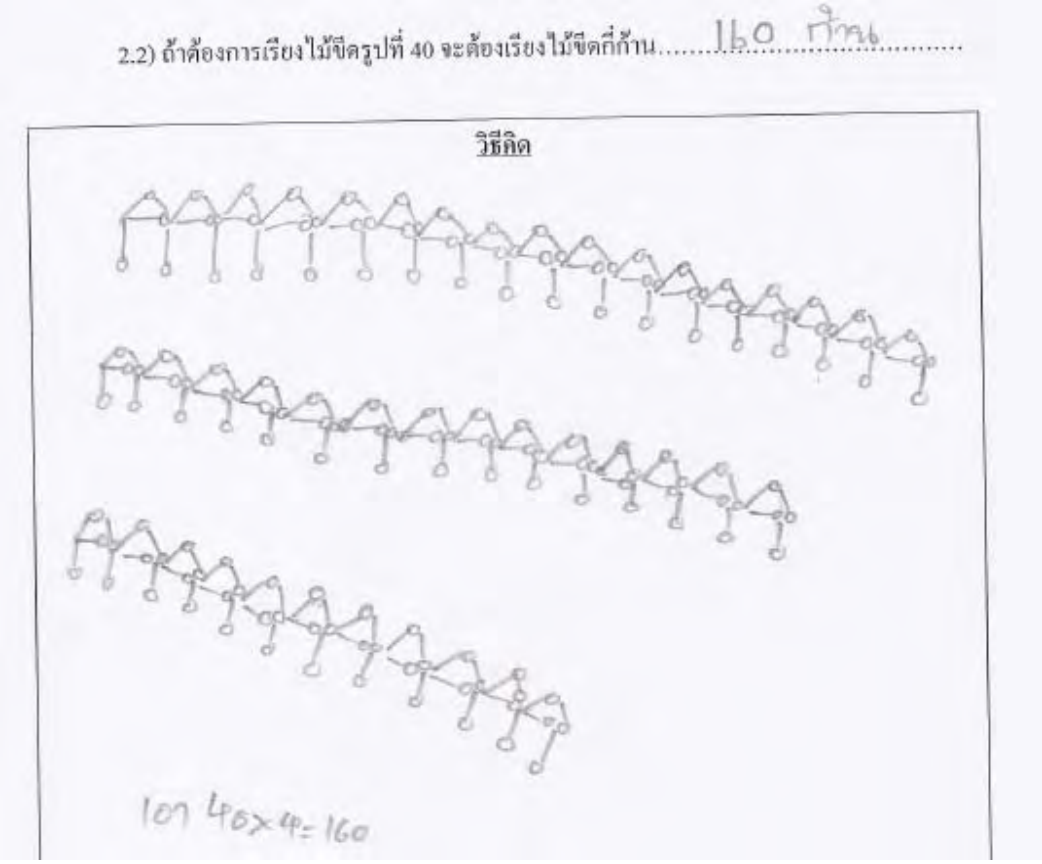
จากภาพที่ 29 แสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตของตัวแทนนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำ ในเรื่องของแบบรูปและประโยคเปิดของจำนวนที่พัฒนาขึ้นหลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) เด็กชายภูมิและเด็กชายพงพัฒน์เป็นนักเรียนในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ ก่อนเรียนระดับการคิดเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูปของเด็กชายภูมิอยู่ในระดับ 2 และเด็กชายพงพัฒน์อยู่ในระดับ 1 หลังเรียนระดับการคิดของเด็กชายภูมิพัฒนาขึ้นเป็นระดับ 3 ส่วน

เด็กชายพงพัฒน์พัฒนาขึ้นเป็นระดับ 2 และในเรื่องประโยคเปิดของจำนวนก่อนเรียนระดับการคิดของเด็กชายภูมิอยู่ในระดับ 1 ส่วนเด็กชายพงพัฒน์อยู่ในระดับ 2 หลังเรียนระดับการคิดของทั้งเด็กชายภูมิและเด็กชายพงพัฒน์พัฒนาขึ้นเป็นระดับ 4

จากการศึกษาในเชิงลึกของนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำทั้ง 2 คน หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) พบว่านักเรียนทั้ง 2 คน มีพัฒนาการดีขึ้น โดยก่อนเรียนเด็กชายภูมิมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องแบบรูปอยู่ในระดับ 2 เนื่องจากสามารถหาพจน์ถัดไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่ไม่สามารถหาพจน์ไกล ๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้อย่างถูกต้อง ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบก่อนเรียนในภาพที่ 30 และ ภาพที่ 31




ภาพ 30 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กชายภูมิ ข้อ 2.1

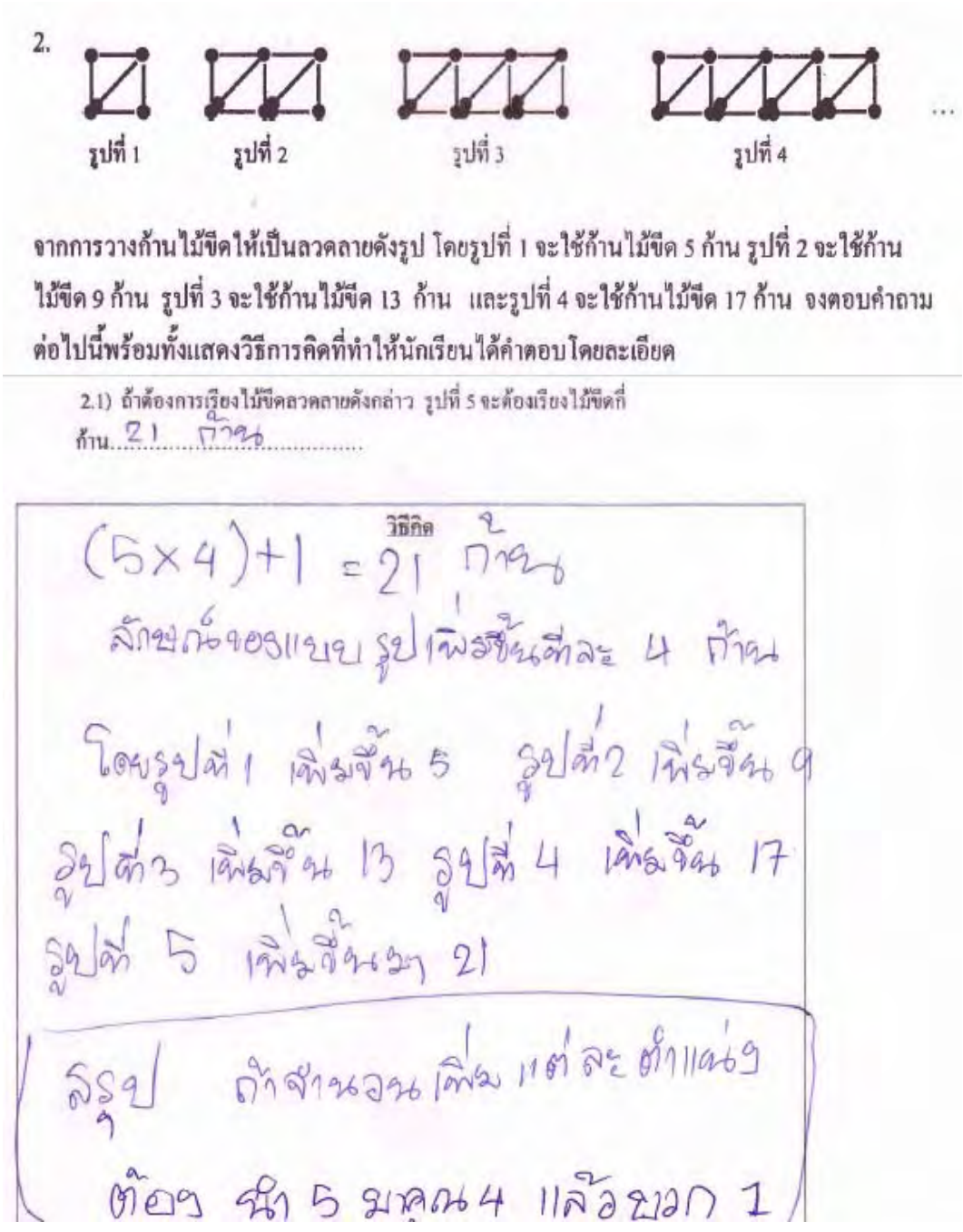



ภาพ 31 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กชายภูมิ ข้อ 2.2

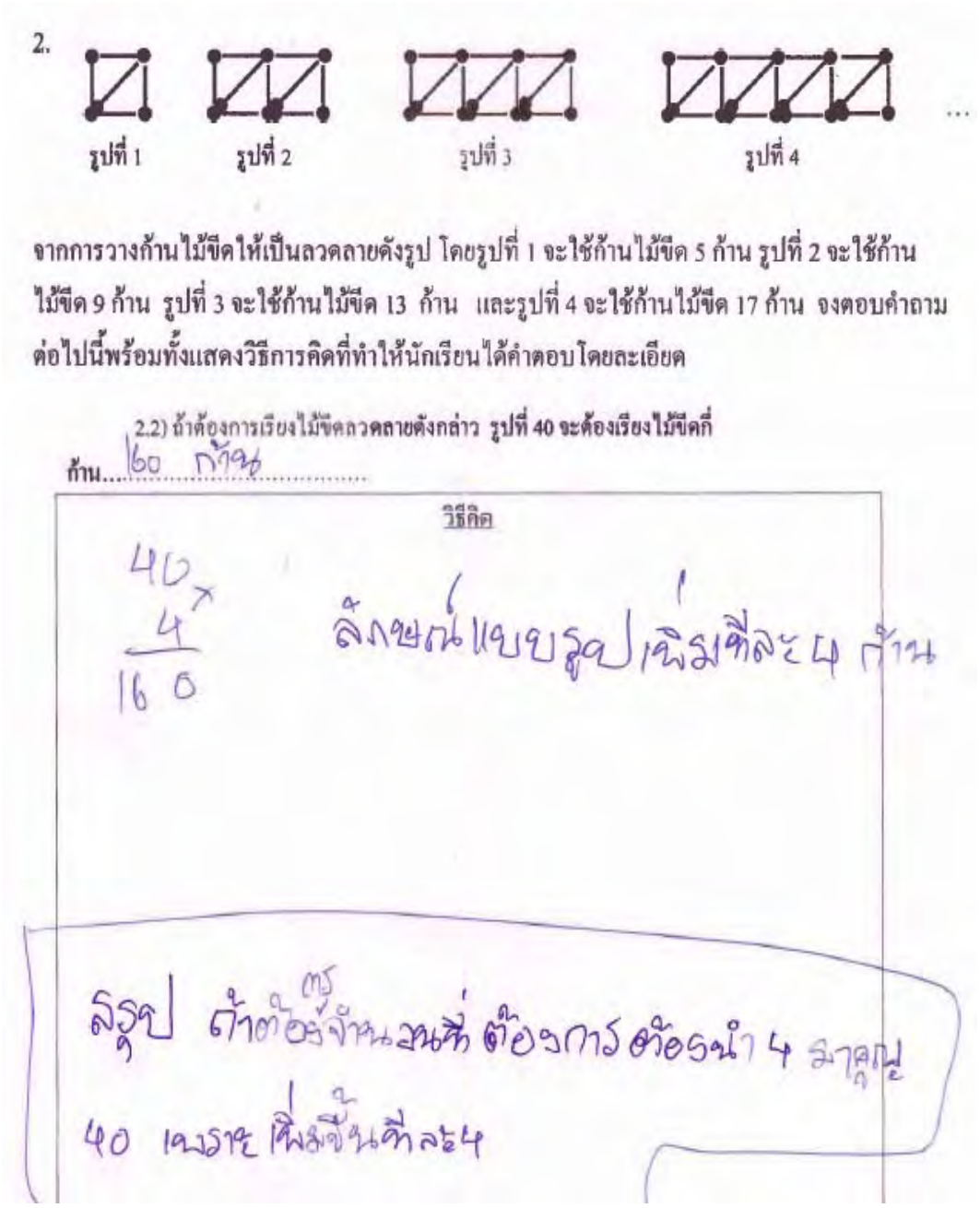
จากภาพที่ 30 และ ภาพที่ 31 พบว่า เด็กชายภูมิสามารถหาจำนวนก้านไม้ขีดของรูปที่ 5 ได้อย่างถูกต้อง ซึ่งคำตอบที่ได้มาจากการบวกพจน์ก่อนหน้าด้วยจำนวนที่เป็นผลต่างระหว่างพจน์ของแบบรูปที่กำหนดให้ ( นำ 17 มาบวกกับ 4 ) แต่ยังไม่สามารถหาจำนวนก้านไม้ขีดของรูปที่ 40 ได้อย่างถูกต้อง โดยนำ 40 ซึ่งเป็นรูปที่กำหนดให้มาคูณกับ 4 ที่เป็นผลต่างระหว่างพจน์ของแบบรูปที่กำหนดให้ ได้คำตอบเป็น 160 ซึ่งไม่ถูกต้อง เนื่องจากเด็กชายภูมิยังไม่สามารถมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์กับค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้น ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในสองมิติ ส่งผลให้ไม่สามารถหาพจน์ทั่วไปที่ถูกต้องได้ นั่นเอง

เมื่อได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) แล้ว พบว่า เด็กชายภูมิได้พัฒนาระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องแบบรูปขึ้นเป็นระดับ 3 กล่าวคือ สามารถหาพจน์ถัดไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ โดยพยายามค้นหาสูตรแทนความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกับค่าของทุกพจน์ต้นๆ ที่กำหนดให้ แต่ยังไม่สามารถหาค่าของพจน์ไกลๆ และ

พจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบหลังเรียนของเด็กชายภูมิในภาพที่ 32 และ 33




ภาพ 32 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูป ข้อ 2.1 ของเด็กชายภูมิ

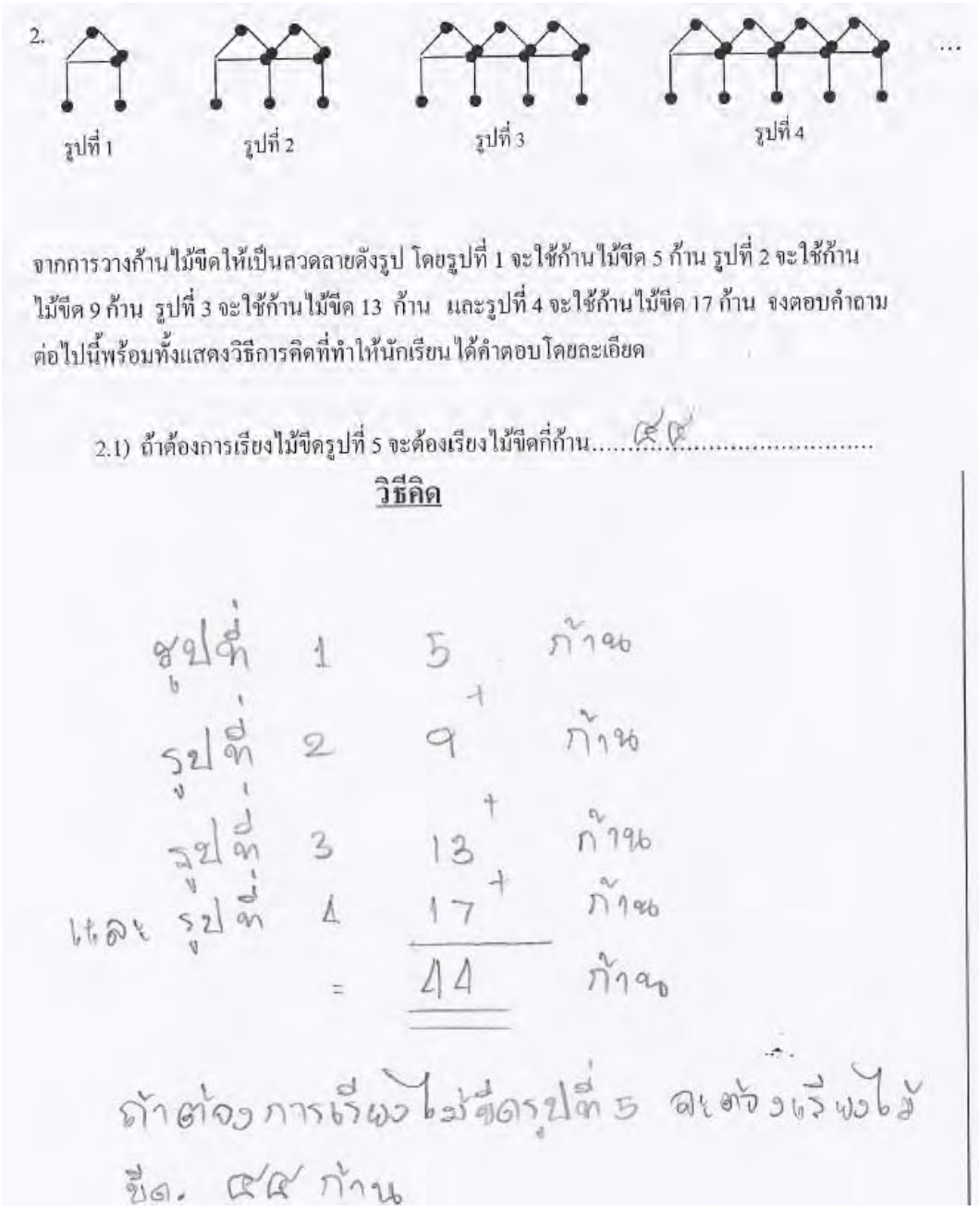



ภาพ 33 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูป ข้อ 2.2 ของเด็กชายภูมิ

จากภาพที่ 32 และ 33 พบว่า เด็กชายภูมิสามารถหาจำนวนก้านไม้ขีดของรูปที่ 5 ได้อย่างถูกต้อง ซึ่งคำตอบที่ได้มาจากการมองเห็นความสัมพันธ์ที่สอดคล้องกับค่าของพจน์ต้นๆ

ที่กำหนดให้ แต่ยังไม่สามารถหาจำนวนก้านไม้ขีดของรูปที่ 40 ได้อย่างถูกต้อง เนื่องจากเด็กชายภูมิไม่สามารถมองเห็นความสัมพันธ์ของพจน์ที่อยู่ไกลๆ และหาพจน์ทั่วไปยังที่ไม่ได้ นั่นเอง

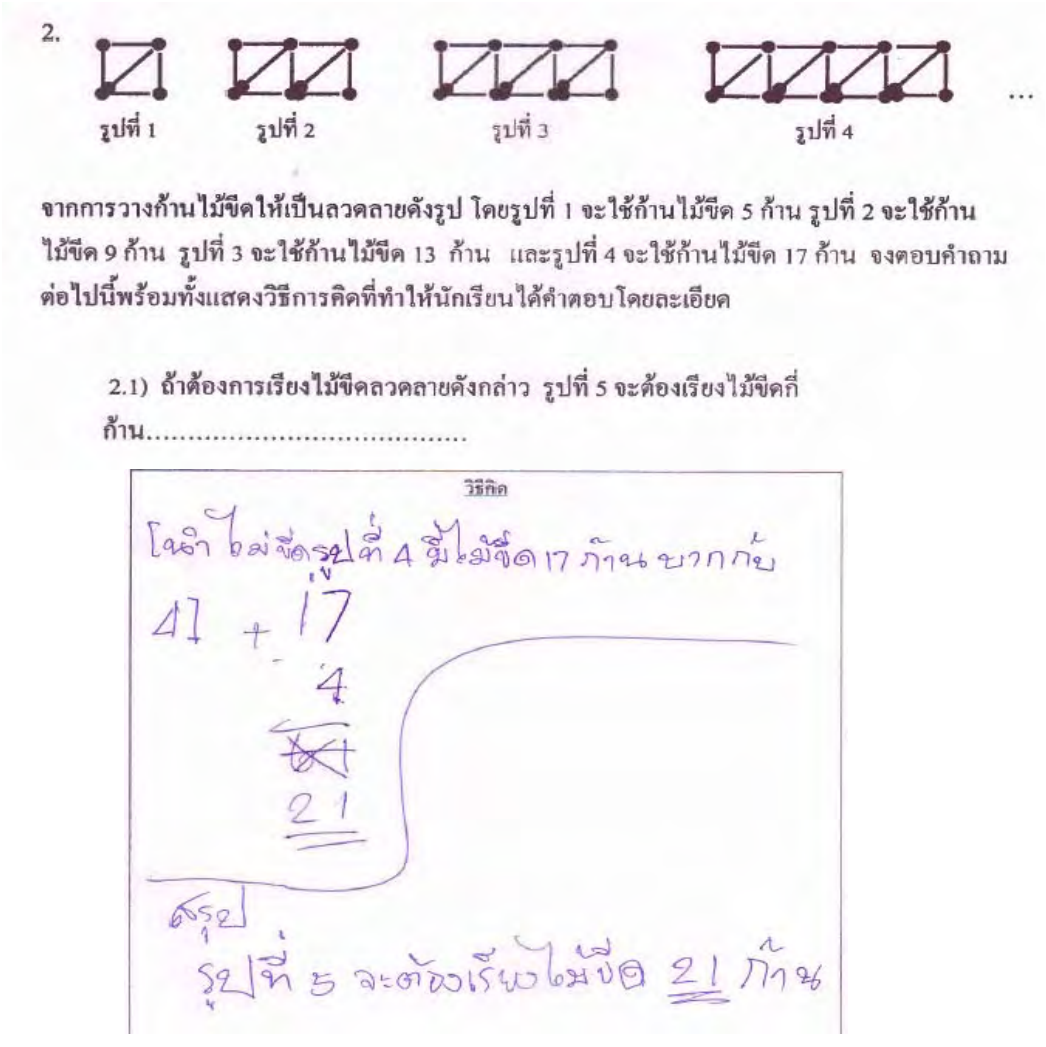
ส่วนเด็กชายพงพัฒน์ที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับต่ำเช่นกัน พบว่าก่อนเรียนมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องแบบรูปอยู่ในระดับ 1 เนื่องจากไม่สามารถหาพจน์ถัดไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบก่อนเรียนของเด็กชายพงพัฒน์ในภาพที่ 34



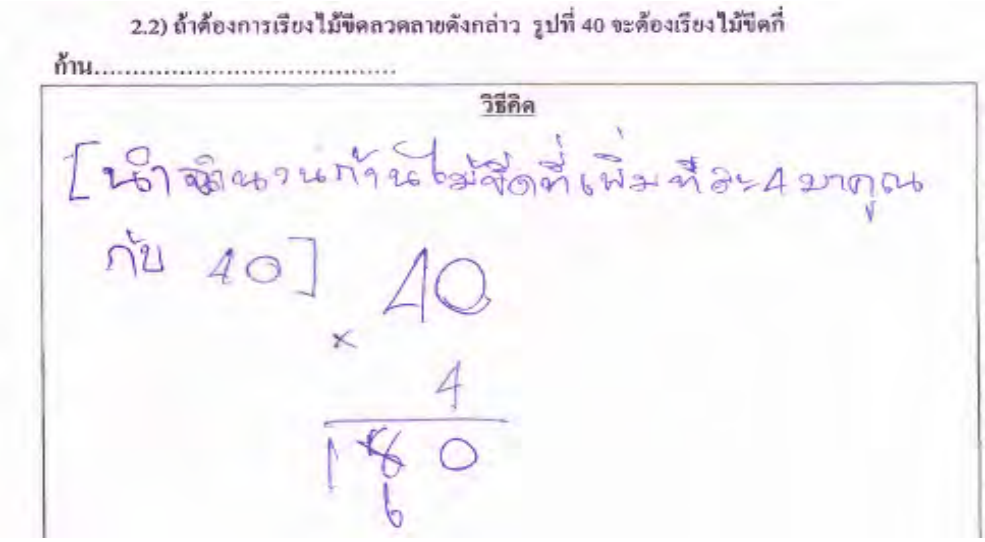

ภาพ 34 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กชายพงพัฒน์

จากภาพที่ 34 แสดงให้เห็นว่า เด็กชายพงพัฒน์ไม่เข้าใจถึงความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ของแบบรูปที่กำหนดให้ในแบบทดสอบ ส่งผลให้ไม่สามารถหาพจน์ถัดไปของแบบรูปดังกล่าวได้อย่างถูกต้อง ซึ่งคำตอบที่ได้มาจากการนำจำนวนก้านไม้ขีดของรูปที่ 1 ถึงรูปที่ 4 มารวมกัน ได้เป็น 44 ก้าน แล้วนำมาตอบเป็นจำนวนก้านไม้ขีดของรูปที่ 5 ซึ่งเป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง

หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) แล้วพบว่า เด็กชายพงพัฒน์สามารถพัฒนาระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องแบบรูปขึ้นเป็นระดับ 2 กล่าวคือ สามารถหาพจน์ถัดไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่ไม่สามารถหาค่าของพจน์ไกลๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบหลังเรียนของเด็กชายพงพัฒน์ในภาพที่ 35 และ 36



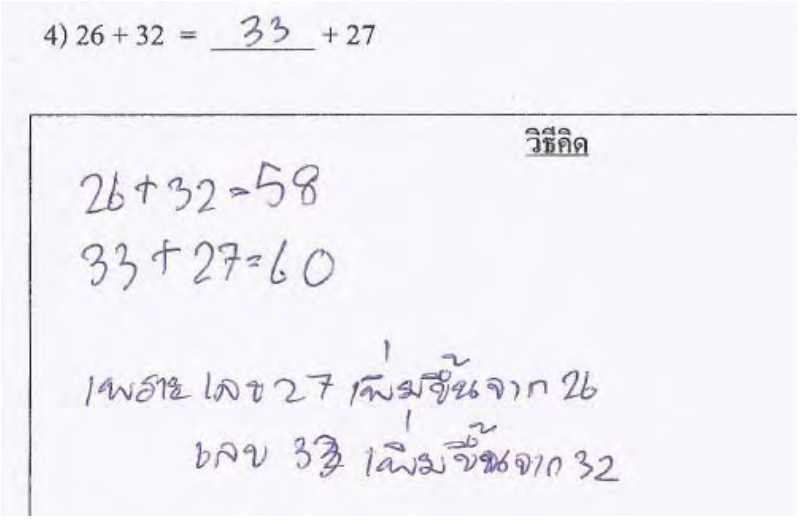

ภาพ 35 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูป ข้อ 2.1 ของเด็กชายพงพัฒน์




ภาพ 36 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูป ข้อ 2.2 ของเด็กชายพงพัฒน์

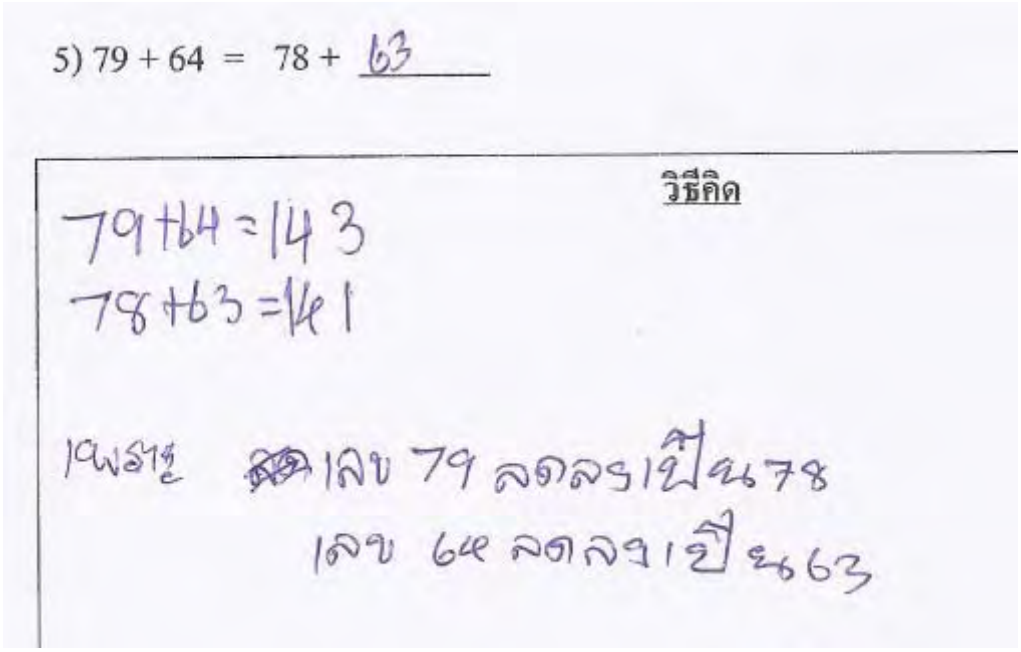
จากภาพที่ 35 และ 36 พบว่า เด็กชายพงพัฒน์สามารถหาจำนวนก้านไม้ขีดของรูปที่ 5 ได้อย่างถูกต้อง ซึ่งคำตอบที่ได้มาจากการบวกด้วยจำนวนที่เป็นผลต่างระหว่างพจน์ที่กำหนดให้ แต่ไม่สามารถหาจำนวนก้านไม้ขีดของรูปที่ 40 ได้อย่างถูกต้อง เนื่องจากเด็กชายพงพัฒน์ยังไม่สามารถหาพจน์ทั่วไปที่ถูกต้องได้ นั่นเอง

เมื่อพิจารณาในเรื่องประโยคเปิดของจำนวนพบว่า ก่อนเรียนเด็กชายภูมิมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องนี้อยู่ในระดับ 1 เนื่องจากไม่มีความเข้าใจเกี่ยวกับประโยคเปิดที่มีเครื่องหมายเท่ากับ เช่น เมื่อให้เด็กชายภูมิเติมจำนวนที่อยู่ในช่องว่างของประโยคเปิด 26+32=_____+27 ดังภาพที่ 37




ภาพ 37 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวน ข้อ 4 ของเด็กชายภูมิ

จากภาพที่ 37 พบว่า เด็กชายภูมิไม่ให้ความสนใจกับเครื่องหมายเท่ากับเด็กชายภูมิหาคำตอบโดยมองจากความสัมพันธ์ระหว่าง 26 ซึ่งเป็นตัวเลขอยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับ และ 27 ซึ่งเป็นตัวเลขที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ เด็กชายภูมิเข้าใจว่า 26 ทางซ้ายเมื่ออยู่ทางขวาเพิ่มขึ้นเป็น 27 ดังนั้นเด็กชายภูมิจึงสรุปว่า 32 ที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับเมื่ออยู่ทางขวาก็จะต้องมีค่าเท่ากับ 33 จากนั้นเด็กชายภูมิทำการตรวจคำตอบโดยการหาผลบวกจำนวนที่อยู่ทางซ้าย $26+32$ ได้ผลลัพธ์เท่ากับ 58 ผลบวกบวกทางด้านขวา $33+27$ ได้ผลลัพธ์เท่ากับ 60 นั่นแสดงว่า 33 ไม่ใช่คำตอบที่ถูกต้อง แต่คำตอบของเด็กชายภูมิยังคงเท่ากับ 32 แสดงว่าเด็กชายภูมิไม่เข้าใจความหมายของเครื่องหมายเท่ากับที่อยู่ในประโยคเปิด ดังเช่นการหาคำตอบของประโยคเปิด $79+64=78+$ _____ เด็กชายภูมิยังคงใช้ความสัมพันธ์ในลักษณะนี้หาคำตอบดังภาพที่ 38

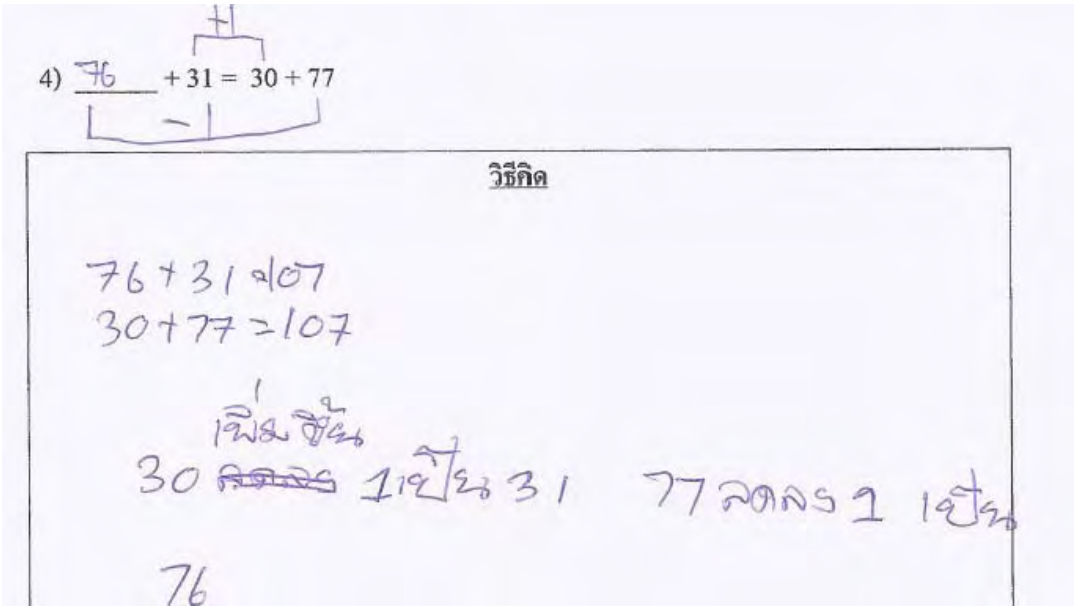



ภาพ 38 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวน ข้อ 5 ของเด็กชายภูมิ

จากภาพที่ 38 พบว่า เด็กชายภูมิมองความสัมพันธ์ระหว่าง 79 ที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับและ 78 ซึ่งเป็นจำนวนที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับว่าลดลง 1 ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่าง 64 กับจำนวนที่อยู่ในช่องว่างจะต้องลดลง 1 เช่นกัน เด็กชายภูมิจึงสรุปว่า

จำนวนที่อยู่ในช่องว่างคือ 63 โดยไม่สนใจว่าผลบวกของจำนวนที่อยู่ในข้างซ้าย ในข้อนี้เด็กชายภูมิยังคงตรวจสอบคำตอบโดยหาผลบวกจำนวนที่อยู่ทางด้านซ้ายโดยนำเอา 79 บวกกับ 64 ได้ผลลัพธ์เท่ากับ 143 จากนั้นบวกจำนวนที่อยู่ทางด้านขวาโดยนำเอา 78 บวกกับ 63 ได้ผลลัพธ์เป็น 141 ซึ่งผลลัพธ์ทั้งสองข้างไม่เท่ากันดังนั้น 63 จะไม่ใช่คำตอบที่ถูกต้อง แต่เด็กชายภูมิยังคงตอบ 63 แสดงให้เห็นชัดเจนว่าเด็กชายภูมิไม่เข้าใจความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ

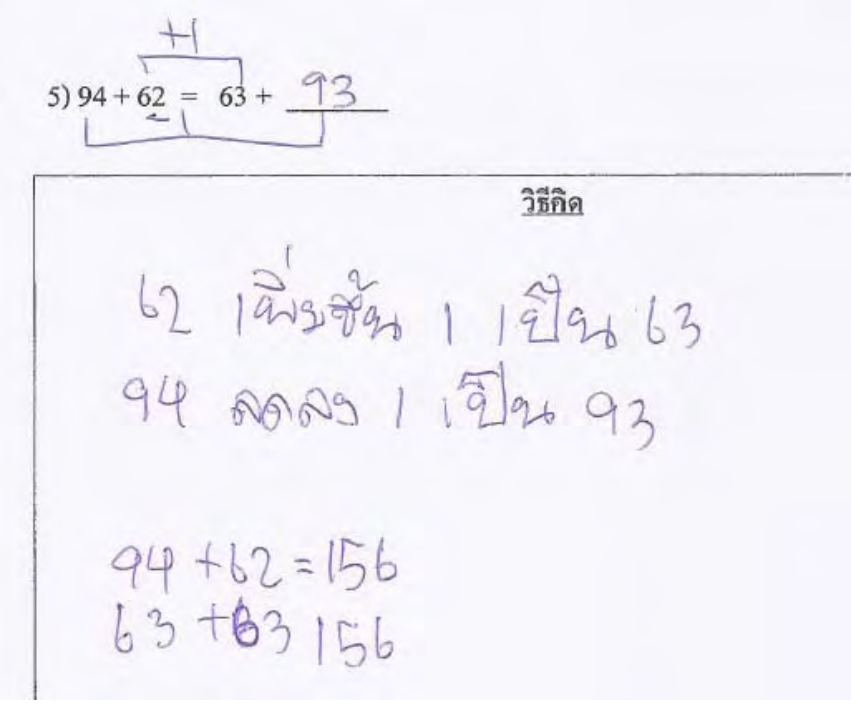
หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) เด็กชายภูมิสามารถพัฒนาระดับการคิดเชิงพีชคณิตขึ้นเป็นระดับ 4 สามารถใช้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่อยู่สองข้างของเครื่องหมายเท่ากับเพื่อหาคำตอบของประโยคเปิดได้อย่างถูกต้อง ดังภาพที่ 39




ภาพ 39 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวน ข้อ 4 ของเด็กชายภูมิ

จากภาพที่ 39 พบว่า เด็กชายภูมิมองความสัมพันธ์ระหว่าง 31 ซึ่งอยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับ และ 30 ที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ พบว่าจาก 30 เมื่อบวกเพิ่มอีก 1 จะได้เท่ากับ 31 เด็กชายภูมิสามารถหาจำนวนที่อยู่ในช่องว่างทางด้านซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับจะต้องเกิดจาก 77 ซึ่งอยู่ทางด้านขวาของเครื่องหมายเท่ากับลบออก 1 และสรุปได้อย่างถูกต้องว่าจำนวนที่อยู่ในช่องว่างคือ 76 และสามารถตรวจสอบคำตอบโดยการหาผลบวกนำจำนวนที่อยู่ทางด้านซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับคือ 76 กับ 31 เปรียบเทียบกับผลบวกของจำนวนที่อยู่

ทางด้านขวาของเครื่องหมายเท่ากับคือ 30 กับ 77 ซึ่งมีค่าเท่ากันคือ 107 และเด็กชายภูมิยังคงหาคำตอบของประโยคเปิดได้ถูกต้องเมื่อประโยคเปิดที่กำหนดให้มีความสัมพันธ์ของจำนวนที่อยู่ทางขวาต่างไปดังภาพที่ 40

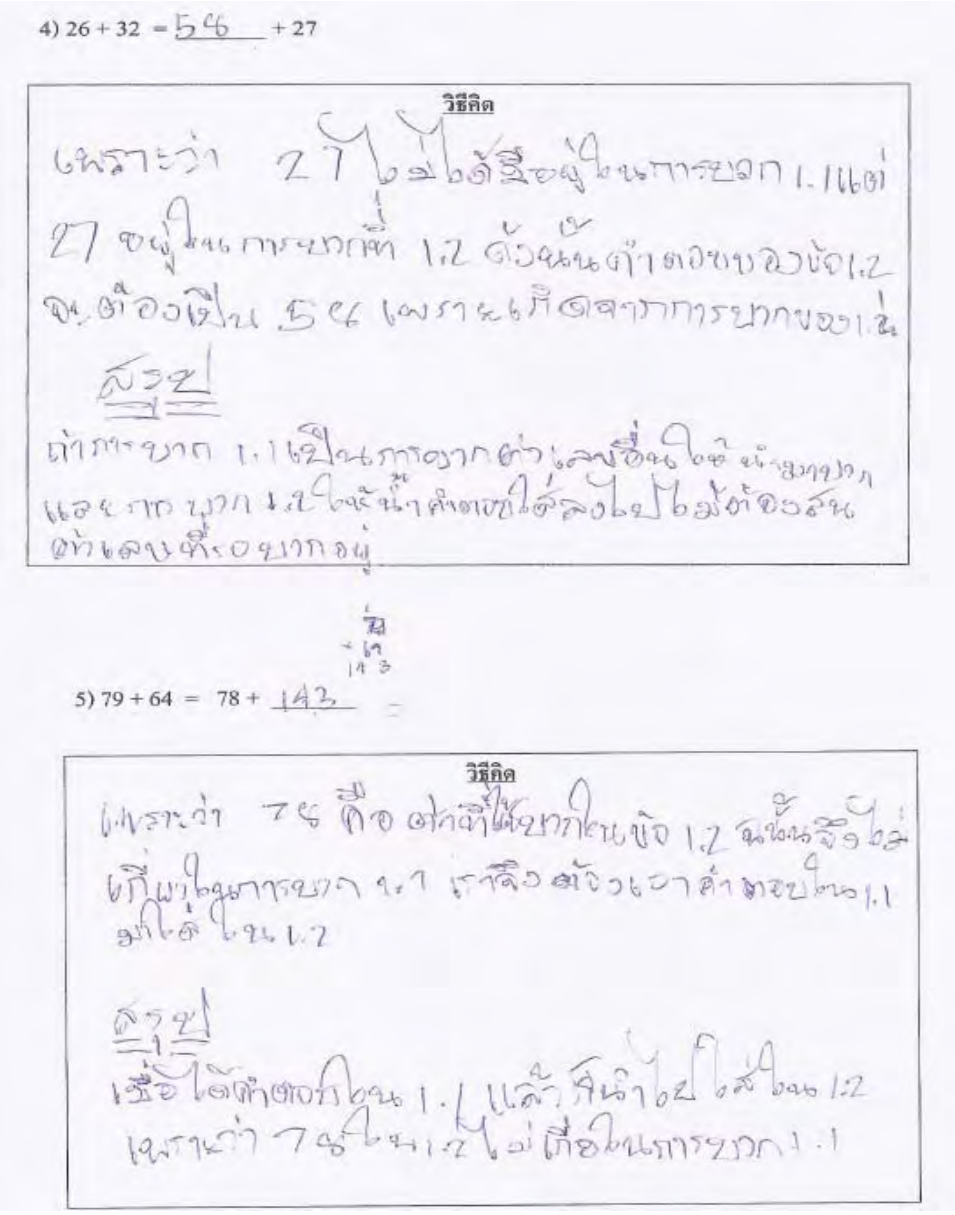



ภาพ 40 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวน ข้อ 5 ของเด็กชายภูมิ

จากภาพที่ 40 พบว่า จะเห็นว่าเด็กชายภูมิแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง 62 กับ 63 จากข้างซ้ายไปขวาของเครื่องหมายเท่ากับเป็นการบวกเพิ่มอีก 1 ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่าง 94 กับจำนวนที่อยู่ในช่องว่างของเครื่องหมายเท่ากับจะต้องลบออก 1 ได้ 93 เป็นจำนวนที่อยู่ในช่องว่าง หลังจากนั้นเด็กชายภูมิจึงทำการตรวจสอบคำตอบหาผลบวกของจำนวนที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับ 92 กับ 62 ได้ผลลัพธ์เป็น 156 ซึ่งมีค่าเท่ากับผลบวกของ 63 กับ 93 ซึ่งอยู่ทางด้านขวาของเครื่องหมายเท่ากับ

ส่วนเด็กชายพงพัฒน์ที่มีผลสัมฤทธิ์ในการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำเช่นเดียวกับเด็กชายภูมิก่อนได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) เด็กชายพงพัฒน์มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูปอยู่ในระดับ 2 เนื่องจากเด็กชายพงพัฒน์ไม่เข้าใจความหมายของประโยคเปิดที่มีเครื่องหมายเท่ากับ มองไม่เห็นความสัมพันธ์ของจำนวนที่อยู่สอง

ข้างของเครื่องหมายเท่ากับ เช่น เมื่อกำหนดให้หาจำนวนที่อยู่ในช่องว่างของประโยคเปิด $26+32=____+27$ และ $79+64=78+_____$ เด็กชายพงพัฒน์จะหาคำตอบด้วยการหาผลบวกของจำนวนที่อยู่ข้างซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับโดยไม่สนใจจำนวนที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับดังภาพที่ 41

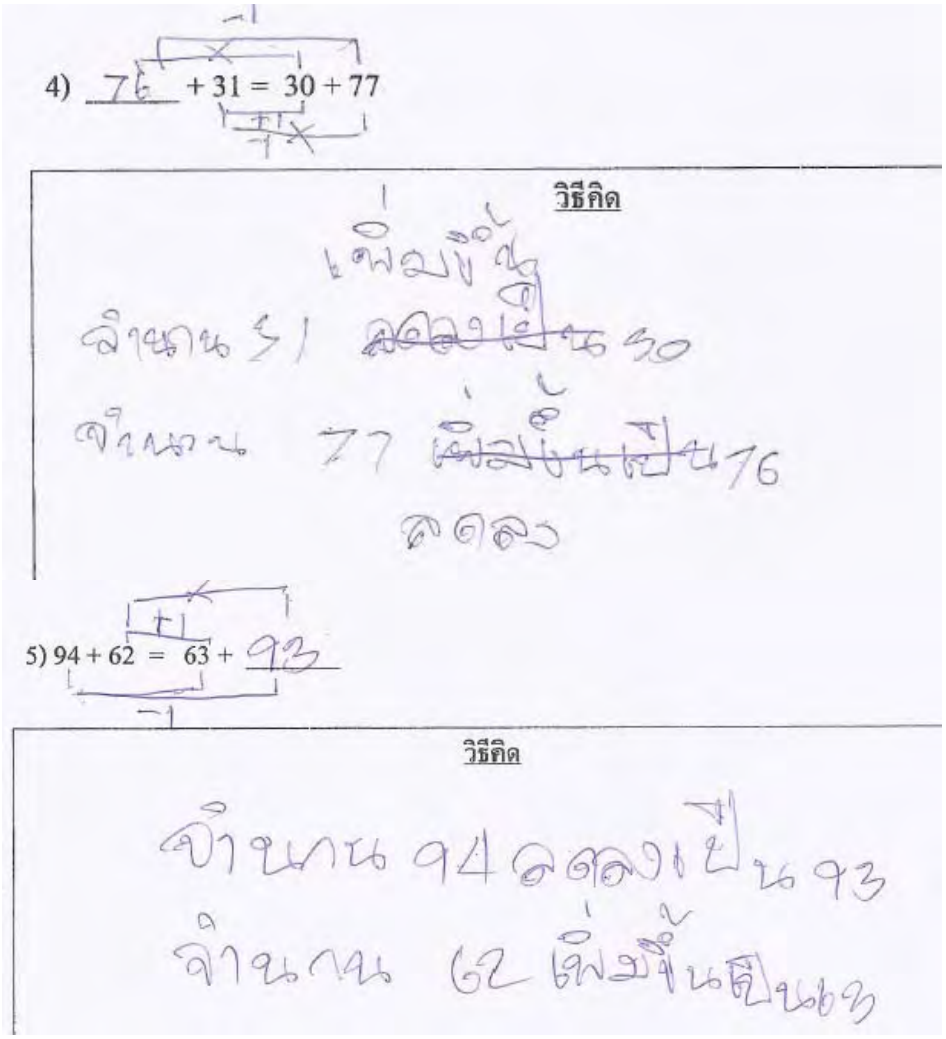



ภาพ 41 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายพงพัฒน์

จากภาพที่ 41 จะเห็นว่าเด็กชายพงพัฒน์อธิบายว่าจำนวนที่อยู่ในช่องว่างในข้อ 4) คือ 58 ซึ่งได้มาจากผลบวกของ 26 กับ 32 ส่วน 27 ที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับไม่มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกับคำตอบ 58 ส่วนคำตอบของข้อ 5) คือ 143 ได้มาจากผลบวกของ 79 กับ 64 ส่วน 78 ซึ่งอยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับนั้นก็ไม่มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกับคำตอบ 143 เช่นกัน ดังบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

| | |
|---|---|
| ครู | อ่านโจทย์ให้ฟังหน่อยซิครับ |
| นักเรียน | 26 บวก 32 เท่ากับเว้นวรรคบวกด้วย 17 |
| ครู | ค่ะ แล้วหนูจะทำอย่างไงคะ |
| นักเรียน | เอา 26 บวก 32 แล้วก็ใส่คำตอบลงไปครับ |
| ครู | ตอบเท่าไร่ค่ะ แล้วใส่คำตอบตรงไหน |
| นักเรียน | บวกได้ 58 แล้วเอาใส่ตรงช่องว่างครับ |
| ครู | แล้วเลข 27 ตัวนี้หละ หนูไม่เอามาคิดเหรอคะ |
| นักเรียน | ไม่ต้องไปสนมันครับเพราะว่ามันเป็นแค่ตัวประกอบ |
| ครู | ไม่ต้องไปสนใจตรงข้างหลัง เอาสองอันนี้มาบวกกันได้เท่าไร ก็ตอบเลย |
| นักเรียน | ครับ |
| ครู | อืม แล้วเครื่องหมายเท่ากับนี้หมายความว่าไงครับ |
| นักเรียน | เท่ากับนี้คือเอาคำตอบตรงนี้มาเติมใส่ครับ |
| ครู | คำตอบตรงไหนคะ มาเติมใส่ |
| นักเรียน | ตรง 26 บวก 32 ได้เท่าไรก็เอามาเติมตรงนี้ครับ |

แต่หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ระดับการคิดเชิงพีชคณิตของเด็กชายพงพัฒน์เพิ่มขึ้นจากระดับ 2 เป็นระดับ 4 เนื่องจากเด็กชายพงพัฒน์สามารถหาจำนวนที่อยู่ในช่องว่างของประโยคเปิดได้โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนที่อยู่ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับ ดังภาพที่ 42 ที่แสดงการหาคำตอบของประโยคเปิด $26 + 32 = ____ + 27$ และ $79 + 64 = 78 + _____$



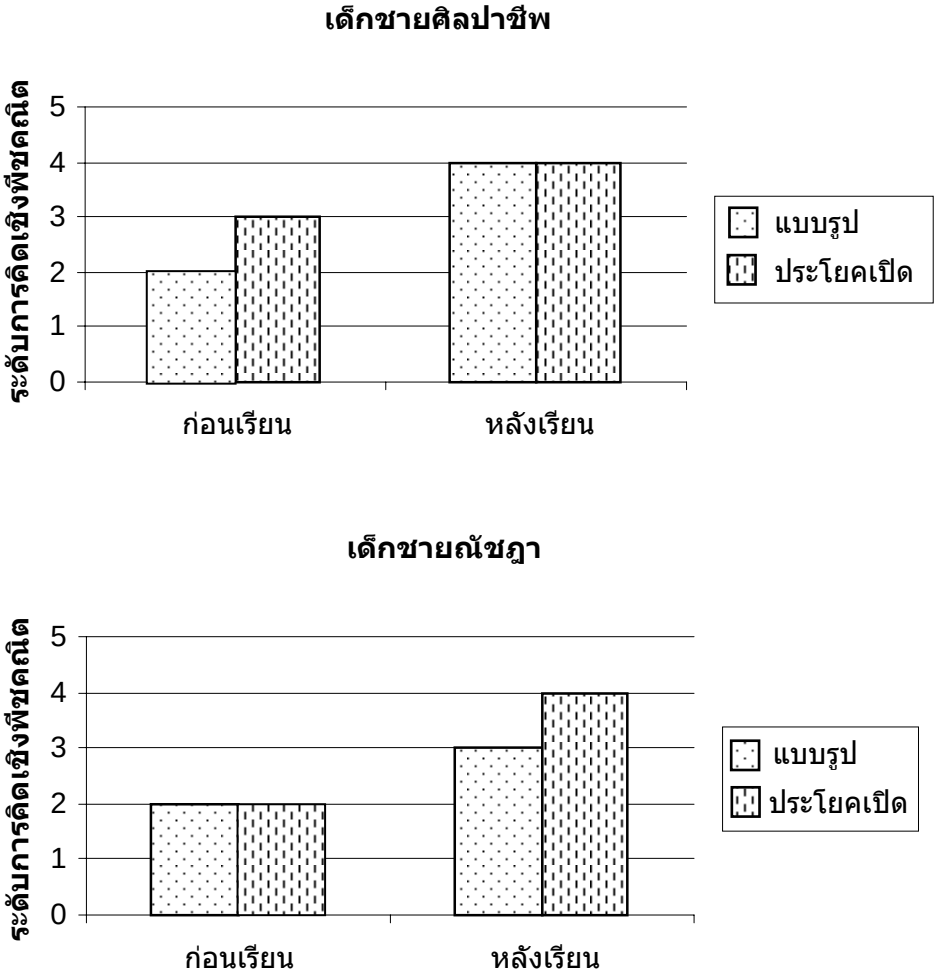

ภาพ 42 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายพงพัฒน์

จากภาพที่ 42 จะเห็นว่า เด็กชายพงพัฒน์สามารถหาคำตอบของข้อ 4) โดยการหาความสัมพันธ์ระหว่าง 31 กับ 30 โดยแสดงว่า 30 ซึ่งอยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับบวก 1 เพิ่มเป็น 31 ซึ่งอยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับ ดังนั้นเด็กชายพงพัฒน์จึงสรุปว่าจำนวนที่อยู่ในช่องว่างคือ 76 เป็นจำนวนที่เกิดจาก 77 ซึ่งอยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับลบออกด้วย 1 ส่วนการหาคำตอบของประโยคเปิดในข้อ 5) เด็กชายพงพัฒน์สังเกตได้ว่า 62 เป็นจำนวนที่อยู่ทางซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับบวกอีก 1 ได้ 63 ซึ่งเป็นจำนวนที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ ดังนั้นเด็กชายพงพัฒน์จึงสรุปว่าจำนวนที่อยู่ในช่องว่างคือ 93 เป็นจำนวนที่เกิดจาก 94 ในข้างซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับลบออกด้วย 1 นอกจากนั้นจากการสัมภาษณ์ยังพบว่า เด็กชายพงพัฒน์มี

ความเข้าใจในเรื่องของการเท่ากัน โดยเข้าใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับต้องมีค่าเท่ากัน ดังบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

| | |
|---|---|
| ครู | อ่านโจทย์ซิครับ |
| นักเรียน | เว้นวรรค + 31 = 30 + 77 |
| ครู | ค่ะ คิดอย่างไงค่ะข้อนี้ |
| นักเรียน | นำ 77 โยงไปช่องที่เว้นวรรค แล้วนำ31 โยงไปที่ช่องที่ 30 ครับ |
| ครู | แล้วข้อนี้คิดจากด้านซ้ายไปด้านขวา หรือจากด้านขวาไปด้านซ้าย |
| นักเรียน | ด้านขวามาด้านซ้ายครับ |
| ครู | เพราะอะไรคะ |
| นักเรียน | เพราะด้านขวามันเป็นด้านที่มีตัวเลขครบแล้วครับ |
| ครู | ค่ะ พอโยงเสร็จแล้วเราทำอย่างไงต่อคะ |
| นักเรียน | ก็คิดว่า 30 ไป 31 มันเพิ่มขึ้น 1 แล้ว 77 โยงมาคำตอบที่เว้นวรรคไว้ก็จะต้องลดลง 1 เหลือ 76 ครับ |
| ครู | สรุปเราตอบเท่าไหร่คะ |
| นักเรียน | ตอบ 76 ครับ |
| ครู | แล้วมีวิธีการตรวจคำตอบอย่างไงคะ |
| นักเรียน | ก็... ตรวจให้ทั้งสองด้านเป็นคำตอบเดียวกันครับ |
| ครู | อธิบายให้ฟังหน่อยซิคะ |
| นักเรียน | ก็ 76 + 31 แล้ว 30 + 77 ก็จะได้เท่ากันครับ |

**กรณีตัวอย่างของการศึกษาระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับปานกลาง**

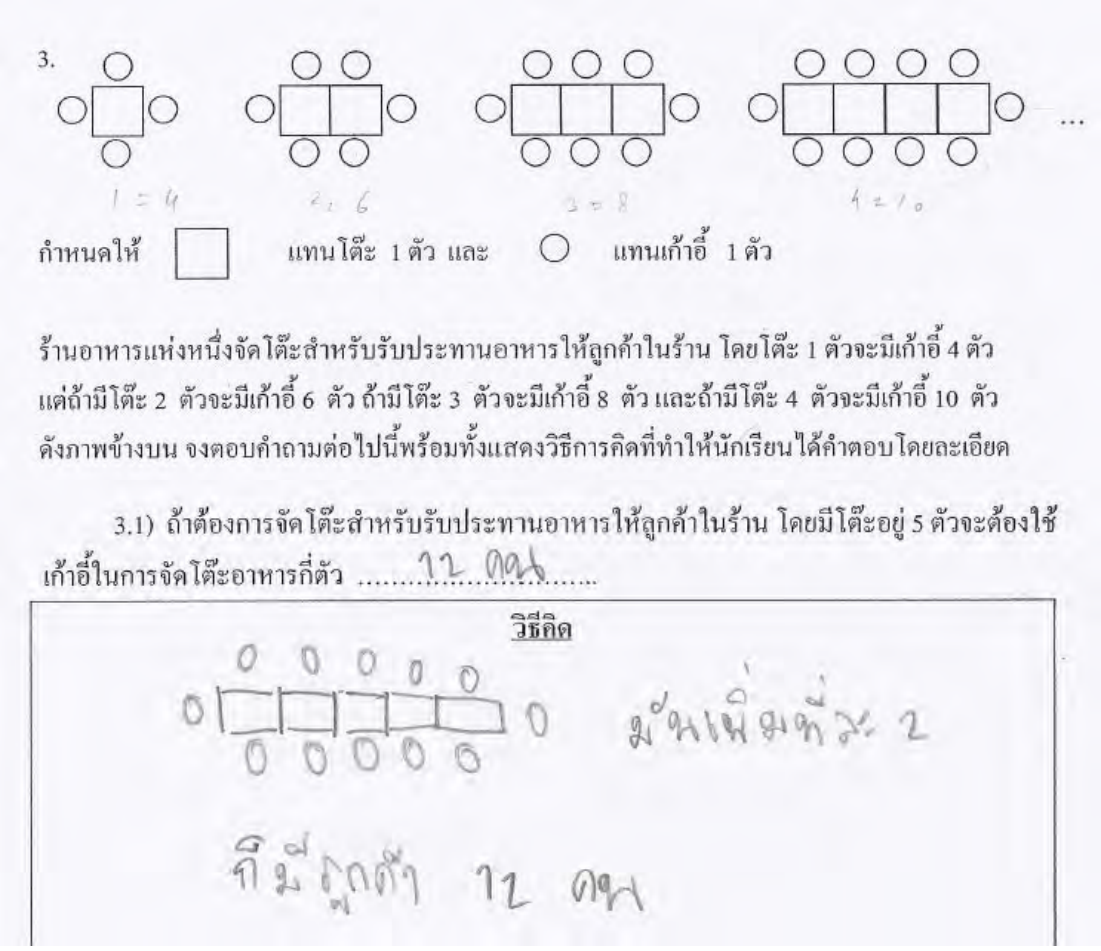



ภาพ 43 แสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตก่อนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับปานกลาง

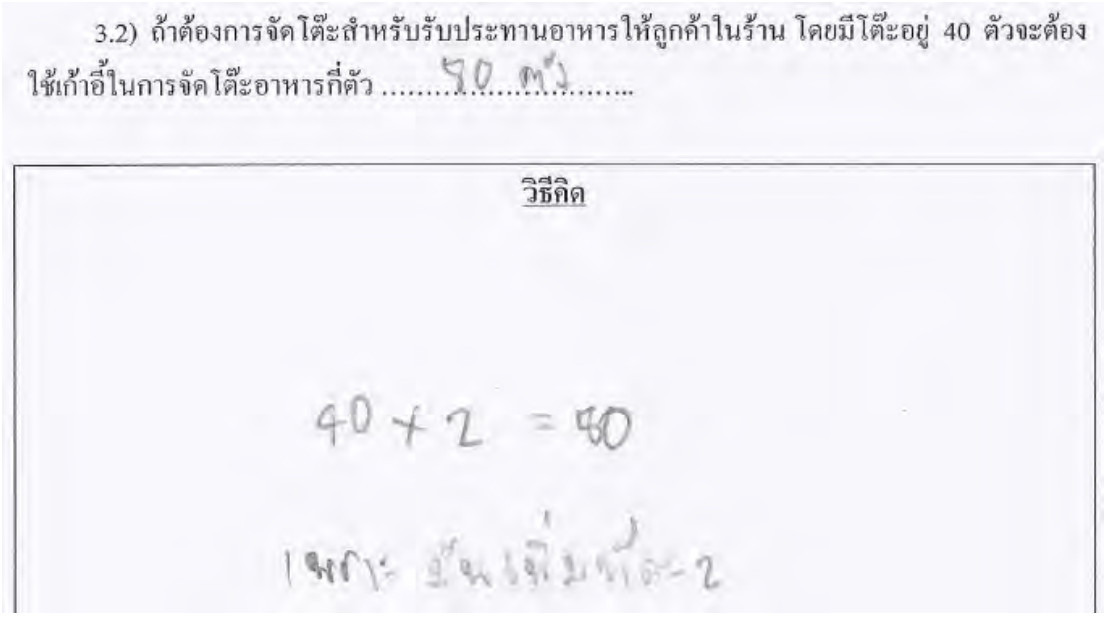
จากภาพที่ 43 ซึ่งแสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตของตัวแทนนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับปานกลาง ในเรื่องของแบบรูปและประโยคเปิดของจำนวนที่พัฒนาขึ้นหลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) เด็กชายศิลปาชีพและเด็กชายนัชฎาเป็นนักเรียนในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนอยู่ในระดับปานกลาง ก่อนเรียนระดับการคิดเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูปของเด็กชายศิลปาชีพและเด็กชายนัชฎาอยู่ในระดับ 2 หลังเรียนระดับการคิดของเด็กชายศิลปาชีพ

พัฒนาขึ้นเป็นระดับ 4 ส่วนเด็กชายนัชฎาพัฒนาขึ้นเป็นระดับ 3 และในเรื่องประโยคเปิดของจำนวนก่อนเรียนระดับการคิดของเด็กชายศิลปาชีพอยู่ในระดับ 3 ระดับการคิดของเด็กชายนัชฎาอยู่ในระดับ 2 หลังเรียนระดับการคิดของทั้งเด็กชายศิลปาชีพและเด็กชายนัชฎาพัฒนาขึ้นเป็นระดับ 4

จากการศึกษาในเชิงลึกของนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับปานกลางทั้ง 2 คน หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) พบว่านักเรียนทั้ง 2 คน มีพัฒนาการที่ดีขึ้น โดยก่อนเรียนเด็กชายศิลปาชีพมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องแบบรูปอยู่ในระดับ 2 เนื่องจากสามารถหาพจน์ถัดไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่ยังไม่สามารถหาค่าของพจน์ไกลๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบก่อนเรียนของเด็กชายศิลปาชีพในภาพที่ 44 และ 45



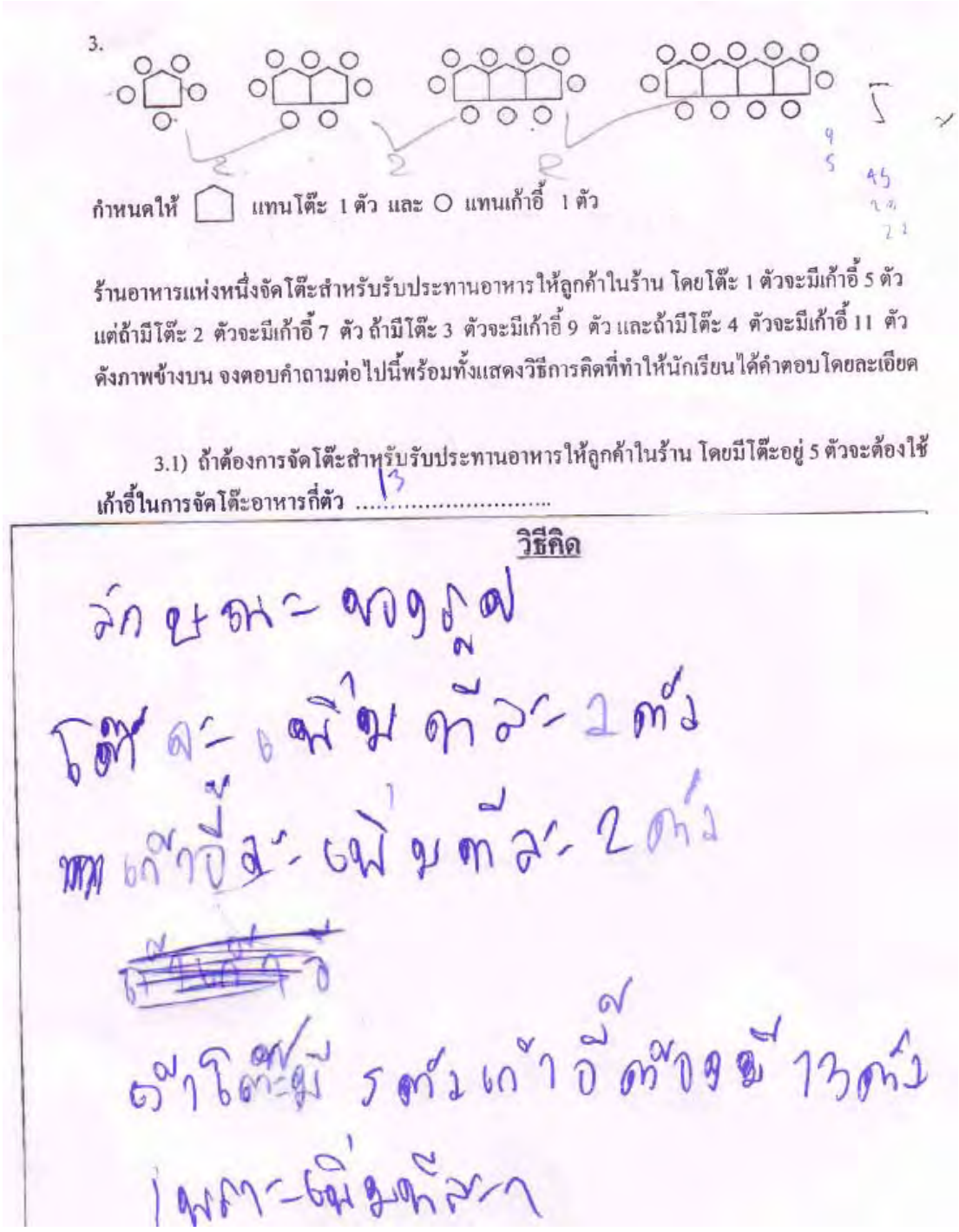

ภาพ 44 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปข้อ 3.1 ของเด็กชายศิลปาชีพ




ภาพ 45 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปข้อ 3.2 ของเด็กชายศิลปาชีพ

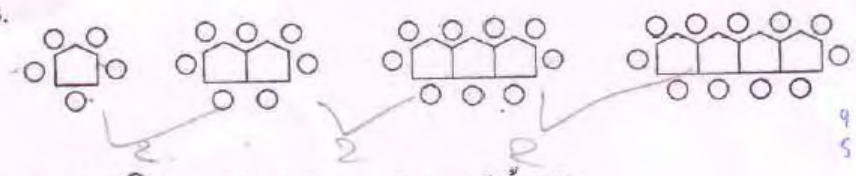
จากภาพที่ 44 และ 45 พบว่า เด็กชายศิลปาชีพสามารถหาจำนวนเก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารที่ใช้โต๊ะ 5 ตัว ได้อย่างถูกต้อง โดยคำตอบที่ได้เกิดจากผลบวกของพจน์ก่อนหน้ากับผลต่างระหว่างพจน์ของแบบรูปที่กำหนดให้ แต่ไม่สามารถหาจำนวนเก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารที่ใช้โต๊ะ 40 ตัว ได้อย่างถูกต้อง เนื่องจากเด็กชายศิลปาชีพไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้น ๆ ได้ ส่งผลให้ไม่สามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้อย่างถูกต้อง โดยคำตอบที่ได้เกิดจากการนำจำนวนโต๊ะ คือ 40 คูณกับผลต่างระหว่างพจน์ของแบบรูป คือ 2 และได้คำตอบ คือ 80 ซึ่งเป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง

หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) แล้ว พบว่า เด็กชายศิลปาชีพสามารถพัฒนาระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องแบบรูปขึ้นเป็นระดับ 4 กล่าวคือ สามารถหาพจน์ที่อยู่ถัดไป พจน์ที่อยู่ไกล หรือพจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้ โดยใช้สูตรทั่วไปที่สร้างขึ้นจากการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้น ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบหลังเรียนในภาพที่ 46 และ 47




ภาพ 46 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูป ข้อ 3.1 ของเด็กชายศิลปาชีพ

3.

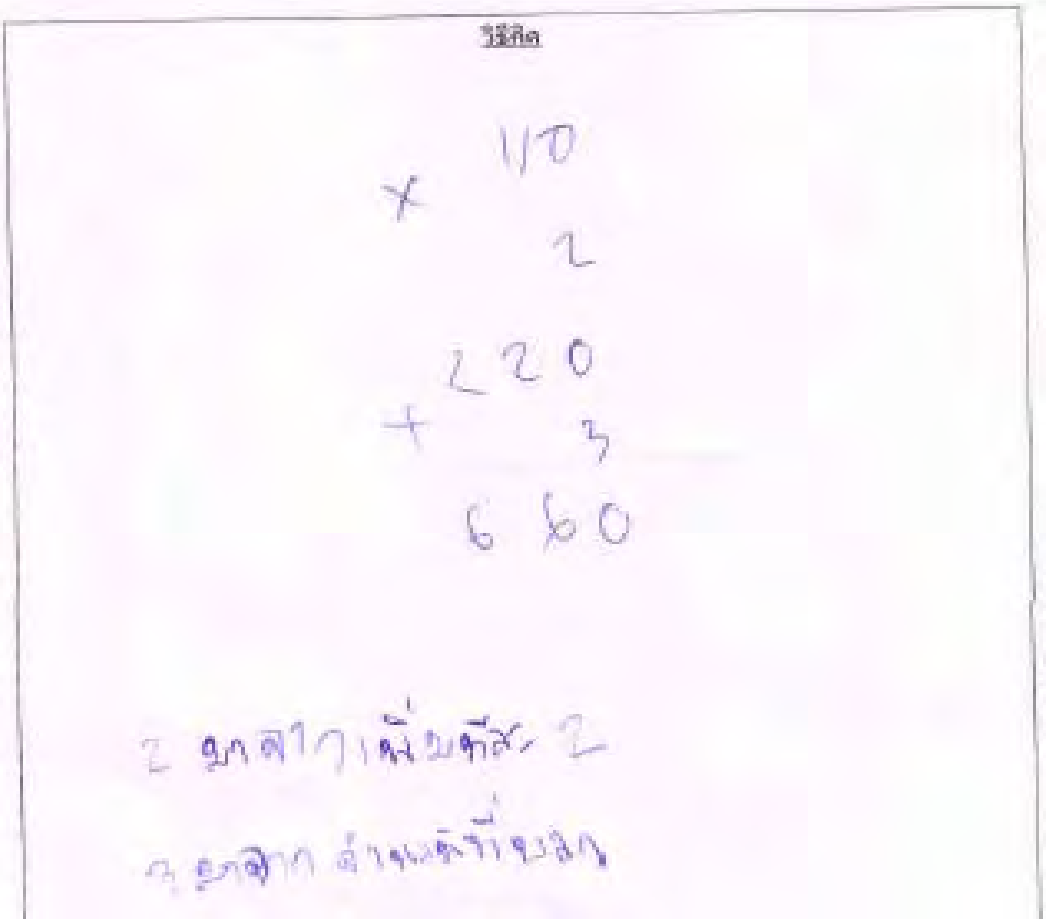


กำหนดให้ ⬠ แทนโต๊ะ 1 ตัว และ ○ แทนเก้าอี้ 1 ตัว

ร้านอาหารแห่งหนึ่งจัดโต๊ะสำหรับรับประทานอาหารให้ลูกค้าในร้าน โดยโต๊ะ 1 ตัวจะมีเก้าอี้ 5 ตัว แต่ถ้ามีโต๊ะ 2 ตัวจะมีเก้าอี้ 7 ตัว ถ้ามีโต๊ะ 3 ตัวจะมีเก้าอี้ 9 ตัว และถ้ามีโต๊ะ 4 ตัวจะมีเก้าอี้ 11 ตัว ดังภาพข้างบน จงตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมทั้งแสดงวิธีการคิดที่ทำให้นักเรียนได้คำตอบโดยละเอียด

3.3) ถ้าต้องการจัดโต๊ะสำหรับรับประทานอาหารให้ลูกค้าในร้าน โดยมีโต๊ะอยู่ 110 ตัว จะต้องใช้เก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารกี่ตัว.....

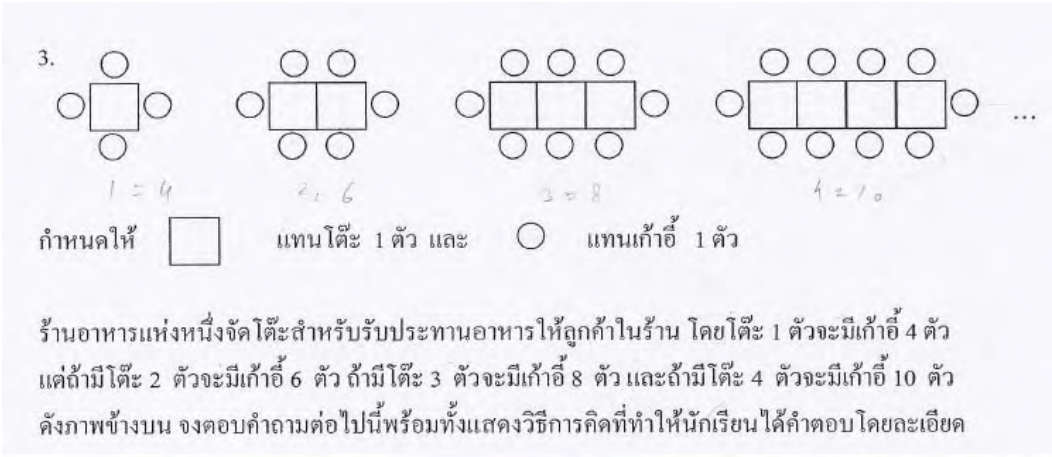
วิธีคิด



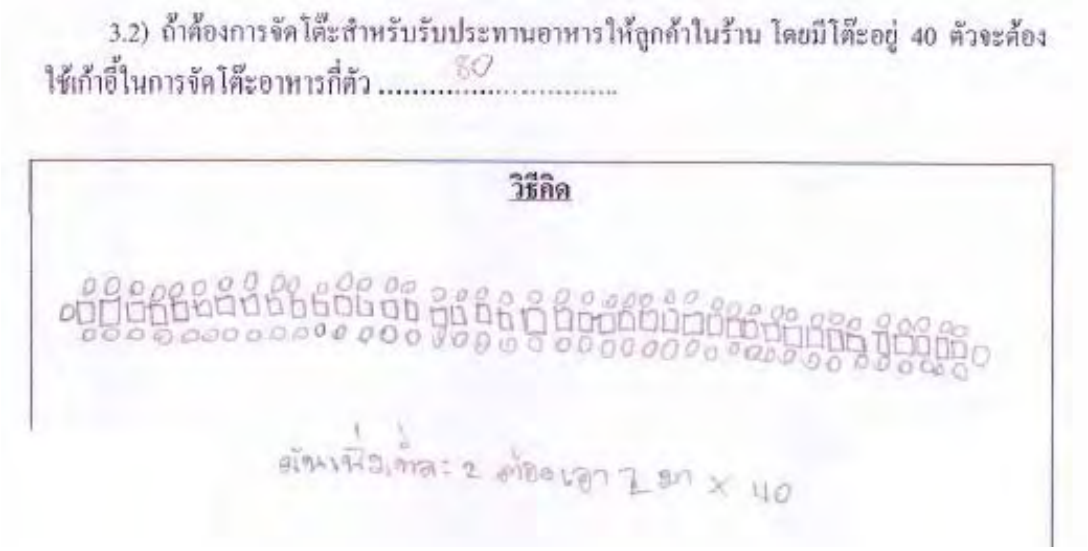

ภาพ 47 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูป ข้อ 3.3 ของเด็กชายศิลปาชีพ

จากภาพที่ 46 และ 47 พบว่า เด็กชายศิลปาชีพสามารถหาจำนวนเก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารที่ใช้โต๊ะ 5 ตัวและ 110 ตัว ได้อย่างถูกต้อง โดยคำตอบที่ได้มาจากการใช้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนโต๊ะกับจำนวนเก้าอี้ในแบบรูปที่กำหนดให้ ซึ่งเด็กชายศิลปาชีพสามารถมองเห็นว่าถ้าจำนวนโต๊ะเพิ่มขึ้น 1 ตัว จำนวนเก้าอี้จะเพิ่มขึ้น 2 ตัว และในข้อ 3.3 จะเห็นชัดว่าเด็กชายศิลปาชีพสามารถใช้สูตรของพจน์ทั่วไปในการหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง

ส่วนเด็กชายณัชฎาซึ่งมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับปานกลางเช่นเดียวกัน พบว่าก่อนเรียนมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องแบบรูปอยู่ในระดับ 2 เนื่องจากสามารถหาพจน์ถัดไปของแบบรูปได้ แต่ไม่สามารถหาพจน์ไกลๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้อย่างถูกต้อง ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบก่อนเรียนของเด็กชายณัชฎาในภาพที่ 48 และ 49



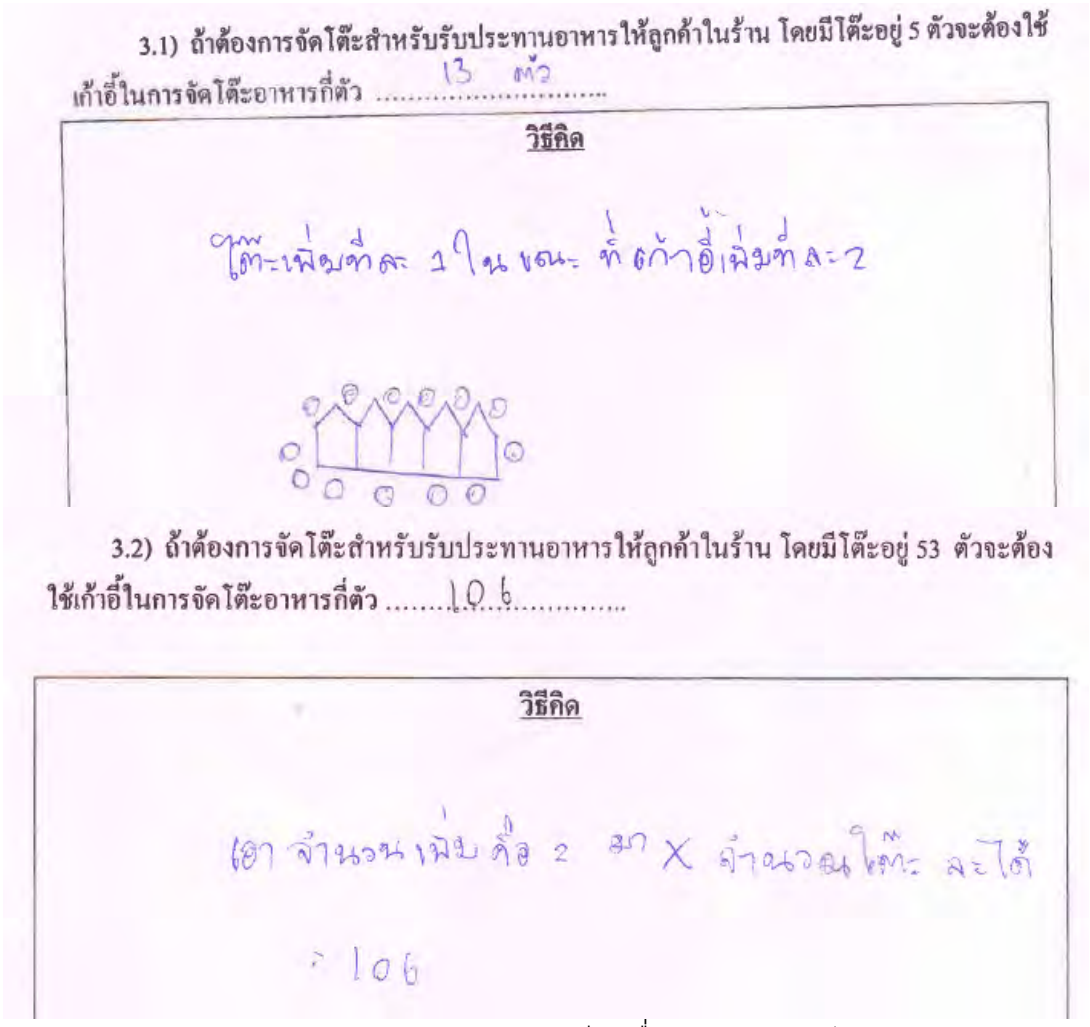

ภาพ 48 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปข้อ 3.1 ของเด็กชายณัชฎา




ภาพ 49 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปข้อ 3.2 ของเด็กชายณัชฎา

จากภาพที่ 48 และ 49 พบว่า เด็กชายณัชฎาสามารถหาจำนวนเก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารที่ใช้โต๊ะ 5 ตัว ได้อย่างถูกต้อง โดยคำตอบที่ได้มาจากการบวกพจน์ก่อนหน้าด้วยผลต่างระหว่างพจน์ของแบบรูปที่กำหนดให้ (นำ 10 มาบวกด้วย 2) แต่ไม่สามารถหาจำนวนเก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารที่ใช้โต๊ะ 40 ตัว ได้อย่างถูกต้อง เนื่องจากเด็กชายณัชฎาไม่สามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้อย่างถูกต้อง โดยนำเอา 2 ซึ่งเป็นผลต่างระหว่างพจน์ของแบบรูปมาคูณกับ 40 ซึ่งเป็นจำนวนโต๊ะที่โจทย์กำหนดให้ แล้วได้คำตอบเป็น 80 ซึ่งเป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง

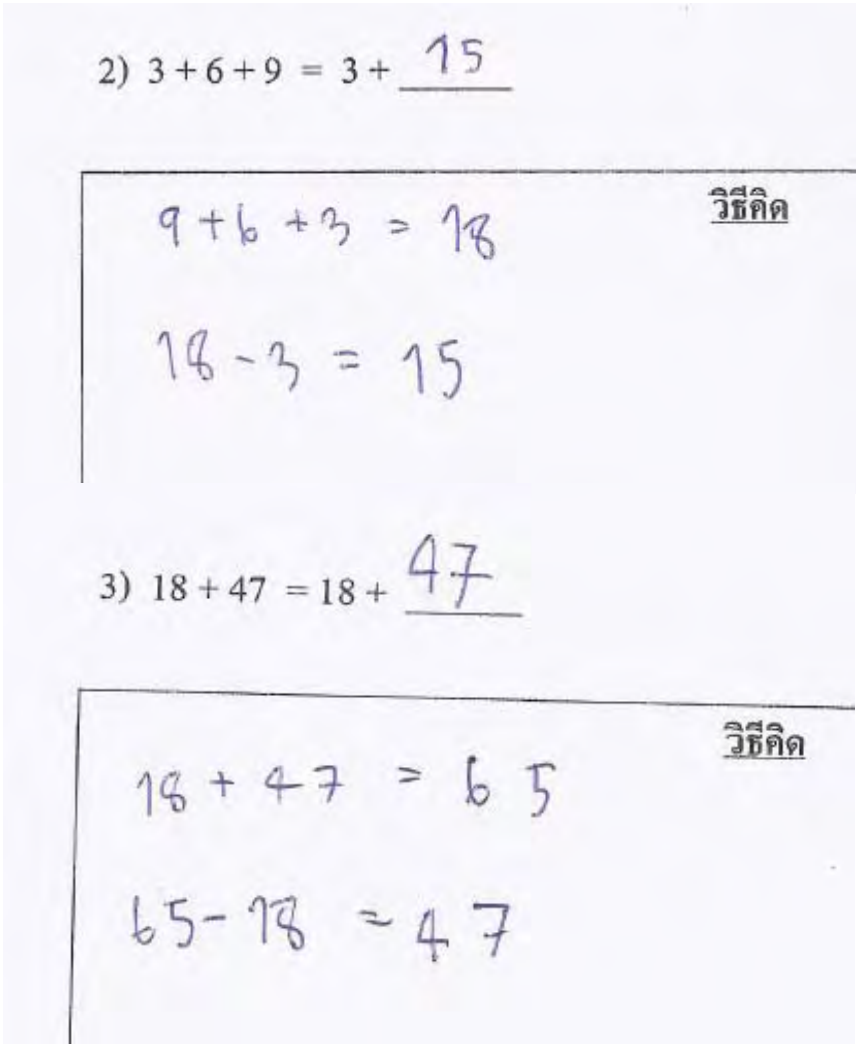
เมื่อได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) แล้ว พบว่า เด็กชายณัชฎาสามารถพัฒนาระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องแบบรูปขึ้นเป็นระดับ 3 กล่าวคือ สามารถหาพจน์ที่อยู่ถัดไปได้ โดยอาศัยความสัมพันธ์ในแบบรูปที่กำหนดให้ แต่ยังไม่สามารถหาพจน์ไกลๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้อย่างถูกต้อง ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบหลังเรียนในภาพที่ 50




ภาพ 50 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กชายณัชฎา

จากภาพที่ 50 พบว่า เด็กชายณัชฎาสามารถหาจำนวนเก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารที่ใช้โต๊ะ 5 ตัว ได้อย่างถูกต้อง โดยคำตอบที่ได้มาจากการใช้ความสัมพันธ์ของจำนวนโต๊ะและเก้าอี้ในแบบรูปที่กำหนดให้ ซึ่งเด็กชายณัชฎาสามารถมองเห็นว่าหากโต๊ะเพิ่มขึ้น 1 ตัว เก้าอี้จะเพิ่มขึ้น 2 ตัว แต่ไม่สามารถหาจำนวนเก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารที่ใช้โต๊ะ 53 ตัว ได้อย่างถูกต้อง เนื่องจากเด็กชายณัชฎาไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นทำให้ไม่สามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้อย่างถูกต้อง โดยนำเอา 2 ซึ่งเป็นผลต่างระหว่างพจน์ของแบบรูปมาคูณกับ 53 ซึ่งเป็นจำนวนโต๊ะที่โจทย์กำหนดให้ แล้วได้คำตอบเป็น 106 ซึ่งเป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง

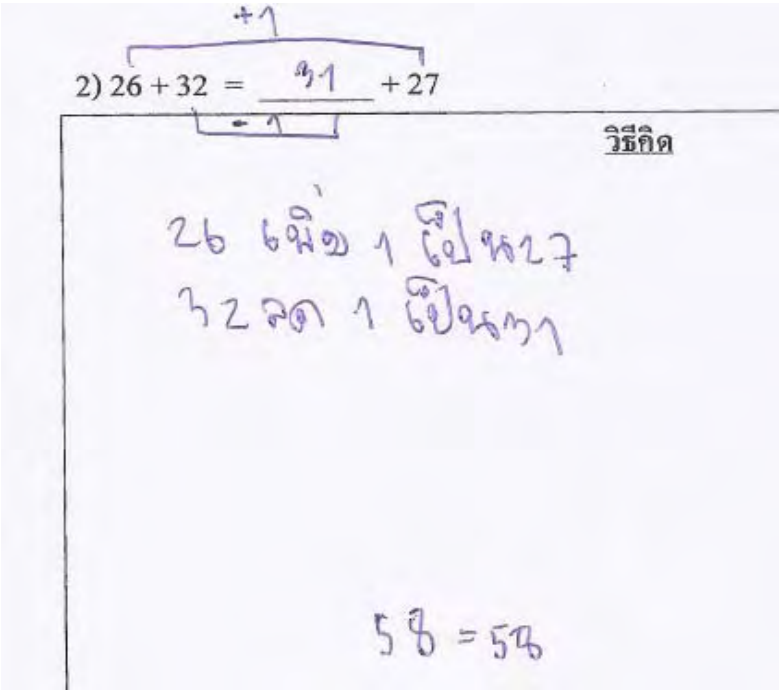
เมื่อพิจารณาเรื่องประโยคเปิดของจำนวนพบว่า ก่อนเรียนเด็กชายศิลปาชีพ ซึ่งเป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับปานกลาง มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องนี้อยู่ในระดับ 3 เนื่องจากสามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน แต่มองประโยคเปิดเป็นส่วนๆ ทำให้ไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด และหาคำตอบโดยการคำนวณ กล่าวคือ คำนวณผลลัพธ์ทางด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับแล้วนำมาลบกับจำนวนที่เหลือที่อยู่อีกด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบก่อนเรียนในภาพที่ 51



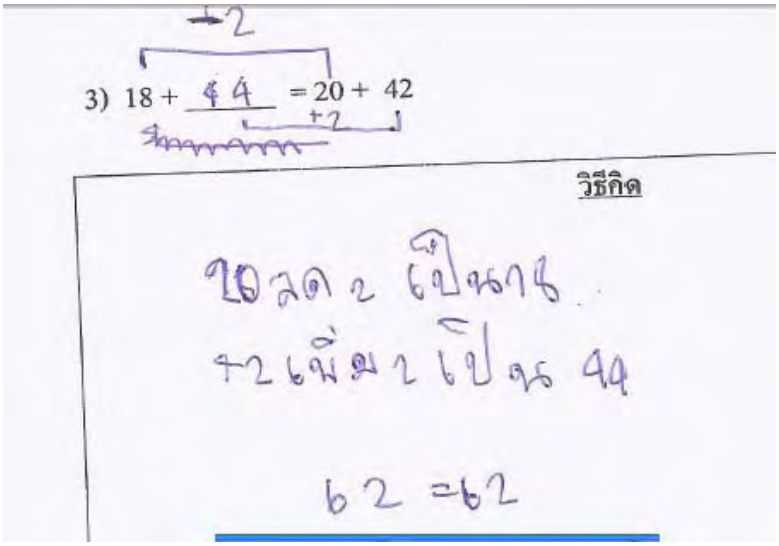

ภาพ 51 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายศิลปาชีพ

จากภาพที่ 51 พบว่า เด็กชายศิลปาชีพหาคำตอบโดยการคำนวณผลลัพธ์ทางด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับแล้วนำมาลบกับจำนวนที่เหลือที่อยู่อีกด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ เช่น ในข้อ 2) เด็กชายศิลปาชีพจะนำตัวเลขทางด้านซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับ คือ 9 6 และ 3 มาบวกกันก่อน จากนั้นนำผลลัพธ์ที่ได้ คือ 18 ไปลบออกด้วย 3 ได้คำตอบเป็น 15 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง แต่การหาคำตอบด้วยวิธีดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าเด็กชายศิลปาชีพมองประโยคเปิดเป็นส่วนๆ ส่งผลให้มองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด

หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) แล้ว พบว่า เด็กชายศิลปาชีพสามารถพัฒนาระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องประโยคเปิดของจำนวนขึ้นเป็นระดับ 4 กล่าวคือ สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน และมองประโยคเปิดในลักษณะที่เป็นองค์รวมทั้งประโยค ไม่ได้แยกพิจารณาเป็นส่วนๆ จึงทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด และหาคำตอบโดยการพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคเปิด ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบหลังเรียนในภาพที่ 52 และ 53



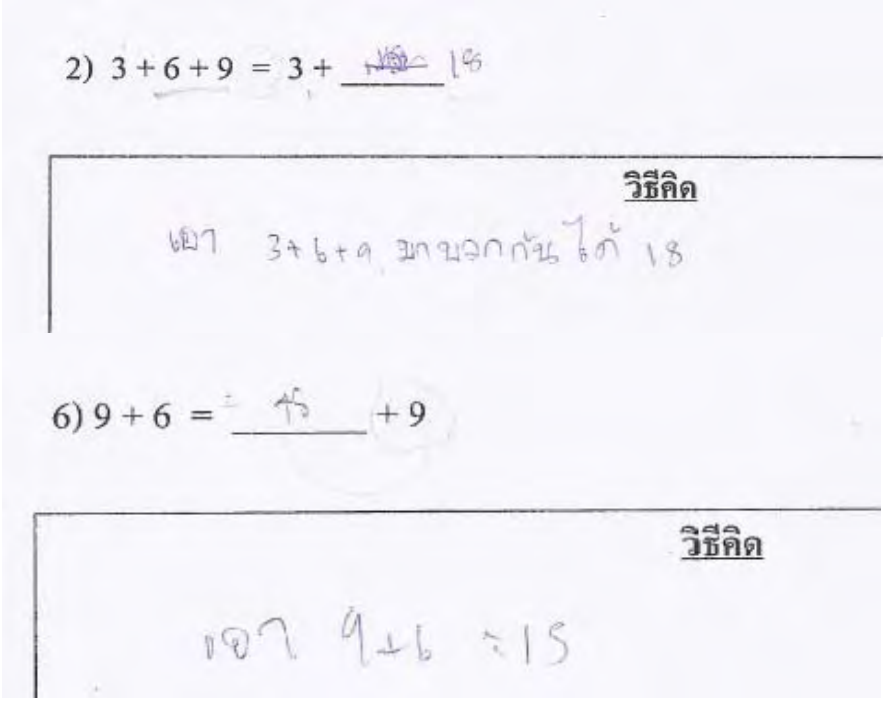

ภาพ 52 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายศิลปาชีพในข้อที่ 2




ภาพ 53 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายศิลปาชีพใน ข้อที่ 3

จากภาพที่ 52 และ 53 พบว่า เด็กชายศิลปาชีพหาคำตอบโดยใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ที่เกิดจากการพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคเปิด เช่น ในข้อ 2) เด็กชายศิลปาชีพได้คำตอบเป็น 31 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง และคำตอบที่ได้ไม่ได้มาจากการคำนวณเหมือนเช่นตอนก่อนเรียน แต่ได้มาจากการพิจารณาจำนวนที่อยู่ทางด้านซ้ายและด้านขวาของเครื่องหมายเท่ากับกล่าวคือ เมื่อจำนวนทางด้านซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับ คือ 26 เพิ่มขึ้น 1 เป็น 27 เด็กชายศิลปาชีพจึงนำ 32 ซึ่งเป็นจำนวนทางด้านซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับเช่นกันมาลบออกด้วย 1 เป็น 31 เพื่อให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน การหาคำตอบโดยวิธีนี้แสดงให้เห็นว่าเด็กชายศิลปาชีพสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคเปิดและใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวในการหาคำตอบได้อย่างถูกต้องสมเหตุสมผล

ส่วนเด็กชายณัชฎา ซึ่งมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับปานกลาง เช่นเดียวกับเด็กชายศิลปาชีพ พบว่าก่อนเรียนมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องประโยคเปิดของจำนวนอยู่ในระดับ 2 เนื่องจากไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากันหรือไม่ โดยหาคำตอบจากการนำตัวเลขที่อยู่ทางด้านซ้ายของเครื่องหมายเท่ากับมาบวกลบกันแล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาเติมลงในช่องว่าง โดยไม่สนใจจำนวนอื่นที่อยู่ทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับ ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบก่อนเรียนในภาพที่ 54



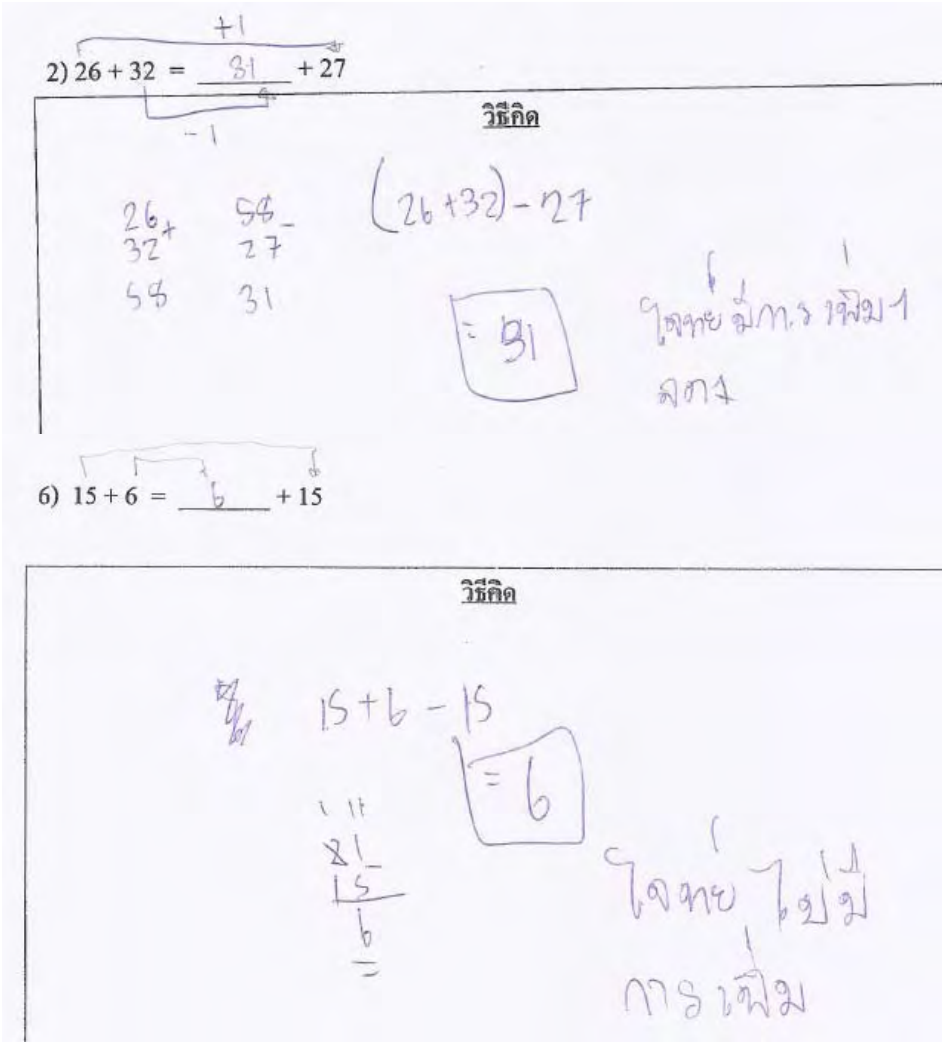

ภาพ 54 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายณัชฎา

จากภาพที่ 54 พบว่า เด็กชายณัชฎาหาคำตอบโดยการนำตัวเลขที่อยู่ทางด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับมาบวกกันแล้วนำผลลัพธ์ที่ได้มาเติมลงในช่องว่าง โดยไม่ได้พิจารณาจำนวนที่อยู่ทางด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับเลย เช่น ในข้อ 2) เด็กชายณัชฎานำ 3 6 และ 9 มาบวกกันได้เป็น 18 แล้วนำมาใช้เป็นคำตอบในข้อนี้ โดยไม่สนใจเลข 3 ที่อยู่ทางขวามือของเครื่องหมายเท่ากับแต่อย่างใด ส่งผลให้คำตอบที่ได้เป็นคำตอบที่ไม่ถูกต้อง ซึ่งการหาคำตอบด้วยวิธีดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าเด็กชายณัชฎาไม่เข้าใจความหมายของประโยคเปิดที่มีเครื่องหมายเท่ากับ ไม่สนใจว่าทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากันหรือไม่ ซึ่งจากการสัมภาษณ์ เด็กชายณัชฎากล่าวว่า หลังเครื่องหมายเท่ากับจะเป็นคำตอบซึ่งได้จากการคำนวณตัวเลขที่อยู่ข้างหน้าเครื่องหมายเท่ากับ ดังบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

| | |
|---|---|
| ครู | อ่านโจทย์ให้ฟังหน่อยซิคะ |
| นักเรียน | 3 + 6 + 9 = 3 + ช่องว่าง |
| ครู | หมายความว่าอย่างไงคะ |
| นักเรียน | เอาหมดนี้มาบวกกัน 3 6 9 มาบวกกัน |

| | |
|---|---|
| ครู | แล้วทำไงต่อคะ |
| นักเรียน | ก็เขียนลงในช่องว่าง |
| ครู | โจทย์เค้าให้หาอะไรค่ะ |
| นักเรียน | คำตอบในช่องว่าง |
| ครู | แล้วคำตอบในช่องว่างเราหามาจากไหนคะ |
| นักเรียน | เอามาบวกกันทั้งสามตัว (ชี้เลขสามตัวที่อยู่หน้าเครื่องหมายเท่ากับ) |
| ครู | บวกกันได้เท่าไหร่ลูก |
| นักเรียน | 18 ครับ |
| ครู | คุณครูถามอีกหน่อยนะว่า อันนี้ (ชี้เครื่องหมายเท่ากับ) คืออะไร |
| นักเรียน | เท่ากับครับ |
| ครู | เท่ากับนะคะ อันนี้ล่ะ (ชี้ช่องว่างในโจทย์) |
| นักเรียน | เป็นช่องว่างเอาไว้ตอบครับ |
| ครู | แล้วอันเนี้ย (ชี้ทั้งประโยคเปิด) หมายความยอย่างไงคะ |
| นักเรียน | ถ้าเราทำอะไรตรงข้างหน้าตรงนี้ (ชี้ตัวเลขที่อยู่หน้าเครื่องหมายเท่ากับ) เสร็จแล้วเราก็เห็นเครื่องหมายนี้ (ชี้เครื่องหมายเท่ากับ)เราก็ตอบ |

แต่หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) แล้วพบว่า เด็กชายณัชฎาได้พัฒนาระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องประโยคเปิดของจำนวนขึ้นเป็นระดับ 4 กล่าวคือ เข้าใจความหมายของประโยคเปิดที่มีเครื่องหมายเท่ากับ สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน และมองประโยคเปิดในลักษณะที่เป็นองค์รวมทั้งประโยค ไม่ได้แยกพิจารณาเป็นส่วน ๆ จึงทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด และหาคำตอบโดยการพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคเปิด ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบหลังเรียนในภาพที่ 55



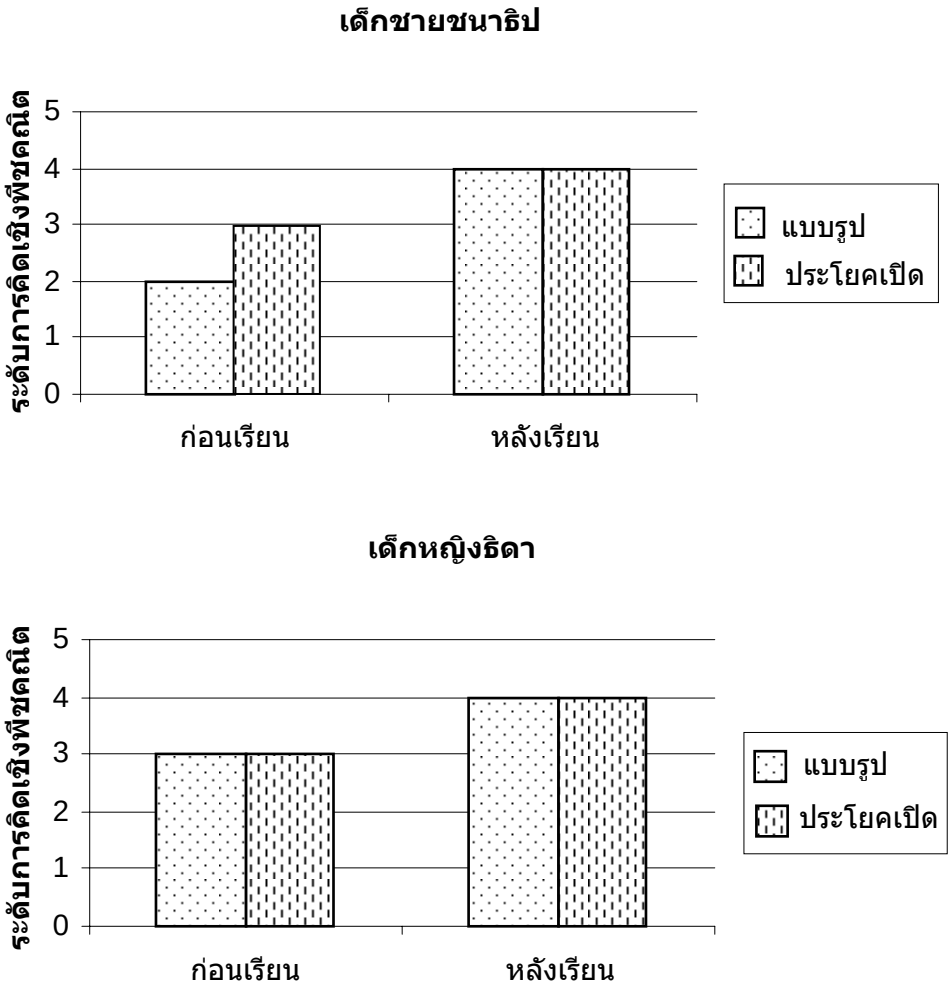

ภาพ 55 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายณัชฎา

จากภาพที่ 55 พบว่า เด็กชายณัชฎาหาคำตอบโดยใช้ความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคเปิด เช่น ในข้อ 6) เด็กชายณัชฎามองเห็นว่าทางซ้ายมือและขวามือของเครื่องหมายเท่ากับมีเลข 15 เหมือนกัน (เห็นได้จากการโยงเส้นเชื่อมเลข 15 ในแบบทดสอบ) นั่นคือไม่มีการเพิ่มหรือลดค่าของตัวเลขทางด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ ดังนั้นคำตอบที่ได้จึงเป็น 6 ซึ่งเป็นเลขเดิมที่ไม่มีการเพิ่มหรือลดเช่นกัน เพื่อให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน นอกจากนั้นเด็กชายณัชฎายังใช้การคำนวณเป็นการตรวจคำตอบอีกรอบหนึ่งด้วย การหาคำตอบโดยวิธีนี้แสดงให้เห็นว่าเด็กชายณัชฎาสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนใน

ประโยคเปิดและใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวในการหาคำตอบได้อย่างถูกต้องสมเหตุสมผล ดังบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

| | |
|---|---|
| ครู | อ่านโจทย์ครับ |
| นักเรียน | 15 + 6 = ช่องว่าง + 15 |
| ครู | ทำอย่างไงคะ |
| นักเรียน | ก็โยงจากด้านที่สมบูรณ์ไปหาด้านที่ไม่สมบูรณ์ |
| ครู | ไหนโยงอย่างไงลูก |
| นักเรียน | 15 ไปหา 15 แล้วก็ 6 ไปหาช่องว่าง |
| ครู | แล้วทำอย่างไงต่อคะ |
| นักเรียน | 15 ไปหา 15 ไม่เปลี่ยนแปลง |
| ครู | ไม่เปลี่ยนแปลงอย่างไงคะ |
| นักเรียน | มันไม่เพิ่มไม่ลดครับ |
| ครู | อืม ค่ะ แล้วอย่าไงต่อ |
| นักเรียน | ในช่องว่างก็เลยใส่ 6 ลงไปครับ |
| ครู | เพราะอะไรค่ะทำไมถึงใส่ 6 |
| นักเรียน | เพราะ 15 มันไม่เพิ่มไม่ลดคือ...แบบว่ามันไม่เปลี่ยนแปลงหนะครับ 6 ก็ต้องเหมือนกัน |
| ครู | เหมือนกันอย่างไงคะ |
| นักเรียน | ไม่เปลี่ยนแปลงเหมือนกัน |
| ครู | ค่ะครูเข้าใจแล้ว แล้วเราตรวจคำตอบอย่างไงคะ |
| นักเรียน | 15 + 6 ได้ 21 แล้ว 6 + 15 ก็เป็น 21 ครับ |
| ครู | แสดงว่าคำตอบเป็นไงครับ |
| นักเรียน | ถูกครับ |

**กรณีตัวอย่างของการศึกษาระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูง**

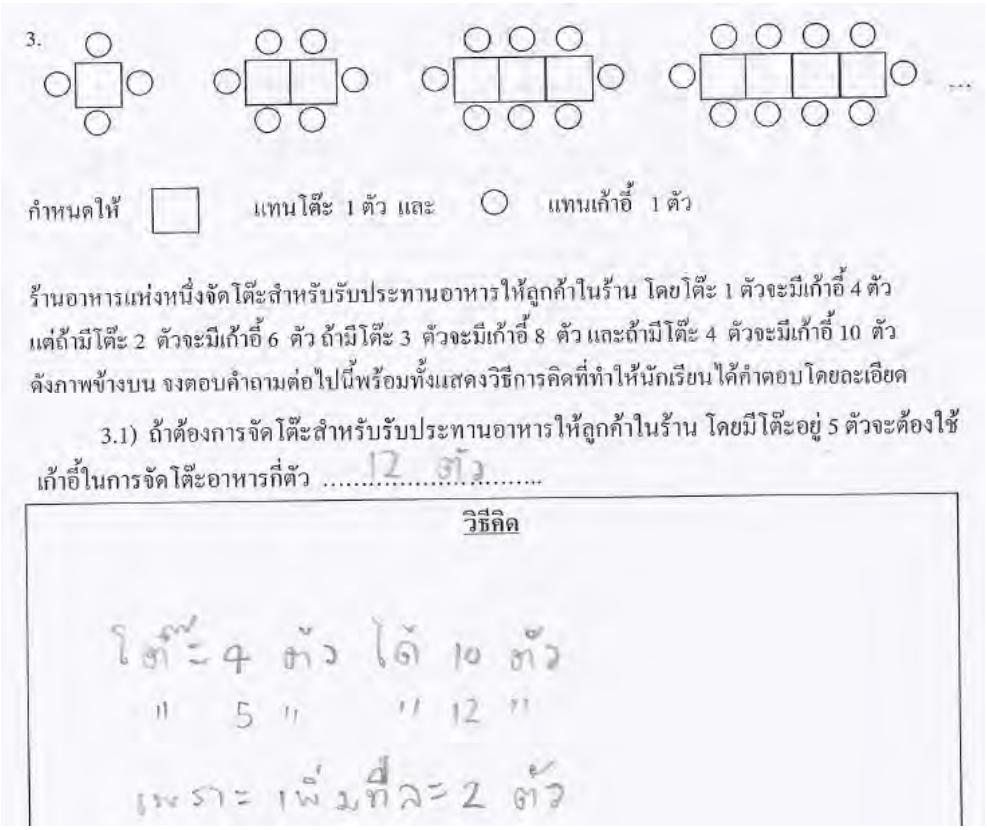



ภาพ 56 แสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตก่อนและหลังเรียนของนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูง

จากภาพที่ 56 แสดงระดับการคิดเชิงพีชคณิตของตัวแทนนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูง ในเรื่องของแบบรูปและประโยคเปิดของจำนวนที่พัฒนาขึ้นหลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) เด็กชายชนาธิปและเด็กหญิงธิดาเป็นนักเรียนในกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูง ก่อนเรียนระดับการคิดเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูปของเด็กชายชนาธิปอยู่ในระดับ 2 ส่วนเด็กหญิงธิดาอยู่ในระดับ 3 หลังเรียนระดับการคิดของเด็กชายชนาธิปและเด็กหญิงธิดาพัฒนาขึ้นเป็นระดับ

4 และในเรื่องประโยคเปิดของจำนวนก่อนเรียนระดับการคิดของเด็กชายชนาธิปและเด็กหญิงธิดาอยู่ในระดับ 3 หลังเรียนระดับการคิดของทั้งเด็กชายชนาธิปและเด็กหญิงธิดาพัฒนาขึ้นเป็นระดับ 4

จากการศึกษาในเชิงลึกของนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับสูงทั้ง 2 คน หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) พบว่านักเรียนทั้ง 2 คน มีพัฒนาการที่ดีขึ้น โดยก่อนเรียนเด็กชายชนาธิปมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องแบบรูปอยู่ในระดับ 2 เนื่องจากสามารถหาพจน์ถัดไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่ยังไม่สามารถหาค่าของพจน์ไกล ๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบก่อนเรียนของเด็กชายชนาธิปในภาพที่ 57 และ 58


3.



กำหนดให้  แทนโต๊ะ 1 ตัว และ  แทนเก้าอี้ 1 ตัว

ร้านอาหารแห่งหนึ่งจัดโต๊ะสำหรับรับประทานอาหารให้ลูกค้าในร้าน โดยโต๊ะ 1 ตัวจะมีเก้าอี้ 4 ตัว แต่ถ้ามีโต๊ะ 2 ตัวจะมีเก้าอี้ 6 ตัว ถ้ามีโต๊ะ 3 ตัวจะมีเก้าอี้ 8 ตัว และถ้ามีโต๊ะ 4 ตัวจะมีเก้าอี้ 10 ตัว ดังภาพข้างบน จงตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมทั้งแสดงวิธีการคิดที่ทำให้นักเรียนได้คำตอบโดยละเอียด

3.1) ถ้าต้องการจัดโต๊ะสำหรับรับประทานอาหารให้ลูกค้าในร้าน โดยมีโต๊ะอยู่ 5 ตัวจะต้องใช้เก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารกี่ตัว ..... 12 ตัว .....

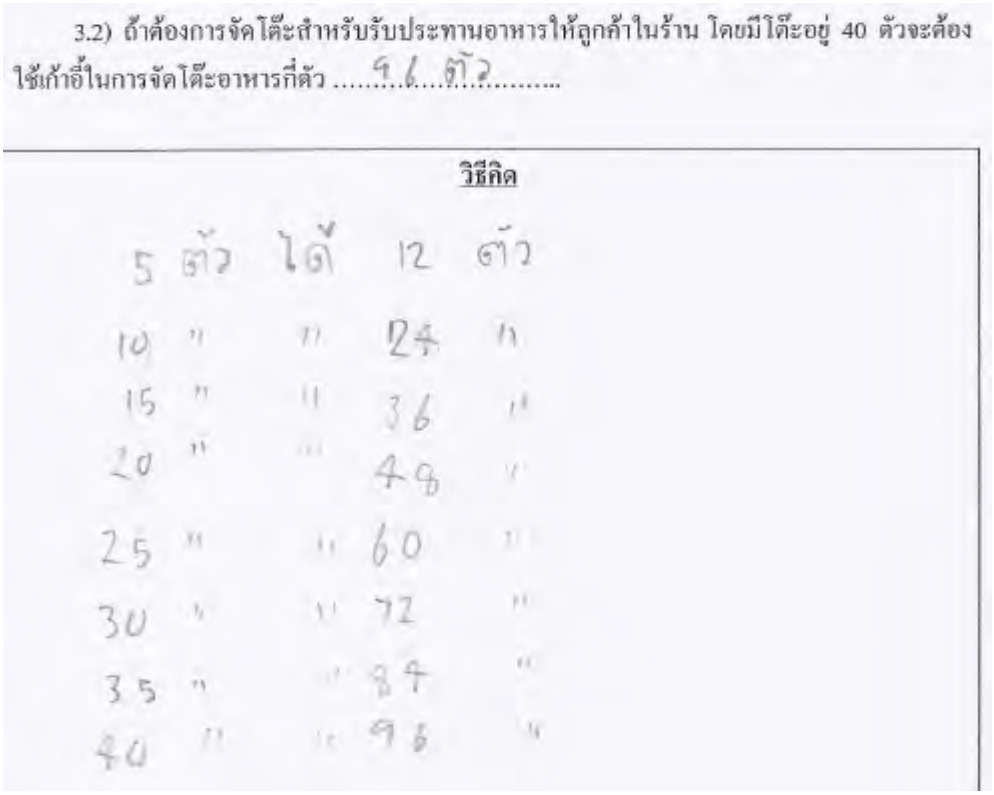
วิธีคิด

โต๊ะ 4 ตัว ได้ 10 ตัว

" 5 " " 12 "

เพราะ เพิ่มทีละ 2 ตัว

ภาพ 57 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กชายชนาธิปในข้อ 3.1


3.2) ถ้าต้องการจัดโต๊ะสำหรับรับประทานอาหารให้ลูกค้าในร้าน โดยมีโต๊ะอยู่ 40 ตัวจะต้องใช้เก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารกี่ตัว ..... 96 ตัว .....

วิธีคิด

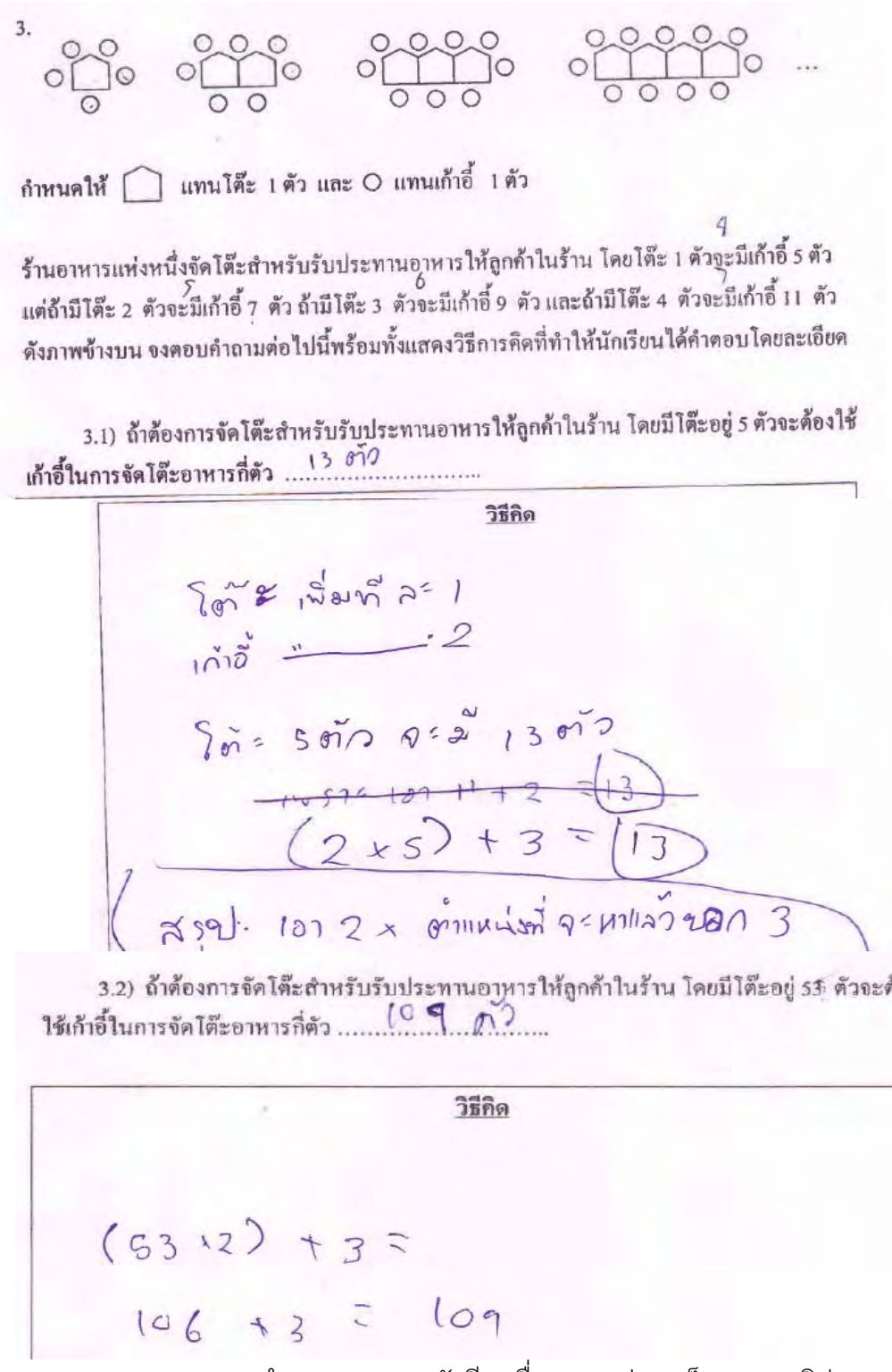
5 ตัว ได้ 12 ตัว
10 " " 24 "
15 " " 36 "
20 " " 48 "
25 " " 60 "
30 " " 72 "
35 " " 84 "
40 " " 96 "

ภาพ 58 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กชายชนาธิปในข้อ 3.2

จากภาพที่ 57 และภาพที่ 58 พบว่า เด็กชายชนาธิปสามารถหาจำนวนเก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารที่ใช้โต๊ะ 5 ตัว ได้อย่างถูกต้อง โดยคำตอบที่ได้มาจากการบวกพจน์ก่อนหน้าคือ 10 เข้ากับผลต่างระหว่างพจน์ของแบบรูปที่กำหนดให้ คือ 2 ได้คำตอบเป็น 12 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง แต่ไม่สามารถหาจำนวนเก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารที่ใช้โต๊ะ 40 ตัว ได้อย่างถูกต้อง โดยเด็กชายชนาธิปเข้าใจว่าหากโต๊ะเพิ่มขึ้น 5 ตัว เก้าอี้จะเพิ่มขึ้น 12 ตัว เสมอ จึงทำการเพิ่มโต๊ะทีละ 5 ตัว จนครบ 40 ตัว ในขณะที่เพิ่มเก้าอี้ทีละ 12 ตัว เมื่อจำนวนโต๊ะครบ 40 ตัว จึงได้จำนวนเก้าอี้ 96 ตัว ซึ่งไม่ถูกต้อง เนื่องจากเด็กชายชนาธิปไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้น ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในสองมิติออกมาได้ เป็นผลให้ไม่สามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้อย่างถูกต้อง

หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) แล้ว พบว่า เด็กชายชนาธิปได้พัฒนาระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องแบบรูปขึ้นเป็นระดับ 4 กล่าวคือ สามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป

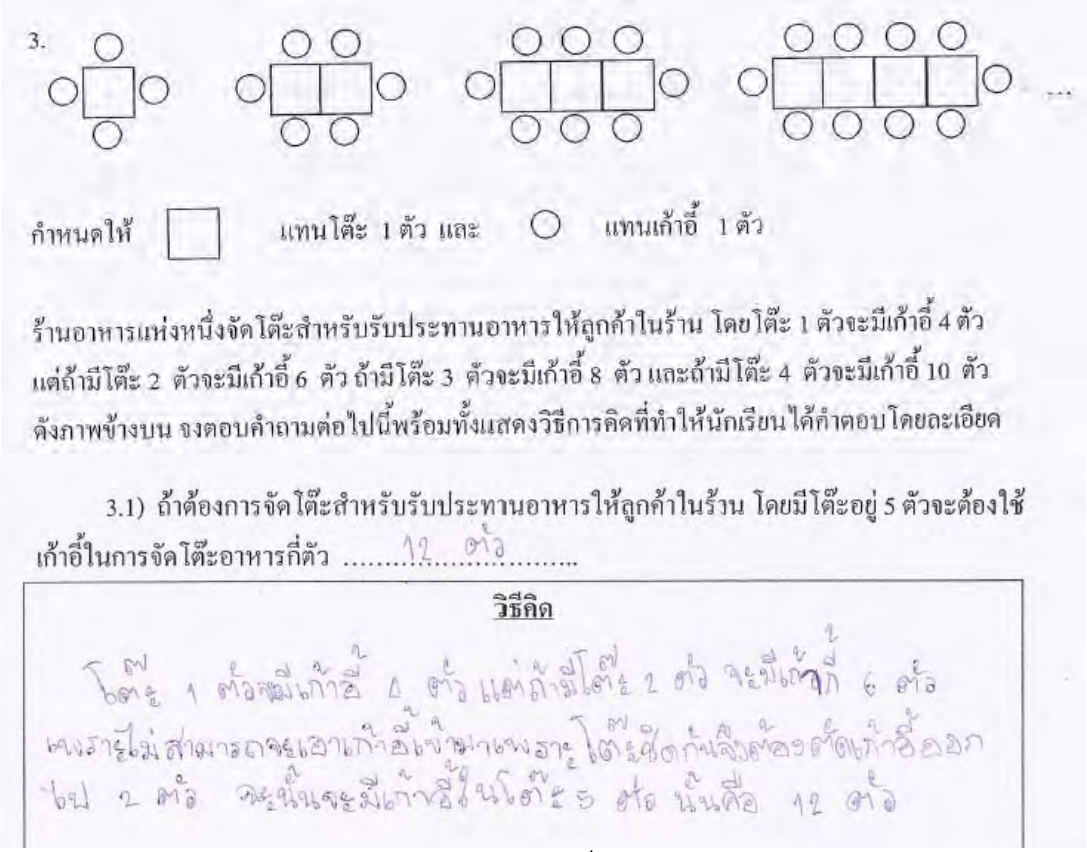
พจน์ที่อยู่ไกล หรือพจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบหลังเรียนของเด็กชายชนาธิปในภาพที่ 59



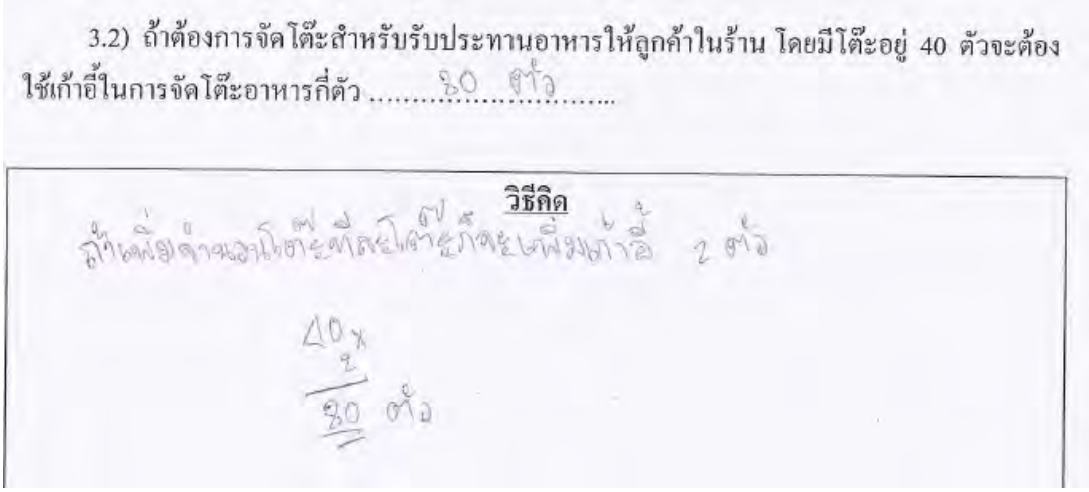

ภาพ 59 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กชายชนาธิป

จากภาพที่ 59 พบว่า เด็กชายชนาธิปสามารถหาจำนวนเก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารที่ใช้โต๊ะ 5 ตัว และ 53 ตัว ได้อย่างถูกต้อง โดยคำตอบที่ได้ไม่ได้เกิดจากการบวกพจน์ก่อนหน้าด้วยผลต่างระหว่างพจน์เหมือนเช่นตอนก่อนเรียน แต่ได้มาจากการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้น จนสามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้อย่างถูกต้องสมเหตุสมผล และใช้สูตรทั่วไปที่หามาได้ในการหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง เช่น ในข้อ 3.1 เด็กชายชนาธิปสามารถสรุปได้ว่า คำตอบที่ได้จะต้องมาจากการนำ 2 ไปคูณด้วยตำแหน่งที่ต้องการหาแล้วบวกด้วย 3 ซึ่งในข้อนี้ คือ (2×5)+3 ได้คำตอบเป็น 13

ส่วนเด็กหญิงธิดาซึ่งเป็นนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงเช่นเดียวกับเด็กชายชนาธิปพบว่า ก่อนเรียนมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องแบบรูปอยู่ในระดับ 3 เนื่องจาก สามารถหาพจน์ถัดไปของแบบรูปได้ โดยใช้การให้เหตุผลเชิงความสัมพันธ์ที่วิเคราะห์ได้จากแบบรูปที่กำหนดให้ แต่ยังไม่สามารถหาพจน์ที่อยู่ไกลๆ และพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้ ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบก่อนเรียนของเด็กหญิงธิดาในภาพที่ 60 และภาพที่ 61




ภาพ 60 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กหญิงธิดาในข้อ 3.1


3.2) ถ้าต้องการจัดโต๊ะสำหรับรับประทานอาหารให้ลูกค้าในร้าน โดยมีโต๊ะอยู่ 40 ตัวจะต้องใช้เก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารกี่ตัว .....80 ตัว.....

วิธีคิด

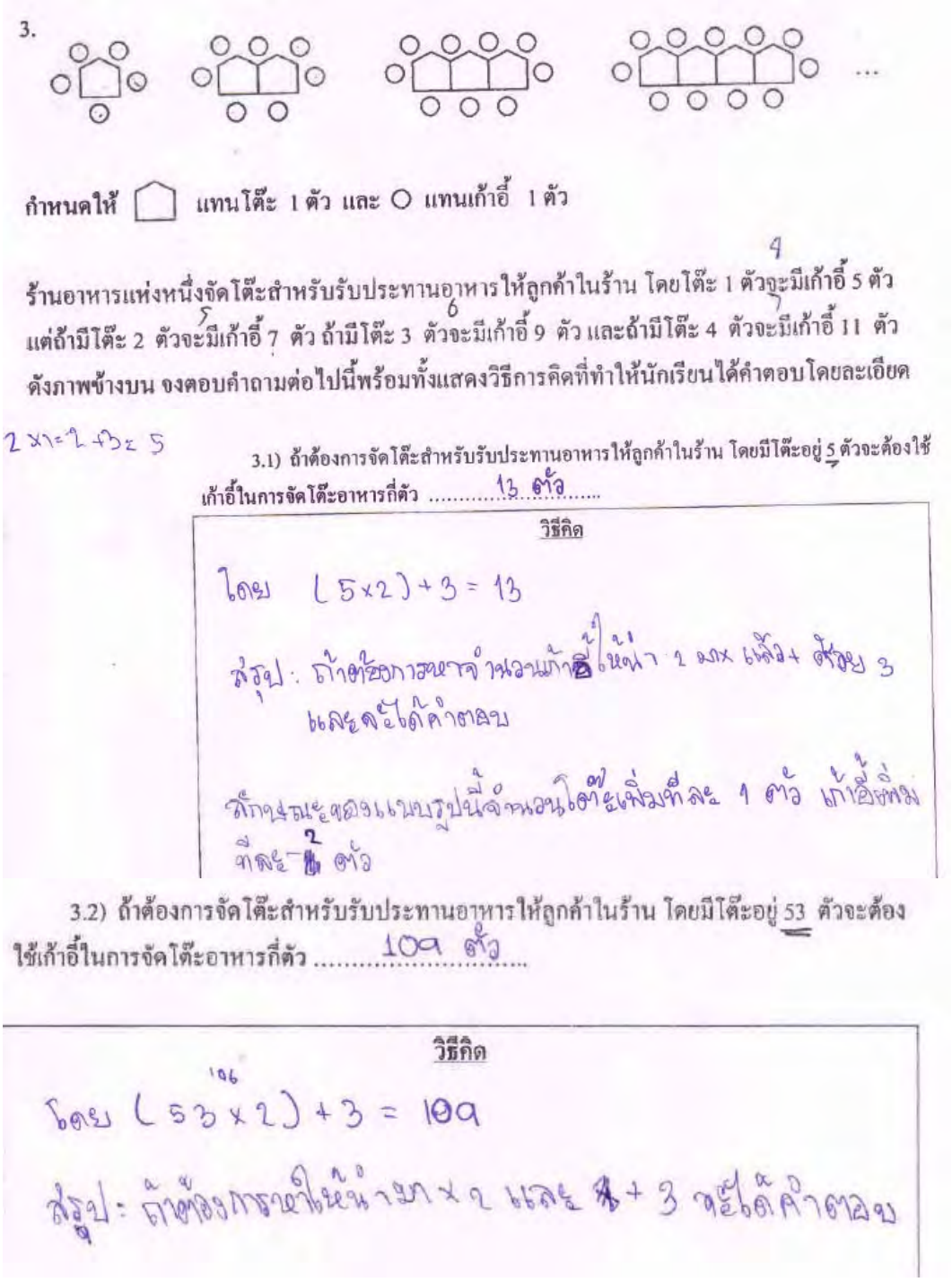
ถ้าเพิ่มจำนวนโต๊ะทีละโต๊ะก็จะเพิ่มเก้าอี้ 2 ตัว

40 x 2 = 80 ตัว

ภาพ 61 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กหญิงธิดาในข้อ 3.2

จากภาพที่ 60 และภาพที่ 61 พบว่า เด็กหญิงธิดาสามารถหาจำนวนเก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารที่ใช้โต๊ะ 5 ตัว ได้อย่างถูกต้อง โดยคำตอบที่ได้เกิดจากมองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนโต๊ะและเก้าอี้ โดยเด็กหญิงธิดาอธิบายว่า โต๊ะ 1 ตัว จะใช้เก้าอี้ 4 ตัว แต่ถ้าหากนำโต๊ะมาต่อกัน 2 ตัว จะใช้เก้าอี้เพียง 6 ตัว เพราะไม่สามารถนำเก้าอี้มาแทรกตรงรอยต่อระหว่างโต๊ะได้ จึงต้องลดจำนวนเก้าอี้ลง 2 ตัว เหลือเพียง 6 ตัว เท่านั้น ดังนั้นจากเหตุผลข้างต้นจึงสรุปได้ว่าหากใช้โต๊ะ 5 ตัว จะต้องใช้เก้าอี้ทั้งหมด 12 ตัว นั่นเอง แต่เมื่อเพิ่มจำนวนโต๊ะเป็น 40 ตัว เด็กหญิงธิดาไม่สามารถหาจำนวนเก้าอี้ที่ถูกต้องได้ โดยนำเอา 40 ซึ่งเป็นจำนวนโต๊ะที่กำหนดให้ มาคูณกับ 2 ซึ่งเป็นผลต่างระหว่างพจน์ของแบบรูป ได้คำตอบเป็น 80 ซึ่งไม่ถูกต้อง เนื่องจากเด็กหญิงธิดาไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในสองมิติได้ ส่งผลให้ไม่สามารถหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้อย่างถูกต้อง

แต่หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) แล้วพบว่า เด็กหญิงธิดาสามารถพัฒนาระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องแบบรูปขึ้นเป็นระดับ 4 กล่าวคือ สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของพจน์และค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้น ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ในสองมิติ และหาสูตรแทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้สามารถหาค่าของพจน์ถัดไป พจน์ที่อยู่ไกล หรือพจน์ใด ๆ ของแบบรูปได้อย่างสมบูรณ์ ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบหลังเรียนของเด็กหญิงธิดาในภาพที่ 62

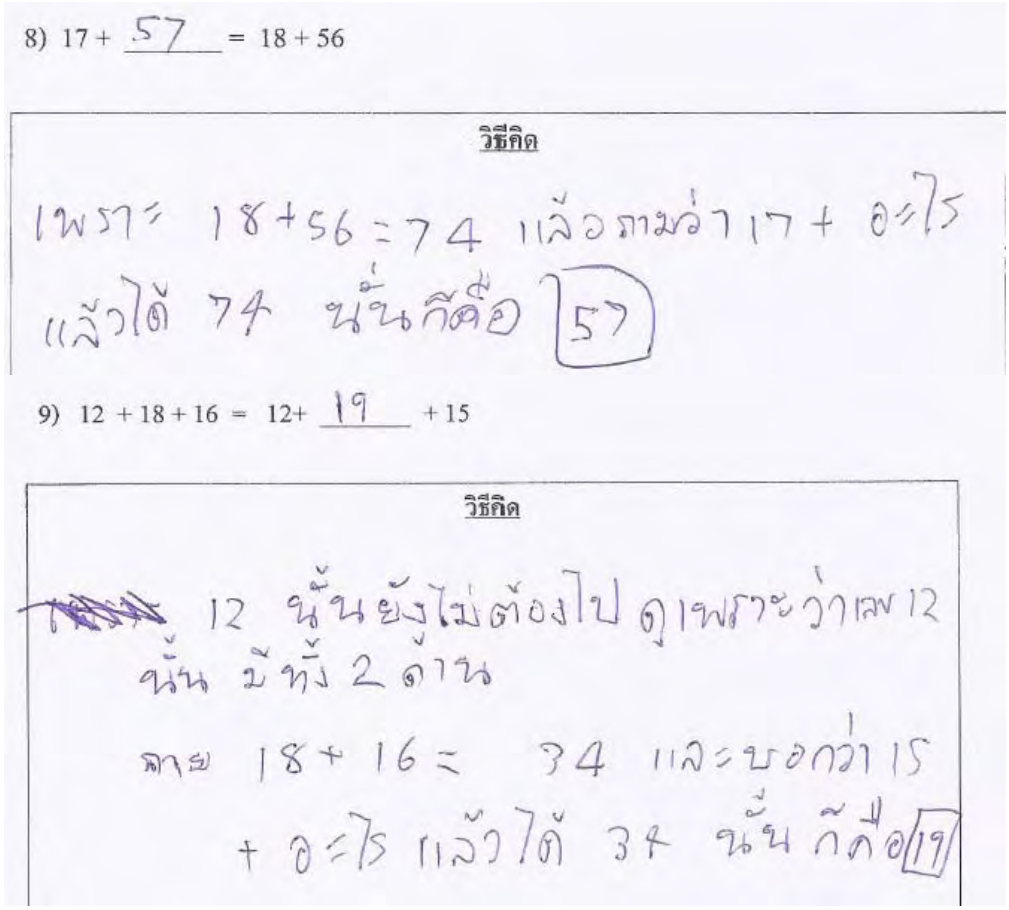



ภาพ 62 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องแบบรูปของเด็กหญิงธิดา

จากภาพที่ 62 พบว่า เด็กหญิงธิดาสามารถหาจำนวนเก้าอี้ในการจัดโต๊ะอาหารที่ใช้โต๊ะ 5 ตัว และ 53 ตัว ได้อย่างถูกต้อง โดยคำตอบที่ได้มาจากการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเก้าอี้ (ตำแหน่งของพจน์) และจำนวนเก้าอี้ (ค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้น) จนสามารถหาสูตร

แทนพจน์ทั่วไปของแบบรูปได้อย่างถูกต้องสมเหตุสมผล และใช้สูตรทั่วไปที่หามาได้ในการหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง เช่น ในข้อ 3.1 เด็กหญิงธิดาสามารถสรุปได้ว่า ถ้าต้องการหาจำนวนเก้าอี้ให้นำ 2 มาคูณกับจำนวนโต๊ะแล้วบวกด้วย 3 ก็จะได้คำตอบ ซึ่งในข้อนี้ คือ (5×2)+3 ได้คำตอบเป็น 13

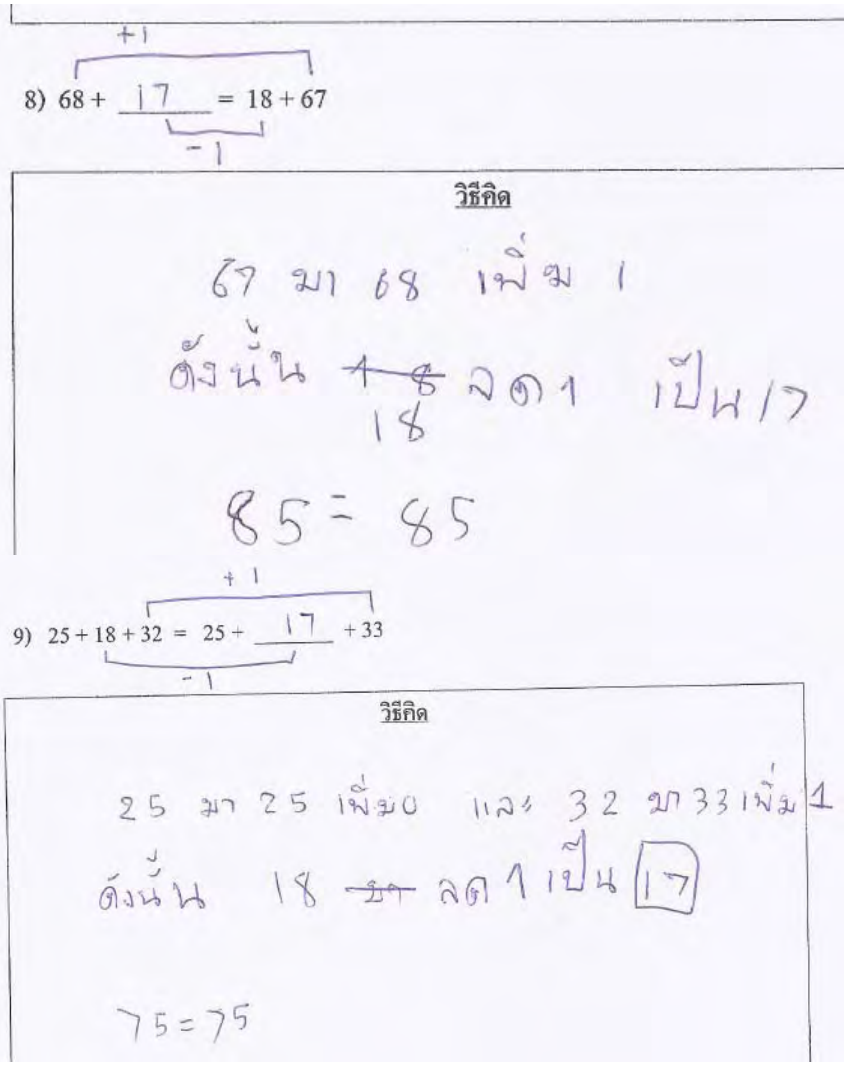
เมื่อพิจารณาเรื่องประโยคเปิดของจำนวนพบว่า ก่อนเรียนเด็กชายชนาธิป ซึ่งเป็นนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูง มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องนี้อยู่ในระดับ 3 เนื่องจาก สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน แต่ไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด เพราะยังคงมองประโยคเปิดเป็นส่วนๆ และหาคำตอบโดยใช้เหตุผลในเชิงการคำนวณ ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบก่อนเรียนของเด็กชายชนาธิปในภาพที่ 63




ภาพ 63 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายชนาธิป

จากภาพที่ 63 พบว่า เด็กชายชนาธิปหาคำตอบโดยการคำนวณค่าของทางด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ จากนั้นพิจารณาหาจำนวนที่จะนำมาเติมในช่องว่างอีกด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับเพื่อทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน เช่น ในข้อ 8) เด็กชายชนาธิปจะนำตัวเลขทางด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ คือ 18 กับ 56 มาบวกกันได้ 74 จากนั้นพิจารณาว่าในช่องว่างควรเติมเลขอะไรถึงจะทำให้ทางซ้ายมือและขวามือของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเป็น 74 เท่ากัน แต่ทางด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับมีเลข 17 อยู่แล้ว ดังนั้นเด็กชายชนาธิปจึงคิดหาตัวเลขที่นำมาบวกกับ 17 แล้วได้ 74 นั่นก็คือ 57 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง การหาคำตอบในลักษณะนี้แสดงให้เห็นว่าเด็กชายชนาธิปมองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด จึงยังคงใช้การคำนวณในการหาคำตอบ

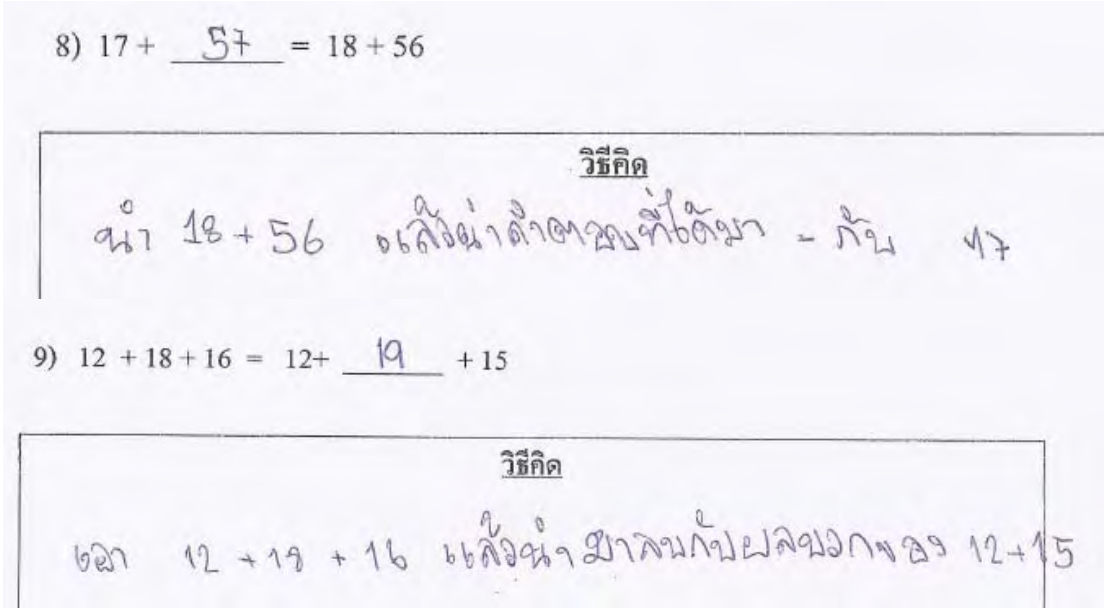
หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) แล้ว พบว่า เด็กชายชนาธิปได้พัฒนาระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องประโยคเปิดของจำนวนขึ้นเป็นระดับ 4 กล่าวคือ สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน นั่นคือเข้าใจความหมายของเครื่องหมายเท่ากับ และมองประโยคเปิดในลักษณะที่เป็นองค์รวมทั้งประโยค ไม่ได้แยกพิจารณาเป็นส่วน ๆ จึงทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด และหาคำตอบโดยการพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคเปิด ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบหลังเรียนของเด็กชายชนาธิปในภาพที่ 64




ภาพ 64 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กชายชนาธิป

จากภาพที่ 64 พบว่า เด็กชายชนาธิปหาคำตอบโดยใช้เหตุผลในเชิงความสัมพันธ์ที่เกิดจากการพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคเปิด เช่น ในข้อ 8) คำตอบที่เด็กชายชนาธิปหามาได้ ไม่ได้มาจากการคำนวณเหมือนเช่นตอนก่อนเรียน แต่ได้มาจากการพิจารณาจำนวนที่อยู่ทางด้านซ้ายและด้านขวาของเครื่องหมายเท่ากับกล่าวคือ เมื่อจำนวนทางด้านขวาของเครื่องหมายเท่ากับ คือ 67 เพิ่มขึ้น 1 เป็น 68 เด็กชายชนาธิปจึงนำ 18 ซึ่งเป็นจำนวนทางด้านขวาของเครื่องหมายเท่ากับเช่นกันมาลบออกด้วย 1 เป็น 17 เพื่อให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน การหาคำตอบโดยวิธีนี้แสดงให้เห็นว่าเด็กชายชนาธิปสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคเปิดและใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวในการหาคำตอบแทนการคำนวณได้อย่างถูกต้องสมเหตุสมผล

ส่วนเด็กหญิงธิดา ซึ่งเป็นนักเรียนกลุ่มที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์อยู่ในระดับสูงเช่นกันพบว่า ก่อนเรียนมีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องประโยคเปิดของจำนวนอยู่ในระดับ 3 เนื่องจากสามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน แต่มองประโยคเปิดเป็นส่วน ๆ จึงไม่สามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิดออกมาได้ และหาคำตอบโดยการคำนวณผลลัพธ์ทางด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับแล้วนำมาลบกับจำนวนที่เหลือที่อยู่อีกด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบก่อนเรียนของเด็กหญิงธิดาในภาพที่ 65



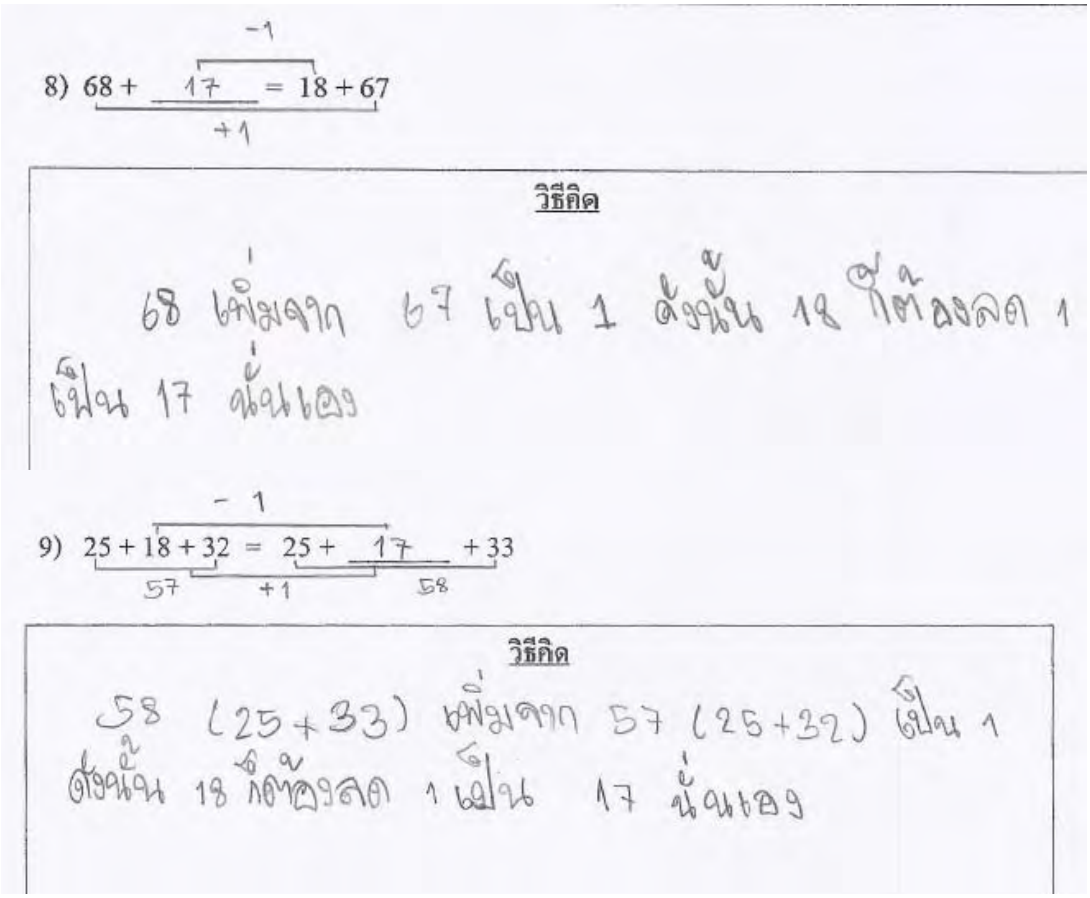

ภาพ 65 แสดงการทำแบบทดสอบก่อนเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กหญิงธิดา

จากภาพที่ 65 พบว่า เด็กหญิงธิดาหาคำตอบโดยการคำนวณผลลัพธ์ทางด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับแล้วนำมาลบกับจำนวนที่เหลือที่อยู่อีกด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ เช่น ในข้อ 8) เด็กหญิงธิดาจะนำตัวเลขทางด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ คือ 18 และ 56 มาบวกกันก่อน จากนั้นนำผลลัพธ์ที่ได้ไปลบออกด้วยตัวเลขทางด้านซ้ายมือของเครื่องหมายเท่ากับ คือ 17 ได้คำตอบเป็น 57 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง แต่การหาคำตอบด้วยวิธีดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าเด็กหญิงธิดามองประโยคเปิดเป็นส่วนๆ ทำให้มองไม่เห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนใน

ประโยคเปิด จึงใช้การคำนวณในการหาคำตอบและใช้การคำนวณในการตรวจคำตอบเช่นกัน ดังบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

| | |
|---|---|
| ครู | ข้อ 8 อ่านโจทย์ซิคะ |
| นักเรียน | 17 + อะไร = 18 + 56 |
| ครู | แล้วทำอย่างไงคะ |
| นักเรียน | ก็นำ 18 + 56 บวกกันก่อน แล้วนำไปลบกับ 17 |
| ครู | ได้คำตอบเท่าไรคะ |
| นักเรียน | 57 ค่ะ |
| ครู | หนูมีวิธีคิดแบบอื่นที่ง่ายกว่านี้มั้ยคะ |
| นักเรียน | หนูไม่แน่ใจค่ะ แต่ว่าวิธีนี้ก็ไม่ยากนะคะหนูเข้าใจแบบนี้ |
| ครู | ค่ะ แล้วตรวจคำตอบอย่างไงค่ะ รู้ได้อย่างไงว่าเราตอบถูก |
| นักเรียน | เอาบวกกันแล้วก็ดูว่าเท่ากันมั้ย |
| ครู | เอาอะไรบวกกันคะ |
| นักเรียน | เอา 17 + 57 แล้วก็ 18 + 56 |
| ครู | อืม เท่ากันมั้ยค่ะ |
| นักเรียน | เท่าค่ะ |
| ครู | ถ้ามันเท่ากันแสดงว่า... |
| นักเรียน | ถูก |
| ครู | ถ้าไม่เท่าล่ะคะ |
| นักเรียน | ไม่เท่าก็ไม่ถูก ก็ต้องคิดใหม่ค่ะ |

หลังจากได้รับการสอนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) แล้ว พบว่า เด็กหญิงธิดาสามารถพัฒนาระดับการคิดเชิงพีชคณิตในเรื่องประโยคเปิดของจำนวนขึ้นเป็นระดับ 4 กล่าวคือ สามารถวิเคราะห์ได้ว่าจำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน และมองประโยคเปิดในลักษณะที่เป็นองค์รวมทั้งประโยค ไม่ได้แยกพิจารณาเป็นส่วนๆ จึงทำให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างแต่ละจำนวนในประโยคเปิด และหาคำตอบโดยการพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคเปิด ดังตัวอย่างการทำแบบทดสอบหลังเรียนในภาพที่ 66




ภาพ 66 แสดงการทำแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องประโยคเปิดของจำนวนของเด็กหญิงธิดา

จากภาพที่ 66 พบว่าเด็กหญิงธิดาไม่ได้หาคำตอบจากการคำนวณ แต่หาคำตอบโดยใช้ความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคเปิด เช่น ในข้อ 8) เด็กหญิงธิดามองเห็นว่าจำนวนที่อยู่ทางด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับ คือ 67 มีค่าเพิ่มขึ้น 1 เป็น 68 เมื่ออยู่อีกด้านหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ ดังนั้นเพื่อให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน จึงนำ 18 ซึ่งอยู่ทางด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับเช่นกันมาลบออกด้วย 1 เหลือเป็น 17 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้องสำหรับข้อนี้ การหาคำตอบโดยวิธีนี้แสดงให้เห็นว่าเด็กหญิงธิดาสามารถมองเห็นความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคเปิด รวมทั้งเข้าใจความหมายของการเท่ากัน และใช้ความสัมพันธ์ดังกล่าวในการหาคำตอบได้อย่างถูกต้องและสมเหตุสมผล ดังบทสัมภาษณ์ต่อไปนี้

| | |
|---|---|
| ครู | อ่านโจทย์ซิคะ |
| นักเรียน | 68 + อะไร จะเท่ากับ 18 + 67 |
| ครู | ค่ะ ทำอย่างไงค่ะ |
| นักเรียน | ก็ 67 กับ 68 มีความสัมพันธ์แบบบวกเพิ่มขึ้น 1 เพราะฉะนั้น 18 กับตัวที่ช่องว่างเนี่ย 18 จะต้องลดลง 1 เหลือ 17 ค่ะ |
| ครู | สรุปหนูตอบเท่าไรคะ |
| นักเรียน | 17 ค่ะ |
| ครู | ไม่ต้องคำนวณเหมือนเมื่อตอนแรกแล้วเหรอคะ |
| นักเรียน | ไม่ต้องค่ะ ดูความสัมพันธ์แบบนี้เร็วกว่าค่ะ |
| ครู | ตรวจคำตอบตรวจยังไงคะ |
| นักเรียน | ก็เอาบวกกัน แล้วก็ดูว่าข้างหน้ากับข้างหลังมันเท่ากันมั้ย |
| ครู | ข้างหน้ากับข้างหลังของอะไรคะ |
| นักเรียน | ของเท่ากับเนี่ยค่ะ (ชี้เครื่องหมายเท่ากับ) |

# บทที่ 5

# สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนากรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตสำหรับนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายและศึกษาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่ได้รับการสอนแบบแนะให้รู้คิด(CGI) โดยผู้วิจัยได้พิจารณาตัวบ่งชี้ในการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายคือ เรื่องแบบรูป และประโยคเปิดของจำนวน และกำหนดขั้นตอนในการดำเนินการวิจัยออกเป็น 2 ระยะ ได้แก่ ระยะที่ 1 เป็นการพัฒนากรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลาย ซึ่งผู้วิจัยดำเนินการสร้างกรอบแนวคิดเบื้องต้นในการแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายจากเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง จากนั้นดำเนินการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยซึ่งประกอบด้วย แบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิต การสัมภาษณ์และแบบบันทึกผลการสัมภาษณ์นำเครื่องมือที่สร้างขึ้นไปศึกษาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนเพื่อนำมาปรับกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตดังกล่าว โดยกลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 – 6 โรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่ ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2550 จำนวน 18 คน นำผลการวิเคราะห์ข้อมูลมาปรับกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนอีกครั้ง

ส่วนในระยะที่ 2 เป็นการพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่ได้รับการสอนแบบแนะให้รู้คิด (CGI) โดยผู้วิจัยนำกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตในระยะที่ 1 มาเป็นฐานในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI)จำนวน 8 แผน ใช้เวลาสอน 15 ชั่วโมง ทำการสร้างแบบทดสอบการคิดเชิงพีชคณิตก่อนและหลังเรียน และออกแบบการสัมภาษณ์และแบบบันทึกผลการสัมภาษณ์ โดยกลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย คือนักเรียนชั้นประถมศึกษาที่ 5/7 จำนวน 34 คน โรงเรียนอนุบาลเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่ ที่กำลังศึกษาในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2551 วิเคราะห์ข้อมูลเพื่อเปรียบเทียบระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนก่อนและหลังเรียน เพื่อหาค่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่มีระดับการคิดเปลี่ยนแปลง

## สรุปผลการวิจัย

ผลจากการวิจัยแบ่งเป็น 2 ระยะดังนี้

**ระยะที่หนึ่ง** พบว่า กรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่ได้ มีการจำแนกระดับการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนใน 2 ตัวบ่งชี้

ออกเป็น 4 ระดับ โดยตัวบ่งชี้ที่ 1 เรื่อง*แบบรูป* การคิดของนักเรียนในระดับที่ 1 นักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์ลักษณะของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้ไม่สามารถหาค่าของพจน์ถัดไปและพจน์ต่าง ๆ ของแบบรูปได้ หรือตอบคำถามโดยการเดา นักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในระดับที่ 2 สามารถวิเคราะห์ลักษณะของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่เป็นการวิเคราะห์เพียง 1 มิติคือการมองค่าของแต่ละพจน์ที่เปลี่ยนไป แต่ไม่สนใจตำแหน่งของพจน์ที่เปลี่ยนไป ทำให้ไม่สามารถหาค่าของพจน์ไกล ๆ ได้ ส่วนระดับที่ 3 นักเรียนสามารถวิเคราะห์ทั้งตำแหน่งของพจน์ในแบบรูปและค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นได้ ทำให้ได้สูตร/หลักการในการหาคำตอบในแบบรูปได้ แต่ไม่สามารถอธิบายที่มาของสูตรได้ชัดเจน ส่วนระดับที่ 4 นักเรียนสามารถหาข้อสรุปโดยผ่านการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของข้อมูลทั้งหมดในแบบรูปได้อย่างชัดเจน

ในส่วนของ*ประโยคเปิดของจำนวน*นั้น ในระดับที่ 1 นักเรียนไม่เข้าใจความสัมพันธ์ของข้อมูลในประโยคเปิด ทำให้มองรูปแบบของประโยคเปิดของจำนวนที่กำหนดให้ในรูปแบบใหม่ นั่นคือ การนำจำนวนทั้งหมดที่กำหนดให้ในประโยคเปิดมารวมอยู่ข้างเดียวกันเพื่อดำเนินการกัน แล้วนำคำตอบที่ได้เติมลงในช่องว่าง ในขณะที่ระดับที่ 2 นักเรียน วิเคราะห์ความสัมพันธ์ของประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูปของโจทย์เท่ากับคำตอบ ดังนั้นนักเรียนจึงดำเนินการกับจำนวนอีกข้างหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ แล้วนำคำตอบที่ได้เติมลงในช่องว่าง โดยไม่สนใจจำนวนที่อยู่ข้างเดียวกันกับคำตอบ ในระดับที่ 3 นักเรียนวิเคราะห์ประโยคเปิดที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง โดยมองในรูปของผลลัพธ์ทางซ้ายมือเท่ากับผลลัพธ์ทางขวามือของประโยคเปิด แต่ไม่มองเชิงความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยค ทำให้การดำเนินการหาคำตอบใช้การคำนวณเป็นหลัก ในขณะที่ระดับที่ 4 นักเรียนมองประโยคเปิดที่กำหนดให้ โดยพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยค จึงทำให้สามารถวิเคราะห์ได้ว่า จำนวนที่จะนำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน

**ระยะที่สอง** พบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนแบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในระดับ 4 เพิ่มขึ้นร้อยละ 85.29 ส่วนจำนวนนักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตที่อยู่ในระดับ 1, 2 และ 3 ลดลง โดยระดับการคิดเชิงพีชคณิตระดับ 2 จำนวนนักเรียนลดลงมากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 41.18 รองมาคือระดับ 3 คิดเป็นร้อยละ 32.35 และระดับ 1 มีจำนวนนักเรียนลดลงน้อยที่สุดคิดเป็นร้อยละ 11.76

## อภิปรายผลการวิจัย

ในการวิจัยครั้งนี้ดำเนินการวิจัยเป็น 2 ระยะ โดยระยะที่ 1 ผลการวิจัยทำให้ได้กรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่มีการจำแนกระดับการคิด

เชิงพีชคณิตของนักเรียนออกเป็น 4 ระดับใน 2 ตัวบ่งชี้ คือ แบบรูปและประโยคเปิดของจำนวน ซึ่งการสร้างกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตเบื้องต้นนั้นอยู่บนฐานคิดตามกรอบแนวคิดของ Biggs and Collis ที่เรียกว่า the SOLO model (Biggs & Collis, 1991) ใน 4 ระดับคือ ระดับ 1 ก่อนมองโครงสร้าง (Prestructural) ระดับ 2 มองโครงสร้างเดียว (Unistructural) ระดับ 3 มองหลายโครงสร้าง (Multistructural) และระดับ 4 มองเชื่อมโยง (Relational) ซึ่งกระบวนการปรับปรุงกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตในงานวิจัยนี้ทำให้มั่นใจได้ว่า ระดับการคิดเชิงพีชคณิตทั้ง 4 ระดับใน 2 ตัวบ่งชี้นั้นสอดคล้องกับระดับการคิดที่ Biggs และ Collis พัฒนาขึ้นใน 4 ระดับแรก ดังรายละเอียดต่อไปนี้

ระดับ 1 ในสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป นักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์ลักษณะของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ ทำให้ไม่สามารถหาค่าของพจน์ถัดไปและพจน์ต่าง ๆ ของแบบรูปได้ หรือตอบคำถามโดยการเดา ในขณะที่นักเรียนเผชิญกับประโยคเปิดของจำนวน นักเรียนก็ไม่เข้าใจความสัมพันธ์ของข้อมูลในประโยคเปิดเช่นกัน ทำให้มองรูปแบบของประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูปแบบใหม่ใหม่ โดยนำจำนวนทั้งหมดที่กำหนดให้ในประโยคเปิดมาดำเนินการกัน แล้วนำคำตอบที่ได้เติมลงในช่องว่าง โดยนักเรียนไม่สามารถอธิบายเหตุผลของคำตอบที่ได้ ซึ่งการคิดในระดับนี้สอดคล้องกับการคิดในระดับก่อนมองโครงสร้าง (Prestructural) ของ Biggs และ Collis (1991) ที่กล่าวว่า นักเรียนไม่เข้าใจในประเด็นปัญหาหรือเข้าใจผิด โดยอาจจะใช้ลักษณะหรือประเด็นที่ไม่เกี่ยวข้องกับสถานการณ์ที่กำหนดให้มาให้เหตุผล

ระดับ 2 ในสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป นักเรียนสามารถวิเคราะห์ลักษณะของแบบรูปที่กำหนดให้ได้ แต่เป็นการวิเคราะห์เพียง 1 มิติคือการมองค่าของแต่ละพจน์ที่เปลี่ยนไป แต่ไม่สนใจตำแหน่งของพจน์ที่เปลี่ยนไป ทำให้ไม่สามารถหาค่าของพจน์ไกลๆ ได้ ส่วนในสถานการณ์เกี่ยวกับประโยคเปิดของจำนวน นักเรียนสามารถวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของประโยคเปิดที่กำหนดให้ในรูปของโจทย์เท่ากับคำตอบ ทำให้นักเรียนดำเนินการกับจำนวนอีกข้างหนึ่งของเครื่องหมายเท่ากับ แล้วนำคำตอบที่ได้เติมลงในช่องว่าง โดยไม่สนใจจำนวนที่อยู่ข้างเดียวกันกับคำตอบ ซึ่งสิ่งที่นักเรียนตอบสนองนี้สอดคล้องกับระดับมองโครงสร้างเดียว (Unistructural) ของ Biggs และ Collis (1991) ซึ่ง กล่าวถึงความสามารถของนักเรียนกลุ่มนี้ว่า พวกเขามีความเข้าใจในประเด็นปัญหาที่เผชิญ แต่ใช้ข้อมูลหรือลักษณะที่ตรงประเด็นเพียงลักษณะเดียวในการหาข้อสรุป ทำให้อาจได้ข้อสรุปที่ไม่สมเหตุสมผลหรือไม่ถูกต้อง

ส่วนระดับ 3 นักเรียนสามารถวิเคราะห์ทั้งตำแหน่งของพจน์ในแบบรูปและค่าของพจน์ในตำแหน่งนั้นได้ ทำให้ได้สูตร/หลักการในการหาคำตอบในแบบรูปได้ แต่ไม่สามารถอธิบายที่มาของ

สูตรได้ชัดเจน เนื่องจากไม่มองความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องทั้งหมด ส่วนสถานการณ์เกี่ยวกับประโยคเปิดของจำนวน นักเรียนสามารถวิเคราะห์ประโยคเปิดที่กำหนดให้ได้ถูกต้อง โดยมองในรูปของผลลัพธ์ทางซ้ายมือเท่ากับผลลัพธ์ทางขวามือของประโยคเปิด แต่ไม่มองเชิงความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยค ทำให้การดำเนินการหาคำตอบใช้การคำนวณเป็นหลัก ซึ่งตรงกับแนวคิดในระดับมองหลายโครงสร้าง (Multistructural) ของ Biggs และ Collis (1991) ที่กล่าวว่า นักเรียนจะสามารถเข้าใจปัญหาได้เป็นอย่างดีและยังสามารถใช้ข้อมูลหรือลักษณะที่ตรงประเด็นในการแก้ปัญหาตั้งแต่สองลักษณะขึ้นไป แต่ยังไม่สามารถสังเคราะห์หรือเชื่อมโยงความสัมพันธ์แต่ละลักษณะเข้าด้วยกันเพื่อประโยชน์ในการแก้ปัญหาได้ แม้ว่าบางครั้งอาจทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้องก็ตาม

ในระดับ 4 ในสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูป นักเรียนสามารถหาข้อสรุปโดยผ่านการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของข้อมูลทั้งหมดในแบบรูปได้อย่างชัดเจน ส่วนเรื่องประโยคเปิดของจำนวน นักเรียนก็สามารถอธิบายความสัมพันธ์ของแต่ละจำนวนในประโยคได้อย่างชัดเจนเช่นเดียวกัน ทำให้สามารถวิเคราะห์ได้ว่า จำนวนที่นำมาเติมลงในช่องว่างของประโยคเปิดต้องเป็นจำนวนที่ทำให้ทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเท่ากัน ซึ่งสิ่งเหล่านี้ส่งผลทำให้สอดคล้องกับระดับมองเชื่อมโยง (Relational) ของ Biggs และ Collis (1991) ที่กล่าวว่า นักเรียนมองปัญหาที่เผชิญในเชิงโครงสร้างที่สัมพันธ์กัน โดยนักเรียนสามารถใช้ข้อมูลหรือลักษณะที่ตรงประเด็นทั้งหมดมาใช้แก้ปัญหา และสามารถเชื่อมโยงความสัมพันธ์ของข้อมูลทั้งหมดได้อย่างสมเหตุสมผล และสอดคล้องกันทั้งหมดจนทำให้ได้คำตอบที่ถูกต้องสมบูรณ์ด้วยเหตุและผล

นอกจากนั้นยังพบว่า ผลจากการพัฒนากรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่ทำให้ได้ระดับการคิดของนักเรียน 4 ระดับดังกล่าวยังสอดคล้องกับผลการวิจัยเกี่ยวกับกรอบแสดงลักษณะการคิดของนักเรียนในหลากหลายวิชา เช่น ความรู้สึกเชิงจำนวน (Jones et al., 1996) ความน่าจะเป็น (Jones et al., 1997) สิถิติ (Jones et al., 2000; Mooney, 2002) ที่ได้ระดับการคิดของนักเรียนใน 4 ระดับเช่นเดียวกัน

ส่วนในระยะที่สอง ผลการวิจัยแสดงให้เห็นว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนแบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตในระดับ 4 เพิ่มขึ้นร้อยละ 85.29 ส่วนจำนวนนักเรียนที่มีระดับการคิดเชิงพีชคณิตที่อยู่ในระดับ 1 2 และ 3 ลดลง ซึ่งผลดังกล่าวอาจมาจากสาเหตุต่าง ๆ ดังนี้

การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้อยู่บนฐานของกรอบแสดงลักษณะการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนระดับประถมศึกษาตอนปลายที่ได้พัฒนาขึ้นในระยะแรก ซึ่งกรอบแสดงลักษณะการคิด

เชิงพีชคณิตดังกล่าวถูกพัฒนามาจากพฤติกรรมจริงที่เกิดขึ้นจากการที่นักเรียนแสดงออกมาเมื่อเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาเกี่ยวกับแบบรูปและประโยคเปิดของจำนวน ดังนั้นข้อมูลดังกล่าวจึงเป็นประโยชน์โดยตรงต่อการนำไปปรับใช้ในชั้นเรียนจริงทั้งในด้านการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้และการวัดและประเมินการเรียนรู้ของผู้เรียน ดังที่ Cobb (2000), Fennema และ Franke (1992) และSimon (1995) ที่กล่าวว่า กรอบแสดงลักษณะการคิดของนักเรียนที่พัฒนาขึ้นบนฐานของ The SOLO model (Structure of the Observing Learning Outcome Model) ของ Biggs และ Collis (1982) ช่วยให้มองเห็นรายละเอียดเกี่ยวกับลักษณะการเรียนรู้ของนักเรียนได้อย่างลึกซึ้งและชัดเจน ทำให้กรอบแสดงลักษณะการคิดที่พัฒนาขึ้นสามารถนำไปเป็นมาตรฐานในการพัฒนาหลักสูตร การสร้างกิจกรรมการเรียนการสอน ตลอดจนการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ได้เป็นอย่างดี

การพัฒนาการคิดเชิงพีชคณิตของนักเรียนโดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) ที่ถูกพัฒนาขึ้นโดย Carpenter และคณะ ในปี ค.ศ. 1980 (2000) ซึ่งยึดแนวทางบนพื้นฐานความรู้และความเชื่อของครูที่เกิดจากการทำความเข้าใจการคิดของนักเรียน โดยมีขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติกิจกรรมด้วยตนเองและได้สร้างความรู้ด้วยตนเองด้วยความเข้าใจอีกด้วย ส่งผลให้นักเรียนมีพัฒนาการทางการคิดดีขึ้น สอดคล้องกับคำกล่าวของ Carpenter และ Lehrer (1999) ที่บอกว่า กิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นการสร้างองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเองจะช่วยพัฒนาความรู้ ความเข้าใจ ตลอดจนการคิดการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

## ข้อเสนอแนะ

### ข้อเสนอแนะสำหรับการเรียนการสอนและการพัฒนาหลักสูตร

1. ในการออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนนั้น ครูผู้สอนควรตระหนักถึงความสำคัญของการพัฒนาการคิดของผู้เรียน ยิ่งถ้าครูผู้สอนสามารถทำความเข้าใจหรือศึกษาความคิดของนักเรียนมาเป็นอย่างดี แล้วนำข้อมูลเหล่านั้นมาออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ยิ่งจะทำให้นักเรียนมีพัฒนาการดีขึ้น

2. กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องแบบรูปในระดับประถมศึกษาตอนปลาย ควรเน้นกระบวนการคิดของนักเรียนมากกว่าเน้นคำตอบที่ได้ โดยกระบวนการคิดที่พัฒนานั้น ควรพัฒนาให้ถึงระดับการมองเชิงความสัมพันธ์ ซึ่งสิ่งเหล่านี้จะเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการเรียนพีชคณิตในระดับสูงต่อไป

3. ในการพัฒนาหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา โดยเฉพาะในสาระพีชคณิตนั้น ผู้ที่ส่วนเกี่ยวข้องกับการพัฒนาหลักสูตรควรให้ความสำคัญกับการบรรจุกระบวนการคิดในเรื่องแบบรูปและประโยคเปิดของจำนวน โดยตั้งเป้าหมายหรือมาตรฐานของช่วงชั้น ในระดับที่นักเรียนสามารถมองเชิงโครงสร้าง วิเคราะห์ความสัมพันธ์และนำความสัมพันธ์ต่างๆ ที่ได้มาเชื่อมโยง เพื่อนำไปสู่การสร้างรูปทั่วไป (Generalization) หรือกฎเกณฑ์ใหม่ๆ

**ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป**

1. ควรมีการศึกษาการคิดของนักเรียนและสร้างกรอบแสดงลักษณะการคิดของนักเรียนในวิชาหรือสาระอื่นๆ ทางคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา เช่น สถิติ ความน่าจะเป็น จำนวนและการดำเนินการ เป็นต้น

2. ควรมีงานวิจัยที่นำแนวคิดของการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) มาใช้ในการจัดการเรียนรู้ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เนื่องจากแนวคิดของการสอนแนะให้รู้คิด (CGI) มาจากฐานคิดที่เปิดโอกาสได้ทำความเข้าใจการคิดเชิงคณิตศาสตร์ของนักเรียนแล้วนำมาออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้

# บรรณานุกรม

Arens, S.A., & Meyer, R. (2000, November). *Algebraic Thinking: Implications* for Rethinking Pedagogy and Professional Development. *Aurora, CO: Mid-Continent Research for Education and Learning.*

Battista, M., & Brown, C. (1998). Using Spreadsheets to Promote Algebraic Thinking. *Teaching Children Mathematics.* January: 470-478.

Bigg, J.B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: The SOLO Taxonomy (Structure of Observed Learning Outcomes).* New York: Academic Press.

Bigg, J.B., & Collis, K. F. (1991). Multimodel Learning and Intelligent Behavior. In H. Rowe (Ed.), *Reconceptualization and Measurement Intelligence* (pp. 57-76). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The Acquisition and Subtraction Concepts in Grade one trough three. *Journal for Research in Mathematics Education.* 15(3), 179-202.

Carpenter, T.P., et al. (1989). Using knowledge of children' s mathematics thinking in Classroom teaching: An experimental study. *American Educational research Journal*. 26(4), 499-531.

Carpenter, T. P., et al. (1999). Children Mathematics: Cognitively Guided Instruction. NH: Heinemann.

Carpenter, T.P., et al. (2000). *Cognitively Guided Instruction: A Research-Based Teacher Professional Development Program for Elementary School Mathematics: Research Report*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Carpenter, T., Franke, M. and Levi L, (2003). Thinking Mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carroll, J. B. (1996). Mathematical Abilities: Some Result from Factor Analysis. In Robert J. Sternberg & Talia Ben-Zeev (Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking* (pp. 3-26). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Chrismas, T. P., & Fey, T. J.. (1993). Communicating the Importance of Algebra to Students. In Edgar L. Edwards, JR(ed.), *Algebra for Everyone. 3rd (*pp 62-73). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Cobb, P., et al. (1991). Assessment of a Problem-Centered Second-Grade Mathematics Project. *Journal for Research in Mathematics Education*. 22: 3-29.

Cobb, P. (2000). Conducting Teaching Experiments in Collaboration with Teachers. In Anthony E. Kelly and Richard A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 307-334). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1996). On Different Facts of Mathematical Thinking. In Robert J. Sternberg & Talia Ben-Zeev (Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking*(pp. 253-284). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Driscoll, M. (1997). "Thinking About Algebraic Thinking: A Framework for Belief, Reflection, Discussion, and Student Work Analysis. Adapted from *The Leadership for Urban Mathematics Reform Project (LUMR) for Linked Learning in Mathematics*. Newton, MA.

Falkner, P. K., Levi, L., & Carpenter P. T. (1999). *Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra.* Retrieved July 27, 2006, from http://www.wcer.wisc.edu/ncisla/publication.

Fenneman, E.; & Franke, M. L. (1992). Teacher' s Knowledge and its Impact. In Douglas A. Grouws (Ed.),*Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 147-164). New York: Macmillan.

Fennema, E., et al. (1993). Using children's knowledge in instruction. *American Educational research Journal*. 27(4): 555-583.

Ferrini-Mundy, J., Lappan, G. and Phillips, E. (1999). Experiences with Patterning. In Barbara Moses (Ed.), *Algebraic Thinking Grades K-12: Reading from NCTM's School-Based Journals and Other Publications* (pp 5-13). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics..

Ferrini-Mundy, J., Lappan, G. and Phillips, E. (1999). Developing Students' Algebraic Reasoning Abilities. In Lee V. S. & Frances R. C. (Eds.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 127-137). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Greenwood, J.J. (1993). On the nature of teaching and assessing mathematics power and mathematics thinking. *Arithmetic Teacher*. 41(3): 144-152.

Helen C. (1998). Cognition in the Formal Modes: Research Mathematics and the SOLO Taxonomy. *Mathematics Education Research Journal*. p. 7.

Herbert, K., & Brown, R. (1999). Patterns as Tools for Algebraic reasoning. In Barbara Moses (Ed.), *Algebraic Thinking Grades K-12: Reading from NCTM's School-Based Journals and Other Publications* (pp 123-128). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Hyde, A. A., & Hyde, P. R. (1991). *Mathwise: Teaching Mathematical Thinking and Problem Solving*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Jones, G. A., Thornton, C. A., & Putt, L. J. (1994). A Model for Nurturing and Assessing Multidigit Number Sense among First grade Children. *Educational Studies in Mathematics*. 27: 117-143.

Jones, G. A., et al. (1996, May). Multidigit Number Sense: A Framework for Instruction and Assessment. *Journal for Research in Mathematics Education*. 27(3): 310-336.

Jones, G. A., et al. (1997). A Framework for Assessing and Nurturing Young Children's Thinking in Probability. *Educational Studies in Mathematics*. 32: 101-125.

Jones, G. A., et al. (2000). A Framework for Characterizing Children's Statistical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*. 2(4): 269-307.

Jones, G. A., et al. (2002). Elementary Students' Access to Powerful Mathematical Ideas. In L. English(Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education.*

Kamol, N. (2005). *A Framework for Characterizing Lower Secondary School Students' Algebraic Thinking.* Dissertation, Ed.D. (Mathematics Education). Bangkok: Graduate school, Srinakharinwirot University.

Kaput, J. (1993). *Algebra for the 21st Century: Proceedings for the August 1992 Conference.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Mathematic classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. & Chalouh, L. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 390 – 419). NY: Macmillan.

Kieran, C., & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The Transition from Arithmetic to Algebra. In Douglas T. Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics* (pp. 179-198). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Kieran, C. & Chalouh, L. (1999) "Prealgebra: the Transition from Arithmetic to Algebra". In Barbara Moses (Ed.), *Algebraic Thinking Grades K-12: Reading from NCTM's School-Based Journals and Other Publications* (pp. 59-70). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Krulik, S.; & Rudnick, J. (1993). Reasoning and Problem Solving. In *A Handbook for Elementary School Teachers.* Boston: Allyn & Bacon.

Lodholz, D. R. (1993). The Transition from Arithmetic to Algebra. In Edgar L. Edwards, JR. (Ed.), *Algebra for Everyone. 3rd ed.* (pp. 24-33). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1999) "A flying start to algebra. *Teaching Children Mathematics, 6/2,* 78-86. Retrieved 17 May 2005 from http://staff.edfac.unimelb.edu.au/~Kayecs/publications/1999/MacGregorStacey-AFlying.pdf.

Mooney, E. S. (2002). A Framework for Characterizing Middle School Students' Statistical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*. 4(1): 23-63.

Mullis, V. S., et al. (2000). *IEA' s Repeat of the Third International Mathematics and Science Study (TIMSS-R) at the Eighth Grade*. Chestnut Hill, MA: Boston College.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for School Mathematics.* Reston, VA: The Council.

O'Daffer, P.G. (1990). Inductive and deductive reasoning. *The Mathematical Teacher*. 93(6): 378-380.

O'Daffer, P.G. & Thornquist, B.A. (1993). Critical Thinking, Mathematical Reasoning and Proof. In P.S. Wilson (Ed.), *Research Ideas for the Classroom, High School Mathematics*. pp.39-56.New York: Macmillan Publishing Company.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the Approach to Algebra. In Anthony Orton(Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 104-120). London: Cassell.

Peck, D. M., & Jencks, S. M. (1988). Reality, arithmetic, algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 7(1), 85 – 91.

Reys, R. E., et al. (2004). *Helping Children Learn Mathematics.* Seventh Edition. New York: Wiley& Sons, Inc.

Rickart, C. (1996). Structuralism and Mathematical Thinking. In Robert J. Sternberg & Talia Ben-Zeev (Eds.), *The Nature of Mathematical Thinking*.. pp. 285-300. NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*. 26(2): 114-145.

Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A Framework for Assessing Middle School Students' Thinking in Conditional Probability and Independence. *Mathematics Education Research Journal.* 9: 39-59.

Usiskin, Z. (1997). Doing Algebra in Grades K-4. *Teaching children Mathematics* 3: 346-356.

Van Hiele, P. M. (1985). The Child's and Geometry. In D. Fuys, D. Geddes and R. Tischler (Eds.), *English Translation of Selected Writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (pp. 243-252). New York: Brooklyn College, School of Education.

Vance, J. (1998). Number Operations from an Algebraic Perspective. *Teaching Children Mathematics* 4: 282-285.

Wagner, S., & Parker, S. (1993). Advance algebra. In P.S. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics*. NY: Macmillan.

วิชาการ, กรม กระทรวงศึกษาธิการ (2545) หนังสือสาระและมาตรฐานการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544. กรุงเทพ: โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุ (ร.ส.พ.) กระทรวงศึกษาธิการ.

ส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, สถาบัน (2549). *สมรรถนะการแก้ปัญหาสำหรับโลกวันพรุ่งนี้: รายงานผลจากโครงการประเมินผลนักเรียนนานาชาติ (PISA 2003).* กรุงเทพมหานคร: เซเว่น พริ้นติ้ง กรุ๊ป จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.). (2544). *กิจกรรมในห้องเรียนเพื่อพัฒนาความรู้สึกเชิงจำนวน.* (เอกสารเสริมสำหรับครู). สาขาคณิตศาสตร์ประถมศึกษา สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.

# ภาคผนวก

# ภาคผนวก ก

# รายนามผู้วิเคราะห์ข้อมูล

# รายนามผู้วิเคราะห์ข้อมูล

1. อาจารย์ ดร. รุ่งทิวา แย้มรุ่ง
   อาจารย์ประจำสาขาวิชาการประถมศึกษา คณะศึกษาศาสตร์
   มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
2. อาจารย์ ดร.พรทิพย์ โรจนไพศาล
   อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์
   มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
3. อาจารย์ ดร.ณัชชา กมล
   อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์
   มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

# ภาคผนวก ข

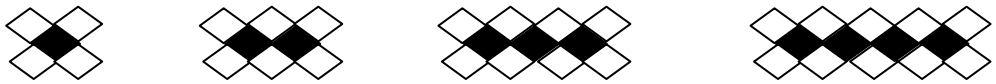
## ตัวอย่างแบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิต

**แบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิตเรื่องแบบรูป**

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

---

1.



จากการร้อยลูกปัดให้ได้ลวดลายดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมทั้งแสดงวิธีการคิดที่ทำให้นักเรียนได้คำตอบโดยละเอียด

1.1) ถ้าต้องการร้อยลูกปัดลวดลายนี้ โดยใช้ลูกปัดสีดำ 5 เม็ดจะต้องใช้ลูกปัดสีขาวกี่เม็ด.....

**<u>วิธีคิด</u>**

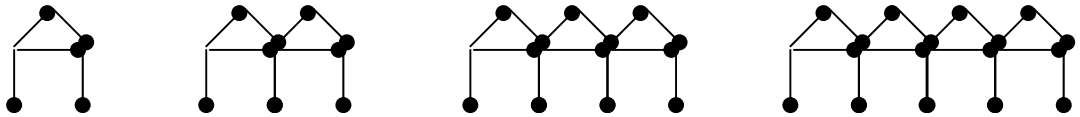
1.2) ถ้าต้องการร้อยลูกปัดลวดลายนี้ โดยใช้ลูกปัดสีดำ 30 เม็ดจะต้องใช้ลูกปัดสีขาวกี่เม็ด.....

**<u>วิธีคิด</u>**

1.3) ถ้าต้องการร้อยลูกปัดลวดลายนี้ โดยใช้ลูกปัดสีดำ 100 เม็ดจะต้องใช้ลูกปัดสีขาวกี่เม็ด.....

**<u>วิธีคิด</u>**

2.



รูปที่ 1 รูปที่ 2 รูปที่ 3 รูปที่ 4

จากการวางก้านไม้ขีดให้เป็นลวดลายดังรูป โดยรูปที่ 1 จะใช้ก้านไม้ขีด 5 ก้าน รูปที่ 2 จะใช้ก้านไม้ขีด 9 ก้าน รูปที่ 3 จะใช้ก้านไม้ขีด 13 ก้าน และรูปที่ 4 จะใช้ก้านไม้ขีด 17 ก้าน จงตอบคำถามต่อไปนี้พร้อมทั้งแสดงวิธีการคิดที่ทำให้นักเรียนได้คำตอบโดยละเอียด

2.1) ถ้าต้องการเรียงไม้ขีดรูปที่ 5 จะต้องเรียงไม้ขีดกี่ก้าน.....

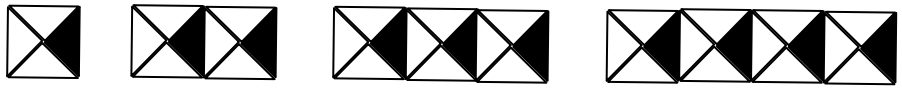
**<u>วิธีคิด</u>**

2.2) ถ้าต้องการเรียงไม้ขีดรูปที่ 40 จะต้องเรียงไม้ขีดกี่ก้าน.....

**<u>วิธีคิด</u>**

2.3) ถ้าต้องการเรียงไม้ขีดรูปที่ 100 จะต้องเรียงไม้ขีดกี่ก้าน.....

**<u>วิธีคิด</u>**

3. 

จากการปูแผ่นกระเบื้องรูปสามเหลี่ยมสีดำและสีขาวให้ได้ลวดลายดังรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้ พร้อมทั้งแสดงวิธีการคิดที่ทำให้นักเรียนได้คำตอบโดยละเอียด

3.1) ถ้าต้องการปูแผ่นกระเบื้องตามลวดลายดังกล่าว โดยใช้แผ่นกระเบื้องรูปสามเหลี่ยมสีดำ 5 แผ่นจะต้องใช้แผ่นกระเบื้องสีขาวกี่แผ่น.....

**<u>วิธีคิด</u>**

3.2) ถ้าต้องการปูแผ่นกระเบื้องตามลวดลายดังกล่าว โดยใช้แผ่นกระเบื้องรูปสามเหลี่ยมสีดำ 40 แผ่นจะต้องใช้แผ่นกระเบื้องสีขาวกี่แผ่น.....

**วิธีคิด**

3.3) ถ้าต้องการปูแผ่นกระเบื้องตามลวดลายดังกล่าว โดยใช้แผ่นกระเบื้องรูปสามเหลี่ยมสีดำ 100 แผ่นจะต้องใช้แผ่นกระเบื้องสีขาวกี่แผ่น.....

**วิธีคิด**

**แบบทดสอบวัดการคิดเชิงพีชคณิตเรื่องประโยคเปิดของจำนวน**

ชื่อ.....ชั้น.....เลขที่.....

---

จงเติมจำนวนลงในช่องว่าง พร้อมทั้งแสดงวิธีการคิดที่ทำให้นักเรียนได้คำตอบมาโดยละเอียด

1) 8 + 5 = _____ + 8

**<u>วิธีคิด</u>**

2) 3 + 6 + 9 = 3 + _____

**<u>วิธีคิด</u>**

3) 4 + 7 = _____ + 11

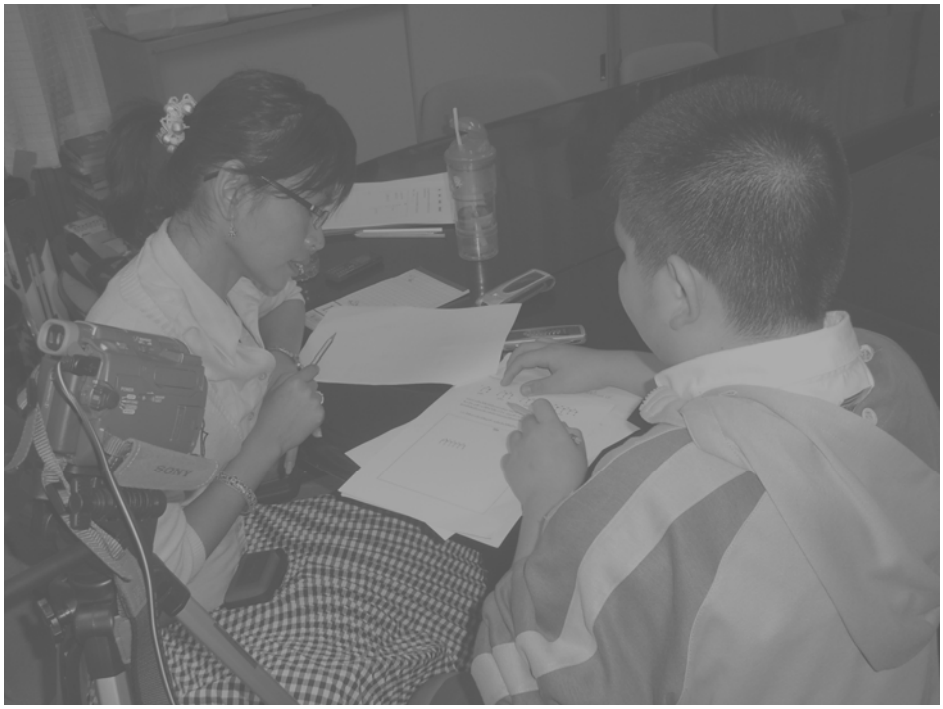
**วิธีคิด**

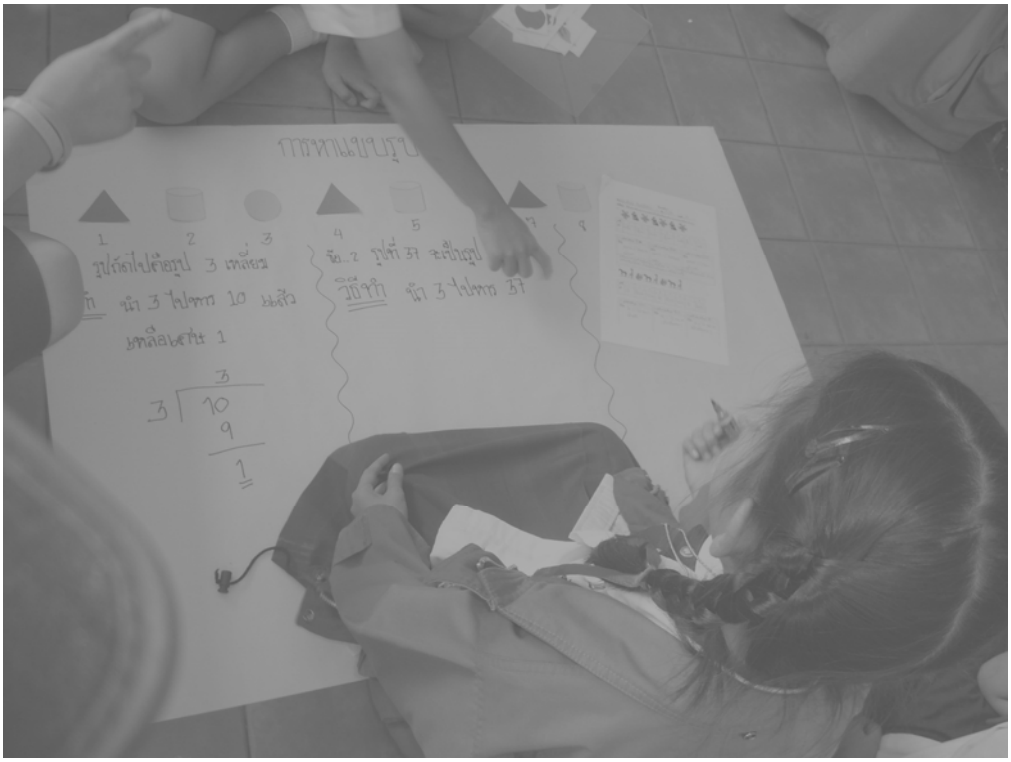
4) 32 + 45 = _____ + 30

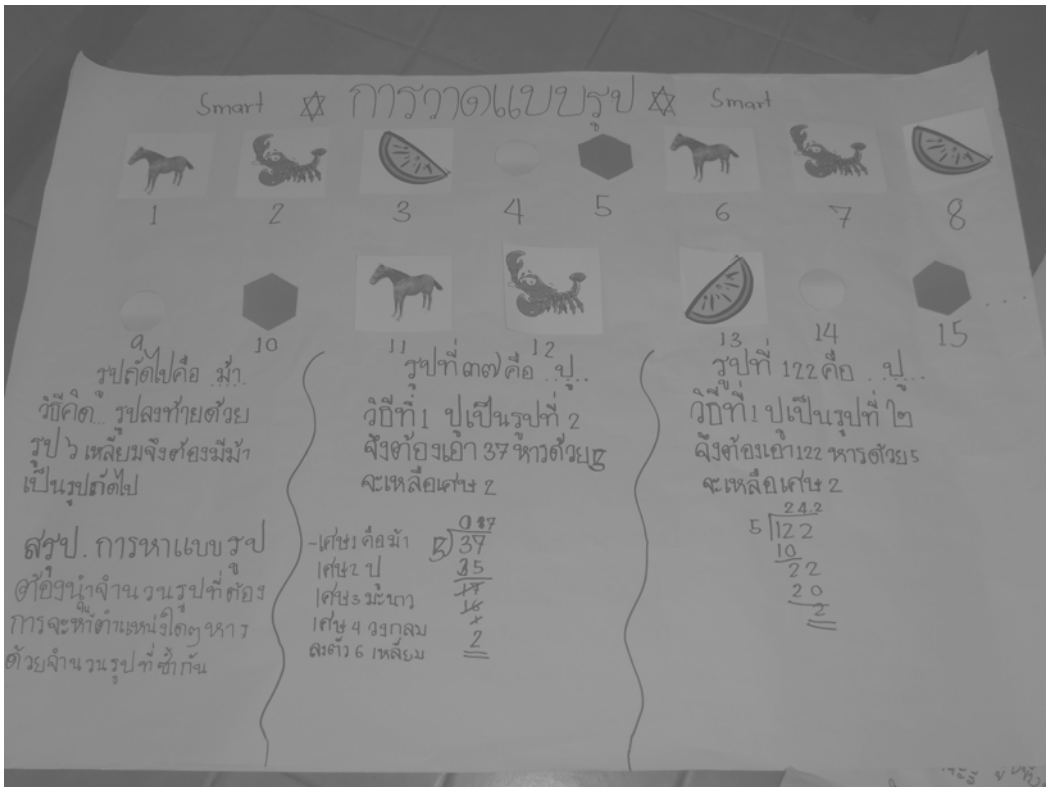
**วิธีคิด**

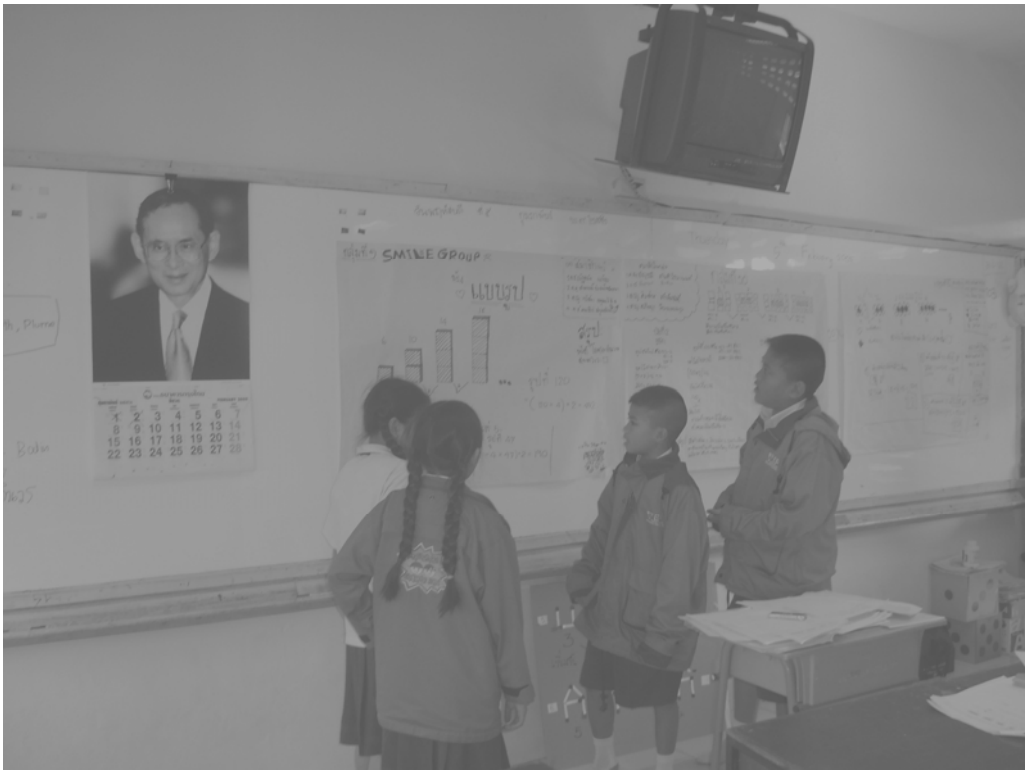
# ภาคผนวก ค

## ตัวอย่างภาพกิจกรรมการเก็บข้อมูลวิจัย






Smart การวาดแบบรูป Smart
1 2 3 4 5 6 7 8
9 10 11 12 13 14 15
รูปถัดไปคือ ม้า
วิธีคิด รูปลงท้ายด้วย
รูป 6 เหลียมจึงต้องมีม้า
เป็นรูปถัดไป
สรุป. การหาแบบรูป
ต้องนำจำนวนรูปที่ต้อง
การจะหาตำแหน่งใดๆหาร
ด้วยจำนวนรูปที่ซ้ำกัน
รูปที่ 37 คือ ปู
วิธีที่ 1 ปูเป็นรูปที่ 2
ฉันต้องเอา 37 หารด้วย 5
จะเหลือเศษ 2
-เศษ 1 คือม้า
เศษ 2 ปู
เศษ 3 มะนาว
เศษ 4 วงกลม
และ 6 เหลียม
รูปที่ 122 คือ ปู
วิธีที่ 1 ปูเป็นรูปที่ 2
ฉันต้องเอา 122 หารด้วย 5
จะเหลือเศษ 2


SMILE GROUP

# ประวัติผู้วิจัย

| | |
|---|---|
| ชื่อ ชื่อสกุล | นางสาวณัชชา กมล |
| สถานที่อยู่ปัจจุบัน | 239/71 ถนนห้วยแก้ว ตำบลสุเทพ อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่ 50200 |
| ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน | อาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ |
| ประวัติการศึกษา | |
| พ.ศ.2540 | ศึกษาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์) คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ |
| พ.ศ.2543 | ครุศาสตรมหาบัณฑิต (การศึกษาคณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย |
| พ.ศ.2548 | การศึกษาดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตรศึกษา) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ |