



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การพัฒนาการประมาณแบบคู่สำหรับแบบจำลองเชิงพื้นที่

โดย ดร. กรกนก บุญวงศ์

พฤษภาคม 2553

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การพัฒนาการประมาณแบบคู่สำหรับแบบจำลองเชิงพื้นที่

หัวหน้าโครงการวิจัย: ดร. กรรณก บัญวงศ์ มหาวิทยาลัยมหิดล
นักวิจัยที่ปรึกษา: ศ. จุเลี่ยน พอลเตอร์ มหาวิทยาลัยมหิดล

สนับสนุนโดยสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษาและสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกอ. และ สกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

บทคัดย่อ

รหัสโครงการ : MRG5180246

ชื่อโครงการ : การพัฒนาการประมาณแบบคู่สำหรับแบบจำลองเชิงพื้นที่

ชื่อนักวิจัย : ดร. กรกนก บุญวงศ์ มหาวิทยาลัยมหิดล

ชื่อนักวิจัยที่ปรึกษา : ศ. จูเลียน พอลเตอร์ มหาวิทยาลัยมหิดล

E-mail Address : sckbw@mahidol.ac.th

ระยะเวลาโครงการ : 2 ปี (15 พฤษภาคม 2551 - 14 พฤษภาคม 2553)

โครงการวิจัยนี้เริ่มต้นด้วยการแสดงให้เห็นถึงข้อดีและข้อจำกัดของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้การประมาณแบบสมการค่าเฉลี่ยและการประมาณแบบคู่ โดยสมการค่าเฉลี่ยเหมาะสำหรับอธิบายพฤติกรรมของระบบที่มีขนาดใหญ่ ส่วนการประมาณแบบคู่เหมาะสำหรับศึกษาอันตรกิริยาเฉพาะที่ เน้นความสัมพันธ์แบบเดียวและคู่เท่านั้น เนื่องจากสูตรการประมาณแบบคู่มียู่จำนวนจำกัด เราจึงพัฒนาวิธีการประมาณแบบคู่ จากการหาค่าเฉลี่ยเชิงความน่าจะเป็น เน้นการแจกแจงบิวซิง จากนั้นนำสูตรการประมาณแบบคู่ อันเนื่องมาจากการแจกแจงอเนกนาม และการแจกแจงบิวซิงที่พัฒนาขึ้นไปประยุกต์ใช้กับแบบจำลองการแพร่ระบาดแบบ SIS และการวิวัฒนาการของพฤติกรรมช่วยเหลือผู้อื่น เพื่อหาเงื่อนไขที่ทำให้สิ่งมีชีวิตที่เห็นแก่ประโยชน์ของสิ่งมีชีวิตอื่นเป็นหลัก สามารถอยู่รอดท่ามกลางสิ่งมีชีวิตที่ไม่เห็นแก่ประโยชน์ของสิ่งมีชีวิตอื่นเป็นหลัก

คำหลัก : แบบจำลองเชิงพื้นที่ การประมาณแบบคู่ แบบจำลองแบบ SIS พฤติกรรมช่วยเหลือผู้อื่น

Abstract

Project Code: MRG5180246

Project Title: Development of Pair Approximation for Spatial Model

Investigator: Dr. Kornkanok Bunwong, Mahidol University

Mentor: Prof. Julian Poulter, Mahidol University

E-mail Address: sckbw@mahidol.ac.th

Project Period: 2 years (May 15, 2008 - May 14, 2010)

This research project firstly provides some advantages and limitations of mathematical model using mean-field and pair approximations. Mean-field approximation is suitable for describing behaviors of a large system while pair approximation is suitable for studying local interaction especially singles and pairs. Since the formula of pair approximation are limited, we then develop the techniques of pair approximation by using probability averaged value especially Poisson distribution. Moreover, the formula of pair approximation corresponding to multinomial and Poisson distributions are applied to SIS epidemic model and evolution of altruism in order to derive the condition for altruist's survival.

Keywords: spatial model, pair approximation, SIS model, altruism

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
สารบัญ	ค
สารบัญรูป	ง
สัญลักษณ์และคำย่อ	จ
บทที่ 1	Executive Summary
	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์	4
1.3 ระเบียบวิธีวิจัย	5
1.4 ผลการทดลอง	5
1.5 สรุปและวิจารณ์ผลการทดลอง	7
1.6 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต	8
บทที่ 2	Research Content
	9
2.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา	9
2.2 วัตถุประสงค์	12
2.3 ระเบียบวิธีวิจัย	13
2.4 ผลการทดลอง	13
	2.4.1 Mean – field Approximation
	2.4.2 Formulation of Pair Approximation
	2.4.3 Spatial SIS Model
	2.4.4 Evolution of Altruism
	2.4.5 Simulation
2.5 สรุปและวิจารณ์ผลการทดลอง	42
2.6 เอกสารอ้างอิง	43
บทที่ 3	Output of the Project
	45
บทที่ 4	Appendix
	47

สารบัญรูป

รูปที่	หัวข้อ	หน้า
1	Flow chart for the transformation of total nitrogen	14
2	The time series (a) and phase space trajectory (b) of the solution to the dimensionless model equations (1) with $\beta = 0.9$, $\sigma = 0.5$, $E = 1$, $Q = 1$, $\Omega = 0.8$, $\gamma = 0.4$, $\phi = 0.1$, $C = 0.5$, and $D = 1$, where all state variables x, y, z tend toward their steady state values at the equilibrium point (1.3125, 1.25, 1.25)	19
3	The time series (a) and phase space trajectory (b) of the solution to the dimensionless model equations (1) with $\beta = 0.9$, $\sigma = 0.5$, $E = 1$, $Q = 1$, $\Omega = 0.8$, $\gamma = 0.4$, $\phi = 0.1$, $C = 0.1$, and $D = 1$. The value of D/C is greater than R here, so that trajectory tends toward a stable limit cycle	20
4	The (β, γ) parameter space when $\sigma = 0.5$, $E = 1$, $Q = 1$, $\Omega = 0.8$, $\phi = 0.1$, $C = 0.5$, and $D = 1$	21
5	The time series solution curves of the density of infected individuals q_i . Parameters: $b_0 = 0.3, b_1 = 0, d_0 = 0.2, d_1 = 0$ and $Q = 8, 4, 2, 1$	33
6	The time series solution curves of the density of infected individuals q_i . Parameters: $b_0 = 0.3, d_0 = 0.2, d_1 = 0, Q = 4$ and $b_1 = 0.9, 0.3, 0.05, 0.01$	34
7	The time series solution curves of the density of infected individuals q_i . Parameters: $b_0 = 0.3, b_1 = 0, d_0 = 0.2, Q = 4$ and $d_1 = 0.05, 0.04, 0.02, 0$	34
8	The time series solution curves of the density of infected individuals q_i . Parameters: $b_0 = 0.3, b_1 = 0.1, d_0 = 0.2, d_1 = 0.01$ and $Q = 8, 4, 2, 1$	35
9	The time series solution curves of the density of infected individuals q_i . Parameters: $b_0 = 0.3, b_1 = 0.1, d_0 = 0.2, d_1 = 0.01, Q = 2$	35
10	When $N = 2500$, $Q = 4$, $b_0 = 2.0$, $d_0 = 0.1$, $b_1 = 0.01$, $c = 0.001$ and the initial proportion of altruists(red) equals 6 among non-altruists(green)	40
11	When $N = 2500$, $Q = 4$, $b_0 = 2.0$, $d_0 = 0.1$, $d_1 = 0.01$, $c = 0.001$ and the initial proportion of altruists(red) equals 6 among non-altruists(green)	41

สัญลักษณ์

สัญลักษณ์

ความหมาย

x, e

จุด (site) และคู่ (pair) ตามลำดับ

$\sigma x, \sigma e$

สถานะของจุด x และสถานะของคู่ e ตามลำดับ

$\sigma x = i$

สถานะของจุด x คือ i

$\sigma e = ij$

สถานะของคู่ e คือ ij โดย e_i คือ จุดปลายของคู่ e ที่มีสถานะ คือ i และ e_j คือ จุดปลายอีกข้างหนึ่งของคู่ e ที่มีสถานะ คือ j

$[i], [ij], [ijk]$

จำนวนของจุดที่มีสถานะ คือ i จำนวนของคู่ที่มีสถานะ คือ ij และ

จำนวนของสามจุด (triple) ที่มีสถานะ คือ ijk ตามลำดับ

$Q_x(i), Q_{e_j}(i)$

จำนวนจุดที่อยู่ข้างเคียงจุด x และจุด e_j ซึ่งมีสถานะ คือ i ตามลำดับ

$[i]_{j:n}$

จำนวนของจุดที่มีสถานะ i ซึ่งมีจุดที่มีสถานะ j อยู่ข้างเคียงจำนวน n จุด

$[i]_{j:n,k:m}$

จำนวนของจุดที่มีสถานะ i ซึ่งมีจุดที่มีสถานะ j อยู่ข้างเคียงจำนวน n จุด และมีจุดที่มีสถานะ k อยู่ข้างเคียงจำนวน m จุด

$\langle Z_x \rangle_{\sigma x=i}$

ค่าเฉลี่ยของ Z_x ท่ามกลางจุด x ที่มีสถานะ i

$\langle Z_{e_i} \rangle_{\sigma e=ij}$

ค่าเฉลี่ยของ Z_{e_i} ท่ามกลางคู่ e ที่มีสถานะ ij

$\langle Q_x(i) \rangle_{\sigma x=j}$

ค่าเฉลี่ยของจำนวนจุดที่มีสถานะ i ที่อยู่ข้างเคียงจุด j

$\langle Q_{e_j}(i) \rangle_{\sigma e=jk}$

ค่าเฉลี่ยของจำนวนจุดที่มีสถานะ i ที่อยู่ข้างเคียงจุด e_j ซึ่งเป็นจุดปลายข้างหนึ่งของคู่ jk

$\langle Q_x(i) \rangle_{j:n}$

ค่าเฉลี่ยของจำนวนจุดที่มีสถานะ i ที่อยู่ข้างเคียงจุด x เมื่อมีจุดที่มีสถานะ j อยู่ข้างเคียงจุด x เช่นกัน จำนวน n จุด

$\langle Q_x(i) \rangle_{j:n,k:m}$

ค่าเฉลี่ยของจำนวนจุดที่มีสถานะ i ที่อยู่ข้างเคียงจุด x เมื่อมีจุดที่มีสถานะ j และ k อยู่ข้างเคียงจุด x เช่นกัน จำนวน n และ m จุดตามลำดับ

สัญลักษณ์

ความหมาย

N

จำนวนประชากรทั้งหมด (total population size)

Q_x

จำนวนจุดที่อยู่ข้างเคียงจุด x

Q

จำนวนเฉลี่ยของจุดข้างเคียง (average number of neighbors)

q_i

$[i]/N$ (global density)

q_{ij}

$[ij]/Q[j]$ (local density)

บทที่ 1

Executive Summary

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

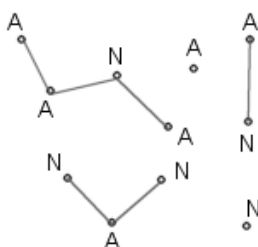
ช่วงก่อนทศวรรษที่ 1970s แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ มักถูกนำเสนอในรูปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (system of ordinary differential equations) ซึ่งมักจะยุ่งยากซับซ้อน จนไม่สามารถหาคำตอบได้ ทฤษฎีเชิงคุณภาพ (qualitative theory) จึงถูกพัฒนาขึ้น เพื่อนำมาใช้ศึกษาพฤติกรรมของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อาทิเช่น การหาจุดสมดุล (equilibria) และความเสถียร (stability) ของจุดสมดุลแทน นอกจากนี้ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในช่วงแรกๆ ยังเป็นสมการแบบค่าเฉลี่ย (mean-field equations) ที่ไม่ให้ความสำคัญกับพื้นที่ แต่สนใจข้อมูลระดับประชากร ภายใต้อสมมติฐานที่ว่า สมาชิกแต่ละตัวสามารถพบปะกันได้อย่างทั่วถึง (well-mixed) รวมกับโมเลกุลของก๊าซที่สามารถแพร่ทั่วไประหว่างภาชนะปิด ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับปฏิกิริยาเคมี จะพบว่า เทอมที่ประชากรมีอันตรกิริยาต่อกัน (interacting population) นั้น สามารถใช้กฎการกระทำของมวล (mass action law) อธิบายได้ ดังเช่นระบบผู้ล่า-เหยื่อ

$$\begin{aligned} \frac{d[N_1]}{dt} &= b_1[N_1] - d_1(N_1N_2) \\ \frac{d[N_2]}{dt} &= b_2[N_1N_2] - d_2[N_2] \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{d[N_1]}{dt} &= b_1[N_1] - d_1[N_1][N_2] \\ \frac{d[N_2]}{dt} &= b_2[N_1][N_2] - d_2[N_2] \end{aligned}$$

เมื่อ $[N_1]$ แทนจำนวนของประชากรเหยื่อ (prey population), $[N_2]$ แทนจำนวนของประชากรผู้ล่า (predator population), $[N_1N_2]$ แทนจำนวนของผู้ล่าและเหยื่อที่มีอันตรกิริยาต่อกัน (predator-prey interaction), b_1, b_2 แทนอัตราการเกิดตามธรรมชาติของเหยื่อ และอัตราการเกิดของผู้ล่าอันเนื่องมาจาก

ความสมบูรณ์ของอาหาร ตามลำดับ และ d_1, d_2 แทนอัตราการตายของเหยื่อจากการถูกล่า และอัตราการตายตามธรรมชาติของผู้ล่า ตามลำดับ

ในความเป็นจริง อันตรกิริยาเชิงนิเวศวิทยา (ecological interaction) อาทิเช่น การล่าเหยื่อ (predation), ภาวะปรสิต (parasitism), การแพร่ระบาด (epidemic transmission), การแก่งแย่งทรัพยากร (resource competition) และการสืบพันธุ์ (reproduction) มักพบในกลุ่มที่มีมาตราส่วนเชิงพื้นที่ (spatial scale) เล็กกว่าประชากรทั้งหมด และข้อมูลเชิงพื้นที่จะยิ่งมีความสำคัญมาก ถ้าสิ่งมีชีวิตเคลื่อนที่ได้จำกัด (limited mobility) ในกรณีเช่นนี้ การอธิบายอันตรกิริยาของประชากรด้วยกฎการกระทำของมวลจึงไม่ค่อยเหมาะสม ในปี ค.ศ. 1969 R. Levins ได้ริเริ่มสร้างแบบจำลองเชิงพื้นที่แบบปริยาย (implicitly spatial model) ซึ่งรู้จักกันดีในชื่อ metapopulation แบบจำลองนี้แม้จะยังไม่มีตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับพื้นที่ปรากฏ แต่ประชากรก็ได้ถูกแบ่งออกเป็นกลุ่มย่อย หลายๆ กลุ่ม โดยมีการย้ายเข้า-ย้ายออกเป็นตัวเชื่อมระหว่างกลุ่ม ต่อมา แบบจำลองเชิงพื้นที่ชัดแจ้ง (explicitly spatial model) ก็ได้ถือกำเนิดขึ้น ซึ่งแบ่งเป็น 2 แบบ คือ แบบพื้นที่ต่อเนื่อง และแบบพื้นที่ไม่ต่อเนื่อง แบบจำลองที่พื้นที่ต่อเนื่องนั้น มักถูกนำเสนอในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations) เช่น reaction diffusion model ซึ่งนำเสนอโดย R. A. Fisher ในปี ค.ศ. 1937 แบบจำลองประเภทนี้ หากคำตอบเชิงวิเคราะห์ได้ยาก จึงมักต้องใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการวิเคราะห์เชิงตัวเลข ซึ่งต้องปรับความต่อเนื่องของพื้นที่ให้เป็นแบบไม่ต่อเนื่อง (discretization) ตามข้อจำกัดของสมรรถนะของคอมพิวเตอร์ ส่วนแบบจำลองที่พื้นที่ไม่ต่อเนื่องนั้น นิยมนำเสนอในรูปของแบบจำลองแลตทิซ (lattice model) ซึ่งประกอบด้วยจุด เส้น และโครงสร้างของประชากรที่เน้นความสัมพันธ์ของสมาชิกแต่ละตัว ดังเช่น



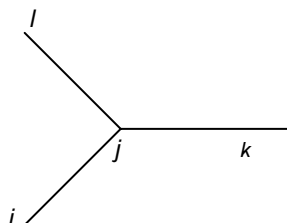
จากภาพ จะเห็นได้ว่า แต่ละจุดอาจถูกสิ่งมีชีวิตชนิด A หรือ N ครอบครอง หรือ ไม่ถูกใครครอบครองเลย ก็ได้ อย่างใดอย่างหนึ่ง โดย $[A]$ คือ จำนวนของจุดเดี่ยว (singleton) ที่ถูก A ครอบครอง ซึ่งมีค่าเท่ากับ 6, $[AN]$ หรือ $[NA]$ คือ จำนวนของกลุ่ม (pair) AN หรือ NA ที่มีความสัมพันธ์ต่อกัน ตามลำดับ ซึ่งมี

ค่าเท่ากันและเท่ากับ 5, [AA] คือ จำนวนของคู่ AA ที่มีความสัมพันธ์ต่อกัน ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2 (ต้องนับทั้ง 2 ทิศทาง), [NAN] คือ จำนวนของสามจุด (triple) NAN ที่มีความสัมพันธ์ต่อกัน ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2 และ [AANA] หรือ [ANAA] คือ จำนวนของสี่จุด (quadruple) AANA หรือ ANAA ที่มีความสัมพันธ์ต่อกัน ตามลำดับ ซึ่งมีค่าเท่ากันและเท่ากับ 1 จากตัวอย่างข้างต้น เราสามารถเรียงสัญลักษณ์ต่างๆ ตามอันดับ ได้ดังนี้ [A] มีอันดับเท่ากับ 1, [AN], [NA], [AA] มีอันดับเท่ากับ 2, [NAN] มีอันดับเท่ากับ 3 และ [AANA], [ANAA] มีอันดับเท่ากับ 4 นอกจากนี้ การครอบครองจุดยังสามารถเปลี่ยนแปลงได้ตามเหตุการณ์ อาทิเช่น การเกิด การตาย และการย้ายเข้า-ย้ายออก เมื่อเวลาแปรเปลี่ยนไป (updated time) ข้อจำกัดของการวิเคราะห์แบบจำลองแลตทิซ ก็คือ จำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องพึ่งพาคอมพิวเตอร์ ซึ่งมักใช้เวลาในการคำนวณ (computational time) นาน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อระบบประกอบด้วยสมาชิกเป็นจำนวนมาก และ/หรือ เมื่อเหตุการณ์มีการปรับเปลี่ยนแบบเฟ้นสุ่ม (stochastic)

การสร้างเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ เพื่อช่วยในการวิเคราะห์แบบจำลอง ทั้งในเชิงทฤษฎีและเชิงตัวเลขจึงเป็นสิ่งจำเป็น การประมาณแบบคู่ (pair approximation) เป็นวิธีการหนึ่งที่ดี สำหรับระบบที่ให้ ความสำคัญกับความสัมพันธ์ทั้งแบบเดี่ยวและแบบคู่ หากระบบที่กำลังสนใจ ให้ความสำคัญกับความสัมพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้น หรือมีความโยงใยกันมากขึ้น เช่น ความสัมพันธ์แบบสาม เราก็สามารถขยายแนวคิดของการประมาณแบบคู่ต่อไปได้ โดยไม่ยุ่งยากนัก วิธีการประมาณลักษณะนี้มีชื่อเรียกว่า moment closure approximation โดย mean-field approximation เป็น moment closure approximation อันดับที่ 0 และ pair approximation เป็น moment closure approximation อันดับที่ 1

โดยทั่วไป สูตรสำหรับการประมาณแบบคู่มักหาได้จากการหาค่าเฉลี่ยเชิงพื้นที่ (space averaged value) แต่สำหรับโครงการวิจัยนี้ ผู้ขอทุนจะสร้างสูตรสำหรับการประมาณแบบคู่จากการหาค่าเฉลี่ยเชิงความน่าจะเป็น (probability averaged value) ซึ่งเป็นเทคนิคที่ผู้ขอทุนได้พัฒนาขึ้น ขณะที่กำลังศึกษาอยู่ในระดับปริญญาเอก ความแตกต่างกันระหว่างวิธีที่ใช้ในวิทยานิพนธ์กับโครงการวิจัยนี้ ก็คือ ในวิทยานิพนธ์ ผู้ขอทุนใช้การแจกแจงเนกนาม ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า แต่ละจุด (site) จะเชื่อมโยงกับจุดใกล้เคียง (nearby neighbor) เป็นจำนวนที่เท่าๆ กัน ซึ่งไม่ค่อยพบในความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งมีชีวิตตามธรรมชาติ ส่วนโครงการวิจัยนี้ ผู้ขอทุนจะใช้การแจกแจงปัวซอง เพื่อเปิดโอกาสให้แต่ละจุดสามารถเชื่อมโยงกับจุดใกล้เคียง ได้คล้ายคลึงกับที่เป็นไปตามธรรมชาติมากขึ้น อาทิเช่น กรณีที่ระบบประกอบไปด้วยสมาชิกที่มีสถานภาพ และความสัมพันธ์ต่อกันในหลายรูปแบบ รูปที่แสดงข้างล่างเป็นตัวอย่างของระบบที่ประกอบด้วยสมาชิกที่มีสถานภาพต่างกัน

4 แบบ (i, j, k, l) โดยทั้ง i, k และ l ต่างมีความสัมพันธ์กับ j ซึ่งความสัมพันธ์นี้ยังไม่มีสูตรในการประมาณแบบคู่ เมื่อคู่ jk ถูกตรึง



จากการสืบค้นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในปีใกล้เคียงปัจจุบันเพิ่มเติมพบว่า มีนักวิจัยหลายกลุ่ม คิดว่าพื้นที่ (space) เป็นปัจจัยที่สำคัญต่อระบบที่พวกเขากำลังสนใจ อาทิเช่น งานวิจัยการศึกษาทางด้านวิทยาการระบาด (epidemiology) [1-4], นิเวศวิทยา (ecology) [5], และวิวัฒนาการ (evolution) [6] จึงได้นำเทคนิคการประมาณแบบคู่มาปรับประยุกต์ใช้

1.2 วัตถุประสงค์

1. เพื่อพัฒนาวิธีการประมาณแบบคู่ โดยการใช้การแจกแจงความน่าจะเป็น อาทิเช่น การแจกแจงอเนกนาม (multinomial distribution) และการแจกแจงปัวซอง (Poisson distribution) มาช่วยในการสร้างสูตร
2. เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ ในการหาเงื่อนไขที่ทำให้สิ่งมีชีวิตที่เห็นแก่ประโยชน์ของสิ่งมีชีวิตอื่นเป็นหลัก (altruism) สามารถอยู่รอดท่ามกลางสิ่งมีชีวิตที่ไม่เห็นแก่ประโยชน์ของสิ่งมีชีวิตอื่นเป็นหลัก (non-altruism)
3. เทียบเคียงผลการวิเคราะห์ทั้งในเชิงทฤษฎีและเชิงตัวเลขของแบบจำลอง ที่ใช้การประมาณแบบสมการค่าเฉลี่ย และแบบการประมาณแบบคู่
4. เทียบเคียงผลการวิเคราะห์ทั้งในเชิงทฤษฎีและเชิงตัวเลขของแบบจำลอง ที่ประมาณด้วยการประมาณแบบคู่ที่แตกต่างกัน อันเนื่องมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ต่างกัน

1.3 ระเบียบวิธีวิจัย

1. ศึกษาเอกสารข้อมูลและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการประมาณแบบคู่ (pair approximation) และพฤติกรรมของสิ่งมีชีวิตแบบ altruism
2. พัฒนาสูตรสำหรับการประมาณแบบคู่ โดยนำแนวคิดเรื่องการแจกแจงบัวซมาช่วย
3. สร้างแบบจำลองแลตทิซ เพื่อใช้ในการศึกษาหาเงื่อนไขที่ทำให้สิ่งมีชีวิตที่เห็นแก่ประโยชน์ของสิ่งมีชีวิตอื่นเป็นหลัก (altruism) อยู่รอดท่ามกลางสิ่งมีชีวิตที่ไม่เห็นแก่ประโยชน์ของสิ่งมีชีวิตอื่นเป็นหลัก (non-altruism)
4. นำการประมาณแบบคู่ที่พัฒนาขึ้น มาประยุกต์ใช้กับแบบจำลองข้างต้น แล้วทำการวิเคราะห์หาเงื่อนไขในการอยู่รอดของ altruism ในเชิงทฤษฎี
5. ตรวจสอบความถูกต้องของเงื่อนไขที่ได้กับการวิเคราะห์แบบจำลองในเชิงตัวเลข (simulation)
6. เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ทั้งในเชิงทฤษฎีและเชิงตัวเลขของแบบจำลอง ที่ใช้การประมาณแบบสมการค่าเฉลี่ย และแบบการประมาณแบบคู่ อันเนื่องมาจากการแจกแจงบัวซ
7. เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ทั้งในเชิงทฤษฎีและเชิงตัวเลขของแบบจำลอง ที่ประมาณด้วยการประมาณแบบคู่ อันเนื่องมาจากการแจกแจงอเนกนาม และการแจกแจงบัวซ

1.4 ผลการทดลอง

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (mathematical model) เป็นเครื่องมือที่ใช้ศึกษาปัญหาในชีวิตจริง ด้วยรูปแบบของสมการและสูตรต่างๆ ที่มีทั้งตัวแปร (variables) ตัวแปรเสริม (parameters) และค่าคงตัว (constant) ในปัจจุบันมีเทคนิคในการสร้างแบบจำลองที่หลากหลาย สำหรับโครงการวิจัยนี้ มุ่งเน้นเทคนิคที่สัมพันธ์เกี่ยวกับแนวคิดเรื่องพื้นที่ โดยแบบจำลองเชิงกำหนด (deterministic model) ที่รู้จักกันดีอยู่แล้วนั้น เป็นที่รู้จักกันในอีกชื่อหนึ่งว่า แบบจำลองที่ใช้สมการแบบค่าเฉลี่ย (mean-field equations หรือ moment closure approximation อันดับที่ 0) เป็นแบบจำลองที่ไม่ให้ความสำคัญกับพื้นที่เลย เหมาะสำหรับใช้อธิบายความสัมพันธ์ในภาพรวมของระบบที่มีขนาดใหญ่และสนใจข้อมูลระดับประชากร อย่างไรก็ตามหากต้องการ

ศึกษาอันตรกิริยาเฉพาะที่ (local interaction) การประมาณแบบคู่ (pair approximation) นับเป็นอีกวิธีการหนึ่งที่น่าสนใจ โดยทั่วไป สูตรสำหรับการประมาณแบบคู่มักคำนวณได้จากการหาค่าเฉลี่ยเชิงพื้นที่ (space averaged value) แต่สำหรับโครงการวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะสร้างสูตรสำหรับการประมาณแบบคู่จากการหาค่าเฉลี่ยเชิงความน่าจะเป็น (probability averaged value) แทน โดยสูตรสำหรับการประมาณแบบคู่ที่พัฒนาขึ้น โดยการใช้การแจกแจงแบบปัวซองมาช่วย มีดังนี้

Theorem 1 กำหนดให้ $Q_x(l)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจงแบบ Poisson(μ) โดยที่ $\mu = \frac{[lj]}{[j]}$ จะได้

$$\langle Q_{e_j}(l) \rangle_{\sigma e=ij} = \begin{cases} \mu & ; l \neq i \\ \mu + 1 & ; l = i \end{cases}$$

Theorem 2 เมื่อ ทั้ง l_1 และ l_2 ไม่ใช่ i กำหนดให้ $Q_x(l_1)$ และ $Q_x(l_2)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจง

แบบ Poisson(μ_1) และ Poisson(μ_2) ตามลำดับ โดยที่ $\mu_n = \frac{[l_n j]}{[j]}$ จะได้ว่า

$$\langle Q_{e_j}(l_1) Q_{e_j}(l_2) \rangle_{\sigma e=ij} = \begin{cases} \mu_1 \mu_2 & ; l_1 \neq l_2 \\ \mu_1 (\mu_1 + 1) & ; l_1 = l_2 \end{cases}$$

สูตรสำหรับการประมาณแบบคู่ที่พัฒนาขึ้นนี้ มีค่าใกล้เคียงกับสูตรที่ใช้การแจกแจงแบบอเนกนามมาช่วย จะต่างกันก็เพียงค่าสัมประสิทธิ์ที่คูณอยู่ข้างหน้าเท่านั้น

เมื่อนำไปประยุกต์ใช้กับ SIS epidemic model ภายใต้สมมติฐานที่ว่า อัตราการติดเชื้อและอัตราการหายป่วยมีค่าแปรผันตามจำนวนของผู้ป่วยที่อยู่รอบตัวเรา ผลการวิเคราะห์พบว่า ยิ่งคนที่อยู่รอบข้างเรามีจำนวนมากขึ้นเท่าไร ยิ่งทำให้ผู้ป่วยทั้งหมดมีจำนวนมากขึ้นเท่านั้น เพราะการติดต่อสัมผัสยอมทำให้การแพร่ระบาดของเชื้อไวรัสเป็นไปได้เร็วกว่าการเก็บตัวอยู่เพียงลำพัง โดยการแพร่ระบาดของเชื้อเป็นแบบกลุ่ม ประกอบด้วยสมาชิกที่อาศัยอยู่ใกล้ๆ กันแบบคลัสเตอร์ ($[I] < [II]$) ซึ่งไม่สามารถอธิบายได้ด้วยสมการค่าเฉลี่ย เพราะ $q_{ij} = q_i$ นอกจากนี้ จุดสมดุลของตัวแปรสถานะแต่ละตัวในแบบจำลองที่ใช้การประมาณแบบคู่ อันเนื่องมาจากการแจกแจงอเนกนามและการแจกแจงปัวซองยังมีค่าใกล้เคียงกัน ยิ่ง Q มีค่ามากขึ้น จุดสมดุลก็จะมีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นเช่นกัน

การวิวัฒนาการของสิ่งมีชีวิตที่มีลักษณะช่วยเหลือเครือญาติ (altruist) เป็นปรากฏการณ์ทางชีววิทยาอีกปรากฏการณ์หนึ่ง ที่ต้องการเครื่องมือทางคณิตศาสตร์อย่างการประมาณแบบคู่เข้าช่วย เพราะมีการโยนความสัมพันธ์ทางเครือญาติ ระบบนี้แม้จะซับซ้อน แต่ก็สามารถนำสูตรที่พัฒนาขึ้นมาใช้ได้ ผลคือ

สำหรับกรณีที่ 1 altruism มีผลกระทบต่ออัตราการเกิด แต่ไม่มีผลกระทบต่ออัตราการตาย เงื่อนไขที่ทำให้สิ่งมีชีวิตแบบ altruism สามารถอยู่รอดท่ามกลางสิ่งมีชีวิตแบบ non-altruism คือ Invasion exponent มีค่าเป็นบวก โดย Invasion exponent เท่ากับ

$$b_1 q_{\phi A} (\mu_{ARA} (\mu_{ARA} + 1) + \mu_{ARA} \mu_{AN}) + \frac{b_1}{2Q} q_{\phi A} \mu_{ARA} \mu_{AN} \\ + \frac{b_1}{2Q} q_{\phi N} (\mu_{NRA} (\mu_{NRA} + 1) + \mu_{NRA} \mu_{NA}) - c q_{\phi A} \mu_{AA} - \frac{c}{2} q_{\phi A} \mu_{AN}$$

เงื่อนไขที่ได้จากสูตรสำหรับการประมาณแบบคู่ที่พัฒนาขึ้นนี้ มีค่าใกล้เคียงกับสูตรที่ใช้การแจกแจงแบบอนเนกนามมาช่วย จะต่างกันก็เพียงค่าสัมประสิทธิ์ที่คูณอยู่ข้างหน้าเท่านั้น

สำหรับกรณีที่ 2 altruism มีผลกระทบต่ออัตราการตาย แต่ไม่มีผลกระทบต่ออัตราการเกิด เงื่อนไขที่ทำให้สิ่งมีชีวิตแบบ altruism สามารถอยู่รอดท่ามกลางสิ่งมีชีวิตแบบ non-altruism คือ Invasion exponent มีค่าเป็นบวก โดย Invasion exponent เท่ากับ

$$d_1 Q q_{A|A}^R - c$$

เงื่อนไขที่ได้จากสูตรสำหรับการประมาณแบบคู่ที่พัฒนาขึ้นนี้ เหมือนกับสูตรที่ใช้การแจกแจงแบบอนเนกนามมาช่วย

1.5 สรุปและวิจารณ์ผลการทดลอง

แบบจำลองที่ใช้สมการแบบค่าเฉลี่ย (moment closure approximation อันดับที่ 0) สามารถอธิบายความสัมพันธ์โดยรวมระดับประชากรได้ดี แต่ไม่สามารถอธิบายอันตรกิริยาเฉพาะที่ (local interaction) ได้ ในขณะที่ แบบจำลองที่ใช้การประมาณแบบคู่ (moment closure approximation อันดับที่ 1) จะสามารถบอกการเปลี่ยนแปลงของความสัมพันธ์ทั้งแบบเดี่ยวและแบบคู่ได้ โดยสูตรการประมาณแบบคู่ที่ได้พัฒนาขึ้น (ใช้การแจกแจงแบบปัวซอง) นั้น มีความคล้ายคลึงกับสูตรที่ใช้การแจกแจงแบบอนเนกนาม ข้อแตกต่างอยู่ที่ค่าสัมประสิทธิ์ที่คูณอยู่ข้างหน้าเทอมต่างๆ นั่นเอง สูตรการประมาณแบบคู่ทั้งที่ใช้การแจกแจงแบบอนเนกนามและการแจกแจงแบบปัวซองจะเหมือนกัน เมื่อ Q มีค่ามากๆ โดยสูตรที่ใช้การแจกแจงแบบอนเนกนามเหมาะที่จะใช้กับแบบจำลองแลตทิซที่มีจำนวนเพื่อนบ้านคงที่ ในขณะที่สูตรที่ใช้การแจกแจงแบบปัวซองเหมาะที่จะใช้

กับระบบที่จำนวนเพื่อนบ้านไม่จำเป็นต้องคงที่ ข้อดีของสูตรการประมาณแบบคู่ที่ได้พัฒนาขึ้น คือ สามารถนำไปใช้กับปรากฏการณ์ใดๆ ที่อัตราการเปลี่ยนแปลงได้รับผลกระทบจากผู้อยู่รอบข้าง อาทิเช่น spatial SIS epidemic model และ evolution of altruism

Spatial SIS epidemic model ตอกย้ำให้เห็นว่า การแพร่ระบาดของเชื้อไวรัสสามารถระงับได้โดยการลดกิจกรรมทางสังคม เพราะยังมีคนอยู่รอบข้างเรามาก ก็ยังมีโอกาสติดโรคมากขึ้นด้วย และการแพร่ระบาดมีลักษณะแบบคลัสเตอร์

สำหรับ evolution of altruism เงื่อนไขที่ทำให้สิ่งมีชีวิตแบบ altruism สามารถอยู่รอดท่ามกลางสิ่งมีชีวิตแบบ non-altruism ของ Hamilton นั้นเป็นเพียงกรณีเฉพาะกรณีหนึ่ง เพราะอยู่ในรูปแบบอย่างง่าย เมื่อเทียบกับเงื่อนไขที่ทำได้

1.6 ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

- พัฒนาสูตร moment closure approximation อันดับสูง เพื่อใช้กับระบบที่สนใจความสัมพันธ์ที่มากกว่าเดี่ยวและคู่
- ในการศึกษาปรากฏการณ์ทางนิเวศวิทยา นอกจากจะคำนึงเรื่องการเกิดและการตายแล้ว การย้ายถิ่นฐาน ไม่ว่าจะย้ายเข้าหรือย้ายออก ก็นับเป็นเหตุการณ์สำคัญที่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของประชากรด้วย
- นำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่นๆ ที่อัตราการเปลี่ยนแปลงได้รับผลกระทบจากสิ่งที่อยู่รอบข้าง

บทที่ 2

Research Content

2.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

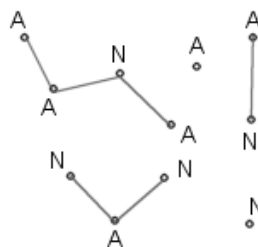
ช่วงก่อนทศวรรษที่ 1970s แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ มักถูกนำเสนอในรูปของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (system of ordinary differential equations) ซึ่งมักจะยุ่งยากซับซ้อน จนไม่สามารถหาคำตอบได้ ทฤษฎีเชิงคุณภาพ (qualitative theory) จึงถูกพัฒนาขึ้น เพื่อนำมาใช้ศึกษาพฤติกรรมของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อาทิเช่น การหาจุดสมดุล (equilibria) และความเสถียร (stability) ของจุดสมดุล แทน นอกจากนี้ ระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในช่วงแรกๆ ยังเป็นสมการแบบค่าเฉลี่ย (mean-field equations) ที่ไม่ให้ความสำคัญกับพื้นที่ แต่สนใจข้อมูลระดับประชากร ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า สมาชิกแต่ละตัวสามารถพบปะกันได้อย่างทั่วถึง (well-mixed) ราวกับโมเลกุลของก๊าซที่สามารถแพร่ทั่วได้ภายในภาชนะปิด ซึ่งเมื่อเปรียบเทียบกับปฏิกิริยาเคมี จะพบว่า เอมที่ประชากรมีอันตรกิริยาต่อกัน (interacting population) นั้น สามารถใช้กฎการกระทำของมวล (mass action law) อธิบายได้ ดังเช่น ระบบผู้ล่า-เหยื่อ

$$\begin{aligned} \frac{d[N_1]}{dt} &= b_1[N_1] - d_1([N_1N_2]) \\ \frac{d[N_2]}{dt} &= b_2[N_1N_2] - d_2[N_2] \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{d[N_1]}{dt} &= b_1[N_1] - d_1([N_1][N_2]) \\ \frac{d[N_2]}{dt} &= b_2[N_1][N_2] - d_2[N_2] \end{aligned}$$

เมื่อ $[N_1]$ แทนจำนวนของประชากรเหยื่อ (prey population), $[N_2]$ แทนจำนวนของประชากรผู้ล่า (predator population), $[N_1N_2]$ แทนจำนวนของผู้ล่าและเหยื่อที่มีอันตรกิริยาต่อกัน (predator-prey interaction), b_1, b_2 แทนอัตราการเกิดตามธรรมชาติของเหยื่อ และอัตราการเกิดของผู้ล่าอันเนื่องมาจาก

ความสมบูรณ์ของอาหาร ตามลำดับ และ d_1, d_2 แทนอัตราการตายของเหยื่อจากการถูกล่า และอัตราการตายตามธรรมชาติของผู้ล่า ตามลำดับ

ในความเป็นจริง อันตรกิริยาเชิงนิเวศวิทยา (ecological interaction) อาทิเช่น การล่าเหยื่อ (predation), ภาวะปรสิต (parasitism), การแพร่ระบาด (epidemic transmission), การแก่งแย่งทรัพยากร (resource competition) และการสืบพันธุ์ (reproduction) มักพบในกลุ่มที่มีมาตราส่วนเชิงพื้นที่ (spatial scale) เล็กกว่าประชากรทั้งหมด และข้อมูลเชิงพื้นที่จะยิ่งมีความสำคัญมาก ถ้าสิ่งมีชีวิตเคลื่อนที่ได้จำกัด (limited mobility) ในกรณีเช่นนี้ การอธิบายอันตรกิริยาของประชากรด้วยกฎการกระทำของมวลจึงไม่ค่อยเหมาะสม ในปี ค.ศ. 1969 R. Levins ได้ริเริ่มสร้างแบบจำลองเชิงพื้นที่แบบปริยาย (implicitly spatial model) ซึ่งรู้จักกันดีในชื่อ metapopulation แบบจำลองนี้แม้จะยังไม่มีตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับพื้นที่ปรากฏ แต่ประชากรก็ได้ถูกแบ่งออกเป็นกลุ่มย่อย หลายๆ กลุ่ม โดยมีการย้ายเข้า-ย้ายออกเป็นตัวเชื่อมระหว่างกลุ่ม ต่อมา แบบจำลองเชิงพื้นที่ชัดแจ้ง (explicitly spatial model) ก็ได้ถือกำเนิดขึ้น ซึ่งแบ่งเป็น 2 แบบ คือ แบบพื้นที่ต่อเนื่อง และแบบพื้นที่ไม่ต่อเนื่อง แบบจำลองที่พื้นที่ต่อเนื่องนั้น มักถูกนำเสนอในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equations) เช่น reaction diffusion model ซึ่งนำเสนอโดย R. A. Fisher ในปี ค.ศ. 1937 แบบจำลองประเภทนี้ หากคำตอบเชิงวิเคราะห์ได้ยาก จึงมักต้องใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการวิเคราะห์เชิงตัวเลข ซึ่งต้องปรับความต่อเนื่องของพื้นที่ให้เป็นแบบไม่ต่อเนื่อง (discretization) ตามข้อจำกัดของสมรรถนะของคอมพิวเตอร์ ส่วนแบบจำลองที่พื้นที่ไม่ต่อเนื่องนั้น นิยมนำเสนอในรูปของแบบจำลองแลตทิซ (lattice model) ซึ่งประกอบด้วยจุด เส้น และโครงสร้างของประชากรที่เน้นความสัมพันธ์ของสมาชิกแต่ละตัว ดังเช่น



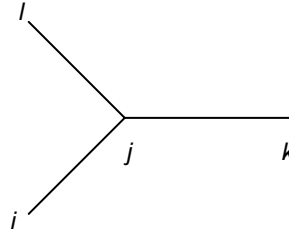
จากภาพ จะเห็นได้ว่า แต่ละจุดอาจถูกสิ่งมีชีวิตชนิด A หรือ N ครอบครอง หรือ ไม่ถูกใครครอบครองเลย ก็ได้ อย่างใดอย่างหนึ่ง โดย $[A]$ คือ จำนวนของจุดเดี่ยว (singleton) ที่ถูก A ครอบครอง ซึ่งมีค่าเท่ากับ 6, $[AN]$ หรือ $[NA]$ คือ จำนวนของคู่ (pair) AN หรือ NA ที่มีความสัมพันธ์ต่อกัน ตามลำดับ ซึ่งมีค่าเท่ากับ

และเท่ากับ 5, [AA] คือ จำนวนของคู่ AA ที่มีความสัมพันธ์ต่อกัน ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2 (ต้องนับทั้ง 2 ทิศทาง), [NAN] คือ จำนวนของสามจุด (triple) NAN ที่มีความสัมพันธ์ต่อกัน ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2 และ [AANA] หรือ [ANAA] คือ จำนวนของสี่จุด (quadruple) AANA หรือ ANAA ที่มีความสัมพันธ์ต่อกัน ตามลำดับ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 จากตัวอย่างข้างต้น เราสามารถเรียงสัญลักษณ์ต่างๆ ตามอันดับ ได้ดังนี้ [A] มีอันดับเท่ากับ 1, [AN], [NA], [AA] มีอันดับเท่ากับ 2, [NAN] มีอันดับเท่ากับ 3 และ [AANA], [ANAA] มีอันดับเท่ากับ 4 นอกจากนี้ การครอบครองจุดยังสามารถเปลี่ยนแปลงได้ตามเหตุการณ์ อาทิเช่น การเกิด การตาย และการย้ายเข้า-ย้ายออก เมื่อเวลาแปรเปลี่ยนไป (updated time) ข้อจำกัดของการวิเคราะห์แบบจำลองแลตทิซ ก็คือ จำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องพึ่งพาคอมพิวเตอร์ ซึ่งมักใช้เวลาในการคำนวณ (computational time) นาน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อระบบประกอบด้วยสมาชิกเป็นจำนวนมาก และ/หรือ เมื่อเหตุการณ์มีการปรับเปลี่ยนแบบเฟ้นสุ่ม (stochastic)

การสร้างเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ เพื่อช่วยในการวิเคราะห์แบบจำลอง ทั้งในเชิงทฤษฎีและเชิงตัวเลขจึงเป็นสิ่งจำเป็น การประมาณแบบคู่ (pair approximation) เป็นวิธีการหนึ่งที่ดี สำหรับระบบที่ให้ ความสำคัญกับความสัมพันธ์ทั้งแบบเดี่ยวและแบบคู่ หากระบบที่กำลังสนใจ ให้ความสำคัญกับความสัมพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้น หรือมีความโยงใยกันมากขึ้น เช่น ความสัมพันธ์แบบสาม เราก็สามารถขยายแนวคิดของการประมาณแบบคู่ต่อไปได้ โดยไม่ยุ่งยากนัก วิธีการประมาณลักษณะนี้มีชื่อเรียกว่า moment closure approximation โดย mean-field approximation เป็น moment closure approximation อันดับที่ 0 และ pair approximation เป็น moment closure approximation อันดับที่ 1

โดยทั่วไป สูตรสำหรับการประมาณแบบคู่มักหาได้จากการหาค่าเฉลี่ยเชิงพื้นที่ (space averaged value) แต่สำหรับโครงการวิจัยนี้ ผู้ขอทุนจะสร้างสูตรสำหรับการประมาณแบบคู่จากการหาค่าเฉลี่ยเชิงความน่าจะเป็น (probability averaged value) ซึ่งเป็นเทคนิคที่ผู้ขอทุนได้พัฒนาขึ้น ขณะที่กำลังศึกษาอยู่ในระดับปริญญาเอก ความแตกต่างกันระหว่างวิธีที่ใช้ในวิทยานิพนธ์กับโครงการวิจัยนี้ ก็คือ ในวิทยานิพนธ์ ผู้ขอทุนใช้การแจกแจงเนกนาม ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า แต่ละจุด (site) จะเชื่อมโยงกับจุดใกล้เคียง (nearby neighbor) เป็นจำนวนที่เท่าๆ กัน ซึ่งไม่ค่อยพบในความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งมีชีวิตตามธรรมชาติ ส่วนโครงการวิจัยนี้ ผู้ขอทุนจะใช้การแจกแจงปัวซอง เพื่อเปิดโอกาสให้แต่ละจุดสามารถเชื่อมโยงกับจุดใกล้เคียง ได้คล้ายคลึงกับที่เป็นไปตามธรรมชาติมากขึ้น อาทิเช่น กรณีที่ระบบประกอบไปด้วยสมาชิกที่มีสถานภาพ และความสัมพันธ์ต่อกันในหลายรูปแบบ รูปที่แสดงข้างล่างเป็นตัวอย่างของระบบที่ประกอบด้วยสมาชิกที่มีสถานภาพต่างกัน

4 แบบ (i, j, k, l) โดยทั้ง i, k และ l ต่างมีความสัมพันธ์กับ j ซึ่งความสัมพันธ์นี้ยังไม่มีสูตรในการประมาณแบบคู่ เมื่อคู่ jk ถูกตรึง



จากการสืบค้นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องในปีใกล้เคียงปัจจุบันเพิ่มเติมพบว่า นักวิจัยหลายกลุ่มคิดว่า พื้นที่ (space) เป็นปัจจัยที่สำคัญต่อระบบที่พวกเขากำลังสนใจ อาทิเช่น งานวิจัยการศึกษาทางด้านวิทยาการระบาด (epidemiology) [1-4] นิเวศวิทยา (ecology) [5] และวิวัฒนาการ (evolution) [6] จึงได้นำเทคนิคการประมาณแบบคู่มาปรับประยุกต์ใช้

2.2 วัตถุประสงค์

1. เพื่อพัฒนาวิธีการประมาณแบบคู่ โดยใช้การแจกแจงความน่าจะเป็น อาทิเช่น การแจกแจงอเนกนาม (multinomial distribution) และการแจกแจงปัวซอง (Poisson distribution) มาช่วยในการสร้างสูตร
2. เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ ในการหาเงื่อนไขที่ทำให้สิ่งมีชีวิตที่เห็นแก่ประโยชน์ของสิ่งมีชีวิตอื่นเป็นหลัก (altruism) สามารถอยู่รอดท่ามกลางสิ่งมีชีวิตที่ไม่เห็นแก่ประโยชน์ของสิ่งมีชีวิตอื่นเป็นหลัก (non-altruism)
3. เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ทั้งในเชิงทฤษฎีและเชิงตัวเลขของแบบจำลอง ที่ใช้การประมาณแบบสมการค่าเฉลี่ย และแบบการประมาณแบบคู่
4. เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ทั้งในเชิงทฤษฎีและเชิงตัวเลขของแบบจำลอง ที่ประมาณด้วยการประมาณแบบคู่ที่แตกต่างกัน อันเนื่องมาจากการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ต่างกัน

2.3 ระเบียบวิธีวิจัย

1. ศึกษาเอกสารข้อมูลและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการประมาณแบบคู่ (pair approximation) และพฤติกรรมของสิ่งมีชีวิตแบบ altruism
2. พัฒนาสูตรสำหรับการประมาณแบบคู่ โดยนำแนวคิดเรื่องการแจกแจงบัสซมาช่วย
3. สร้างแบบจำลองแลตทิซ เพื่อใช้ในการศึกษาหาเงื่อนไขที่ทำให้สิ่งมีชีวิตที่เห็นแก่ประโยชน์ของสิ่งมีชีวิตอื่นเป็นหลัก (altruism) อยู่รอดท่ามกลางสิ่งมีชีวิตที่ไม่เห็นแก่ประโยชน์ของสิ่งมีชีวิตอื่นเป็นหลัก (non-altruism)
4. นำการประมาณแบบคู่ที่พัฒนาขึ้น มาประยุกต์ใช้กับแบบจำลองข้างต้น แล้วทำการวิเคราะห์หาเงื่อนไขในการอยู่รอดของ altruism ในเชิงทฤษฎี
5. ตรวจสอบความถูกต้องของเงื่อนไขที่ได้กับการวิเคราะห์แบบจำลองในเชิงตัวเลข (simulation)
6. เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ทั้งในเชิงทฤษฎีและเชิงตัวเลขของแบบจำลอง ที่ใช้การประมาณแบบสมการค่าเฉลี่ย และแบบการประมาณแบบคู่ อันเนื่องมาจากการแจกแจงบัสซ
7. เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ทั้งในเชิงทฤษฎีและเชิงตัวเลขของแบบจำลอง ที่ประมาณด้วยการประมาณแบบคู่ อันเนื่องมาจากการแจกแจงอเนกนาม และการแจกแจงบัสซ

2.4 ผลการทดลอง

2.4.1 Mean-field Approximation Model

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (mathematical model) เป็นเครื่องมือที่ใช้ศึกษาปัญหาในชีวิตจริง ด้วยรูปแบบของสมการและสูตรต่างๆ ที่มีทั้งตัวแปร (variables) ตัวแปรเสริม (parameters) และค่าคงตัว (constant) แต่เนื่องจากปัญหาในชีวิตจริงนั้นมีความซับซ้อนมาก นักคณิตศาสตร์จึงมีความจำเป็นต้องกำหนดสมมติฐานบางอย่างขึ้น เพื่อให้การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สะดวกขึ้น ตัวอย่างเช่น แบบจำลอง

ทางคณิตศาสตร์ของการกำจัดไนโตรเจนทั้งหมด ที่ปนเปื้อนอยู่ในน้ำเสียด้วยพืช ระบบนี้มีตัวแปรสถานะ (state variables) 3 ตัว ดังต่อไปนี้ ความเข้มข้นของชีวมวลของพืช $T(t)$ ความเข้มข้นของไนโตรเจนทั้งหมดในน้ำเสีย (wastewater) $W(t)$ และความเข้มข้นของไนโตรเจนทั้งหมดในสารละลายดิน (soil solution) $S(t)$ และตัวแปรทั้งสามมีความสัมพันธ์กันดังรูป

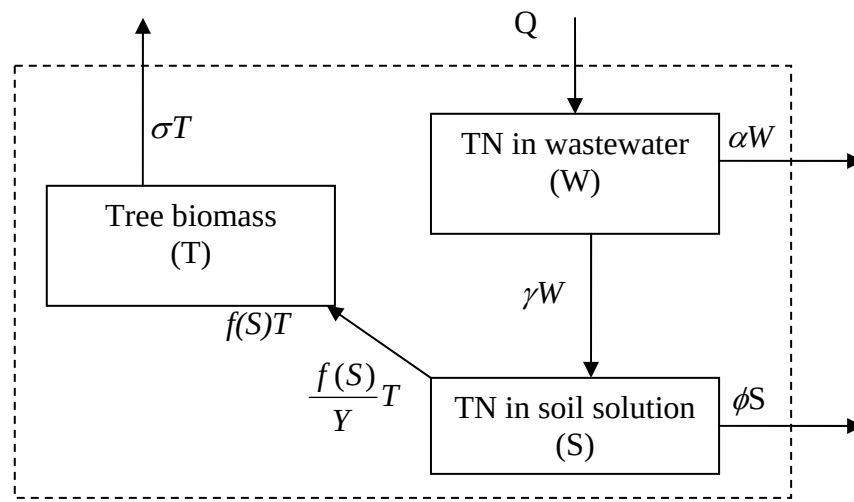


Fig. 1 Flow chart for the transformation of total nitrogen.

ภายใต้ข้อสมมติฐานที่ว่า น้ำเสียและสารละลายดินในบ่อดูดกลืนมีการผสมกลมกลืนกันได้อย่างดี (well mixed) หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ ไม่ว่าจะสุ่มน้ำหรือสารละลายดินในบริเวณใดมาตรวจ ค่าความเข้มข้นของไนโตรเจนทั้งหมดในน้ำ หรือ สารละลายดินก็จะไม่แตกต่างกัน (no spatial gradients of concentrations) ทำให้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จัดอยู่ในกลุ่มแบบจำลองเชิงกำหนด (deterministic model) หรือ สมการแบบค่าเฉลี่ย (mean-field equations) ที่ไม่ให้ความสำคัญกับพื้นที่ แต่สนใจข้อมูลระดับประชากร นั่นคือ

$$\frac{dT}{dt} = f(S)T - \sigma T$$

$$\frac{dW}{dt} = Q - (\gamma + \alpha)W$$

$$\frac{dS}{dt} = \gamma W - \frac{f(S)}{Y} T - \phi S$$

เมื่ออัตราการเจริญเติบโตของพืชถูกค้นพบว่า มีการแปรผันตรงกับความเข้มข้นของไนโตรเจนทั้งหมดที่อยู่ในสารละลายดิน และพืชก็สามารถดูดซับธาตุอาหารได้จำนวนจำกัด จึงกำหนดให้ $f(S) = \frac{\beta S}{k + S}$ ได้นอกจากนี้ การแปลง (conversion) ธาตุอาหารที่พืชบริโภคเข้าไป ให้เป็นชีวมวลของพืชเองนั้น ก็ถูกพบว่าขึ้นอยู่กับความเข้มข้นของไนโตรเจนทั้งหมดที่อยู่ในสารละลายดินด้วย จึงกำหนดให้ $Y(S) = C + DS$ โดย β, k, C, D เป็นค่าคงตัว ได้

Theoretical Results

เมื่อกำหนดให้ $x = \frac{T}{Q}$, $y = \frac{W}{Q}$, $z = \frac{S}{Q}$, และ $E = \frac{k}{Q}$ จะได้ระบบสมการใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\beta xz}{(E + z)} - \sigma x \\ \frac{dy}{dt} &= 1 - (\alpha + \gamma)y \\ \frac{dz}{dt} &= \gamma y - \frac{1}{C + DQz} \frac{\beta xz}{(E + z)} - \phi z\end{aligned}\tag{1}$$

โดยที่ $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, $z(0) > 0$ และบริเวณที่มีความน่าสนใจในเชิงชีววิทยา คือ

$$R_+^3 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

Lemma 1.1 กำหนดให้ $\Omega = \alpha + \gamma$ และ $z^* = \frac{E\sigma}{\beta - \sigma}$ สำหรับ $\beta > \sigma$ จะได้ว่า

(1) มีจุดสมดุล $E_1^* = (x_1^*, y_1^*, z_1^*) = (0, \frac{1}{\Omega}, \frac{\gamma}{\Omega\phi})$ เสมอ

(2) ถ้า $\beta > \sigma$ และ $\gamma > \Omega\phi z^*$ จะมีจุดสมดุลเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งจุด คือ

$$E_2^* = (x_2^*, y_2^*, z_2^*) = \left(\frac{(\gamma - \Omega\phi z^*)(C + DQz^*)}{\Omega\sigma}, \frac{1}{\Omega}, \frac{E\sigma}{\beta - \sigma} \right)$$

Proof

หาจุดสมดุลโดยกำหนดให้

$$\frac{\beta xz}{(E+z)} - \sigma x = 0 \quad (2)$$

$$1 - (\alpha + \gamma)y = 0 \quad (3)$$

$$\gamma y - \frac{1}{C + DQz} \frac{\beta xz}{(E+z)} - \phi z = 0 \quad (4)$$

จากสมการ (2) พบว่า $x = 0$ หรือ $z = z^* = \frac{E\sigma}{\beta - \sigma}$ (มีค่าเป็นบวก เมื่อ $\beta > \sigma$) และจากสมการ (3)

พบว่า $y = \frac{1}{\Omega}$ เมื่อแทน $y = \frac{1}{\Omega}$ และ $x = 0$ ลงในสมการ (4) จะได้ $z = z_1^* = \frac{\gamma}{\Omega\phi}$ และจุดสมดุล คือ

$$E_1^* = (x_1^*, y_1^*, z_1^*) = (0, \frac{1}{\Omega}, \frac{\gamma}{\Omega\phi}).$$

ถ้าแทน $z = z^* = \frac{E\sigma}{\beta - \sigma}$ และ $y = \frac{1}{\Omega}$ ลงในสมการ (4) จะได้ $x = \frac{(\gamma - \Omega\phi z^*)(C + DQz^*)}{\Omega\sigma}$ ดังนั้น

จุดสมดุลอีกหนึ่งจุด คือ

$$E_2^* = (x_2^*, y_2^*, z_2^*) = \left(\frac{(\gamma - \Omega\phi z^*)(C + DQz^*)}{\Omega\sigma}, \frac{1}{\Omega}, \frac{E\sigma}{\beta - \sigma} \right)$$

ซึ่งจะมีความหมายทางชีววิทยา เมื่อ $\gamma > \Omega\phi z^*$

■

Theorem 1.1

(1) จุดสมดุล E_1^* มีคุณสมบัติเป็น locally asymptotically stable เมื่อ $\frac{\beta\gamma}{E\Omega\phi + \gamma} < \sigma$

และ unstable เมื่อ $\frac{\beta\gamma}{E\Omega\phi + \gamma} > \sigma$

(2) จุดสมดุล E_2^* เป็น locally asymptotically stable เมื่อ $\phi + \frac{\beta(\gamma - \Omega\phi z^*)(CE - DQz^{*2})}{\Omega\sigma(C + DQz^*)(E + z^*)^2} > 0$

และ unstable เมื่อ $\phi + \frac{\beta(\gamma - \Omega\phi z^*)(CE - DQz^{*2})}{\Omega\sigma(C + DQz^*)(E + z^*)^2} < 0$

Proof

สำหรับ (1) Jacobian matrix ที่จุดสมดุล $E_1^* = (x_1^*, y_1^*, z_1^*) = (0, \frac{1}{\Omega}, \frac{\gamma}{\Omega\phi})$ คือ

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta\gamma}{\Omega\phi} - \sigma & 0 & 0 \\ E + \frac{\gamma}{\Omega\phi} & -\Omega & 0 \\ -\frac{\frac{\beta\gamma}{\Omega\phi}}{(C + \frac{DQ\gamma}{\Omega\phi})(E + \frac{\gamma}{\Omega\phi})} & \gamma & -\phi \end{bmatrix}$$

ดังนั้น characteristic equation คือ

$$\left(\frac{\beta\gamma}{E\Omega\phi + \gamma} - \sigma - \lambda \right) (-\Omega - \lambda) (-\phi - \lambda) = 0$$

ค่า eigenvalues คือ $\lambda_1 = -\Omega$, $\lambda_2 = -\phi$ และ $\lambda_3 = \frac{\beta\gamma}{E\Omega\phi + \gamma} - \sigma$ จะเห็นว่า λ_1 และ λ_2 มีค่าเป็น

ลบ ดังนั้นจุดสมดุลจะเป็น locally asymptotically stable หรือไม่ ขึ้นอยู่กับ λ_3 ถ้า $\lambda_3 < 0$ นั่นคือ

$\frac{\beta\gamma}{E\Omega\phi + \gamma} < \sigma$ จุดสมดุลจะเป็น locally asymptotically stable ในทางกลับกัน ถ้า $\frac{\beta\gamma}{E\Omega\phi + \gamma} > \sigma$ จะได้

$\lambda_3 > 0$ ดังนั้นจุดสมดุลจะเป็น unstable

สำหรับ (2) Jacobian matrix ที่จุด $E_2^* = (x_2^*, y_2^*, z_2^*) = \left(\frac{(\gamma - \Omega\phi z^*)(C + DQz^*)}{\Omega\sigma}, \frac{1}{\Omega}, \frac{E\sigma}{\beta - \sigma} \right)$

คือ

$$\begin{bmatrix} \frac{\beta z^*}{E+z^*} - \sigma & 0 & \frac{\beta E x^*}{(E+z^*)^2} \\ 0 & -\Omega & 0 \\ -\frac{\beta z^*}{(C+DQz^*)(E+z^*)} & \gamma & -\phi - \frac{\beta x^*(CE-DQ(z^*)^2)}{(C+DQz^*)^2(E+z^*)^2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

ดังนั้น characteristic equation คือ

$$(-\Omega - \lambda) \left[\lambda^2 + \lambda \left(\phi + \frac{\beta x_2^*(CE-DQz^{*2})}{(C+DQz^*)^2(E+z^*)^2} \right) + \frac{\beta^2 E x_2^* z^*}{(C+DQz^*)(E+z^*)^3} \right] = 0$$

ค่า eigenvalues คือ $-\Omega$ และ $\lambda_{1,2}$ ซึ่งเป็นรากของ $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ เมื่อ

$$p = \phi + \frac{\beta x_2^*(CE-DQz^{*2})}{(C+DQz^*)^2(E+z^*)^2} \quad \text{และ} \quad q = \frac{\beta^2 E x_2^* z^*}{(C+DQz^*)(E+z^*)^3} \quad (6)$$

ดังนั้น $\lambda_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ ถ้า $p > 0$ จุดสมดุล E_2^* เป็น locally asymptotically stable ในทาง

กลับกัน ถ้า $p < 0$ จุดสมดุล E_2^* เป็น unstable

■

Theorem 1.2 ระบบจะมี Hopf bifurcation ที่ $\mu = R$ เมื่อ

$$R = \left(\frac{\beta E(\gamma - \phi \Omega z^*) + \phi \sigma \Omega (E+z^*)^2}{\beta Q z^{*2}(\gamma - \phi \Omega z^*) - \phi \sigma \Omega Q z^*(E+z^*)^2} \right)$$

Proof

พิจารณาส่วนจริงของ eigenvalues ของ Jacobian matrix (5) ที่สอดคล้องเงื่อนไข (6)

$$F(\mu) \equiv \phi + \frac{\beta x_2^*(CE-DQz^{*2})}{(C+DQz^*)^2(E+z^*)^2} = \phi + \frac{\beta(\gamma - \Omega \phi z^*)(E - \mu Q z^*)}{\Omega \sigma (E+z^*)^2(1 + \mu Q z^*)}$$

จะเห็นว่า เมื่อไหร่ก็ตามที่มีจุดสมดุล E_2^* ใน (6) $\frac{\beta^2 E x_2^* z^*}{(C+DQz^*)(E+z^*)^3}$ มีค่าเป็นบวกเสมอ พิจารณา

เครื่องหมายของ $F(\mu)$ E_2^* จะ stable ถ้า $\mu < R$ และจะสูญเสียความเสถียรที่ $\mu = R$ เมื่อ eigenvalues

ของ Jacobian matrix (5) มีเฉพาะส่วนจินตภาพ Hopf bifurcation จะเกิด เมื่อ $\left. \frac{dF}{d\mu} \right|_{\mu=R} \neq 0$ ดังนั้น

$$\frac{dF}{d\mu} = -\frac{Q\beta z^*(\gamma - \Omega\phi z^*)}{\Omega\sigma(E + z^*)(1 + \mu Qz^*)^2}$$

$$\left. \frac{dF}{d\mu} \right|_{\mu=R} = -\frac{[\beta Qz^{*2}(\gamma - \Omega\phi z^*) - Q\phi\sigma\Omega z^*(E + z^*)^2]^2}{\beta\sigma Q\Omega z^*(E + z^*)^3(\gamma - \Omega\phi z^*)} \neq 0$$

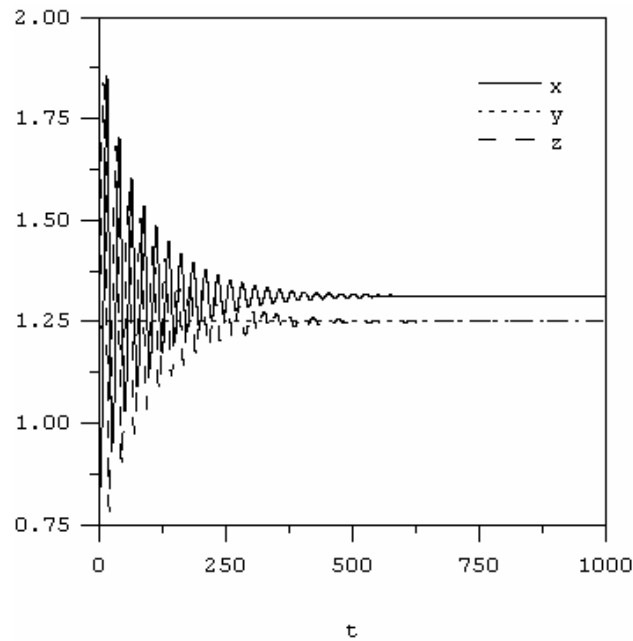
เนื่องจาก $\gamma > \Omega\phi z^*$ ฟังก์ชัน F จะลดลงที่ $\mu = R$ จาก Hopf bifurcation theory [7] จะได้ว่า

1. จุดสมดุล E_2^* จะ unstable ถ้า $\mu > R$
2. จุดสมดุล E_2^* จะ locally asymptotically stable ถ้า $\mu < R$
3. จะมี stable supercritical limit cycle หรือ unstable subcritical limit cycle รอบ E_2^* ซึ่งขึ้นอยู่กับ
กับความเร็วของจุดสมดุลที่ $\mu = R$

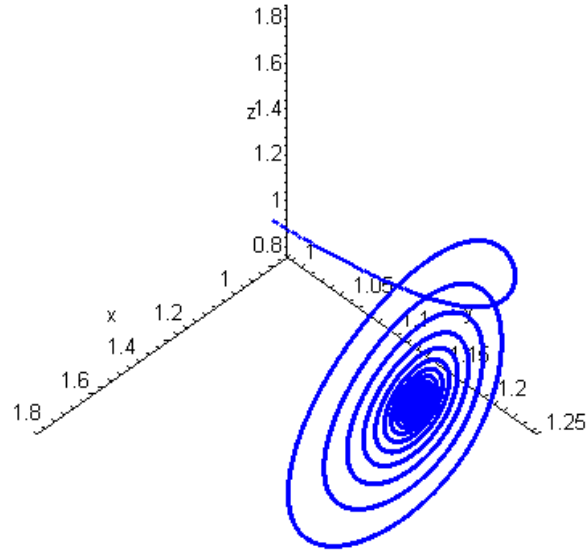
สรุปว่ามี stable limit cycle รอบ E_2^* สำหรับค่าของ μ ที่อยู่ในช่วง $(R, R + \varepsilon)$ สำหรับบางค่า $\varepsilon > 0$

■

Numerical Results

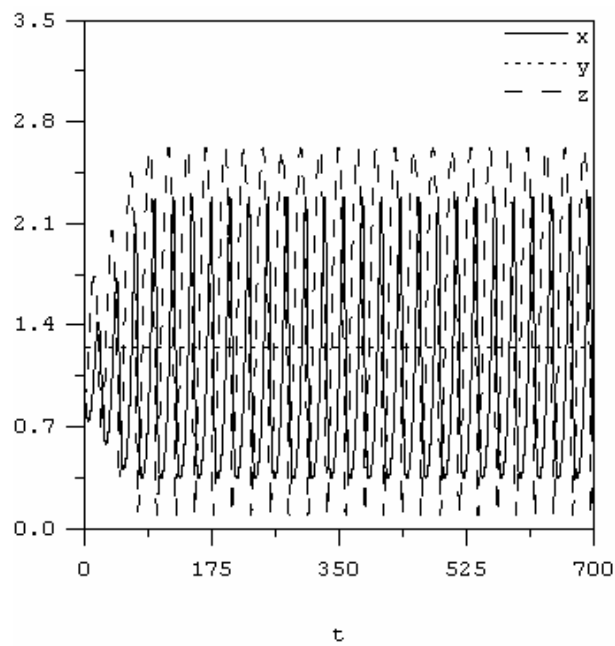


(a)

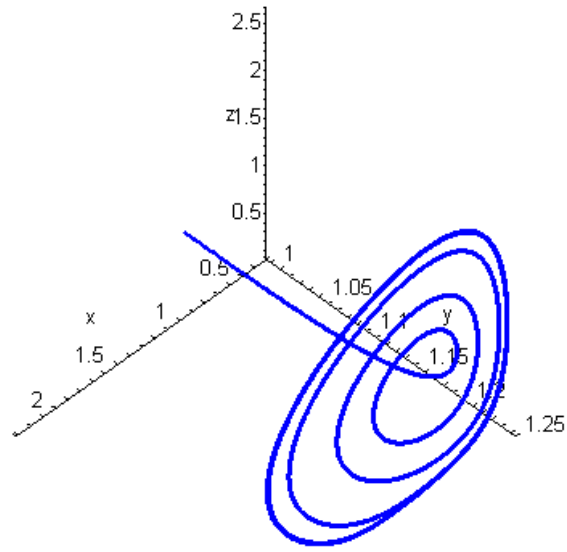


(b)

Fig. 2 The time series (a) and phase space trajectory (b) of the solution to the dimensionless model equations (1) with $\beta = 0.9$, $\sigma = 0.5$, $E = 1$, $Q = 1$, $\Omega = 0.8$, $\gamma = 0.4$, $\phi = 0.1$, $C = 0.5$, and $D = 1$, where all state variables x, y, z tend toward their steady state values at the equilibrium point $(1.3125, 1.25, 1.25)$.



(a)



(b)

Fig. 3 The time series (a) and phase space trajectory (b) of the solution to the dimensionless model equations (1) with $\beta = 0.9$, $\sigma = 0.5$, $E = 1$, $Q = 1$, $\Omega = 0.8$, $\gamma = 0.4$, $\phi = 0.1$, $C = 0.1$, and $D = 1$. The value of D/C is greater than R here, so that trajectory tends toward a stable limit cycle.

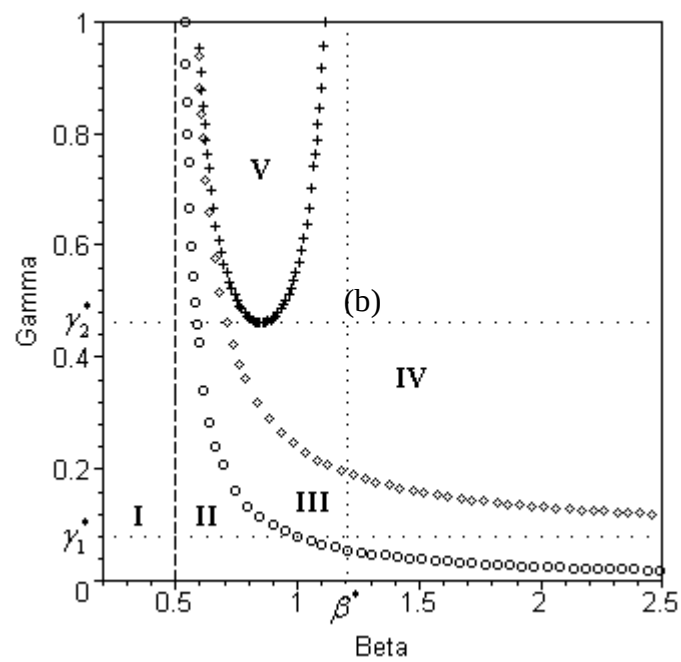


Fig. 4 The (β, γ) parameter space when $\sigma = 0.5$, $E = 1$, $Q = 1$, $\Omega = 0.8$, $\phi = 0.1$,

$C = 0.5$, and $D = 1$. For $z^* = \frac{E\sigma}{\beta - \sigma}$, the symbols for the curves in this figure are as follows

$$(-): \quad \beta = \sigma, \quad (\diamond): \quad \gamma = \Omega\phi z^* + \frac{\phi\Omega\sigma(E + z^*)^2}{\beta z^*},$$

$$(\circ): \quad \gamma = \Omega\phi z^*, \quad (+): \quad \gamma = \Omega\phi z^* + \frac{\phi\Omega\sigma(C + DQz^*)(E + z^*)^2}{\beta(DQz^{*2} - CE)}.$$

แบบจำลองนี้สามารถใช้อธิบายได้ดีกับระบบที่มีขนาดใหญ่ โดยประโยชน์ก็คือ สามารถนำมาใช้อธิบายความสัมพันธ์ในภาพรวมระหว่างความเข้มข้นของชีวมวลของพืช ความเข้มข้นของไนโตรเจนทั้งหมดในน้ำเสีย และความเข้มข้นของไนโตรเจนทั้งหมดในสารละลายดินได้ อย่างไรก็ตาม แบบจำลองนี้ไม่สามารถนำมาใช้ศึกษาอันตรกิริยาเฉพาะที่ (local interaction) ได้ อาทิเช่น การศึกษาว่า ประชากรพืชมีอัตราการปฏิสัมพันธ์ (interaction) ต่อกันอย่างไร มีการแย่งชิงอาหารกันหรือเกื้อกูลกันหรือไม่ หลังจากที่พืชดูดซับธาตุอาหารจากสารละลายดินและแปลงเป็นชีวมวลจนโตเต็มที่แล้ว มีการกระจายพันธุ์หรือไม่ อย่างไร เป็นต้น

กลุ่มนักวิจัยชาวญี่ปุ่น [8,9] มีบทบาทอย่างมากในการพัฒนาแบบจำลองเชิงพื้นที่ (spatial model) และการนำเทคนิคดังกล่าวไปใช้ศึกษาพลศาสตร์ของประชากรพืช (population dynamics of plant) ชนิดหนึ่ง ที่จำลองให้อยู่อาศัยบนโครงสร้างแบบแลตทิซ (lattice structured habitat) ซึ่งประกอบด้วยจุด เส้น และโครงสร้างของประชากรที่แสดงให้เห็นอันตรกิริยาเฉพาะที่ เพื่อดูรูปแบบเชิงพื้นที่ (spatial pattern) ในการกระจายตัวของผืนป่า โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การขยายขนาดของคลัสเตอร์ของพืชแต่ละต้น (size distribution of clusters of individuals) โดยตัวแปรสถานะที่กลุ่มนักวิจัยชาวญี่ปุ่นนิยมใช้จะอยู่ในรูปของความน่าจะเป็นหรือความหนาแน่น ในขณะที่ตัวแปรสถานะที่ David Rand และคณะ นิยมใช้จะอยู่ในรูปของจำนวน [10-14]

อย่างไรก็ตาม สูตรการประมาณแบบคู่ ที่กลุ่มนักวิจัยชาวญี่ปุ่นใช้นั้น ไม่สามารถนำไปใช้ศึกษาปรากฏการณ์ทางชีววิทยา ที่สิ่งมีชีวิตบางชนิดยอมช่วยเหลือเครือญาติ โดยไม่คำนึงถึงประโยชน์ของตัวเองได้ เพราะมีการโยงความสัมพันธ์ทางเครือญาติด้วย ดังนั้น ผู้วิจัยจึงได้ทำการพัฒนาวิธีการประมาณแบบคู่แบบใหม่ขึ้น โดยนำแนวคิดเรื่องการแจกแจงความน่าจะเป็นมาช่วย

2.4.2 Formulation of Pair Approximation

แบบจำลองที่พื้นที่ไม่ต่อเนื่องมักถูกนำเสนอในรูปแบบของแบบจำลองแลตทิซ (lattice model) ซึ่งประกอบด้วยจุด เส้น และโครงสร้างของประชากรที่เน้นความสัมพันธ์ของสมาชิกแต่ละตัว โดยสัญลักษณ์ที่ควรรู้จัก มีดังนี้

x, e	หมายถึง จุด (site) และคู่ (pair) ตามลำดับ
$\sigma x, \sigma e$	หมายถึง สถานะของจุด x และสถานะของคู่ e ตามลำดับ
$\sigma x = i$	หมายถึง สถานะของจุด x คือ i
$\sigma e = ij$	หมายถึง สถานะของคู่ e คือ ij โดย e_i คือ จุดปลายของคู่ e ที่มีสถานะ คือ และ e_j คือ จุดปลายอีกข้างหนึ่งของคู่ e ที่มีสถานะ คือ j
$[i], [ij], [ijk]$	หมายถึง จำนวนของจุดที่มีสถานะ คือ i จำนวนของคู่ที่มีสถานะ คือ ij และจำนวนของสามจุด (triple) ที่มีสถานะ คือ ijk ตามลำดับ
$Q_x(i), Q_{e_j}(i)$	หมายถึง จำนวนจุดที่อยู่ข้างเคียงจุด x และจุด e_j ซึ่งมีสถานะ คือ i ตามลำดับ
$[i]_{j:n}$	หมายถึง จำนวนของจุดที่มีสถานะ i ซึ่งมีจุดที่มีสถานะ j อยู่ข้างเคียงจำนวน n จุด
$[i]_{j:n,k:m}$	หมายถึง จำนวนของจุดที่มีสถานะ i ซึ่งมีจุดที่มีสถานะ j อยู่ข้างเคียงจำนวน n จุด และมีจุดที่มีสถานะ k อยู่ข้างเคียงจำนวน m จุด
$\langle Z_x \rangle_{\sigma x=i}$	หมายถึง ค่าเฉลี่ยของ Z_x ท่ามกลางจุด x ที่มีสถานะ i
$\langle Z_{e_i} \rangle_{\sigma e=ij}$	หมายถึง ค่าเฉลี่ยของ Z_{e_i} ท่ามกลางคู่ e ที่มีสถานะ ij
$\langle Q_x(i) \rangle_{\sigma x=j}$	หมายถึง ค่าเฉลี่ยของจำนวนจุดที่มีสถานะ i ที่อยู่ข้างเคียงจุด j
$\langle Q_{e_j}(i) \rangle_{\sigma e=jk}$	หมายถึง ค่าเฉลี่ยของจำนวนจุดที่มีสถานะ i ที่อยู่ข้างเคียงจุด e_j ซึ่งเป็นจุดปลายข้างหนึ่งของคู่ jk

$\langle Q_x(i) \rangle_{j:n}$	หมายถึง ค่าเฉลี่ยของจำนวนจุดที่มีสถานะ i ที่อยู่ข้างเคียงจุด x เมื่อมีจุดที่มีสถานะ j อยู่ข้างเคียงจุด x เช่นกัน จำนวน n จุด
$\langle Q_x(i) \rangle_{j:n,k:m}$	หมายถึง ค่าเฉลี่ยของจำนวนจุดที่มีสถานะ i ที่อยู่ข้างเคียงจุด x เมื่อมีจุดที่มีสถานะ j และ k อยู่ข้างเคียงจุด x เช่นกัน จำนวน n และ m จุดตามลำดับ
N	หมายถึง จำนวนประชากรทั้งหมด (total population size)
Q_x	หมายถึง จำนวนจุดที่อยู่ข้างเคียงจุด x
Q	หมายถึง จำนวนเฉลี่ยของจุดข้างเคียง (average number of neighbors)
q_i	หมายถึง $[i]/N$ (global density)
q_{ij}	หมายถึง $[ij]/Q[j]$ (local density)

สมมติฐาน ทฤษฎี และสูตร สำหรับการประมาณแบบคู่ โดยใช้การแจกแจงแบบปัวซองมาช่วย มีดังนี้

Assumption 2.1 สมมติให้ $Q_x(i)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจงแบบปัวซอง ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\lambda = \frac{[ij]}{[j]}$

หรือ Poisson(λ) ดังนั้น $\Pr(Q_x(i) = m | \sigma x = j) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!}$ สำหรับ $m = 0, 1, 2, \dots$

□

Lemma 2.1 กำหนดให้ $l \neq i$ และ $Q_x(i)$ และ $Q_x(l)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจงแบบ Poisson(λ)

และ Poisson(μ) ตามลำดับ โดยที่ $\lambda = \frac{[ij]}{[j]}$ และ $\mu = \frac{[lj]}{[j]}$ จะได้ว่า

$$\Pr(Q_x(i) = n | Q_x(l) = m, \sigma x = j) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \text{ สำหรับ } n = 0, 1, 2, \dots$$

Proof

$$\Pr(Q_x(i) = n | Q_x(l) = m, \sigma x = j)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Pr(Q_x(i) = n, Q_x(l) = m | \sigma x = j)}{\Pr(Q_x(l) = m | \sigma x = j)} \\
&= \frac{\Pr(Q_x(i) = n | \sigma x = j) \Pr(Q_x(l) = m | \sigma x = j)}{\Pr(Q_x(l) = m | \sigma x = j)} \\
&= \Pr(Q_x(i) = n | \sigma x = j) \\
&= \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \quad (\text{จาก Assumption 2.1})
\end{aligned}$$

■

Lemma 2.2 กำหนดให้ $Q_x(i)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจงแบบ Poisson(λ) โดยที่ $\lambda = \frac{[ij]}{[j]}$ จะได้ว่า

$$[l]_{i:m} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!} [l]$$

Proof

$$\begin{aligned}
[l]_{i:m} &= \text{count of } \{x : Q_x(i) = m, \sigma x = l\} \\
&= \Pr(Q_x(i) = m | \sigma x = l) [l] \\
&= \frac{e^{-\lambda} \lambda^m}{m!} [l] \quad (\text{จาก Assumption 2.1})
\end{aligned}$$

■

Lemma 2.3 กำหนดให้ $Q_x(i_1), Q_x(i_2), \dots, Q_x(i_k)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจงแบบ Poisson(λ_1),

Poisson(λ_2), ..., Poisson(λ_k) ตามลำดับ โดยที่ $\lambda_n = \frac{[i_n j]}{[j]}$ เมื่อ $n = 1, \dots, k$ จะได้ว่า

$$[l]_{i_1:m_1, \dots, i_k:m_k} = \frac{\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \dots \lambda_k^{m_k}}{m_1! m_2! \dots m_k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)} [l]$$

Proof

$$\begin{aligned}
&[l]_{i_1:m_1, \dots, i_k:m_k} \\
&= \text{count of } \{x : Q_x(i_1) = m_1, Q_x(i_2) = m_2, \dots, Q_x(i_k) = m_k, \sigma x = l\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Pr(Q_x(i_1) = m_1, Q_x(i_2) = m_2, \dots, Q_x(i_k) = m_k | \sigma x = l) [l] \\
&= \Pr(Q_x(i_1) = m_1 | \sigma x = j) \Pr(Q_x(i_2) = m_2 | \sigma x = j) \dots \Pr(Q_x(i_k) = m_k | \sigma x = l) [l] \\
&= \frac{\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} \dots \lambda_k^{m_k}}{m_1! m_2! \dots m_k!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)} [l] \quad (\text{จาก Assumption 2.1})
\end{aligned}$$

■

Assumption 2.2 สำหรับทุกค่าของ k จะได้ว่า $Q_x(k)$ และ $Q_y(k)$ เมื่อ $x \neq y$ จะอิสระต่อกัน (independent) เพราะไม่มีการเชื่อมโยงแบบสามเหลี่ยม (no triangle connection) และจุดสองจุดใดๆ จะไม่เชื่อมโยงกันมากกว่า 1 เส้น (no multiple connection)

□

Assumption 2.3 สำหรับ $\sigma e = ij$ จะได้ว่า $\Pr(Q_{e_i}(k) = q) = \Pr(Q_x(k) = q | Q_x(j) \geq 1)$

□

Assumption 2.4 เมื่อระบบมีขนาด N ซึ่งใหญ่มาก ($N \rightarrow \infty$) เราสามารถประมาณค่าเฉลี่ย $\langle Z_x \rangle_{\sigma x = i}$ และ $\langle Z_{e_i} \rangle_{\sigma e = ij}$ ได้ด้วยค่าคาดหวังทางสถิติ $E_{P_1}(Z_x)$ และ $E_{P_2}(Z_{e_i})$ ตามลำดับ

□

Lemma 2.4 กำหนดให้ $Q_x(i)$ และ $Q_x(l)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจงแบบ Poisson(λ) และ Poisson(μ) ตามลำดับ โดยที่ $\lambda = \frac{[ij]}{[j]}$ และ $\mu = \frac{[lj]}{[j]}$ จะได้ว่า

$$\Pr(Q_{e_j}(l) = m | \sigma e = ij) = \begin{cases} \frac{e^{-\mu} \mu^m}{m!} & ; l \neq i \\ \frac{e^{-\mu} \mu^{m-1}}{(m-1)!} & ; l = i \end{cases}$$

Proof

$$\Pr(Q_{e_j}(l) = m | \sigma e = ij) = \frac{\sum_{\sigma x = j; Q_x(l) = m} Q_x(i)}{\sum_{\sigma x = j} Q_x(i)} = \frac{[j]_{l:m} \langle Q_x(i) \rangle_{l:m}}{[j] \langle Q_x(i) \rangle_{\sigma x = j}}$$

เนื่องจาก $Q_x(i)$ และ $Q_x(l)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจงแบบ Poisson(λ) และ Poisson(μ)

ตามลำดับ

ถ้า $l \neq i$ แล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Pr(Q_{e_j}(l) = m | \sigma e = ij) &= \frac{[j]_{l:m} \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(Q_x(i) = k | Q_x(l) = m, \sigma x = j)}{[j] \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(Q_x(i) = k | \sigma x = j)} && \text{(จาก Assumption 2.4)} \\ &= \frac{[j]_{l:m} \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(Q_x(i) = k | \sigma x = j)}{[j] \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(Q_x(i) = k | \sigma x = j)} && \text{(จาก Lemma 2.1)} \\ &= \frac{[j]_{l:m}}{[j]} = \frac{e^{-\mu} \mu^m}{m!} && \text{(จาก Lemma 2.2)} \end{aligned}$$

ถ้า $l = i$ แล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \Pr(Q_{e_j}(l) = m | \sigma e = ij) &= \frac{[j]_{l:m}}{[j]} \frac{m}{\sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(Q_x(l) = k | \sigma x = j)} && \text{(จาก Assumption 2.4)} \\ &= \frac{e^{-\mu} \mu^{m-1}}{(m-1)!} && \text{(จาก Lemma 2.2)} \end{aligned}$$

■

Lemma 2.5 กำหนดให้ $Q_x(l_1)$ และ $Q_x(l_2)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจงแบบ Poisson(μ_1) และ

Poisson(μ_2) ตามลำดับ โดยที่ $\mu_k = \frac{[l_k j]}{[j]}$ จะได้ว่า $\Pr(Q_{e_j}(l_1) = m, Q_{e_j}(l_2) = n | \sigma e = ij)$ มีค่า

เท่ากับค่าใดค่าหนึ่ง ดังต่อไปนี้

1. 0 เมื่อ $l_1 = l_2$ แต่ $m \neq n$
2. $\Pr(Q_{e_j}(l_1) = m | \sigma e = ij)$ เมื่อ $l_1 = l_2$ และ $m = n$
3. $\frac{e^{-(\mu_1 + \mu_2)} \mu_1^{m-1} \mu_2^n}{(m-1)!n!}$ เมื่อ $l_1 \neq l_2$ และ $l_1 = i$ (พิจารณาเช่นเดียวกัน สำหรับกรณีที่ $l_2 = i$)
4. $\frac{e^{-(\mu_1 + \mu_2)} \mu_1^m \mu_2^n}{m!n!}$ เมื่อ $l_1 \neq l_2$ และทั้ง l_1 และ l_2 ไม่ใช่ i

Proof

ข้อ 1 และข้อ 2 เป็นไปตามทฤษฎีความน่าจะเป็น

ในกรณีที่ $l_1 \neq l_2$ เนื่องจาก $Q_x(l_1)$ และ $Q_x(l_2)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจงแบบ Poisson(μ_1) และ Poisson(μ_2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & \Pr(Q_{e_j}(l_1) = m, Q_{e_j}(l_2) = n | \sigma e = ij) \\
 &= \Pr(Q_{e_j}(l_1) = m | \sigma e = ij) \Pr(Q_{e_j}(l_2) = n | \sigma e = ij) \\
 & \text{ถ้า } l_1 = i \text{ (หรือ } l_2 = i \text{) แล้ว จะได้ว่า} \\
 & \Pr(Q_{e_j}(l_1) = m, Q_{e_j}(l_2) = n | \sigma e = ij) \\
 &= \frac{e^{-(\mu_1 + \mu_2)} \mu_1^{m-1} \mu_2^n}{(m-1)!n!} \text{ (หรือ } \frac{e^{-(\mu_1 + \mu_2)} \mu_1^m \mu_2^{n-1}}{m!(n-1)!} \text{)} \quad (\text{จาก Lemma 2.4})
 \end{aligned}$$

แต่ถ้า $l_1 \neq l_2$ และทั้ง l_1 และ l_2 ไม่ใช่ i แล้ว จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & \Pr(Q_{e_j}(l_1) = m, Q_{e_j}(l_2) = n | \sigma e = ij) \\
 &= \frac{e^{-(\mu_1 + \mu_2)} \mu_1^m \mu_2^n}{m!n!} \quad (\text{จาก Lemma 2.4})
 \end{aligned}$$

■

Lemma 2.6 เมื่อ $l_1, \dots, l_k$ ต่างกัน และ $Q_x(l_1), \dots, Q_x(l_k)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจงแบบ

Poisson(μ_1), ..., Poisson(μ_k) ตามลำดับ โดยที่ $\mu_n = \frac{[l_n j]}{[j]}$ เมื่อ $n = 1, \dots, k$ จะได้ว่า

$\Pr(Q_{e_j}(l_1) = m_1, \dots, Q_{e_j}(l_k) = m_k | \sigma e = ij)$ มีค่าเท่ากับค่าใดค่าหนึ่ง ดังต่อไปนี้

$$1. \frac{e^{-(\mu_1 + \dots + \mu_k)} \mu_1^{m_1} \dots \mu_k^{m_k}}{m_1! \dots m_k!} \quad \text{เมื่อ } l_1, \dots, l_k \text{ ไม่ใช่ } i$$

$$2. \frac{e^{-(\mu_1 + \dots + \mu_k)} \mu_1^{m_1} \dots \mu_r^{m_r-1} \dots \mu_k^{m_k}}{m_1! \dots (m_r - 1)! \dots m_k!} \quad \text{เมื่อ } l_r = i$$

Proof

โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

■

Theorem 2.1 กำหนดให้ $Q_x(l)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจงแบบ Poisson(μ) โดยที่ $\mu = \frac{[lj]}{[j]}$ จะได้

$$\langle Q_{e_j}(l) \rangle_{\sigma e = ij} = \begin{cases} \mu & ; l \neq i \\ \mu + 1 & ; l = i \end{cases}$$

Proof

$$\langle Q_{e_j}(l) \rangle_{\sigma e = ij} = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr(Q_{e_j}(l) = k | \sigma e = ij) \quad (\text{จาก Assumption 2.4})$$

เนื่องจาก $Q_x(l)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจงแบบ Poisson(μ)

ถ้า $l \neq i$ แล้ว จะได้ว่า

$$\langle Q_{e_j}(l) \rangle_{\sigma e = ij} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!} \quad (\text{จาก Lemma 2.4})$$

$$= \mu \quad (\text{ใช้ Taylor series expansion})$$

ถ้า $l_1 = i$ แล้ว จะได้ว่า

$$\langle Q_{e_j}(l) \rangle_{\sigma e = ij} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\mu} \mu^{k-1}}{(k-1)!} \quad (\text{จาก Lemma 2.4})$$

$$= e^{-\mu} (\mu e^\mu + e^\mu) \quad \left(\text{จาก } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!} \mu^{k-1} = \mu e^\mu + e^\mu \right)$$

■

Theorem 2.2 เมื่อ ทั้ง l_1 และ l_2 ไม่ใช่ i กำหนดให้ $Q_x(l_1)$ และ $Q_x(l_2)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจง

แบบ Poisson(μ_1) และ Poisson(μ_2) ตามลำดับ โดยที่ $\mu_n = \frac{[l_n j]}{[j]}$ จะได้ว่า

$$\langle Q_{e_j}(l_1) Q_{e_j}(l_2) \rangle_{\sigma e = ij} = \begin{cases} \mu_1 \mu_2 & ; l_1 \neq l_2 \\ \mu_1 (\mu_1 + 1) & ; l_1 = l_2 \end{cases}$$

Proof

$$\begin{aligned} & \langle Q_{e_j}(l_1) Q_{e_j}(l_2) \rangle_{\sigma e = ij} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mn \Pr(Q_{e_j}(l_1) = m, Q_{e_j}(l_2) = n | \sigma e = ij) \end{aligned} \quad (\text{จาก Assumption 2.4})$$

เนื่องจาก $Q_x(l_1)$ และ $Q_x(l_2)$ เมื่อ $\sigma x = j$ มีการแจกแจงแบบ Poisson(μ_1) และ

Poisson(μ_2) ตามลำดับ

ถ้า $l_1 \neq l_2$

$$\begin{aligned} & \langle Q_{e_j}(l_1) Q_{e_j}(l_2) \rangle_{\sigma e = ij} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m n e^{-(\mu_1 + \mu_2)} \mu_1^m \mu_2^n}{m! n!} \end{aligned} \quad (\text{จาก Lemma 2.5})$$

$$= \mu_1 \mu_2 \quad (\text{ใช้ Taylor series expansion})$$

ถ้า $l_1 = l_2$

$$\begin{aligned} & \langle Q_{e_j}(l_1) Q_{e_j}(l_2) \rangle_{\sigma e = ij} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \Pr(Q_{e_j}(l_1) = m | \sigma e = ij) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 e^{-\mu_1} \mu_1^m}{m!} \end{aligned} \quad (\text{จาก Lemma 2.2})$$

$$= e^{-\mu_1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m-1)!} \mu_1^m$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\mu_1} (\mu_1 e^{\mu_1} + \mu_1^2 e^{\mu_1}) & (\text{จาก } \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{(m-1)!} \mu_1^m = \mu_1 e^{\mu} + \mu_1^2 e^{\mu}) \\
&= \mu_1 (\mu_1 + 1)
\end{aligned}$$

■

2.4.3 Spatial SIS Model

The simple SIS epidemic model เป็นแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่รู้จักกันดีและประกอบด้วยตัวแปรสถานะเพียง 2 ตัว คือ S หรือ $[S]$ (susceptible individual) และ I หรือ $[I]$ (infective individual) ซึ่งเป็นความสัมพันธ์แบบเดียว โดยอัตราการติดเชื้อ (infection rate) และอัตราการหายป่วย (recovery rate) เป็นค่าคงตัว ซึ่งใช้สัญลักษณ์ β และ δ ตามลำดับ เนื่องจากการแพร่ระบาดจากคนสู่คน (human-to-human transmission) อย่างเช่น Swine Flu อาจเกิดจากการสัมผัสเชื้อโดยตรงและ/หรือการรับเชื้อที่กระจายอยู่ในอากาศ [15] ประกอบกับคำแนะนำของแพทย์ที่ให้ผู้ป่วยพักผ่อนอยู่ที่บ้าน ไม่ต้องมาเรียนหรือทำงาน เพื่อสุขภาพของผู้ป่วยเองและผู้อื่นที่อยู่รอบข้าง ผู้วิจัยจึงตั้งสมมติฐานว่า อัตราการติดเชื้อและอัตราการหายป่วยมีค่าแปรผันตามจำนวนของผู้ป่วยที่อยู่รอบตัวเรา ดังนั้น

$$\beta = b_0 + b_1 Q_{e_s}(I) \text{ และ } \delta = d_0 - d_1 Q_x(I)$$

โดย b_0, b_1, d_0, d_1 เป็นค่าคงตัว และแบบจำลองที่เหมาะสมในการอธิบายสถานการณ์นี้ควรนำการประมาณแบบคู่มาประยุกต์ใช้ด้วย เพราะมีการกล่าวถึงความสัมพันธ์กับผู้อื่นที่อยู่รอบข้าง โดย spatial SIS model จะมีตัวแปรสถานะเพิ่มขึ้นอีก 3 ตัว คือ $[SI]$ $[SS]$ และ $[II]$ ซึ่งล้วนเป็นความสัมพันธ์แบบคู่

การวิเคราะห์ทั้งในเชิงทฤษฎีและเชิงตัวเลขของ SIS epidemic model ที่ใช้การประมาณแบบสมการค่าเฉลี่ย และแบบการประมาณแบบคู่ ภายใต้สมมติฐานที่ว่า $Q_x \equiv Q$ และ $[S] + [I] = N$ มีดังต่อไปนี้

Theoretical Results

สมการความสัมพันธ์สามารถหาได้จากสูตรการประมาณแบบคู่ อันเนื่องมาจากการแจกแจงอเนกนามและการแจกแจงปัวซอง ดังแสดงใน Appendix B.1

Mean-field Approximation

เมื่อกำหนดให้ q_{ij} มีค่าเท่ากับ q_i สมการความสัมพันธ์ (Appendix B.1 version 1) จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการแบบค่าเฉลี่ยได้ดังนี้

$$\frac{d[I]}{dt} = -b_1 Q(Q-1)[I]^3 + (b_1 Q^2 - b_0 Q - 2b_1 Q + d_1 Q)[I]^2 + (b_0 Q + b_1 Q - d_0)[I]$$

กรณีที่ 1 $b_1 = 0$ จุดสมดุลคือ

$$[I]_{e_{1,2}}^M = 0, \frac{N(b_0 Q - d_0)}{Q(b_0 - d_1)}$$

กรณีที่ 2 $b_1 \neq 0$ จุดสมดุลคือ

$$[I]_{e_{1,2}}^M = 0, \frac{NL \pm N\sqrt{L^2 + 4b_1 Q(Q-1)(b_0 Q + b_1 Q - d_0)}}{2b_1 Q(Q-1)}$$

เมื่อ $L = -b_0 Q + b_1 Q(Q-2) + d_1 Q$

Pair Approximation

จุดสมดุลของสมการความสัมพันธ์ใน Appendix B.1 version 1 หาได้ดังนี้

กรณีที่ 1 $b_1 = 0$ จุดสมดุลคือ

$$[S]_e^P = \frac{d_0 N(Q-1)}{b_0 Q(Q-1) - d_0} - \frac{(b_0 Q - d_0)(Q-1)N}{(b_0 Q(Q-1) - d_0)b_0} d_1 + O(d_1^2)$$

$$[I]_e^P = \frac{NQ(b_0(Q-1) - d_0)}{b_0 Q(Q-1) - d_0} + \frac{(b_0 Q - d_0)(Q-1)N}{(b_0 Q(Q-1) - d_0)b_0} d_1 + O(d_1^2)$$

$$[SI]_e^P = \frac{d_0 NQ(b_0(Q-1) - d_0)}{(b_0 Q(Q-1) - d_0)b_0} - \frac{(b_0 Q(q-1) - d_0(2q-1))(b_0 Q - d_0)N}{(b_0 Q(Q-1) - d_0)b_0^2} d_1 + O(d_1^2)$$

$$[SS]_e^P = \frac{d_0^2 N Q}{(b_0 Q(Q-1) - d_0) b_0} - \frac{(2Q-1)(b_0 Q - d_0) d_0 N}{(b_0 Q(Q-1) - d_0) b_0^2} d_1 + O(d_1^2)$$

$$[II]_e^P = \frac{N Q (b_0 Q - d_0) (b_0 (Q-1) - d_0)}{(b_0 Q(Q-1) - d_0) b_0} + \frac{(2b_0 Q(Q-1) - d_0 (2Q-1)) (b_0 Q - d_0) N}{(b_0 Q(Q-1) - d_0) b_0^2} d_1 + O(d_1^2)$$

กรณีที่ 2 $b_1 \neq 0$ ไม่สามารถหาจุดสมดุลในรูป explicit form ได้

สำหรับ $b_0 = 0.3, d_0 = 0.2, Q = 4, N = 100$ จะได้ $[I]_e^M \approx 88$, $[I]_e^P \approx 121$, $[II]_e^P \approx 293$

จะเห็นว่า จุดสมดุลของแบบจำลองที่ใช้การประมาณแบบสมการค่าเฉลี่ย และแบบการประมาณแบบคู่มี่ค่าไม่เท่ากัน และ $[I] < [II]$ แสดงว่า ผู้ป่วยจะเกาะกลุ่มอยู่ใกล้ๆ กันแบบคลัสเตอร์

Numerical Results

กราฟของสมการความสัมพันธ์ใน Appendix B.1 version 1

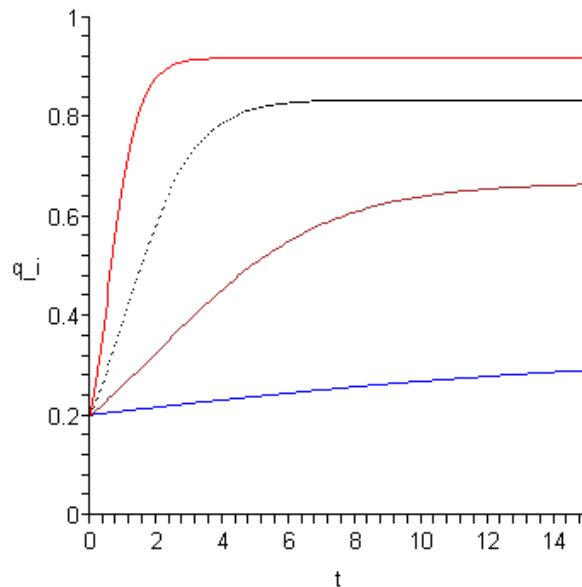


Fig. 5 The time series solution curves of the density of infected individuals q_i . Parameters:

$b_0 = 0.3, b_1 = 0, d_0 = 0.2, d_1 = 0$ and $Q = 8, 4, 2, 1$ (from top to bottom respectively).

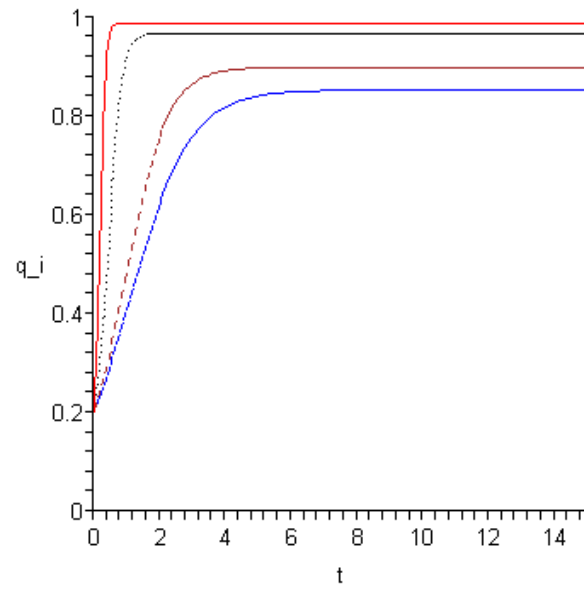


Fig. 6 The time series solution curves of the density of infected individuals q_i . Parameters: $b_0 = 0.3, d_0 = 0.2, d_1 = 0, Q = 4$ and $b_1 = 0.9, 0.3, 0.05, 0.01$ (from top to bottom respectively).

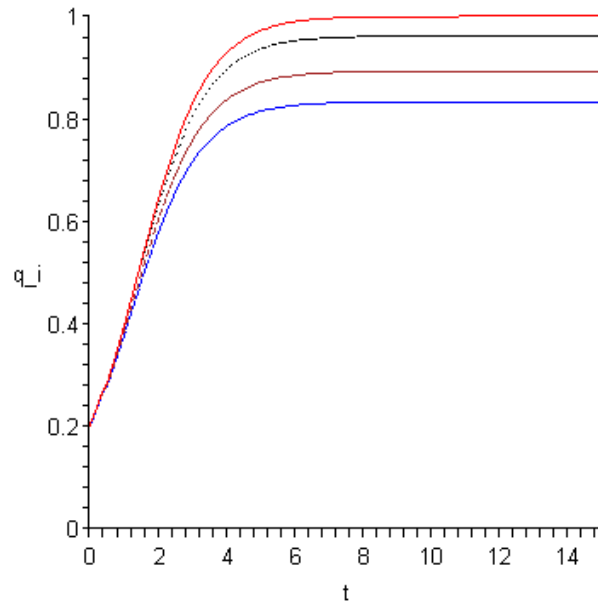


Fig. 7 The time series solution curves of the density of infected individuals q_i . Parameters: $b_0 = 0.3, b_1 = 0, d_0 = 0.2, Q = 4$ and $d_1 = 0.05, 0.04, 0.02, 0$ (from top to bottom respectively).

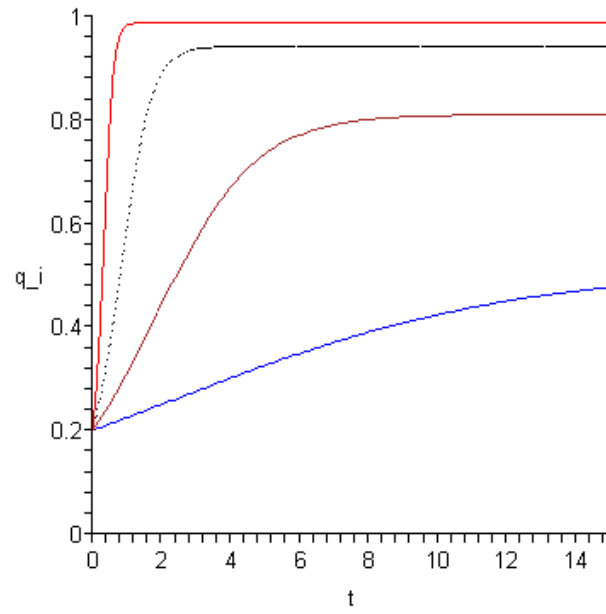


Fig. 8 The time series solution curves of the density of infected individuals q_i . Parameters:

$b_0 = 0.3, b_1 = 0.1, d_0 = 0.2, d_1 = 0.01$ and $Q = 8, 4, 2, 1$ (from top to bottom respectively).

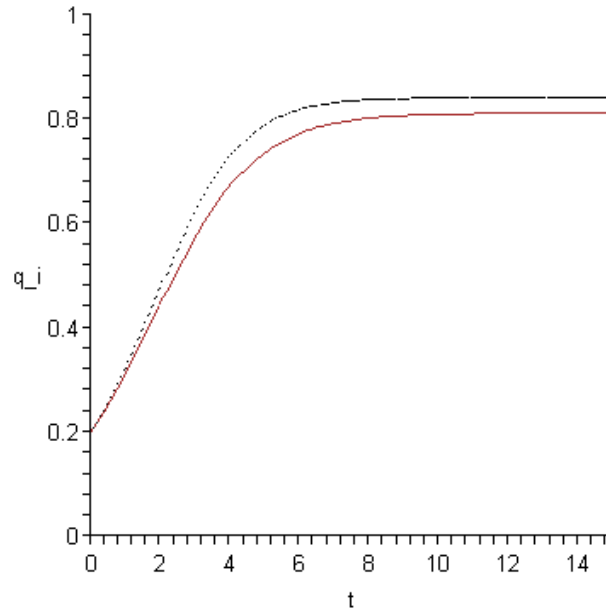


Fig. 9 The time series solution curves of the density of infected individuals q_i . Parameters:

$b_0 = 0.3, b_1 = 0.1, d_0 = 0.2, d_1 = 0.01, Q = 2$. Poisson (top) and multinomial (bottom).

จะเห็นได้ว่า แบบจำลองที่ใช้การประมาณแบบคู่นี้สามารถนำมาใช้อธิบายปรากฏการณ์ที่คนปกติมีแนวโน้มที่จะติดเชื้อไวรัสได้ง่ายขึ้น ถ้ามีผู้ใกล้ชิดป่วยอยู่ก่อนแล้ว และโอกาสในการป่วยจะแปรผันตรงตามจำนวนผู้ป่วยที่อยู่รอบข้าง นอกจากนี้ จุดสมดุลของแบบจำลองที่ใช้การประมาณแบบคู่ อันเนื่องมาจากการแจกแจงเนกนามและการแจกแจงปัวซองยังมีค่าใกล้เคียงกัน ดังรูป Fig. 9 และจุดสมดุลจะยิ่งมีค่าใกล้เคียงกันมากยิ่งขึ้นเมื่อ Q มีค่ามากขึ้น

สำหรับสูตรการประมาณแบบคู่ที่ผู้วิจัยได้พัฒนาขึ้น นอกจากจะใช้กับ SIS epidemic model ข้างต้นแล้ว ยังสามารถนำมาใช้กับระบบที่อัตราการเปลี่ยนแปลงได้รับผลกระทบจากผู้รอบข้างด้วย ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างที่ซับซ้อนมากขึ้น เพราะเกี่ยวข้องกับวิวัฒนาการ

2.4.4 Evolution of Altruism

สำหรับปรากฏการณ์ทางชีววิทยาที่สิ่งมีชีวิตบางชนิด อาทิเช่น มด ผึ้ง ต่อ และหมาใน ยอมช่วยเหลือเครือญาติ โดยไม่คำนึงถึงประโยชน์ของตัวเอง เพื่อดำรงเผ่าพันธุ์ของตัวเองให้อยู่รอดนั้น ไม่สามารถอธิบายได้ด้วยทฤษฎีการเลือกสรรโดยธรรมชาติ (natural selection) ต่อมาในปี ค.ศ. 1964 William Donald Hamilton [16, 17] ได้พยายามอธิบายปรากฏการณ์นี้ ด้วยทฤษฎีที่เรียกว่า kin selection ซึ่งกล่าวว่า สิ่งมีชีวิตที่มีลักษณะช่วยเหลือเครือญาติจะยินยอมเสียสละชีวิตของตน (cost of its own life) เพื่อช่วยให้ญาติของตนมีลูกหลานมากขึ้น โดยเงื่อนไขจำเป็นที่จะทำให้สิ่งมีชีวิตนี้อยู่รอด ก็คือ

$$br - c > 0$$

เมื่อ r คือ ความสัมพันธ์ทางเครือญาติ (relatedness) ระหว่างสิ่งมีชีวิตที่มีลักษณะช่วยเหลือเครือญาติ (altruist) และผู้รับความช่วยเหลือ b คือ กำไร (benefit) ที่ผู้รับความช่วยเหลือจะได้รับ และ c คือ ต้นทุน (cost) ของสิ่งมีชีวิตที่มีลักษณะช่วยเหลือเครือญาติ โดยความสัมพันธ์ทางเครือญาติก็คืออันตรกิริยาเฉพาะที่แบบหนึ่ง ดังนั้น การตรวจสอบความเที่ยงตรง (validity) ของกฎที่ Hamilton ตั้งขึ้น จึงควรใช้แบบจำลองเชิง

พื้นที่ อย่างไรก็ตาม ระบบนี้ซับซ้อนกว่าการเปลี่ยนสถานะของจุด เพราะมีการโยงความสัมพันธ์ทางเครือญาติด้วย จึงต้องใช้สูตรการประมาณแบบคู่ที่พัฒนาขึ้นใหม่

สำหรับระบบนิเวศวิทยาที่ประกอบด้วย N จุด โดยแต่ละจุดอาจถูกจับจองโดยสิ่งมีชีวิตใดสิ่งมีชีวิตหนึ่งหรือไม่ก็ได้ สำหรับสิ่งมีชีวิตที่ผู้วิจัยกำลังสนใจเป็นสิ่งมีชีวิตชนิดหนึ่งที่มีการสืบพันธุ์โดยอาศัยเพศและมียีนแตกต่างกัน 2 แบบ คือ ยีน N (wild type gene) และยีน A (mutant gene) ดังนั้นผู้วิจัยสามารถเขียนสมการหลัก (master equations) ได้ดังแสดงใน Appendix A.2

ถ้าสิ่งมีชีวิตที่มียีน N ไม่มีพฤติกรรมที่เห็นแก่ประโยชน์ของสิ่งมีชีวิตตัวอื่นเป็นหลัก ในขณะที่สิ่งมีชีวิตที่มียีน A มีพฤติกรรมที่เห็นแก่ประโยชน์ของสิ่งมีชีวิตตัวอื่นเป็นหลัก โดยยอมเสียสละประโยชน์ส่วนตน เพื่อช่วยเหลือเครือญาติ (relationship) ทั้งในการเลี้ยงดูลูก (offspring) และการปกป้องจากภัยอันตรายทั้งปวง ผู้วิจัยจึงแบ่งการศึกษาออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 altruism มีผลกระทบต่ออัตราการเกิด แต่ไม่มีผลกระทบต่ออัตราการตาย

สิ่งมีชีวิตที่มียีน A จะไม่ค่อยปรารถนาที่จะมีลูกเอง ดังนั้นอัตราการเกิดจึงถูกลบออกจาก c (fitness cost) แต่ยีนดีที่จะช่วยเครือญาติ (R) ให้มีลูกมากขึ้นแทน ดังจะเห็นได้จากสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 b_{N\phi \rightarrow NN} &= \frac{b_0 + b_1 Q_{e_N}^R(A)}{Q} Q_{e_N}(N) + \frac{b_0 + b_1 Q_{e_N}^R(A)}{2Q} Q_{e_N}(A) \\
 b_{N\phi \rightarrow NA} &= \frac{b_0 + b_1 Q_{e_N}^R(A)}{2Q} Q_{e_N}(A) \\
 b_{A\phi \rightarrow AA} &= \frac{b_0 + b_1 Q_{e_A}^R(A) - c}{Q} Q_{e_A}(A) + \frac{b_0 + b_1 Q_{e_A}^R(A) - c}{2Q} Q_{e_A}(N) \\
 b_{A\phi \rightarrow AN} &= \frac{b_0 + b_1 Q_{e_A}^R(A) - c}{2Q} Q_{e_A}(N) \\
 d_N &= d_A = d_0
 \end{aligned}$$

เมื่อนำอัตราการเกิดและอัตราการตายข้างต้นไปแทนลงในสมการหลัก (Appendix A.2) พร้อมทั้งนำสูตรการประมาณแบบคู่ที่พัฒนาขึ้นมาประยุกต์ใช้ จะได้สมการความสัมพันธ์ (correlation equations) ดังแสดงใน Appendix B.2

เงื่อนไขที่ทำให้สิ่งมีชีวิตแบบ altruism สามารถอยู่รอดท่ามกลางสิ่งมีชีวิตแบบ non-altruism คือ Invasion exponent มีค่ามากกว่าศูนย์ โดย Invasion exponent สำหรับแบบจำลองที่ใช้สูตรการประมาณแบบคู่ อันเนื่องมาจากการแจกแจงเนกนาม คือ

$$(Q-1)(b_1(q_{\phi|A}\left(1+(Q-2)q_{A|A}+\frac{(Q-2)}{2}q_{N|A}\right)q_{A|A}^R + \frac{q_{\phi|N}}{2}(1+(Q-2)q_{A|N})q_{N|A}^R) - cq_{\phi|A}\left(q_{A|A}+\frac{q_{N|A}}{2}\right))$$

และสำหรับแบบจำลองที่ใช้สูตรการประมาณแบบคู่ อันเนื่องมาจากการแจกแจงบัสซิง คือ

$$b_1q_{\phi|A}(\mu_{ARA}(\mu_{ARA}+1)+\mu_{ARA}\mu_{AN})+\frac{b_1}{2Q}q_{\phi|A}\mu_{ARA}\mu_{AN} + \frac{b_1}{2Q}q_{\phi|N}(\mu_{NRA}(\mu_{NRA}+1)+\mu_{NRA}\mu_{NA})-cq_{\phi|A}\mu_{AA}-\frac{c}{2}q_{\phi|A}\mu_{AN}$$

กรณีที่ 2 altruism มีผลกระทบต่ออัตราการตาย แต่ไม่มีผลกระทบต่ออัตราการเกิด

สิ่งมีชีวิตที่มียีน A จะห่วงความปลอดภัยของเครือญาติมากกว่าตนเอง ดังนั้นอัตราการตายจึงถูกเพิ่มด้วย c (fitness cost) ดังจะเห็นได้จากสมการต่อไปนี้

$$b_{N\phi\rightarrow NN}=\frac{b_0}{Q}Q_{e_N}(N)+\frac{b_0}{2Q}Q_{e_N}(A)$$

$$b_{N\phi\rightarrow NA}=\frac{b_0}{2Q}Q_{e_N}(A)$$

$$b_{A\phi\rightarrow AA}=\frac{b_0}{Q}Q_{e_A}(A)+\frac{b_0}{2Q}Q_{e_A}(N)$$

$$b_{A\phi \rightarrow AN} = \frac{b_0}{2Q} Q_{e_A}(N)$$

$$d_N = d_0 - d_1 Q_{e_N}^R(A)$$

$$d_A = d_0 - d_1 Q_{e_A}^R(A) + c$$

เมื่อนำอัตราการเกิดและอัตราการตายข้างต้นไปแทนลงในสมการหลัก (Appendix A.2) พร้อมทั้งนำสูตรการประมาณแบบคู่ที่พัฒนาขึ้นมาประยุกต์ใช้ จะได้สมการความสัมพันธ์ (correlation equations) ดังแสดงใน Appendix B.2

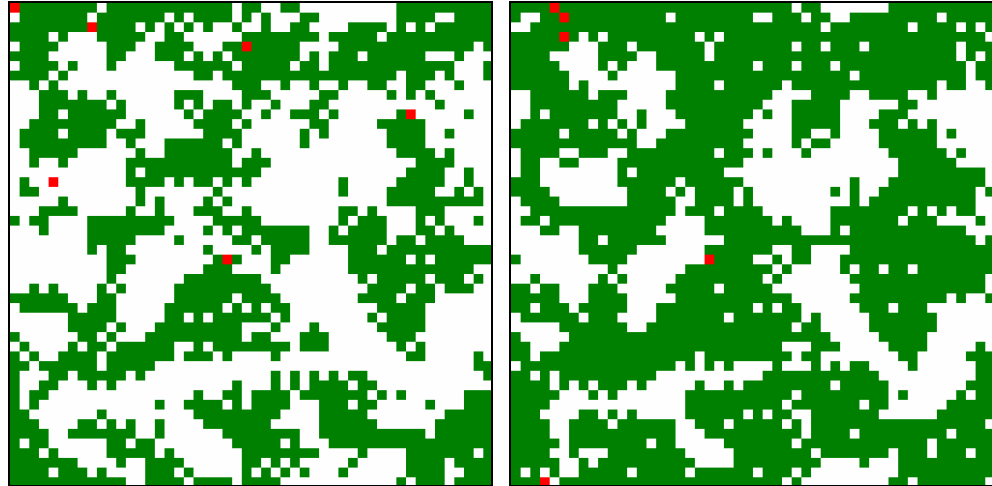
Invasion exponent สำหรับแบบจำลองที่ใช้สูตรการประมาณแบบคู่ อันเนื่องมาจากการแจกแจงอเนกนาม และการแจกแจงบัสซงมีค่าเท่ากัน คือ

$$d_1 Q q_{A|A}^R - c$$

สำหรับ Simulation ต่อไปนี้ ได้มาจากการ run โปรแกรมภาษาซี ซึ่งเขียนจำลองสถานการณ์บนแบบจำลองแลตทิสปกติ แบบ 2 มิติ โดยแต่ละจุดกำหนดให้มีเพื่อนบ้าน 4 จุด ในขณะที่ขอบด้านซ้ายจะเชื่อมกับขอบด้านขวา และขอบด้านบนก็จะเชื่อมกับขอบด้านล่าง (2^d regular square lattice with 4 cell von Neumann neighborhood and toroidal boundary) การเปลี่ยนแปลงสถานการณ์เป็นไปแบบสุ่ม และเวียนทำไปเรื่อยๆ

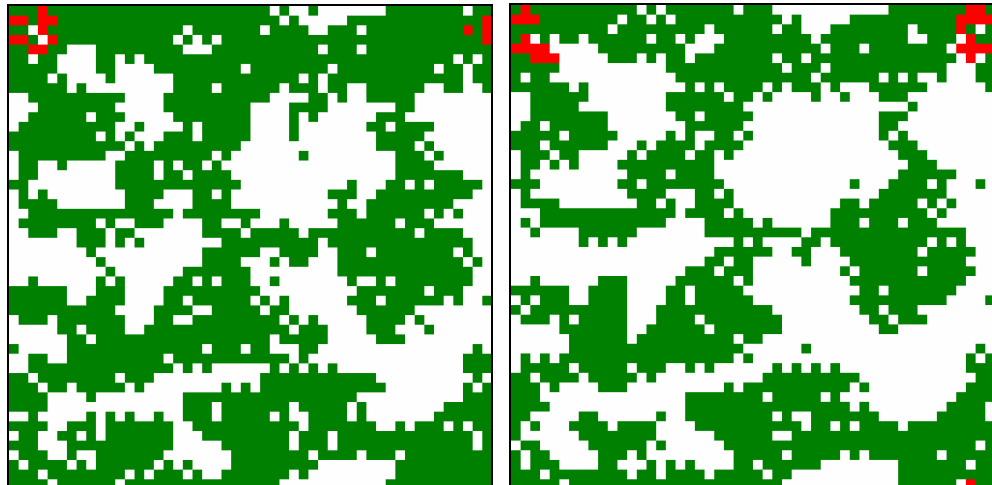
2.4.5 Simulation

กรณีที่ 1 altruism มีผลกระทบต่ออัตราการเกิด แต่ไม่มีผลกระทบต่ออัตราการตาย



Event 1

Event 10000



Event 20000

Event 30500

Fig. 10 When $N = 2500$, $Q = 4$, $b_0 = 2.0$, $d_0 = 0.1$, $b_1 = 0.01$, $c = 0.001$ and the initial proportion of altruists(red) equals 6 among non-altruists(green).

กรณีที่ 2 altruism มีผลกระทบต่ออัตราการตาย แต่ไม่มีผลกระทบต่ออัตราการเกิด

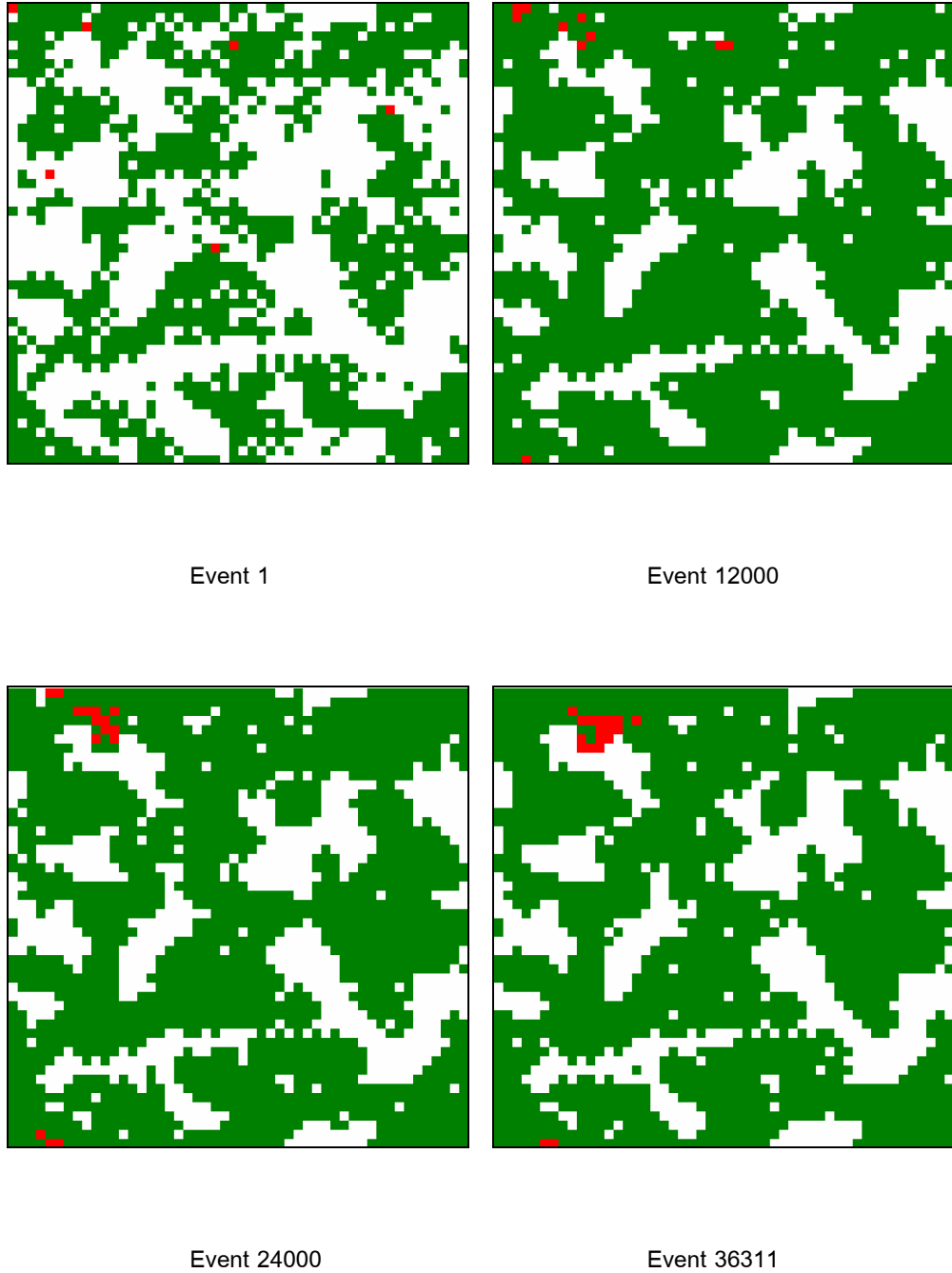


Fig. 11 When $N = 2500$, $Q = 4$, $b_0 = 2.0$, $d_0 = 0.1$, $d_1 = 0.01$, $c = 0.001$ and the initial proportion of altruists(red) equals 6 among non-altruists(green).

2.5 สรุปและวิจารณ์ผลการทดลอง

แบบจำลองที่ใช้สมการแบบค่าเฉลี่ย (moment closure approximation อันดับที่ 0) สามารถอธิบายความสัมพันธ์โดยรวมระดับประชากรได้ดี แต่ไม่สามารถอธิบายอันตรกิริยาเฉพาะที่ (local interaction) ได้ ในขณะที่แบบจำลองที่ใช้การประมาณแบบคู่ (moment closure approximation อันดับที่ 1) จะสามารถบอกการเปลี่ยนแปลงของความสัมพันธ์ทั้งแบบเดี่ยวและแบบคู่ได้ โดยสูตรการประมาณแบบคู่ที่ได้พัฒนาขึ้น (ใช้การแจกแจงแบบปัวซอง) นั้น มีความคล้ายคลึงกับสูตรที่ใช้การแจกแจงแบบอเนกนาม ข้อแตกต่างอยู่ที่ค่าสัมประสิทธิ์ที่คูณอยู่ข้างหน้าเทอมต่างๆ นั้นเอง สูตรการประมาณแบบคู่ทั้งที่ใช้การแจกแจงแบบอเนกนามและการแจกแจงแบบปัวซองจะเหมือนกัน เมื่อ Q มีค่ามากๆ โดยสูตรที่ใช้การแจกแจงแบบอเนกนามเหมาะที่จะใช้กับแบบจำลองแลตทิซที่มีจำนวนเพื่อนบ้านคงที่ ในขณะที่สูตรที่ใช้การแจกแจงแบบปัวซองเหมาะที่จะใช้กับระบบที่มีจำนวนเพื่อนบ้านไม่จำเป็นต้องคงที่ ข้อดีของสูตรการประมาณแบบคู่ที่ได้พัฒนาขึ้น คือ สามารถนำไปใช้กับปรากฏการณ์ใดๆ ที่อัตราการเปลี่ยนแปลงได้รับผลกระทบจากผู้รอบข้าง อาทิเช่น spatial SIS epidemic model และ evolution of altruism

Spatial SIS epidemic model ตอกย้ำให้เห็นว่า การแพร่ระบาดของเชื้อไวรัสสามารถระงับได้โดยการลดกิจกรรมทางสังคม เพราะยังมีคนอยู่รอบข้างเรามาก ก็ยังมีโอกาสติดโรคมามากขึ้นด้วย และการแพร่ระบาดมีลักษณะแบบคลัสเตอร์

สำหรับ evolution of altruism เงื่อนไขที่ทำให้สิ่งมีชีวิตแบบ altruism สามารถอยู่รอดท่ามกลางสิ่งมีชีวิตแบบ non-altruism ของ Hamilton นั้นเป็นเพียงกรณีเฉพาะกรณีหนึ่ง เพราะอยู่ในรูปแบบอย่างง่าย เมื่อเทียบกับเงื่อนไขที่หาได้

2.6 เอกสารอ้างอิง

- [1] de Aguiar, M.A.M., Rauch, E.M., and Bar-Yam, Y., Invasion and Extinction in the Mean Field Approximation for a Spatial Host-Pathogen Model. *Journal of Statistical Physics*. 114 (2004): 1417-1451.
- [2] Joo, J., and Lebowitz, J.L., Pair Approximation of the Stochastic Susceptible-Infected-Recovered-Susceptible Epidemic Model on the Hypercubic Lattice. *Physical Review E*. 70 (2004): 036114.
- [3] Verdasca, J., da Gama, M.M.T., Nunes, A., Bernardino, N.R., Pacheco, J.M., and Gomes, M.C., Recurrent Epidemics in Small World Networks. *Journal of Theoretical Biology*. 233 (2005): 553-561.
- [4] Benoit, J., Nunes, A., and da Gama, M.T., Pair Approximation Models for Disease Spread. *European Physical Journal B*. 50 (2006): 177-181.
- [5] Schlicht, R., and Iwasa, Y., Spatial Pattern Analysis in Forest Dynamics: Deviation from Power Law and Direction of Regeneration Waves. *Ecological Research*. 22 (2007): 197-203.
- [6] Hui, C., Zhang, F., Han, X., and Li, Z., Cooperation Evolution and Self-Regulation Dynamics in Metapopulation: Stage-Equilibrium Hypothesis., *Ecological Modelling* 184 (2005) 397-412.
- [7] D.W. Jordan, P. Smith, Nonlinear ordinary differential equations, Oxford University Press, New York, 1999.
- [8] Harada, Y., and Iwasa, Y., Lattice Population Dynamics for Plants with Dispersing Seeds and Vegetative Propagation. *Researches on Population Ecology*. 36 (1994): 237-249.
- [9] Harada, Y., and Iwasa, Y., Analyses of Spatial Patterns and Population Processes of Clonal Plants. *Researches on Population Ecology*. 38 (1996): 153-164.

- [10] D. A. Rand, "Correlation equations and pair approximations for spatial ecologies," unpublished.
- [11] M. J. Keeling, "The ecology and evolution of spatial host-parasite systems," Ph.D. dissertation, Warwick Univ., Coventry, UK, 1995.
- [12] A. J. Morris, "Representing spatial interactions in simple ecological models," Ph.D. dissertation, Warwick Univ., Coventry, UK, 1997.
- [13] C. T. Bauch, "Moment closure approximations in epidemiology," Ph.D. dissertation, Warwick Univ., Coventry, UK, 2000.
- [14] K. Bunwong, "Spatial modeling in evolutionary ecology," Ph.D. dissertation, Warwick Univ., Coventry, UK, 2006.
- [15] M. Sinha, "Swine flu," *Journal of Infection and Public Health*, vol. 2, pp. 157-166, 2009.
- [16] Hamilton, W.D., The Genetical Evolution of Social Behavior I. *Journal of Theoretical Biology*. 7 (1964): 1-16.
- [17] Hamilton, W.D., The Genetical Evolution of Social Behavior II. *Journal of Theoretical Biology*. 7 (1964): 17-52.

บทที่ 3

Output of the Project

- ★ ได้สูตรเพิ่มเติม สำหรับการประมาณแบบคู่ ซึ่งพัฒนาโดยการแจกแจงแบบปัวซองมาช่วย
- ★ ได้เปรียบเทียบแบบจำลองที่ใช้การประมาณแบบสมการค่าเฉลี่ย และแบบการประมาณแบบคู่
- ★ ได้เปรียบเทียบแบบจำลองที่ใช้การประมาณแบบคู่ อันเนื่องมาจากการแจกแจงอเนกนาม และการแจกแจงปัวซอง
- ★ ได้เงื่อนไขที่ทำให้สิ่งมีชีวิตที่เห็นแก่ประโยชน์ของสิ่งมีชีวิตอื่นเป็นหลัก (altruism) สามารถอยู่รอดได้ท่ามกลางสิ่งมีชีวิตที่ไม่เห็นแก่ประโยชน์ของสิ่งมีชีวิตอื่นเป็นหลัก (non-altruism)
- ★ ได้นำเสนอผลงานวิจัยเรื่อง Hopf Bifurcation in a Nutrient Removal Model with Variable Yield แบบบรรยาย ในการประชุมวิชาการระดับนานาชาติที่ชื่อว่า Fifth World Congress of Nonlinear Analysts (WCNA 2008) ณ เมืองออลันโต รัฐฟลอริดา ประเทศสหรัฐอเมริกา ระหว่างวันที่ 2 - 9 ก.ค. 2551
- ★ ผลงานวิจัยเรื่อง Modelling Nitrogen Dynamics of a Constructed Wetland: Nutrient Removal Process with Variable Yield ได้รับการตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติชื่อ Nonlinear Analysis Series A: Theory, Methods & Applications (Impact factor = 1.097)
- ★ ได้พบปะ พูดคุย แลกเปลี่ยนความคิดเห็นเรื่อง Altruism and Evolution กับ Assoc. Prof. Wayne Michael Lawton จาก National University of Singapore, Singapore ซึ่งมาบรรยายที่คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล ในหัวข้อเรื่อง Evolutionary Dynamics เมื่อวันที่ 22 ธ.ค. 2551
- ★ ได้พบปะ พูดคุย แลกเปลี่ยนความคิดเห็นเรื่อง Probability Distribution กับ Asst. Prof. Timothy E. O' Brien จาก Loyola University, USA
- ★ ได้พบปะ พูดคุย แลกเปลี่ยนความคิดเห็นเรื่อง SIS Epidemic Model กับ Dr. Elvin Moore จาก KMUTNB

- ★ ได้รับการตอบรับให้ไปนำเสนอผลงานวิจัยเรื่อง Pair Approximations for Ecological Models with Additional Neighborhood Effects แบบบรรยาย ในการประชุมวิชาการระดับนานาชาติที่ชื่อว่า 4th International Conference on Applied Mathematics, Simulation, Modelling (ASM'10) ณ เกาะคอรฟู ประเทศกรีซ ระหว่างวันที่ 22 - 25 ก.ค. 2553
- ★ ได้รับเลือกให้ตีพิมพ์ extended version ของผลงานวิจัยเรื่อง Pair Approximations for Ecological Models with Additional Neighborhood Effects ในวารสารระดับนานาชาติที่มีฐานข้อมูล ISI ซึ่งต้องรอพิจารณาหลังการประชุม ASM'10

บทที่ 4

Appendix

A The Master Equations

A.1 Spatial SIS Model

Version 1

$$\begin{aligned}\frac{d[S]}{dt} &= \sum_{\sigma x=I} \delta - \sum_{\sigma e=SI} \beta \\ \frac{d[I]}{dt} &= -\sum_{\sigma x=I} \delta + \sum_{\sigma e=SI} \beta \\ \frac{d[SI]}{dt} &= -\sum_{\sigma x=I} \delta Q_x(S) + \sum_{\sigma e=SI} \beta(Q_{e_s}(S) - Q_{e_s}(I)) + \sum_{\sigma x=I} \delta Q_x(I) \\ \frac{d[SS]}{dt} &= 2\sum_{\sigma x=I} \delta Q_x(S) - 2\sum_{\sigma e=SI} \beta Q_{e_s}(S) \\ \frac{d[II]}{dt} &= 2\sum_{\sigma e=SI} \beta Q_{e_s}(I) - 2\sum_{\sigma x=I} \delta Q_x(I)\end{aligned}$$

Version 2

อัตราการติดเชื้อขึ้นกับจำนวนของผู้ป่วยที่อยู่รอบตัวเรา ดังนั้น $\beta = b_0 + b_1 Q_{e_s}(I)$

อัตราการหายป่วยขึ้นกับจำนวนของผู้ป่วยที่อยู่รอบตัวเรา ดังนั้น $\delta = d_0 - d_1 Q_x(I)$

$$\frac{d[S]}{dt} = d_0[I] - d_1[I] \langle Q_x(I) \rangle_{\sigma x=I} - b_0[SI] - b_1[SI] \langle Q_{e_s}(I) \rangle_{\sigma e=SI}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[I]}{dt} &= -\frac{d[S]}{dt} \\
\frac{d[SI]}{dt} &= -d_0[I]\langle Q_x(S) \rangle_{\sigma x=I} + d_1[I]\langle Q_x(I)Q_x(S) \rangle_{\sigma x=I} + b_0[SI]\langle Q_{e_s}(S) \rangle_{\sigma e=SI} \\
&\quad + b_1[SI]\langle Q_{e_s}(I)Q_{e_s}(S) \rangle_{\sigma e=SI} - b_0[SI]\langle Q_{e_s}(I) \rangle_{\sigma e=SI} - b_1[SI]\langle Q_{e_s}(I)Q_{e_s}(I) \rangle_{\sigma e=SI} \\
&\quad + d_0[I]\langle Q_x(I) \rangle_{\sigma x=I} - d_1[I]\langle Q_x(I)Q_x(I) \rangle_{\sigma x=I} \\
\frac{d[SS]}{dt} &= 2d_0[I]\langle Q_x(S) \rangle_{\sigma x=I} - 2d_1[I]\langle Q_x(I)Q_x(S) \rangle_{\sigma x=I} - 2b_0[SI]\langle Q_{e_s}(S) \rangle_{\sigma e=SI} \\
&\quad - 2b_1[SI]\langle Q_{e_s}(I)Q_{e_s}(S) \rangle_{\sigma e=SI} \\
\frac{d[II]}{dt} &= 2b_0[SI]\langle Q_{e_s}(I) \rangle_{\sigma e=SI} + 2b_1[SI]\langle Q_{e_s}(I)Q_{e_s}(I) \rangle_{\sigma e=SI} - 2d_0[I]\langle Q_x(I) \rangle_{\sigma x=I} \\
&\quad + 2d_1[I]\langle Q_x(I)Q_x(I) \rangle_{\sigma x=I}
\end{aligned}$$

A.2 Evolution of Altruism

$$\begin{aligned}
\frac{d[N]}{dt} &= [N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NN} \rangle_{\sigma e=N\phi} + [A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AN} \rangle_{\sigma e=A\phi} - [N]\langle d_N \rangle_{\sigma x=N} \\
\frac{d}{dt}[A] &= [A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AA} \rangle_{\sigma e=A\phi} + [N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NA} \rangle_{\sigma e=N\phi} - [A]\langle d_A \rangle_{\sigma x=A} \\
\frac{d}{dt}[\phi] &= [N]\langle d_N \rangle_{\sigma x=N} - [N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NN} \rangle_{\sigma e=N\phi} - [A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AN} \rangle_{\sigma e=A\phi} \\
&\quad + [A]\langle d_A \rangle_{\sigma x=A} - [A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AA} \rangle_{\sigma e=A\phi} - [N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NA} \rangle_{\sigma e=N\phi} \\
\frac{d[N\phi]}{dt} &= [N]\langle d_N Q_x(N) \rangle_{\sigma x=N} - [N]\langle d_N Q_x(\phi) \rangle_{\sigma x=N} + [A]\langle d_A Q_x(N) \rangle_{\sigma x=A} \\
&\quad + [N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NN} Q_{e_\phi}(\phi) \rangle_{\sigma e=N\phi} - [N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NN} Q_{e_\phi}(N) \rangle_{\sigma e=N\phi} \\
&\quad - [N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NA} Q_{e_\phi}(N) \rangle_{\sigma e=N\phi} + [A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AN} Q_{e_\phi}(\phi) \rangle_{\sigma e=A\phi} \\
&\quad - [A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AA} Q_{e_\phi}(N) \rangle_{\sigma e=A\phi} - [A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AN} Q_{e_\phi}(N) \rangle_{\sigma e=A\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[A\phi]}{dt} = & [A]\langle d_A Q_x(A) \rangle_{\sigma x=A} - [A]\langle d_A Q_x(\phi) \rangle_{\sigma x=A} + [N]\langle d_N Q_x(A) \rangle_{\sigma x=N} \\
& + [A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AA} Q_{e_\phi}(\phi) \rangle_{\sigma e=A\phi} - [A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AA} Q_{e_\phi}(A) \rangle_{\sigma e=A\phi} \\
& - [A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AN} Q_{e_\phi}(A) \rangle_{\sigma e=A\phi} + [N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NA} Q_{e_\phi}(\phi) \rangle_{\sigma e=N\phi} \\
& - [N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NN} Q_{e_\phi}(A) \rangle_{\sigma e=N\phi} - [N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NA} Q_{e_\phi}(A) \rangle_{\sigma e=N\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\phi\phi]}{dt} = & 2[N]\langle d_N Q_x(\phi) \rangle_{\sigma x=N} + 2[A]\langle d_A Q_x(\phi) \rangle_{\sigma x=A} - 2[N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NN} Q_{e_\phi}(\phi) \rangle_{\sigma e=N\phi} \\
& - 2[N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NA} Q_{e_\phi}(\phi) \rangle_{\sigma e=N\phi} - 2[A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AA} Q_{e_\phi}(\phi) \rangle_{\sigma e=A\phi} \\
& - 2[A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AN} Q_{e_\phi}(\phi) \rangle_{\sigma e=A\phi}
\end{aligned}$$

$$\frac{d[NN]}{dt} = 2[N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NN} Q_{e_\phi}(N) \rangle_{\sigma e=N\phi} + 2[A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AN} Q_{e_\phi}(N) \rangle_{\sigma e=A\phi} - 2[N]\langle d_N Q_x(N) \rangle_{\sigma x=N}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[AN]}{dt} = & [A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AN} Q_{e_\phi}(A) \rangle_{\sigma e=A\phi} + [A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AA} Q_{e_\phi}(N) \rangle_{\sigma e=A\phi} - [A]\langle d_A Q_x(N) \rangle_{\sigma x=A} \\
& + [N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NN} Q_{e_\phi}(A) \rangle_{\sigma e=N\phi} + [N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NA} Q_{e_\phi}(N) \rangle_{\sigma e=N\phi} - [N]\langle d_N Q_x(A) \rangle_{\sigma x=N}
\end{aligned}$$

$$\frac{d[AA]}{dt} = 2[N\phi]\langle b_{N\phi \rightarrow NA} Q_{e_\phi}(A) \rangle_{\sigma e=N\phi} + 2[A\phi]\langle b_{A\phi \rightarrow AA} Q_{e_\phi}(A) \rangle_{\sigma e=A\phi} - 2[A]\langle d_A Q_x(A) \rangle_{\sigma x=A}$$

B The Correlation Equations

B.1 Spatial SIS Model

Version 1

เมื่อใช้สูตรการประมาณแบบคู่ อันเนื่องมาจากการแจกแจงเนกนาม ดังต่อไปนี้

$$1. \langle Q_x(l) \rangle_{\sigma x=j} = \frac{1}{[j]} \sum_{\sigma x=j} Q_x(l) = \frac{[lj]}{[j]}$$

$$2. \langle Q_x(l_1)Q_x(l_2) \rangle_{\sigma x=j} = \frac{1}{[j]} \sum_{\sigma x=j} Q_x(l_1)Q_x(l_2) = \begin{cases} Qq_{l_1|j} + \frac{Q!}{(Q-2)!} q_{l_1|j}^2 & ; l_1 = l_2 \\ \frac{Q!}{(Q-2)!} q_{l_1|j} q_{l_2|j} & ; l_1 \neq l_2 \end{cases}$$

$$3. \langle Q_{e_j}(l) \rangle_{\sigma e=ij} = \begin{cases} (Q-1)q_{l|j} + 1 & ; l = i \\ (Q-1)q_{l|j} & ; l \neq i \end{cases}$$

$$4. \langle Q_{e_j}(l_1)Q_{e_j}(l_2) \rangle_{\sigma e=ij} = \begin{cases} (Q-1)q_{l_1|j} + \frac{(Q-1)!}{(Q-3)!} q_{l_1|j}^2 & ; l_1 = l_2 \\ \frac{(Q-1)!}{(Q-3)!} q_{l_1|j} q_{l_2|j} & ; l_1 \neq l_2 \end{cases}$$

โดยที่ $q_{l|j} = \frac{[lj]}{Q[j]}$ จะได้สมการความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\frac{d[S]}{dt} = d_0[I] - d_1[II] - b_0[SI] - b_1[SI]((Q-1)q_{I|S} + 1)$$

$$\frac{d[I]}{dt} = -\frac{d[S]}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{d[SI]}{dt} = & -d_0[SI] + d_1[I] \frac{Q!}{(Q-2)!} q_{I|I} q_{S|I} + b_0[SI](Q-1)q_{S|S} + b_1[SI] \frac{(Q-1)!}{(Q-3)!} q_{I|S} q_{S|S} \\ & - b_0[SI]((Q-1)q_{I|S} + 1) - b_1[SI] \left((Q-1)q_{I|S} + \frac{(Q-1)!}{(Q-3)!} q_{I|S}^2 \right) \\ & + d_0[II] - d_1[I] \left(Qq_{I|I} + \frac{Q!}{(Q-2)!} q_{I|I}^2 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d[SS]}{dt} = 2d_0[SI] - 2d_1[I] \frac{Q!}{(Q-2)!} q_{I|I} q_{S|I} - 2b_0[SI](Q-1)q_{S|S} - 2b_1[SI] \frac{(Q-1)!}{(Q-3)!} q_{I|S} q_{S|S}$$

$$\begin{aligned} \frac{d[II]}{dt} = & 2b_0[SI]((Q-1)q_{I|S} + 1) + 2b_1[SI] \left((Q-1)q_{I|S} + \frac{(Q-1)!}{(Q-3)!} q_{I|S}^2 \right) - 2d_0[II] \\ & + 2d_1[I] \left(Qq_{I|I} + \frac{Q!}{(Q-2)!} q_{I|I}^2 \right) \end{aligned}$$

Version 2

เมื่อใช้สูตรการประมาณแบบคู่ อันเนื่องมาจากการแจกแจงปัวซอง ดังต่อไปนี้

$$1. \langle Q_x(l) \rangle_{\sigma x=j} = \frac{[lj]}{[j]} = \mu$$

$$2. \langle Q_x(l_1)Q_x(l_2) \rangle_{\sigma x=j} = \begin{cases} \mu_1(\mu_1+1) & ; l_1 = l_2 \\ \mu_1\mu_2 & ; l_1 \neq l_2 \end{cases}$$

$$3. \langle Q_{e_j}(l) \rangle_{\sigma e=ij} = \begin{cases} \mu+1 & ; l = i \\ \mu & ; l \neq i \end{cases}$$

$$4. \langle Q_{e_j}(l_1)Q_{e_j}(l_2) \rangle_{\sigma e=ij} = \begin{cases} \mu_1(\mu_1+1) & ; l_1 = l_2 \\ \mu_1\mu_2 & ; l_1 \neq l_2 \end{cases}$$

โดยที่ $\mu_n = \frac{[l_n j]}{[j]}$ จะได้สมการความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\frac{d[S]}{dt} = d_0[I] - d_1[II] - b_0[SI] - b_1[SI] \left(\frac{[SI]}{[S]} + 1 \right)$$

$$\frac{d[I]}{dt} = -\frac{d[S]}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{d[SI]}{dt} = & -d_0[SI] + d_1 \frac{[II][SI]}{[I]} + b_0 \frac{[SI][SS]}{[S]} + b_1 \frac{[SI][SI][SS]}{[S][S]} - b_0[SI] \left(\frac{[SI]}{[S]} + 1 \right) \\ & - b_1 \frac{[SI][SI]}{[S]} \left(\frac{[SI]}{[S]} + 1 \right) + d_0[II] - d_1[II] \left(\frac{[II]}{[I]} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d[SS]}{dt} = 2d_0[SI] - 2d_1 \frac{[II][SI]}{[I]} - 2b_0 \frac{[SI][SS]}{[S]} - 2b_1 \frac{[SI][SI][SS]}{[S][S]}$$

$$\frac{d[II]}{dt} = 2b_0[SI] \left(\frac{[SI]}{[S]} + 1 \right) + 2b_1 \frac{[SI][SI]}{[S]} \left(\frac{[SI]}{[S]} + 1 \right) - 2d_0[II] + 2d_1[II] \left(\frac{[II]}{[I]} + 1 \right)$$

B.2 Evolution of Altruism

กรณีที่ 1 altruism มีผลกระทบต่อการเกิด แต่ไม่มีผลกระทบต่อการตาย

$$\begin{aligned} \frac{d[N]}{dt} = & [N\phi] \frac{b_0}{Q} \mu_{NN} + [N\phi] \frac{b_1}{Q} \mu_{NRA} \mu_{NN} + [N\phi] \frac{b_0}{2Q} \mu_{NA} \\ & + [N\phi] \frac{b_1}{2Q} (\mu_{NRA}(\mu_{NRA} + 1) + \mu_{NRA} \mu_{NA}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[A\phi]\frac{(b_0-c)}{2Q}\mu_{AN} + [A\phi]\frac{b_1}{2Q}\mu_{ARA}\mu_{AN} - [N]d_0 \\
\frac{d[A]}{dt} & = [A\phi]\frac{(b_0-c)}{Q}\mu_{AA} + [A\phi]\frac{b_1}{Q}(\mu_{ARA}(\mu_{ARA}+1) + \mu_{ARA}\mu_{AN}) \\
& + [A\phi]\frac{(b_0-c)}{2Q}\mu_{AN} + [A\phi]\frac{b_1}{2Q}\mu_{ARA}\mu_{AN} + [N\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{NA} \\
& + [N\phi]\frac{b_1}{2Q}(\mu_{NRA}(\mu_{NRA}+1) + \mu_{NRA}\mu_{NA}) - [A]d_0 \\
\frac{d[\phi]}{dt} & = -\frac{d[N]}{dt} - \frac{d[A]}{dt} \\
\frac{d[N\phi]}{dt} & = [N]d_0\lambda_{NN} - [N]d_0\lambda_{N\phi} + [A]d_0\lambda_{AN} + [N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NN}\mu_{\phi\phi} \\
& + [N\phi]\frac{b_1}{Q}\mu_{NRA}\mu_{NN}\mu_{\phi\phi} + [N\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{NA}\mu_{\phi\phi} \\
& + [N\phi]\frac{b_1}{2Q}(\mu_{NRA}(\mu_{NRA}+1) + \mu_{NRA}\mu_{NA})\mu_{\phi\phi} \\
& - [N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NN}(\mu_{\phi N}+1) - [N\phi]\frac{b_1}{Q}\mu_{NRA}\mu_{NN}(\mu_{\phi N}+1) \\
& - [N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NA}(\mu_{\phi N}+1) - [N\phi]\frac{b_1}{Q}(\mu_{NRA}(\mu_{NRA}+1) + \mu_{NRA}\mu_{NA})(\mu_{\phi N}+1) \\
& + [A\phi]\frac{(b_0-c)}{2Q}\mu_{AN}\mu_{\phi\phi} + [A\phi]\frac{b_1}{2Q}\mu_{ARA}\mu_{AN}\mu_{\phi\phi} \\
& - [A\phi]\frac{(b_0-c)}{Q}\mu_{AA}\mu_{\phi N} - [A\phi]\frac{b_1}{Q}(\mu_{ARA}(\mu_{ARA}+1) + \mu_{ARA}\mu_{AA})\mu_{\phi N} \\
& - [A\phi]\frac{(b_0-c)}{Q}\mu_{AN}\mu_{\phi N} - [A\phi]\frac{b_1}{Q}\mu_{ARA}\mu_{AN}\mu_{\phi N} \\
\frac{d[A\phi]}{dt} & = d[A]_0\lambda_{AA} - [A]d_0\lambda_{A\phi} + [N]d_0\lambda_{NA} \\
& + [A\phi]\frac{(b_0-c)}{Q}\mu_{AA}\mu_{\phi\phi} + [A\phi]\frac{b_1}{Q}(\mu_{ARA}(\mu_{ARA}+1) + \mu_{ARA}\mu_{AA})\mu_{\phi\phi} \\
& + [A\phi]\frac{(b_0-c)}{2Q}\mu_{AN}\mu_{\phi\phi} + [A\phi]\frac{b_1}{2Q}\mu_{ARA}\mu_{AN}\mu_{\phi\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -[A\phi] \frac{(b_0 - c)}{Q} \mu_{AA} (\mu_{\phi A} + 1) - [A\phi] \frac{b_1}{Q} (\mu_{ARA} (\mu_{ARA} + 1) + \mu_{ARA} \mu_{AA}) (\mu_{\phi A} + 1) \\
& -[A\phi] \frac{(b_0 - c)}{Q} \mu_{AN} (\mu_{\phi A} + 1) - [A\phi] \frac{b_1}{Q} \mu_{ARA} \mu_{AN} (\mu_{\phi A} + 1) + [N\phi] \frac{b_0}{2Q} \mu_{NA} \mu_{\phi\phi} \\
& + [N\phi] \frac{b_1}{2Q} (\mu_{NRA} (\mu_{NRA} + 1) + \mu_{NRA} \mu_{NA}) \mu_{\phi\phi} \\
& - [N\phi] \frac{b_0}{Q} \mu_{NN} \mu_{\phi A} - [N\phi] \frac{b_1}{Q} \mu_{NRA} \mu_{NN} \mu_{\phi A} \\
& - [N\phi] \frac{b_0}{Q} \mu_{NA} \mu_{\phi A} - [N\phi] \frac{b_1}{Q} (\mu_{NRA} (\mu_{NRA} + 1) + \mu_{NRA} \mu_{NA}) \mu_{\phi A} \\
\frac{d[\phi\phi]}{dt} = & 2d_0[N] \lambda_{N\phi} + 2d_0[A] \lambda_{A\phi} - 2[N\phi] \frac{b_0}{Q} \mu_{NN} \mu_{\phi\phi} \\
& - 2[N\phi] \frac{b_1}{Q} \mu_{NRA} \mu_{NN} \mu_{\phi\phi} - 2[N\phi] \frac{b_0}{Q} \mu_{NA} \mu_{\phi\phi} \\
& - 2[N\phi] \frac{b_1}{Q} (\mu_{NRA} (\mu_{NRA} + 1) + \mu_{NRA} \mu_{NA}) \mu_{\phi\phi} \\
& - 2[A\phi] \frac{(b_0 - c)}{Q} \mu_{AA} \mu_{\phi\phi} - 2[A\phi] \frac{b_1}{Q} (\mu_{ARA} (\mu_{ARA} + 1) + \mu_{ARA} \mu_{AA}) \mu_{\phi\phi} \\
& - 2[A\phi] \frac{(b_0 - c)}{Q} \mu_{AN} \mu_{\phi\phi} - 2[A\phi] \frac{b_1}{Q} \mu_{ARA} \mu_{AN} \mu_{\phi\phi} \\
\frac{d[NN]}{dt} = & 2[N\phi] \frac{b_0}{Q} \mu_{NN} (\mu_{\phi N} + 1) + 2[N\phi] \frac{b_1}{Q} \mu_{NRA} \mu_{NN} (\mu_{\phi N} + 1) \\
& + [N\phi] \frac{b_0}{Q} \mu_{NA} (\mu_{\phi N} + 1) + [N\phi] \frac{b_1}{Q} (\mu_{NRA} (\mu_{NRA} + 1) + \mu_{NRA} \mu_{NA}) (\mu_{\phi N} + 1) \\
& - [A\phi] \frac{(b_0 - c)}{Q} \mu_{AN} \mu_{\phi N} + [A\phi] \frac{b_1}{Q} \mu_{ARA} \mu_{AN} \mu_{\phi N} - 2[N] d_0 \lambda_{NN} \\
\frac{d[AN]}{dt} = & [A\phi] \frac{(b_0 - c)}{2Q} \mu_{AN} (\mu_{\phi A} + 1) + [A\phi] \frac{b_1}{2Q} \mu_{ARA} \mu_{AN} (\mu_{\phi A} + 1) \\
& + [A\phi] \frac{(b_0 - c)}{Q} \mu_{AA} \mu_{\phi N} + [A\phi] \frac{b_1}{Q} (\mu_{ARA} (\mu_{ARA} + 1) + \mu_{ARA} \mu_{AA}) \mu_{\phi N} \\
& + [A\phi] \frac{(b_0 - c)}{2Q} \mu_{AN} \mu_{\phi N} + [A\phi] \frac{b_1}{2Q} \mu_{ARA} \mu_{AN} \mu_{\phi N}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +[N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NN}\mu_{\phi A} + [N\phi]\frac{b_1}{Q}\mu_{NRA}\mu_{NN}\mu_{\phi A} \\
& +[N\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{NA}\mu_{\phi A} + [N\phi]\frac{b_1}{2Q}(\mu_{NRA}(\mu_{NRA}+1) + \mu_{NRA}\mu_{NA})\mu_{\phi A} \\
& +[N\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{NA}(\mu_{\phi N}+1) + [N\phi]\frac{b_1}{2Q}(\mu_{NRA}(\mu_{NRA}+1) + \mu_{NRA}\mu_{NA})(\mu_{\phi N}+1) \\
& -[A]d_0\lambda_{AN} - [N]d_0\lambda_{NA} \\
\frac{d[AA]}{dt} = & 2[A\phi]\frac{(b_0-c)}{Q}\mu_{AA}(\mu_{\phi A}+1) + 2[A\phi]\frac{b_1}{Q}(\mu_{ARA}(\mu_{ARA}+1) + \mu_{ARA}\mu_{AA})(\mu_{\phi A}+1) \\
& +[A\phi]\frac{(b_0-c)}{Q}\mu_{AN}(\mu_{\phi A}+1) + [A\phi]\frac{b_1}{Q}\mu_{ARA}\mu_{AN}(\mu_{\phi A}+1) \\
& +[N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NA}\mu_{\phi A} + [N\phi]\frac{b_1}{Q}(\mu_{NRA}(\mu_{NRA}+1) + \mu_{NRA}\mu_{NA})\mu_{\phi A} - 2d_0[A]\lambda_{AA}
\end{aligned}$$

กรณี 2 altruism มีผลกระทบต่ออัตราการตาย แต่ไม่มีผลกระทบต่ออัตราการเกิด

$$\begin{aligned}
\frac{d[N]}{dt} &= [N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NN} + [N\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{NA} + [A\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{AN} - [N]d_0 + [AN]_R d_1 \\
\frac{d[A]}{dt} &= [A\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{AA} + [A\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{AN} + [N\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{NA} - [A](d_0+c) + [AA]_R d_1 \\
\frac{d[\phi]}{dt} &= -\frac{d[N]}{dt} - \frac{d[A]}{dt} \\
\frac{d[N\phi]}{dt} &= [NN]d_0 - \frac{[AN]_R[NN]}{[N]}d_1 - [N\phi]d_0 \\
& + d_1 \frac{[AN]_R[N\phi]}{[N]} + [AN](d_0+c) - d_1 \frac{[AA]_R[AN]}{[A]} + [N\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{NA}\mu_{\phi\phi} \\
& - [N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NN}(\mu_{\phi N}+1) - [N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NA}(\mu_{\phi N}+1) \\
& + [A\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{AN}\mu_{\phi\phi} - [A\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{AA}\mu_{\phi N} - [A\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{AN}\mu_{\phi N} \\
\frac{d[A\phi]}{dt} &= [AA](d_0+c) - d_1 \frac{[AA]_R[AA]}{[A]} - [A\phi](d_0+c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{[AA]_R[A\phi]}{[A]}d_1 + [AN]d_0 - \frac{[AN]_R[AN]}{[N]}d_1 \\
& + [A\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{AA}\mu_{\phi\phi} + [A\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{AN}\mu_{\phi\phi} - [A\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{AA}(\mu_{\phi A} + 1) \\
& - [A\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{AN}(\mu_{\phi A} + 1) + [N\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{NA}\mu_{\phi\phi} - [N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NN}\mu_{\phi A} - [N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NA}\mu_{\phi A} \\
\frac{d[\phi\phi]}{dt} &= 2[N\phi]d_0 - 2\frac{[AN]_R[N\phi]}{[N]}d_1 + 2[A\phi](d_0 + c) - 2\frac{[AA]_R[A\phi]}{[A]}d_1 \\
& - 2[N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NN}\mu_{\phi\phi} - 2[N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NA}\mu_{\phi\phi} - 2[A\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{AA}\mu_{\phi\phi} - 2[A\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{AN}\mu_{\phi\phi} \\
\frac{d[NN]}{dt} &= -2[NN]d_0 + 2\frac{[AN]_R[NN]}{[N]}d_1 + 2[N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NN}(\mu_{\phi N} + 1) \\
& + [N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NA}(\mu_{\phi N} + 1) + [A\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{AN}\mu_{\phi N} \\
\frac{d[AN]}{dt} &= -[AN](d_0 + c) + \frac{[AA]_R[AN]}{[A]}d_1 - [AN]d_0 + \frac{[AN]_R[AN]}{[N]}d_1 \\
& + [A\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{AN}(\mu_{\phi A} + 1) + [A\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{AA}\mu_{\phi N} + [A\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{AN}\mu_{\phi N} \\
& + [N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NN}\mu_{\phi A} + [N\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{NA}\mu_{\phi A} + [N\phi]\frac{b_0}{2Q}\mu_{NA}(\mu_{\phi N} + 1) \\
\frac{d[AA]}{dt} &= -2[AA](d_0 + c) + 2\frac{[AA]_R[AA]}{[A]}d_1 + 2[A\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{AA}(\mu_{\phi A} + 1) \\
& + [A\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{AN}(\mu_{\phi A} + 1) + [N\phi]\frac{b_0}{Q}\mu_{NA}\mu_{\phi A} - 2d_0[A]\lambda_{AA}
\end{aligned}$$

C Output of the Project

C.1 ผลงานวิจัยที่นำเสนอแบบบรรยายในการประชุมนานาชาติ

Fifth World Congress of Nonlinear Analysts (WCNA 2008)

Hopf Bifurcation in a Nutrient Removal Model with Variable Yield

Kornkanok Bunwong¹, Wichuta Sae-jie²

¹Department of Mathematics, Mahidol University, Bangkok 10400, Thailand.
sckbw@mahidol.ac.th

²Department of Mathematics, Mahidol University, Bangkok 10400, Thailand.
c_wichuta@hotmail.com

Abstract

In everyday life, the total nitrogen is regularly discharged into the water body mainly by household and agricultural area. If the total nitrogen is in the high level, the nitrate nitrogen will cause the eutrophication. This phenomenon causes severe water quality problems and threatens the survival of aquatic populations. Luckily, nitrogen is one of the principal nutrients for plant. The riparian vegetation has an incredible ability to remove the total nitrogen by uptake and converse to its own biomass. Therefore, nonlinear mathematical models are fundamentally established in order to describe the environmental interaction between total nitrogen in soil solution and plant biomass. Finally, we study analytically and numerically the behavior of these models.

Keywords: nutrient removal model, stability, Liapunov function.

4th International Conference on Applied Mathematics, Simulation, Modelling
(ASM'10)

Pair Approximations for Ecological Models with Additional Neighborhood Effects

Kornkanok Bunwong

Department of Mathematics, Mahidol University, Bangkok 10400 Thailand
phone: 02-201-5539; e-mail: sckbw@mahidol.ac.th

The spatial interaction plays an important role in many ecological situations. A lattice model is a popular tool for creating such a grid structure of discrete individuals together with their possible connection. The procedure, however, is very computation time consuming depending on the model complexity. Therefore, master equations, correlation equations, and pair approximations are proposed as analytical methods. In this paper, a new approach to pair approximation method is introduced. The main assumption beyond this approach is that the space average and the probabilistic average are identical when the total population size is large enough. This technique is suitable for a model composed of individuals whose event rates such as birth rate, death rate, transmission rate, and recovery rate are additionally affected by their nearby neighbor. We, finally, apply this technique to a simple SIS epidemic model.

Keywords—Pair approximation, Probability distribution, SIS epidemic model, Spatial model.

C.2 ผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติ