รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ ค่าคงที่เรขาคณิตและทฤษฎีบทจุดตรึงเชิงเมตริก

Geometric Constants and Metric Fixed Point Theory

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถพล แก้วขาว

กันยายน พ.ศ. 2553

สัญญาเลขที่ MRG5180213

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ ค่าคงที่เรขาคณิตและทฤษฎีบทจุดตรึงเชิงเมตริก
Geometric Constants and Metric Fixed Point Theory

ผู้วิจัย
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อรรถพล แก้วขาว
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยบูรพา จังหวัดชลบุรี
นักวิจัยที่ปรึกษา
ศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ ธรรมพงษา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่

สนับสนุนโดยสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา และ
สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกอ. และ สกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

คำนำ

เอกสารฉบับนี้เป็นการรายงานผลการวิจัยเรื่อง การวิเคราะห์เชิงค่าเซตและเงื่อนไขทางเรขาคณิต ซึ่งได้เริ่มตั้งแต่วันที่ 1 กรกฎาคม 2551 – 30 มิถุนายน 2553 เป็นระยะเวลาทั้งสิ้น 2 ปี เป็นโครงการวิจัยทุนพัฒนาศักยภาพอาจารย์รุ่นใหม่ ปี 2551 โดยได้รับการสนับสนุนจาก สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย เป็นเงินอุดหนุนทั้งสิ้น 480,000 บาท

ผู้วิจัยขอขอบพระคุณสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย ที่ได้ให้การสนับสนุนการทำวิจัยในครั้งนี้ ขอขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ ธรรมพงษา นักวิจัยที่ปรึกษา สำหรับคำแนะนำที่มีคุณค่าจนนำไปสู่ความสำเร็จของโครงการตามจุดประสงค์ที่วางไว้ทุกประการ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพาที่ให้ความสนับสนุนทางอ้อม (in kind) ต่อโครงการวิจัยนี้ และสุดท้ายนี้ผู้วิจัยขอขอบพระคุณบุคคลในครอบครัวที่ให้ความรักและเป็นกำลังใจให้ผู้วิจัยเสมอมา

อรรถพล แก้วขาว

สารบัญ

Abstract

This project is organized as follows :

1. For a geodesic metric space (X,d) with $\text{card}(X) > 1$, we define the Jordan von Neumann constant of X by

$$C_{\text{NJ}}(X) = \sup\left\{\frac{d(y,z)^2 + 4d(x,m[y,z])^2}{2(d(x,y)^2 + d(x,z)^2)} : x,y,z \in M \text{ and } d(x,y) + d(x,z) \neq 0\right\},$$

where $[y,z]$ is the (geodesic) midpoint of y and z. We show that a complete geodesic metric space X is a CAT(0) space if and only if $C_{\text{NJ}}(X) = 1$. We also show that if a complete geodesic metric space X with $C_{\text{NJ}}(X) < \frac{5}{4}$, then X has uniform normal structure and by the famous Kirk' s fixed point theorem, X has the fixed point property for nonexpansive mappings. Some other properties of the Jordan von Neumann constant are also studied.

2. Let E be a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space X, and $t : E \to E$ and $T : E \to KC(E)$ be a single valued nonexpansive mapping and a multi-valued nonexpansive mapping, respectively. Assume in addition that $\text{Fix}(t) \cap \text{Fix}(T) \neq \emptyset$ and $Tw = \{w\}$ for all $w \in \text{Fix}(t) \cap \text{Fix}(T)$. We prove that the sequence of the modified Ishikawa iteration method generated from an arbitrary $x_0 \in E$ by

$$\begin{aligned} y_n &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n \\ x_{n+1} &= (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n t y_n \end{aligned}$$

where $z_n \in Tx_n$ and $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ are sequences of positive numbers satisfying

$$0 < a \leq \alpha_n, \beta_n \leq b < 1,$$

converges strongly to a common fixed point of t and T, i.e., there exists $x \in E$ such that $x = tx \in Tx$.

3. We introduce a class of nonlinear continuous mappings defined on a bounded closed convex subset of a Banach space X. We characterize the Banach spaces in which every asymptotic center of each bounded sequence in any weakly compact convex subset is compact as those spaces having the weak fixed point property for this type of mappings.

Keywords : Jordan-von Neumann constant; Normal structure; Fixed point; Multivalued nonexpansive mapping; Nonexpansive mapping ; Uniformly convex Banach space ; Asymptotic center

บทคัดย่อ

โครงการวิจัยนี้ แบ่งการศึกษาวิจัยเป็น 3 ส่วน ดังนี้

1. สำหรับปริภูมิเมตริก geodesic (X, d) ที่ $\mathrm{card}(X) > 1$, เรานิยามค่าคงที่จอร์แดนฟอนนอยมันน์ของ X โดย

$$C_{\mathrm{NJ}}(X) = \sup\left\{\frac{d(y,z)^2 + 4d(x,m[y,z])^2}{2(d(x,y)^2 + d(x,z)^2)} : x, y, z \in M \text{ และ } d(x,y) + d(x,z) \neq 0\right\}$$

   เมื่อ $[y, z]$ เป็นจุดกึ่งกลางของ y และ z เราแสดงว่า ปริภูมิเมตริก geodesic X เป็นปริภูมิ CAT(0) ก็ต่อเมื่อ $C_{\mathrm{NJ}}(X) = 1$ และเราพิสูจน์ว่า ถ้า บริภูมิเมตริก geodesic X ที่ $C_{\mathrm{NJ}}(X) < \frac{5}{4}$ แล้ว X มีโครงสร้างปกติแบบเอกรูป และ โดยทฤษฎีบทของ Kirk สรุปได้ว่า X มีสมบัติจุดตรึง สำหรับการส่งไม่ขยาย

2. ให้ E เป็นเซตกระชับที่นูนและไม่เป็นเซตว่าง ของปริภูมิคอนเว็กซ์แบบเอกรูป X และ ให้ $t : E \to E$ และ $T : E \to KC(E)$ เป็นการส่งแบบไม่ขยาย และเป็นการส่งค่าเซตแบบไม่ขยาย ตามลำดับ และกำหนดเพิ่มเติมว่า $\mathrm{Fix}(t) \cap \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ และ $Tw = \{w\}$ สำหรับทุก $w \in \mathrm{Fix}(t) \cap \mathrm{Fix}(T)$ เราได้ว่า ลำดับ modified Ishikawa iteration ซึ่งกำหนดดังนี้

$$\begin{aligned} y_n &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n \\ x_{n+1} &= (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n t y_n \end{aligned}$$

   เมื่อ $z_n \in Tx_n$ และ $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวกที่

$$0 < a \leq \alpha_n, \beta_n \leq b < 1,$$

   จะลู่เข้าสู่จุดตรึงร่วมของ t และ T

3. เรานิยามฟังก์ชันไม่เชิงเส้นบนโดเมนที่เป็นเซตที่มีขอบเขตและนูนในปริภูมิบานาค และ สามารถใช้สมบัติการมีจุดตรึงของฟังก์ชันชนิดนี้ กำหนดสมบัติการมี asymptotic center ของลำดับที่มีขอบเขต ในเซตกระชับแบบอ่อน เป็นเซตกระชับ

คำสำคัญ : ค่าคงที่จอร์แดน ฟอนนอยมันน์; โครงสร้างปกติ; จุดตรึง; การส่งค่าเซตแบบไม่ขยาย; การส่งแบบไม่ขยาย; ปริภูมิคอนเว็กซ์แบบเอกรูป ; จุดศูนย์กลางแบบ asymptotic

เนื้อหาโครงการโดยสรุป (Executive Summary)

ค่าคงที่เรขาคณิตและทฤษฎีบทจุดตรึงเชิงเมตริก (Geometric Constants and Metric Fixed Point Theory)

1. ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ปัญหาต่างๆในทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์ สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของตัวแบบ (model) ทางคณิตศาสตร์หรือระบบสมการต่างๆ สิ่งสำคัญที่เราต้องการทราบจากระบบสมการคือ การมีคำตอบของระบบสมการ (existence) และ การสร้างระเบียบวิธีเพื่อหาหรือเพื่อประมาณค่าคำตอบของระบบสมการ ทฤษฎีบทจุดตรึง (fixed point theory) เป็นเครื่องมือที่สำคัญและมีประสิทธิภาพในการศึกษาปัญหาดังกล่าวข้างต้น จากความสำคัญนี้ ได้มีการนำทฤษฎีบทจุดตรึงไปประยุกต์ใช้ อย่างกว้างขวางในศาสตร์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตัวอย่างเช่น Theory of Operators, Control Theory, Theory of Equations, Mathematical Economics เป็นต้น

ให้ (M,d) เป็นปริภูมิเมตริก (metric space) และ $T:M\to M$ เป็นการส่ง (mapping) เราเรียกสมาชิก $x\in M$ ที่ $x=T(x)$ ว่าจุดตรึง (fixed point) ของ T และสนใจเงื่อนไขของ T และเงื่อนไขของปริภูมิเมตริก (M,d) ที่ทำให้ T มีจุดตรึง

ทฤษฎีบทจุดตรึงที่สำคัญคือ Brower Fixed Point Theorem และ The Principle of Banach's Contraction Mappings ซึ่งถูกคิดค้นและพิสูจน์โดย J. Brower และ S. Banach ในปี ค.ศ. 1912 และ ค.ศ. 1922 ตามลำดับ ถึงแม้ว่าทฤษฎีบทที่สำคัญทั้งสองสามารถประยุกต์ได้อย่างกว้างขวางในวงวิชาการ แต่ผลสรุปของทฤษฎีบทดังกล่าวไม่ครอบคลุมถึงการส่งที่มีความทั่วไปกว่าการส่งแบบ contraction เช่น การส่งแบบไม่ขยาย (nonexpansive mapping)

ในปี ค.ศ. 1965 W. A. Kirk ได้พิสูจน์ว่า ทุกการส่งแบบไม่ขยายบนเซตย่อยปิด นูน และมีขอบเขต (closed convex and bounded subset) ของปริภูมิบานาคที่สะท้อน (reflexive Banach space) และมีสมบัติ normal structure จะมีจุดตรึงเสมอ จากทฤษฎีบทของ W. A. Kirk จะเห็นได้ว่าสมบัติ normal structure ซึ่งเป็นสมบัติทางเรขาคณิต (geometric property) เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ (sufficient condition) ต่อการมีจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย ตั้งแต่นั้นเป็นต้นมา ได้มีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสมบัติ normal structure และสมบัติการมีจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย (fixed point property) ที่เป็นผลงานพื้นฐานสำหรับการอ้างอิงที่มีคุณภาพ (valuable citation) และได้รับการตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติที่เป็นที่ยอมรับด้วยค่า impact factor ที่สูง (สำหรับสาขาคณิตศาสตร์) ตัวอย่างเช่น Journal of the American Mathematical Society, Journal of Functional Analysis, Journal of London Mathematical Society, Nonlinear Analysis, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Journal of Computer and Mathematics with Applications เป็นต้น

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาทฤษฎีบทจุดตรึงในปริภูมิบาคที่สำคัญคือ ค่าคงที่เรขาคณิต(geometric constant) ของปริภูมิบานาคที่มีความสัมพันธ์กับ normal structure และการมีจุดตรึงของการส่งบนปริภูมิบานาค ตัวอย่างค่าคงที่เรขาคณิตที่สำคัญและมีชื่อเสียงคือ

1. ค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant สร้างโดย Clarkson ในปี 1973
2. ค่าคงที่ James constant ของปริภูมิบานาค สร้างโดย Gao และ Lau ในปี ค.ศ. 1990

ค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant และ ค่าคงที่ James constant นักคณิตศาสตร์หลายท่านทั้งในต่างประเทศและในประเทศรวมทั้งผู้ดำเนินการวิจัยด้วย (นายอรรถพล แก้วขาว) ได้ให้ความสนใจและมีผลงานวิจัยออกมามากมายที่ศึกษาค่าคงที่ดังกล่าวบนปริภูมิบานาค

อย่างไรก็ตาม ยังไม่มีการสร้างค่าคงที่เรขาคณิตบนปริภูมิเมตริกเพื่อใช้ศึกษาการมีจุดตรึงของการส่งบนปริภูมิเมตริก ดังนั้นโครงการวิจัยนี้ผู้ดำเนินการวิจัยจะศึกษาและแก้ปัญหาเพื่อให้ได้ข้อสรุปซึ่งเป็นองค์ความรู้ใหม่ดังนี้

1. ค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant ของปริภูมิเมตริก
2. เงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant ของปริภูมิเมตริกที่เพียงพอสำหรับปริภูมิเมตริกมี normal structure
3. เงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant ของปริภูมิเมตริกที่เพียงพอสำหรับการมีจุดตรึงของการส่งในปริภูมิเมตริก
4. ค่าคงที่ James constant และค่าคงที่อื่นๆ ของปริภูมิเมตริก และเงื่อนไขที่เกี่ยวกับค่าคงที่ของปริภูมิเมตริกที่เพียงพอสำหรับสมบัติ normal structure และเพียงพอสำหรับการมีจุดตรึงของการส่งในปริภูมิเมตริก

องค์ความรู้ใหม่ที่จะได้จากโครงการวิจัยนี้คือ ได้ค่าคงที่เรขาคณิตของปริภูมิเมตริกเพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษา normal structure และเพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษาวิจัยทางทฤษฎีจุดตรึงเชิงเมตริก และได้เงื่อนไขทางเรขาคณิตบนปริภูมิเมตริกที่เพียงพอสำหรับปริภูมิเมตริกมี normal structure และเพียงพอสำหรับการมีจุดตรึงของการส่งในปริภูมิเมตริก ซึ่งองค์ความรู้ใหม่ดังกล่าวนี้จะมีประโยชน์มากต่อการศึกษาวิจัยทางทฤษฎีบทจุดตรึงเชิงเมตริก

2. วัตถุประสงค์ของโครงการ

1. สร้างและศึกษาค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant ของปริภูมิเมตริก
2. สร้างเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant ของปริภูมิเมตริกที่เพียงพอสำหรับปริภูมิเมตริกมี normal structure
3. สร้างเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant ของปริภูมิเมตริกที่เพียงพอสำหรับการมีจุดตรึงของการส่งในปริภูมิเมตริก

3. ระเบียบวิธีวิจัย

1. รวบรวมความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวกับทฤษฎีจุดตรึงบนปริภูมิเมตริกของการส่งแบบไม่ขยาย โดยเฉพาะอย่างยิ่งสมบัติ normal structure ของปริภูมิที่มีผลต่อการเกิดจุดตรึง
2. สร้าง conjecture ที่คาดว่าจะเป็นจริงเพื่อหาบทพิสูจน์หรือหาตัวอย่างแย้งเพื่อนำไปสู่การปรับปรุง conjecture เพื่อสร้างเป็นทฤษฎีบทต่อไป
3. เขียน paper และส่งให้ International Journal ทางคณิตศาสตร์พิจารณาเพื่อตีพิมพ์ต่อไป
4. ปรึกษาและแลกเปลี่ยนความรู้กับผู้เชี่ยวชาญทางด้านทฤษฎีจุดตรึงเพื่อพัฒนางานวิจัย
5. ปรับปรุงผลงานตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญเพื่อให้ตรงตามวัตถุประสงค์ที่กำหนดไว้

4. แผนการดำเนินงานวิจัยตลอดโครงการในแต่ละช่วง 6 เดือน

ปีที่ 1

กิจกรรมและขั้นตอนดำเนินงาน	2551 (6 เดือนแรก)					
	1	2	3	4	5	6
1. ค้นคว้าหาเอกสารที่เกี่ยวข้อง						
2. ศึกษาพื้นฐานเกี่ยวกับสมบัติ normal structure ใน ปริภูมิเมตริกจากเอกสารและงานวิจัย ที่เกี่ยวข้อง						
3. สร้างและศึกษาค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant ของปริภูมิเมตริก						
4. รายงานความก้าวหน้าของโครงการใน 6 เดือนแรก						

กิจกรรมและขั้นตอนดำเนินงาน	2551 (6 เดือนหลัง)					
	7	8	9	10	11	12
1. หาเอกสารที่เกี่ยวข้องเพิ่มเติม						
2. คิดค้นและวิจัยเพื่อหาองค์ความรู้ใหม่อย่างต่อเนื่อง จาก 6 เดือนแรก						
3.เขียน และ พิมพ์ผลงานวิจัยทฤษฎีบทเกี่ยวกับค่าคงที่ Jordan von Neumann constant ในปริภูมิเมตริกและเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับ normal structure ที่คิดค้นได้ พร้อมทั้งส่งผลงานเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ						
4. รายงานความก้าวหน้าของโครงการในรอบปีที่ 1						

<u>ปีที่ 2</u>

กิจกรรมและขั้นตอนดำเนินงาน	2552 (6 เดือนแรก)					
	1	2	3	4	5	6
1. หาเอกสาร วารสาร เพิ่มเติม						
2. ศึกษาปัญหาและหาความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีจุดตรึงบนปริภูมิเมตริก						
3. สร้างเงื่อนไขบนค่าคงที่ Jordan von Neumann constant ที่เพียงพอสำหรับการมีจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย						
4. รายงานความก้าวหน้าของโครงการใน 6 เดือนแรก						
กิจกรรมและขั้นตอนดำเนินงาน	**2552 (6 เดือนหลัง)**					
	7	8	9	10	11	12
1. เดินทางไปหาเอกสารที่เกี่ยวข้อง						
2. คิดค้นและวิจัยเพื่อหาองค์ความรู้ใหม่ต่อเนื่องจาก 6 เดือนแรก						
3.เขียน และ พิมพ์ผลงานวิจัยเกี่ยวกับ ค่าคงที่บนปริภูมิเมตริกและสมบัติจุดตรึงในปริภูมิเมตริกพร้อมทั้งส่งผลงานเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ						
4. เขียนรายงานโครงการวิจัยฉบับสมบูรณ์						

5. ผลงานที่คาดว่าจะตีพิมพ์ในวารสารวิชาการนานาชาติ

ปีที่1 : ชื่อเรื่อง "The Jordan von Neumann constant and normal structure in geodesic " วารสาร Journal of Mathematical Analysis and Applications มี impact factor 0.758

ปีที่ 2 : ชื่อเรื่อง "The geometric constants and fixed point theorems in metric spaces" วารสาร Journal of Mathematical Analysis and Applications มี impact factor 0.758

เนื้อหางานวิจัย

Geometric Constants and Metric Fixed Point Theory

1. The Jordan von Neumann constant

1.1. Introduction

Let (X, d) be a metric space. A *geodesic path* joining $x \in X$ to $y \in X$ (or, more briefly, a *geodesic* from x to y) is a map c from a closed interval $[0, l] \subset \mathbb{R}$ to X such that $c(0) = x, c(l) = y$, and $d(c(t), c(t')) = |t-t'|$ for all $t, t' \in [0, l]$. In particular, c is an isometry and $d(x, y) = l$. The image α of c is called a *geodesic* (or *metric*) *segment* joining x and y. When it is unique this geodesic is denoted by $[x, y]$. The space (X, d) is said to be a *geodesic space* if every two points of X are joined by a geodesic, and X is said to be *uniquely geodesic* if there is exactly one geodesic joining x and y for each $x, y \in X$. A subset $Y \subseteq X$ is said to be *convex* if Y includes every geodesic segment joining any two of its points.

A metric space X is a CAT(0) space if it is geodesically connected, and if every geodesic triangle in X is at least as 'thin' as its comparison triangle in the Euclidean plane. It is well-known that any complete, simply connected Riemannian manifold having nonpositive sectional curvature is a CAT(0) space. Other examples include Pre-Hilbert spaces, $\mathbb{R}-$trees (see [1]), Euclidean buildings (see [3]), the complex Hilbert ball with a hyperbolic metric (see [12]), and many others. For a thorough discussion of these spaces and of the fundamental role they play in geometry see Bridson and Haefliger [1]. Burago, et al. [6] contains a somewhat more elementary treatment, and Gromov [13] a deeper study. Fixed point theory in a CAT(0) space was first studied by Kirk (see [17] and [18]). He showed that every nonexpansive (single-valued) mapping defined on a bounded closed convex subset of a complete CAT(0) space always has a fixed point. Since then the fixed point theory for single-valued and multivalued mappings in CAT(0) spaces has been rapidly developed and much papers have appeared.

If x, y_1, y_2 are points in a CAT(0) space and if $y_0 = m[y_1, y_0]$, then the CAT(0) inequality implies

$$d(x, y_0)^2 \leq \frac{1}{2}d(x, y_1)^2 + \frac{1}{2}d(x, y_2)^2 - \frac{1}{4}d(y_1, y_2)^2. \qquad \text{(CN)}$$

This is the (CN) inequality of Bruhat and Tits [5]. In fact (cf. [1], p. 163), a geodesic space is a CAT(0) space if and only if it satisfies (CN).

1.2. Results

Let (X, d) be a geodesic metric space with $card(X) \geq 2$. We define the Jordan von Neumann constant of (X, d) by

$$C_{\mathrm{NJ}}(X) = \sup\left\{\frac{d(y,z)^2 + 4d(x, m[y,z])^2}{2(d(x,y)^2 + d(y,z)^2)} : x, y, z \in M, d(x,y) + d(y,z) \neq (0,0)\right\},$$

where $m[y, z]$ is the (geodesic) midpoint of y and z.

Proposition 1. We have

$$1 \leq C_{\mathrm{NJ}}(X) \leq 2.$$

It follows from the use of the (CN) inequality of Bruhat and Tits that :

Theorem 2. Let X be a complete geodesic metric space. Then X is a CAT(0) space if and only if the Jordan von Neumann constant $C_{\mathrm{NJ}}(X) = 1$.

Theorem 3. Let X be a complete geodesic metric space. If $C_{\mathrm{NJ}}(X) < \frac{5}{4}$, then X has uniform normal structure.

Since our work uses the fixed point property, let us give the following definition.

Definition 4. A mapping $T : X \to X$ is said to be nonexpansive if

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

for all $x, y \in X$. We say that X has the fixed point property if any nonexpansive mapping defined on X has a fixed point.

The analogue of Kirk's fixed point theorem in metric spaces can be stated by the following.

Theorem 5. [16] Let X be a complete bounded metric space. Asuume that X has uniform normal structure. Then M has the fixed point property.

Using Theorem 3 and Theorem 5 together, we can conclude that :

Theorem 6. Let X be a complete bounded metric space. Asuume that $C_{\mathrm{NJ}}(X) < \frac{5}{4}$. Then X has the fixed point property.

Using Theorem 3 and Theorem 6 together, we obtain the known result of Kirk [17] and [18].

Theorem 7. Let X be a complete bounded CAT(0) space. Then X has the fixed point property.

2. Ishikawa iterative process for a pair of single valued and multi-valued nonexpansive mappings in Banach spaces

2.1 Introduction

Let X be a Banach space and E a nonempty subset of X. We shall denote by $FB(E)$ the family of nonempty bounded closed subsets of E and by $KC(E)$ the family of nonempty compact convex subsets of E. Let $H(\cdot, \cdot)$ be the Hausdorff distance on $FB(X)$, i.e.,

$$H(A, B) = \max\{ \sup_{a \in A} \operatorname{dist}(a, B), \sup_{b \in B} \operatorname{dist}(b, A) \}, \quad A, B \in FB(X),$$

where $\operatorname{dist}(a, B) = \inf\{\|a - b\| : b \in B\}$ is the distance from the point a to the subset B.

A mapping $t : E \to E$ is said to be *nonexpansive* if

$$\|tx - ty\| \leq \|x - y\| \text{ for all } x, y \in E.$$

A point x is called a fixed point of t if $tx = x$.

A multi-valued mapping $T : E \to FB(X)$ is said to be *nonexpansive* if

$$H(Tx, Ty) \leq \|x - y\| \text{ for all } x, y \in E.$$

A point x is called a fixed point for a multi-valued mapping T if $x \in Tx$.

We use the notation $\mathrm{Fix}(T)$ stands for the set of fixed points of a mapping T and $\mathrm{Fix}(t) \cap \mathrm{Fix}(T)$ stands for the set of common fixed points of t and T. Precisely, a point x is called a common fixed point of t and T if $x = tx \in Tx$.

In 2006, S. Dhompongsa et al. ([7]) proved a common fixed point theorem for two nonexpansive commuting mappings.

Theorem 8. *[7, Theorem 4.2] Let E be a nonempty bounded closed convex subset of a uniformly Banach space X, $t : E \to E$, and $T : E \to KC(E)$ a nonexpansive mapping and a multi-valued nonexpansive mapping respectively. Assume that t and T are commuting , i.e. if for every $x, y \in E$ such that $x \in Ty$ and $ty \in E$, there holds $tx \in Tty$. Then t and T have a common fixed point.*

In this project, we introduce an iterative process in a new sense, called the modified Ishikawa iteration method with respect to a pair of single valued and multi-valued nonexpansive mappings. We also establish the strong convergence theorem of a sequence from such process in a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space.

The important property of a uniformly convex Banach space we use is the following lemma proved by Schu ([22]) in 1991.

Lemma 9. *([22]) Let X be a uniformly convex Banach space, let $\{u_n\}$ be a sequence of real numbers such that $0 < b \leq u_n \leq c < 1$ for all $n \geq 1$, and let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be sequences of X such that $\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq a$, $\limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leq a$ and $\lim_{n\to\infty} \|u_n x_n + (1 - u_n)y_n\| = a$ for some $a \geq 0$. Then, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.*

The following observation will be used in proving our results and the proof is a straightforward.

Lemma 10. *Let X be a Banach space and E be a nonempty closed convex subset of X. Then,*

$$dist(y, Ty) \leq \|y - x\| + dist(x, Tx) + H(Tx, Ty),$$

where $x, y \in E$ and T is a multi-valued nonexpansive mapping from E into $FB(E)$.

A fundamental principle which plays a key role in ergodic theory is the demiclosedness principle. A mapping t defined on a subset E of a Banach space X is said to be demiclosed if any sequence $\{x_n\}$ in E the following implication holds: $x_n \rightharpoonup x$ and $tx_n \to y$ implies $tx = y$.

Theorem 11. *([2]) Let E be a nonempty closed convex subset of a uniformly convex Banach space X and $t : E \to E$ be a nonexpansive mapping. If a sequence $\{x_n\}$ in E converges weakly to p and $\{x_n - tx_n\}$ converges to 0 as $n \to \infty$, then $p \in Fix(t)$.*

In 1974 , Ishikawa introduced the following well-known iteration.

Definition 12. ([14]) Let X be a Banach space, E a closed convex subset of X and t a selfmap on E. For $x_0 \in E$, the sequence $\{x_n\}$ of Ishikawa iterates of t is defined by,

$$\begin{cases} y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n t x_n \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n t y_n, \ \ n \geq 0, \end{cases}$$

where $\{\alpha_n\}$ and $\{\beta_n\}$ are real sequences.

A nonempty subset K of E is said to be proximinal if, for any $x \in E$, there exists an element $y \in K$ such that $\|x-y\| = \text{dist}(x, K)$. We shall denote $P(K)$ by the family of nonempty proximinal bounded subsets of K.

In 2005, Sastry and Babu ([21]) defined the Ishikawa iterative scheme for multi-valued mappings as follows:

Let E be a compact convex subset of a Hilbert space X and $T : E \to P(E)$ be a multi-valued mapping and fix $p \in \text{Fix}(T)$.

$$\begin{cases} x_0 \in E, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n z'_n, \quad \forall n \geq 0, \end{cases}$$

where $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ are sequences in [0, 1] with $z_n \in Tx_n$ such that $\|z_n - p\| = \text{dist}(p, Tx_n)$ and $\|z'_n - p\| = \text{dist}(p, Ty_n)$.

They also proved the strong convergence of the above Ishikawa iterative scheme for a multi-valued nonexpansive mapping T with a fixed point p under some certain conditions in a Hilbert space.

Recently, Panyanak ([20]) extended the results of Sastry and Babu ([21]) to a uniformly convex Banach space, and also modified the above Ishikawa iterative scheme as follows:

Let E be a nonempty convex subset of a uniformly convex Banach space X and $T : E \to P(E)$ be a multi-valued mapping

$$\begin{cases} x_0 \in E, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n z'_n, \quad \forall n \geq 0, \end{cases}$$

where $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ are sequences in [0, 1] with $z_n \in Tx_n$ and $u_n \in \text{Fix}(T)$ such that $\|z_n - u_n\| = \text{dist}(u_n, Tx_n)$ and $\|x_n - u_n\| = \text{dist}(x_n, \text{Fix}(T))$, respectively. Moreover, $z'_n \in Tx_n$ and $v_n \in \text{Fix}(T)$ such that $\|z'_n - v_n\| = \text{dist}(v_n, Tx_n)$ and $\|y_n - v_n\| = \text{dist}(y_n, \text{Fix}(T))$, respectively.

Very recently, Song and Wang ([25, 26]) noted that there was a gap in the proofs of ([20, Theorem 3.1]), and ([21, Theorem 5]). Thus they solved/revised the gap by means of the following Ishikawa iterative scheme:

Let $T : E \to FB(E)$ be a multi-valued mapping, where $\alpha_n, \beta_n \in [0, 1)$. The Ishikawa iterative scheme $\{x_n\}$ is defined by

$$\begin{cases} x_0 \in E, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n, \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n z'_n, \quad \forall n \geq 0, \end{cases}$$

where $z_n \in Tx_n$ and $z'_n \in Ty_n$ such that $\|z_n - z'_n\| \le H(Tx_n, Ty_n) + \gamma_n$ and $\|z_{n+1} - z'_n\| \le H(Tx_{n+1}, Ty_n) + \gamma_n$, respectively. Moreover, $\gamma_n \in (0, +\infty)$ such that $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.

At the same period, Shahzad and Zegeye ([23]) modified the Ishikawa iterative scheme $\{x_n\}$ and extended the result of ([25, Theorem 2]) to a multi-valued quasi-nonexpansive mapping as follows:

Let K be a nonempty convex subset of a Banach space X and $T : E \to FB(E)$ a multi-valued mapping, where $\alpha_n, \beta_n \in [0, 1]$. The Ishikawa iterative scheme $\{x_n\}$ is defined by

$$\begin{cases} x_0 \in E, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n, \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n z'_n, \quad \forall n \ge 0, \end{cases}$$

where $z_n \in Tx_n$ and $z'_n \in Ty_n$.

2.2 Results

In this project we introduce a new iteration method modifying the above ones and call it the modified Ishikawa iteration method.

Definition 13. Let E be a nonempty closed bounded convex subset of a Banach space X, $t : E \to E$ be a single valued nonexpansive mapping, and $T : E \to FB(E)$ be a multi-valued nonexpansive mapping. The sequence $\{x_n\}$ of the modified Ishikawa iteration is defined by

$$\begin{aligned} y_n &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n \\ x_{n+1} &= (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n t y_n \end{aligned} \tag{1}$$

where $x_0 \in E, z_n \in Tx_n$ and $0 < a \le \alpha_n, \beta_n \le b < 1$.

We first prove the following lemmas, which play very important roles in this section.

Lemma 14. *Let E be a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space X, $t : E \to E$ and $T : E \to FB(E)$ a single valued and a multi-valued nonexpansive mapping, respectively, and Fix$(t) \cap$ Fix$(T) \neq \emptyset$ satisfying $Tw = \{w\}$ for all $w \in$ Fix$(t) \cap$ Fix(T). Let $\{x_n\}$ be the sequence of the modified Ishikawa iteration defined by (1). Then $\lim_{n\to\infty} \|x_n - w\|$ exists for all $w \in$ Fix$(t) \cap$ Fix(T).*

We can see how Lemma 9 is useful via the following lemma.

Lemma 15. *Let E be a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space X, $t : E \to E$ and $T : E \to FB(E)$ a single valued and a multi-valued nonexpansive mapping, respectively, and Fix$(t) \cap$ Fix$(T) \neq \emptyset$ satisfying $Tw = \{w\}$ for all $w \in$ Fix$(t) \cap$ Fix(T). Let $\{x_n\}$ be the sequence of the modified Ishikawa iteration defined by (1). If $0 < a \le \alpha_n \le b < 1$ for some a, $b \in \mathbb{R}$, then $\lim_{n\to\infty} \|ty_n - x_n\| = 0$.*

Lemma 16. *Let E be a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space X, $t : E \to E$ and $T : E \to FB(E)$ a single valued and a multi-valued nonexpansive mapping, respectively, and Fix$(t) \cap$ Fix$(T) \neq \emptyset$ satisfying $Tw = \{w\}$ for all $w \in$ Fix$(t) \cap$ Fix(T). Let $\{x_n\}$ be the sequence of the modified Ishikawa iteration defined by (1). If $0 < a \le \alpha_n, \beta_n \le b < 1$ for some a, $b \in \mathbb{R}$, then $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0$.*

The following lemma allows us to go on.

Lemma 17. *Let E be a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space X, $t : E \to E$ and $T : E \to FB(E)$ a single valued and a multi-valued nonexpansive mapping, respectively, and $Fix(t) \cap Fix(T) \neq \emptyset$ satisfying $Tw = \{w\}$ for all $w \in Fix(t) \cap Fix(T)$. Let $\{x_n\}$ be the sequence of the modified Ishikawa iteration defined by (1). If $0 < a \leq \alpha_n, \beta_n \leq b < 1$, then $\lim_{n\to\infty} \|tx_n - x_n\| = 0$.*

We give the sufficient conditions which imply the existence of common fixed points for single valued mappings and multi-valued nonexpansive mappings, respectively, as follow:

Theorem 18. *Let E be a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space X, $t : E \to E$ and $T : E \to FB(E)$ a single valued and a multi-valued nonexpansive mapping, respectively and $Fix(t) \cap Fix(T) \neq \emptyset$ satisfying $Tw = \{w\}$ for all $w \in Fix(t) \cap Fix(T)$. Let $\{x_n\}$ be the sequence of the modified Ishikawa iteration defined by (1). If $0 < a \leq \alpha_n, \beta_n \leq b < 1$, then $x_{n_i} \to y$ for some subsequence $\{x_{n_i}\}$ of $\{x_n\}$ implies $y \in Fix(t) \cap Fix(T)$.*

Hereafter, we arrive at the convergence theorem of the sequence of the modified Ishikawa iteration. We conclude this project with the following theorem.

Theorem 19. *Let E be a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space X, $t : E \to E$ and $T : E \to FB(E)$ a single valued and a multi-valued nonexpansive mapping, respectively, and $Fix(t) \cap Fix(T) \neq \emptyset$ satisfying $Tw = \{w\}$ for all $w \in Fix(t) \cap Fix(T)$. Let $\{x_n\}$ be the sequence of the modified Ishikawa iteration defined by (1) with $0 < a \leq \alpha_n, \beta_n \leq b < 1$. Then $\{x_n\}$ converges strongly to a common fixed point of t and T.*

3. Asymptotic centers and fixed points

3.1 Introduction

A mapping T on a subset E of a Banach space X is called a nonexpansive mapping if $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ for all $x, y \in E$. Although nonexpansive mappings are widely studied, there are many nonlinear mappings which are more general. The study of the existence of fixed points for those mappings is very useful in studying in the problem of equations in science and applied science.

The technique of employing the asymptotic centers and their Chebyshev radii in fixed point theory was first discovered by Edelstein [9] and the compactness assumption given on asymptotic centers was introduced by Kirk and Massa [19]. Recently, Dhompongsa et al. proved in [8] a theorem of existence of fixed points for some generalized nonexpansive mappings on a bounded closed convex subset E of a Banach space with assumption that every asymptotic center of a bounded sequence relative to E is nonempty and compact. However, spaces or sets in which asymptotic centers are compact have not been completely characterized, but partial results are known (see [11, pp. 93]). In this project, we introduce a class of nonlinear continuous mappings in Banach spaces which allows us to characterize the Banach spaces with compact asymptotic centers of bounded sequence relative to their weakly compact convex subsets as those that have the weak fixed point property for this type of mappings.

Let E be a nonempty closed and convex subset of a Banach space X and $\{x_n\}$ a bounded sequence in X. For $x \in X$, define the asymptotic radius of $\{x_n\}$ at x as the number

$$r(x, \{x_n\}) = \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

Let

$$r \equiv r(E, \{x_n\}) := \inf \{r(x, \{x_n\}) : x \in E\}$$

and

$$A \equiv A(E, \{x_n\}) := \{x \in E : r(x, \{x_n\}) = r\}.$$

The number r and the set A are, respectively, called the asymptotic radius and asymptotic center of $\{x_n\}$ relative to E. It is known that $A(E, \{x_n\})$ is nonempty, weakly compact and convex as E is [11, pp. 90].

Let $T : E \to E$ be a nonexpansive and $z \in E$. Then for $\alpha \in (0, 1)$ the mapping $T_\alpha : E \to E$ defined by setting

$$T_\alpha x = (1 - \alpha)z + \alpha Tx$$

is a contraction mapping. As we have known, Banach contraction mapping theorem assures the existence of a unique fixed point $x_\alpha \in E$. Since

$$\lim_{\alpha\to 1^-} \|x_\alpha - Tx_\alpha\| = \lim_{\alpha\to 1^-} (1 - \alpha)\|z - Tx_\alpha\| = 0,$$

we have the following.

Lemma 20. *If E is a bounded closed and convex subset of a Banach space and if $T : E \to E$ is nonexpansive, then there exists a sequence $\{x_n\} \subset E$ such that*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0.$$

3.2 Results

Definition 21. Let E be a bounded closed convex subset of a Banach space X. We say that a sequence $\{x_n\}$ in X is an asymptotic center sequence for the mapping $T : E \to X$ if, for each $x \in E$,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - Tx\| \le \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

We say that $T : E \to X$ is a *D-type mapping* whenever it is continuous and there is an asymptotic center sequence for T.

The following observation shows that the concept of D-type mappings is a generalization of nonexpansiveness.

Proposition 22. *Let $T : E \to E$ be a nonexpansive mapping. Then T is a D-type mapping.*

Definition 23. We say that a Banach space $(X, \|\cdot\|)$ has the weak fixed point property for D-type mappings if every D-type self-mapping of every weakly compact convex subset of X has a fixed point.

Now we are in the position to prove our main theorem.

Theorem 24. *Let X be a Banach space. Then X has the weak fixed point property for D-type mappings if and only if the asymptotic center relative to every nonempty weakly compact convex subset of each bounded sequence of X is compact.*

In 2007, Garcia-Falset et al. [10] introduced another concept of a center of mappings.

Definition 25. Let E be a bounded closed convex subset of a Banach space X. A point $x_0 \in X$ is said to be a center for a mapping $T : E \to X$ if, for each $x \in E$,

$$\|Tx - x_0\| \leq \|x - x_0\|.$$

A mapping $T : E \to X$ is said to be a J-type mapping whenever it is continuous and it has some center $x_0 \in X$.

Definition 26. We say that a Banach space X has the J-weak fixed point property if every J-type self-mapping of every weakly compact subset E of X has a fixed point.

Employing the above definitions, the authors proved a characterization of the geometrical property (C) of the Banach spaces introduced in 1973 by R. E. Bruck [4] : A Banach space X has property (C) whenever the weakly compact convex subsets of its unit sphere are compact sets.

Theorem 27. *[10, Theorem 16] Let X be a Banach space. Then X has property (C) if and only if X has the J-weak fixed point property.*

It is easy to see that a center $x_0 \in X$ of a mapping $T : E \to X$ is can be seen as an asymptotic center sequence $\{x_n\}$ for the mapping T by setting $x_n \equiv x_0$ for all $n \in \mathbb{N}$. This leads to the following conclusion.

Proposition 28. *Let $T : E \to X$ be a J-type mapping. Then T is a D-type mapping.*

Consequently, we have

Proposition 29. *Let X be a Banach space. If X has the weak fixed point property for D-type mappings, then X has the J-weak fixed point property.*

From Theorem 24, Theorem 16 of [10], and Proposition 29 we can conclude this project by the following.

Theorem 30. *Let X be a Banach space. If the asymptotic center relative to every nonempty weakly compact convex subset of each bounded sequence of X is compact, then X has property (C).*

Bibliography

[1] M. Bridson and A. Haefliger, Metric Spaces of Non-Positive Curvature, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1999).

[2] F.E. Browder, Semicontractive and semiaccretive nonlinear mappings in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 74(1968) 660-665.

[3] K. S. Brown, Buildings, Springer-Verlag, New York, 1989.

[4] R.E. Bruck, Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 179 (1973)

[5] F. Bruhat and J. Tits, Groupes réductifs sur un corps local. I. Données radicielles valuées, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 41 (1972), 5-251.

[6] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov, A Course in Metric Geometry, Graduate Studies in Math. vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2001).

[7] S. Dhompongsa, A. Kaewcharoen, A. Kaewkhao, The Domínguez-Lorenzo condition and fixed point for multi-valued mappings, Nonlinear Analysis. 64(2006) 958-970.

[8] S. Dhompongsa, W. Inthakon and A. Kaewkhao, Edelsteins method and fixed point theorems for some generalized nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl. 350 (2009), pp. 1217.

[9] M. Edelstein, The construction of an asymptotic center with a fixed point property, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972) 206-208.

[10] J. Garcia-Falset, E. Llorens-Fuster and S. Prus, The fixed point property for mappings admitting a center, Nonlinear Anal. 66 (2007), pp. 12571274.

[11] K. Goebel and W. A. Kirk, Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge Univ. Press, 1990.

[12] K. Goebel and S. Reich, Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings, Marcel Dekker, Inc., New York, (1984).

[13] M. Gromov, Metric Structures for Riemannian and non-Riemannian Spaces, Progress in Mathematics 152, Birkhäuser, Boston, 1999.

[14] S. Ishikawa, Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc. 44(1974) 147-150.

[15] A. Kaewkhao and K. Sokhuma, Remarks on asymptotic centers and fixed points, Abstract and Applied Analysis, in Press.

[16] M. A. Khamsi, On metric spaces with uniform normal structure, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 106, No.3 (1989), pp. 723-726.

[17] W. A. Kirk, Geodesic geometry and fixed point theory. In Seminar of Mathematical Analysis (Malaga/Seville, 2002/2003), pp. 195-225, Colecc. Abierta, 64, Univ. Sevilla Secr. Publ., Seville, (2003).

[18] W. A. Kirk, Geodesic geometry and fixed point theory II. In International Conference on Fixed Point Theory and Applications, pp. 113-142, Yokohama Publ., Yokohama, (2004).

[19] W.A. Kirk, S. Massa, Remarks on asymptotic and Chebyshev centers, Houston J. Math. 16 (1990) 364-375.

[20] B. Panyanak, Mann and Ishikawa iterative processes for multi-valued mappings in Banach space, Computers and Mathematics with Applications. 54(2007) 872-877.

[21] K.P.R. Sastry and G.V.R. Babu, Convergence of Ishikawa iterates for a multi-valued mapping with a fixed point, Czechoslovak Mathematical Journal. 55(2005) 817-826.

[22] J. Schu, Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, Bull. Austral. Math. Soc. 43(1991) 153-159.

[23] N. Shahzad and H. Zegeye, On Mann and Ishikawa iteration schemes for multi-valued maps in Banach spaces, Nonlinear Analysis. 71(2009) 838-844.

[24] K. Sokhuma and A. Kaewkhao, Ishikawa iterative process for a pair of single valued and multi-valued nonexpansive mappings in Banach spaces, Fixed Point Theory and Applications, in Press.

[25] Y. Song and H. Wang, Erratum to Mann and Ishikawa iterative processes for multivalued mappings in Banach spaces [Comput. Math. Appl. 54(2007) 872-877], Computers and Mathematics with Applications. 55(2008) 2999-3002.

[26] Y. Song and H. Wang, Convergence of iterative algorithms for multi-valued mappings in Banach spaces, Nonlinear Analysis. 70(2009) 1547-1556.

Output

ได้รับการตอบรับให้ตีพิมพ์แล้ว 2 เรื่อง

1. K. Sokhuma and A. Kaewkhao, Ishikawa iterative process for a pair of single valued and multi-valued nonexpansive mappings in Banach spaces, Fixed Point Theory and Applications, in Press. (Impact Factor 1.525)
2. A. Kaewkhao and K. Sokhuma, Remarks on asymptotic centers and fixed points, Abstract and Applied Analysis, in Press. (Impact Factor 2.221)

ภาคผนวก

1. K. Sokhuma and A. Kaewkhao, Ishikawa iterative process for a pair of single valued and multi-valued nonexpansive mappings in Banach spaces, Fixed Point Theory and Applications, in Press. (Impact Factor 1.525)

Ishikawa iterative process for a pair of single valued and multi-valued nonexpansive mappings in Banach spaces

K. Sokhuma[a] and A. Kaewkhao[b] *

[a] Department of Mathematics, Faculty of Science Burapha University, Chonburi 20131, THAILAND

[b] Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, THAILAND †

Abstract

Let E be a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space X, and $t : E \to E$ and $T : E \to KC(E)$ be a single valued nonexpansive mapping and a multi-valued nonexpansive mapping, respectively. Assume in addition that $\mathrm{Fix}(t) \cap \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ and $Tw = \{w\}$ for all $w \in \mathrm{Fix}(t) \cap \mathrm{Fix}(T)$. We prove that the sequence of the modified Ishikawa iteration method generated from an arbitrary $x_0 \in E$ by

$$\begin{aligned} y_n &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n \\ x_{n+1} &= (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n t y_n \end{aligned}$$

where $z_n \in Tx_n$ and $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ are sequences of positive numbers satisfying

$$0 < a \leq \alpha_n, \beta_n \leq b < 1,$$

converges strongly to a common fixed point of t and T, i.e., there exists $x \in E$ such that $x = tx \in Tx$.

Keywords: Nonexpansive mapping, Fixed point, Uniformly convex Banach space, Ishikawa iteration.

1 Introduction

Let X be a Banach space and E a nonempty subset of X. We shall denote by $FB(E)$ the family of nonempty bounded closed subsets of E and by $KC(E)$ the family of nonempty compact convex subsets of E. Let $H(\cdot, \cdot)$ be the Hausdorff distance on $FB(X)$, i.e.,

*Corresponding author.

† *E-mail addresses*: k_sokhuma@yahoo.co.th (Kritsana Sokhuma), akaewkhao@yahoo.com (Attapol Kaewkhao)

$$H(A,B) = \max\{\ \sup_{a\in A} \mathrm{dist}(a,B),\ \sup_{b\in B} \mathrm{dist}(b,A)\ \},\ \ A,B \in FB(X),$$

where $\mathrm{dist}(a,B) = \inf\{\|a-b\| : b \in B\}$ is the distance from the point a to the subset B.

A mapping $t : E \to E$ is said to be *nonexpansive* if

$$\|tx - ty\| \le \|x-y\| \ \text{ for all } x,y \in E.$$

A point x is called a fixed point of t if $tx = x$.

A multi-valued mapping $T : E \to FB(X)$ is said to be *nonexpansive* if

$$H(Tx,Ty) \le \|x-y\| \ \text{ for all } x,y \in E.$$

A point x is called a fixed point for a multi-valued mapping T if $x \in Tx$.

We use the notation $\mathrm{Fix}(T)$ stands for the set of fixed points of a mapping T and $\mathrm{Fix}(t) \cap \mathrm{Fix}(T)$ stands for the set of common fixed points of t and T. Precisely, a point x is called a common fixed point of t and T if $x = tx \in Tx$.

In 2006, S. Dhompongsa et al. ([2]) proved a common fixed point theorem for two nonexpansive commuting mappings.

Theorem 1.1. *[2, Theorem 4.2] Let E be a nonempty bounded closed convex subset of a uniformly Banach space X, $t : E \to E$, and $T : E \to KC(E)$ a nonexpansive mapping and a multi-valued nonexpansive mapping respectively. Assume that t and T are commuting , i.e. if for every $x,y \in E$ such that $x \in Ty$ and $ty \in E$, there holds $tx \in Tty$. Then t and T have a common fixed point.*

In this paper, we introduce an iterative process in a new sense, called the modified Ishikawa iteration method with respect to a pair of single valued and multi-valued nonexpansive mappings. We also establish the strong convergence theorem of a sequence from such process in a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space.

2 Preliminaries

The important property of a uniformly convex Banach space we use is the following lemma proved by Schu ([6]) in 1991.

Lemma 2.1. *([6]) Let X be a uniformly convex Banach space, let $\{u_n\}$ be a sequence of real numbers such that $0 < b \le u_n \le c < 1$ for all $n \ge 1$, and let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be sequences of*

X such that $\limsup\limits_{n\to\infty} \|x_n\| \le a$, $\limsup\limits_{n\to\infty} \|y_n\| \le a$ *and* $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n x_n + (1-u_n)y_n\| = a$ *for some* $a \ge 0$. *Then,* $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$.

The following observation will be used in proving our results and the proof is a straightforward.

Lemma 2.2. *Let X be a Banach space and E be a nonempty closed convex subset of X. Then,*

$$dist(y, Ty) \le \|y - x\| + dist(x, Tx) + H(Tx, Ty),$$

where $x, y \in E$ and T is a multi-valued nonexpansive mapping from E into $FB(E)$.

A fundamental principle which plays a key role in ergodic theory is the demiclosedness principle. A mapping t defined on a subset E of a Banach space X is said to be demiclosed if any sequence $\{x_n\}$ in E the following implication holds: $x_n \rightharpoonup x$ and $tx_n \to y$ implies $tx = y$.

Theorem 2.3. *([1]) Let E be a nonempty closed convex subset of a uniformly convex Banach space X and $t : E \to E$ be a nonexpansive mapping. If a sequence $\{x_n\}$ in E converges weakly to p and $\{x_n - tx_n\}$ converges to 0 as $n \to \infty$, then $p \in Fix(t)$.*

In 1974 , Ishikawa introduced the following well-known iteration.

Definition 2.4. *([3]) Let X be a Banach space, E a closed convex subset of X and t a selfmap on E. For $x_0 \in E$, the sequence $\{x_n\}$ of Ishikawa iterates of t is defined by,*

$$\begin{cases} y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n t x_n \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n t y_n, \quad n \ge 0, \end{cases}$$

where $\{\alpha_n\}$ and $\{\beta_n\}$ are real sequences.

A nonempty subset K of E is said to be proximinal if, for any $x \in E$, there exists an element $y \in K$ such that $\|x - y\| = \text{dist}(x, K)$. We shall denote $P(K)$ by the family of nonempty proximinal bounded subsets of K.

In 2005, Sastry and Babu ([5]) defined the Ishikawa iterative scheme for multi-valued mappings as follows:

Let E be a compact convex subset of a Hilbert space X and $T : E \to P(E)$ be a multi-valued mapping and fix $p \in \text{Fix}(T)$.

$$\begin{cases} x_0 \in E, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n \\ x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n z'_n, \quad \forall n \ge 0, \end{cases}$$

where $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ are sequences in [0, 1] with $z_n \in Tx_n$ such that $\|z_n - p\| = \mathrm{dist}(p, Tx_n)$ and $\|z'_n - p\| = \mathrm{dist}(p, Ty_n)$.

They also proved the strong convergence of the above Ishikawa iterative scheme for a multi-valued nonexpansive mapping T with a fixed point p under some certain conditions in a Hilbert space.

Recently, Panyanak ([4]) extended the results of Sastry and Babu ([5]) to a uniformly convex Banach space, and also modified the above Ishikawa iterative scheme as follows:

Let E be a nonempty convex subset of a uniformly convex Banach space X and $T : E \to P(E)$ be a multi-valued mapping

$$\begin{cases} x_0 \in E, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n z_n \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n z'_n, \quad \forall n \geq 0, \end{cases}$$

where $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ are sequences in [0, 1] with $z_n \in Tx_n$ and $u_n \in \mathrm{Fix}(T)$ such that $\|z_n - u_n\| = \mathrm{dist}(u_n, Tx_n)$ and $\|x_n - u_n\| = \mathrm{dist}(x_n, \mathrm{Fix}(T))$, respectively. Moreover, $z'_n \in Tx_n$ and $v_n \in \mathrm{Fix}(T)$ such that $\|z'_n - v_n\| = \mathrm{dist}(v_n, Tx_n)$ and $\|y_n - v_n\| = \mathrm{dist}(y_n, \mathrm{Fix}(T))$, respectively.

Very recently, Song and Wang ([8, 9]) noted that there was a gap in the proofs of ([4, Theorem 3.1]), and ([5, Theorem 5]).

Thus they solved/revised the gap by means of the following Ishikawa iterative scheme:

Let $T : E \to FB(E)$ be a multi-valued mapping, where $\alpha_n, \beta_n \in [0, 1)$. The Ishikawa iterative scheme $\{x_n\}$ is defined by

$$\begin{cases} x_0 \in E, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n z_n, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n z'_n, \quad \forall n \geq 0, \end{cases}$$

where $z_n \in Tx_n$ and $z'_n \in Ty_n$ such that $\|z_n - z'_n\| \leq H(Tx_n, Ty_n) + \gamma_n$ and $\|z_{n+1} - z'_n\| \leq H(Tx_{n+1}, Ty_n) + \gamma_n$, respectively. Moreover, $\gamma_n \in (0, +\infty)$ such that $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.

At the same period, Shahzad and Zegeye ([7]) modified the Ishikawa iterative scheme $\{x_n\}$ and extended the result of ([8, Theorem 2]) to a multi-valued quasi-nonexpansive mapping as follows:

Let K be a nonempty convex subset of a Banach space X and $T : E \to FB(E)$ a multi-valued mapping, where $\alpha_n, \beta_n \in [0, 1]$. The Ishikawa iterative scheme $\{x_n\}$ is defined by

$$\begin{cases} x_0 \in E, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n z_n, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n z'_n, \quad \forall n \geq 0, \end{cases}$$

where $z_n \in Tx_n$ and $z'_n \in Ty_n$.

In this paper we introduce a new iteration method modifying the above ones and call it the modified Ishikawa iteration method.

Definition 2.5. *Let E be a nonempty closed bounded convex subset of a Banach space X, $t : E \to E$ be a single valued nonexpansive mapping, and $T : E \to FB(E)$ be a multi-valued nonexpansive mapping. The sequence $\{x_n\}$ of the modified Ishikawa iteration is defined by*

$$\begin{aligned} y_n &= (1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n \\ x_{n+1} &= (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n t y_n \end{aligned} \tag{2.1}$$

where $x_0 \in E, z_n \in Tx_n$ and $0 < a \le \alpha_n, \beta_n \le b < 1$.

3 Main Results

We first prove the following lemmas, which play very important roles in this section.

Lemma 3.1. *Let E be a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space X, $t : E \to E$ and $T : E \to FB(E)$ a single valued and a multi-valued nonexpansive mapping, respectively, and Fix$(t) \cap$ Fix$(T) \neq \emptyset$ satisfying $Tw = \{w\}$ for all $w \in$ Fix$(t) \cap$ Fix(T). Let $\{x_n\}$ be the sequence of the modified Ishikawa iteration defined by (2.1). Then $\lim_{n\to\infty} \|x_n - w\|$ exists for all $w \in$ Fix$(t) \cap$ Fix(T).*

Proof. Let $x_0 \in E$ and $w \in \mathrm{Fix}(t) \cap \mathrm{Fix}(T)$, we have

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - w\| &= \|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n t((1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n) - w\| \\ &= \|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n t((1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n) - (1-\alpha_n)w - \alpha_n w\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|x_n - w\| + \alpha_n \|t((1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n) - w\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|x_n - w\| + \alpha_n \|(1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n - w\| \\ &= (1-\alpha_n)\|x_n - w\| + \alpha_n \|(1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n - (1-\beta_n)w - \beta_n w\| \\ &\le (1-\alpha_n)\|x_n - w\| + \alpha_n(1-\beta_n)\|x_n - w\| + \alpha_n\beta_n \|z_n - w\| \\ &= (1-\alpha_n)\|x_n - w\| + \alpha_n(1-\beta_n)\|x_n - w\| + \alpha_n\beta_n \mathrm{dist}(z_n, Tw) \\ &\le (1-\alpha_n)\|x_n - w\| + \alpha_n(1-\beta_n)\|x_n - w\| + \alpha_n\beta_n H(Tx_n, Tw) \\ &\le (1-\alpha_n)\|x_n - w\| + \alpha_n(1-\beta_n)\|x_n - w\| + \alpha_n\beta_n \|x_n - w\| \\ &= \|x_n - w\|. \end{aligned}$$

Since $\{\|x_n - w\|\}$ is a decreasing and bounded sequence, we can conclude that the limit of $\{\|x_n - w\|\}$ exists. $\square$

We can see how Lemma 2.1 is useful via the following lemma.

Lemma 3.2. *Let E be a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space X, $t : E \to E$ and $T : E \to FB(E)$ a single valued and a multi-valued nonexpansive mapping, respectively, and $Fix(t) \cap Fix(T) \neq \emptyset$ satisfying $Tw = \{w\}$ for all $w \in Fix(t) \cap Fix(T)$. Let $\{x_n\}$ be the sequence of the modified Ishikawa iteration defined by (2.1). If $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1$ for some a, $b \in \mathbb{R}$, then $\lim_{n\to\infty} \|ty_n - x_n\| = 0$.*

Proof. Let $w \in \mathrm{Fix}(t) \cap \mathrm{Fix}(T)$. By Lemma 3.1, we put $\lim_{n\to\infty} \|x_n - w\| = c$ and consider

$$\begin{aligned}
\|ty_n - w\| &\leq \|y_n - w\| \\
&= \|(1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n - w\| \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n - w\| + \beta_n \|z_n - w\| \\
&= (1-\beta_n)\|x_n - w\| + \beta_n \mathrm{dist}(z_n, Tw) \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n - w\| + \beta_n H(Tx_n, Tw) \\
&\leq (1-\beta_n)\|x_n - w\| + \beta_n \|x_n - w\| \\
&= \|x_n - w\|.
\end{aligned}$$

Then we have

$$\limsup_{n\to\infty} \|ty_n - w\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|y_n - w\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n - w\| = c. \tag{3.1}$$

Further, we have

$$\begin{aligned}
c &= \lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - w\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n ty_n - w\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|\alpha_n ty_n - \alpha_n w + x_n - \alpha_n x_n + \alpha_n w - w\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|\alpha_n(ty_n - w) + (1-\alpha_n)(x_n - w)\|.
\end{aligned}$$

By Lemma 2.1, we can conclude that $\lim_{n\to\infty} \|(ty_n - w) - (x_n - w)\| = \lim_{n\to\infty} \|ty_n - x_n\| = 0$. $\square$

Lemma 3.3. *Let E be a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space X, $t : E \to E$ and $T : E \to FB(E)$ a single valued and a multi-valued nonexpansive mapping, respectively, and $Fix(t) \cap Fix(T) \neq \emptyset$ satisfying $Tw = \{w\}$ for all $w \in Fix(t) \cap Fix(T)$. Let $\{x_n\}$ be the sequence of the modified Ishikawa iteration defined by (2.1). If $0 < a \leq \alpha_n, \beta_n \leq b < 1$ for some a, $b \in \mathbb{R}$, then $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0$.*

Proof. Let $w \in \mathrm{Fix}(t) \cap \mathrm{Fix}(T)$. We put, as in Lemma 3.2, $\lim_{n\to\infty} \|x_n - w\| = c$. For $n \geq 0$, we have

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - w\| &= \|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n t y_n - w\| \\ &= \|(1-\alpha_n)x_n + \alpha_n t y_n - (1-\alpha_n)w - \alpha_n w\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|x_n - w\| + \alpha_n \|t y_n - w\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\|x_n - w\| + \alpha_n \|y_n - w\|,\end{aligned}$$

and hence

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - w\| - \|x_n - w\| &\leq -\alpha_n \|x_n - w\| + \alpha_n \|y_n - w\| \\ \|x_{n+1} - w\| - \|x_n - w\| &\leq \alpha_n(\|y_n - w\| - \|x_n - w\|) \\ \frac{\|x_{n+1} - w\| - \|x_n - w\|}{\alpha_n} &\leq \|y_n - w\| - \|x_n - w\|.\end{aligned}$$

Therefore, since $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1$,

$$\left(\frac{\|x_{n+1} - w\| - \|x_n - w\|}{\alpha_n}\right) + \|x_n - w\| \leq \|y_n - w\|.$$

Thus,

$$\liminf_{n\to\infty} \left\{\left(\frac{\|x_{n+1} - w\| - \|x_n - w\|}{\alpha_n}\right) + \|x_n - w\|\right\} \leq \liminf_{n\to\infty} \|y_n - w\|.$$

It follows that

$$c \leq \liminf_{n\to\infty} \|y_n - w\|.$$

Since, from (3.1), $\limsup_{n\to\infty} \|y_n - w\| \leq c$, we have

$$\begin{aligned}c &= \lim_{n\to\infty} \|y_n - w\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|(1-\beta_n)x_n + \beta_n z_n - w\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|(1-\beta_n)(x_n - w) + \beta_n(z_n - w)\|.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Recall that

$$\begin{aligned}\|z_n - w\| &= \mathrm{dist}(z_n, Tw) \\ &\leq H(Tx_n, Tw) \\ &\leq \|x_n - w\|.\end{aligned}$$

Hence we have

$$\limsup_{n\to\infty} \|z_n - w\| \leq \limsup_{n\to\infty} \|x_n - w\| = c.$$

Using the fact that $0 < a \leq \beta_n \leq b < 1$ and (3.2), we can conclude that $\lim_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0$. $\square$

The following lemma allows us to go on.

Lemma 3.4. *Let E be a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space X, $t : E \to E$ and $T : E \to FB(E)$ a single valued and a multi-valued nonexpansive mapping, respectively, and $Fix(t) \cap Fix(T) \neq \emptyset$ satisfying $Tw = \{w\}$ for all $w \in Fix(t) \cap Fix(T)$. Let $\{x_n\}$ be the sequence of the modified Ishikawa iteration defined by (2.1). If $0 < a \leq \alpha_n, \beta_n \leq b < 1$, then $\lim_{n\to\infty} \|tx_n - x_n\| = 0$.*

Proof. Consider

$$\begin{aligned}
\|tx_n - x_n\| &= \|tx_n - ty_n + ty_n - x_n\| \\
&\leq \|tx_n - ty_n\| + \|ty_n - x_n\| \\
&\leq \|x_n - y_n\| + \|ty_n - x_n\| \\
&= \|x_n - (1-\beta_n)x_n - \beta_n z_n\| + \|ty_n - x_n\| \\
&= \|x_n - x_n + \beta_n x_n - \beta_n z_n\| + \|ty_n - x_n\| \\
&= \beta_n \|x_n - z_n\| + \|ty_n - x_n\| .
\end{aligned}$$

Then, we have

$$\lim_{n\to\infty} \|tx_n - x_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \beta_n \|x_n - z_n\| + \lim_{n\to\infty} \|ty_n - x_n\| .$$

Hence, by Lemma 3.2 and Lemma 3.3, $\lim_{n\to\infty} \|tx_n - x_n\| = 0$. $\square$

We give the sufficient conditions which imply the existence of common fixed points for single valued mappings and multi-valued nonexpansive mappings, respectively, as follow:

Theorem 3.5. *Let E be a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space X, $t : E \to E$ and $T : E \to FB(E)$ a single valued and a multi-valued nonexpansive mapping, respectively and $Fix(t) \cap Fix(T) \neq \emptyset$ satisfying $Tw = \{w\}$ for all $w \in Fix(t) \cap Fix(T)$. Let $\{x_n\}$ be the sequence of the modified Ishikawa iteration defined by (2.1). If $0 < a \leq \alpha_n, \beta_n \leq b < 1$, then $x_{n_i} \to y$ for some subsequence $\{x_{n_i}\}$ of $\{x_n\}$ implies $y \in Fix(t) \cap Fix(T)$.*

Proof. Assumed that $\lim_{n\to\infty} \|x_{n_i} - y\| = 0$. From Lemma 3.4, we have

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|tx_{n_i} - x_{n_i}\| = \lim_{n\to\infty} \|(I - t)(x_{n_i})\| .$$

Since $I - t$ is demiclosed at 0, we have $(I - t)(y) = 0$ and hence $y = ty$, i.e., $y \in \mathrm{Fix}(t)$. By Lemma 2.2 and by Lemma 3.4, we have

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}(y, Ty) &\leq \|y - x_{n_i}\| + \mathrm{dist}(x_{n_i}, Tx_{n_i}) + H(Tx_{n_i}, Ty) \\
&\leq \|y - x_{n_i}\| + \|x_{n_i} - z_{n_i}\| + \|x_{n_i} - y\| \to 0 \qquad \text{as } i \to \infty.
\end{aligned}$$

It follows that $y \in \mathrm{Fix}(T)$. Therefore $y \in \mathrm{Fix}(t) \cap Fix(T)$ as desired. $\square$

Hereafter, we arrive at the convergence theorem of the sequence of the modified Ishikawa iteration. We conclude this paper with the following theorem.

Theorem 3.6. *Let E be a nonempty compact convex subset of a uniformly convex Banach space X, $t : E \to E$ and $T : E \to FB(E)$ a single valued and a multi-valued nonexpansive mapping, respectively, and $Fix(t) \cap Fix(T) \neq \emptyset$ satisfying $Tw = \{w\}$ for all $w \in Fix(t) \cap Fix(T)$. Let $\{x_n\}$ be the sequence of the modified Ishikawa iteration defined by (2.1) with $0 < a \leq \alpha_n, \beta_n \leq b < 1$. Then $\{x_n\}$ converges strongly to a common fixed point of t and T.*

Proof. Since $\{x_n\}$ is contained in E which is compact, there exists a subsequence $\{x_{n_i}\}$ of $\{x_n\}$ such that $\{x_{n_i}\}$ converges strongly to some point $y \in E$, i.e., $\lim\limits_{i\to\infty} \|x_{n_i} - y\| = 0$. By Theorem 3.5, we have $y \in \mathrm{Fix}(t) \cap \mathrm{Fix}(T)$ and by Lemma 3.1, we have that $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y\|$ exists. It must be the case that $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - y\| = \lim\limits_{i\to\infty} \|x_{n_i} - y\| = 0$. Therefor $\{x_n\}$ converges strongly to a common fixed point y of t and T. $\square$

4 Acknowledgements

The first author would like to thank the Office of the Higher Education Commission, Thailand for supporting by grant fund under the program Strategic Scholarships for Frontier Research Network for the Ph.D. Program Thai Doctoral degree for this research. This work was also completed with the support of the Commission on Higher Education and The Thailand Research Fund under grant MRG5180213. Moreover, we would like to express my deep gratitude to Prof. Dr. Sompong Dhompongsa whose guidance and support were valuable for the completion of the paper.

References

[1] F.E. Browder, Semicontractive and semiaccretive nonlinear mappings in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 74(1968) 660-665.

[2] S. Dhompongsa, A. Kaewcharoen, A. Kaewkhao, The Domínguez-Lorenzo condition and fixed point for multi-valued mappings, Nonlinear Analysis. 64(2006) 958-970.

[3] S. Ishikawa, Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc. 44(1974) 147-150.

[4] B. Panyanak, Mann and Ishikawa iterative processes for multi-valued mappings in Banach space, Computers and Mathematics with Applications. 54(2007) 872-877.

[5] K.P.R. Sastry and G.V.R. Babu, Convergence of Ishikawa iterates for a multi-valued mapping with a fixed point, Czechoslovak Mathematical Journal. 55(2005) 817-826.

[6] J. Schu, Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, Bull. Austral. Math. Soc. 43(1991) 153-159.

[7] N. Shahzad and H. Zegeye, On Mann and Ishikawa iteration schemes for multi-valued maps in Banach spaces, Nonlinear Analysis. 71(2009) 838-844.

[8] Y. Song and H. Wang, Erratum to *Mann and Ishikawa iterative processes for multivalued mappings in Banach spaces* [Comput. Math. Appl. 54(2007) 872-877], Computers and Mathematics with Applications. 55(2008) 2999-3002.

[9] Y. Song and H. Wang, Convergence of iterative algorithms for multi-valued mappings in Banach spaces, Nonlinear Analysis. 70(2009) 1547-1556.

2. A. Kaewkhao and K. Sokhuma, Remarks on asymptotic centers and fixed points, Abstract and Applied Analysis, in Press. (Impact Factor 2.221)

Remarks on asymptotic centers and fixed points

A. Kaewkhao[a] *and K. Sokhuma[b]

[a] Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University, Chiang Mai 50200, THAILAND

[b] Department of Mathematics, Faculty of Science, Burapha University, Chonburi 20131, THAILAND †

Dedicated to Professor Sompong Dhompongsa on the occation to his 60^{th} birthday

Abstract

We introduce a class of nonlinear continuous mappings defined on a bounded closed convex subset of a Banach space X. We characterize the Banach spaces in which every asymptotic center of each bounded sequence in any weakly compact convex subset is compact as those spaces having the weak fixed point property for this type of mappings.

1 Introduction

A mapping T on a subset E of a Banach space X is called a nonexpansive mapping if $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ for all $x, y \in E$. Although nonexpansive mappings are widely studied, there are many nonlinear mappings which are more general. The study of the existence of fixed points for those mappings is very useful in solving in the problems of equations in science and applied science.

The technique of employing the asymptotic centers and their Chebyshev radii in fixed point theory was first discovered by Edelstein [3] and the compactness assumption given on asymptotic centers was introduced by Kirk and Massa [6]. Recently, Dhompongsa et al. proved in [2] a theorem of existence of fixed points for some generalized nonexpansive mappings on a bounded closed convex subset E of a Banach space with assumption that every asymptotic center of a bounded sequence relative to E is nonempty and compact. However, spaces or sets in which asymptotic centers are compact have not been completely characterized, but partial results are known (see [5, pp. 93]).

In this paper, we introduce a class of nonlinear continuous mappings in Banach spaces which allows us to characterize the Banach spaces in which every asymptotic center of each bounded sequence in any weakly compact convex subset is compact as those spaces having the weak fixed point property for this type of mappings.

*Corresponding author.

†*E-mail addresses*: akaewkhao@yahoo.com (Attapol Kaewkhao), k_sokhuma@yahoo.co.th (Kritsana Sokhuma)

2 Preliminaries

Let E be a nonempty closed and convex subset of a Banach space X and $\{x_n\}$ a bounded sequence in X. For $x \in X$, define the asymptotic radius of $\{x_n\}$ at x as the number

$$r(x, \{x_n\}) = \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

Let

$$r \equiv r(E, \{x_n\}) := \inf \{r(x, \{x_n\}) : x \in E\}$$

and

$$A \equiv A(E, \{x_n\}) := \{x \in E : r(x, \{x_n\}) = r\}.$$

The number r and the set A are, respectively, called the asymptotic radius and asymptotic center of $\{x_n\}$ relative to E. It is known that $A(E, \{x_n\})$ is nonempty, weakly compact and convex as E is [5, pp. 90].

Let $T : E \to E$ be a nonexpansive and $z \in E$. Then for $\alpha \in (0, 1)$ the mapping $T_\alpha : E \to E$ defined by setting

$$T_\alpha x = (1 - \alpha)z + \alpha T x$$

is a contraction mapping. As we have known, Banach contraction mapping theorem assures the existence of a unique fixed point $x_\alpha \in E$. Since

$$\lim_{\alpha\to 1^-} \|x_\alpha - T x_\alpha\| = \lim_{\alpha\to 1^-} (1 - \alpha)\|z - T x_\alpha\| = 0,$$

we have the following.

Lemma 2.1. *If E is a bounded closed and convex subset of a Banach space and if $T : E \to E$ is nonexpansive, then there exists a sequence $\{x_n\} \subset E$ such that*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - T x_n\| = 0.$$

3 Main Results

Definition 3.1. *Let E be a bounded closed convex subset of a Banach space X. We say that a sequence $\{x_n\}$ in X is an asymptotic center sequence for a mapping $T : E \to X$ if, for each $x \in E$,*

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - T x\| \le \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

We say that $T : E \to X$ is a *D-type mapping* whenever it is continuous and there is an asymptotic center sequence for T.

The following observation shows that the concept of D-type mappings is a generalization of nonexpansiveness.

Proposition 3.2. *Let $T : E \to E$ be a nonexpansive mapping. Then T is a D-type mapping.*

Proof. It is easy to see that T is continuous. By Lemma 2.1 there exists a sequence $\{x_n\}$ such that

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0.$$

For $x \in E$,

$$\|x_n - Tx\| \le \|x_n - Tx_n\| + \|Tx_n - Tx\| \le \|x_n - Tx_n\| + \|x_n - x\|.$$

Then

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - Tx\| \le \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

This implies that $\{x_n\}$ is an asymptotic center sequence for T. Thus T is a D-type mapping. □

Definition 3.3. *We say that a Banach space $(X, \|\cdot\|)$ has the weak fixed point property for D-type mappings if every D-type self-mapping on every weakly compact convex subset of X has a fixed point.*

Now we are in the position to prove our main theorem.

Theorem 3.4. *Let X be a Banach space. Then X has the weak fixed point property for D-type mappings if and only if the asymptotic center relative to each nonempty weakly compact convex subset of each bounded sequence of X is compact.*

Proof. Suppose the asymptotic center of any bounded sequence of X relative to any nonempty weakly compact convex subset of X is compact. Let E be a weakly compact convex subset of X and $T : E \to E$ be a D-type mapping having $\{x_n\}$ as an asymptotic center sequence. Let r and A, respectively, be the asymptotic radius and the asymptotic center of $\{x_n\}$ relative to E. Since E is weakly compact and convex, A is nonempty weakly compact and convex. For every $x \in A$, since $\{x_n\}$ is an asymptotic center sequence for T, we have

$$r \le \limsup_{n\to\infty} \|x_n - Tx\| \le \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\| = r.$$

Hence $T(x) \in A$, which implies that A is $T-$invariant. By the assumption, A is a compact set. By using Schauder's fixed point theorem we can conclude that T has a fixed point in A and hence T has a fixed point in E.

Now suppose X has the weak fixed point property for D-type mappings, and suppose there exists a weakly compact convex subset K of X and a bounded sequence $\{x_n\}$ in X whose asymptotic center A relative to K is not compact. By Klee's theorem (see [5, pp. 203]), there exists a continuous, fixed point free mapping $T : A \to A$. We see that $\{x_n\}$ is an asymptotic center sequence for T. Indeed, since $Tx \in A$ for each $x \in A$, we have

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - Tx\| = r = \limsup_{n\to\infty} \|x_n - x\|.$$

Then T is a D-type mapping. Thus T should have a fixed point which is a contradiction. □

In 2007, Garcia-Falset et al. [4] introduced another concept of centers of mappings.

Definition 3.5. *Let E be a bounded closed convex subset of a Banach space X. A point $x_0 \in X$ is said to be a center for a mapping $T : E \to X$ if, for each $x \in E$,*

$$\|Tx - x_0\| \leq \|x - x_0\|.$$

A mapping $T : E \to X$ is said to be a J-type mapping whenever it is continuous and it has some center $x_0 \in X$.

Definition 3.6. *We say that a Banach space X has the J-weak fixed point property if every J-type self-mapping of every weakly compact subset E of X has a fixed point.*

Employing the above definitions, the authors proved a characterization of the geometrical property (C) of the Banach spaces introduced in 1973 by R. E. Bruck [1] : A Banach space X has property (C) whenever the weakly compact convex subsets of its unit sphere are compact sets.

Theorem 3.7. *[4, Theorem 16] Let X be a Banach space. Then X has property (C) if and only if X has the J-weak fixed point property.*

It is easy to see that a center $x_0 \in X$ of a mapping $T : E \to X$ is can be seen as an asymptotic center sequence $\{x_n\}$ for the mapping T by setting $x_n \equiv x_0$ for all $n \in \mathbb{N}$. This leads to the following conclusion.

Proposition 3.8. *Let $T : E \to X$ be a J-type mapping. Then T is a D-type mapping.*

Consequently, we have

Proposition 3.9. *Let X be a Banach space. If X has the weak fixed point property for D-type mappings, then X has the J-weak fixed point property.*

From Theorem 3.4, Theorem 3.7, and Proposition 3.9 we can conclude this paper by the following result:

Theorem 3.10. *Let X be a Banach space. If the asymptotic center relative to every nonempty weakly compact convex subset of each bounded sequence of X is compact, then X has property (C).*

4 Acknowledgements

This work was completed with the support of the Commission on Higher Education and The Thailand Research Fund under grant MRG5180213. The author would like to express my deep gratitude to Prof. Dr. Sompong Dhompongsa whose guidance and support were valuable for the completion of the paper.

References

[1] R.E. Bruck, Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 179 (1973)

[2] S. Dhompongsa, W. Inthakon and A. Kaewkhao, Edelsteins method and fixed point theorems for some generalized nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl. 350 (2009), pp. 1217.

[3] M. Edelstein, The construction of an asymptotic center with a fixed point property, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972) 206-208.

[4] J. Garcia-Falset, E. Llorens-Fuster and S. Prus, The fixed point property for mappings admitting a center, Nonlinear Anal. 66 (2007), pp. 12571274.

[5] K. Goebel, W. A. Kirk, Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge Univ. Press, 1990.

[6] W.A. Kirk, S. Massa, Remarks on asymptotic and Chebyshev centers, Houston J. Math. 16 (1990) 364-375.