



รายงานผลการวิจัยฉบับสมบูรณ์

ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ
(Statistical Process Control System)

ดร. ไพโรจน์ ขาวสิทธิวงษ์

กุมภาพันธ์ 2554

สัญญาเลขที่ MRG5180370

รายงานผลการวิจัยฉบับสมบูรณ์

ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ
(Statistical Process Control System)

ผู้วิจัย	สังกัด
ดร. ไพโรจน์ ขาวสีทอง	ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์
	มหาวิทยาลัยศิลปากร

สนับสนุนโดยสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกอ. และ สกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

รหัสโครงการ: MRG5180370

ชื่อโครงการ: ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ

ชื่อนักวิจัย: ดร. ไพโรจน์ ขาวสิทธิวิงษ์

ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

E-mail Address: paioj@su.ac.th

ระยะเวลาโครงการ: 2 ปี

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มุ่งพัฒนาระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติสำหรับกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นไม่คงที่ ตัวแบบปริภูมิสถานะถูกนำมาใช้เพื่ออธิบายคุณลักษณะและสมบัติของกระบวนการ การประมาณและการพยากรณ์การเปลี่ยนแปลงของกระบวนการพิจารณาจากตัวกรอง เมื่อสมมติตัวรบกวนของกระบวนการมีการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร ตัวกรองจะมีความแข็งแกร่งต่อค่านอกกลุ่มของตัวรบกวนและสามารถประมาณขนาดการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการได้อย่างมีประสิทธิภาพ ประสิทธิภาพของตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งขึ้นอยู่กับตัวประกอบปรับค่า การศึกษาประสิทธิภาพของตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งดำเนินการโดยการจำลองแบบด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล พบว่า ตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งที่ขึ้นอยู่กับตัวประกอบปรับค่าหลายตัวเป็นตัวกรองที่มีประสิทธิภาพ เมื่อพิจารณาค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของการประมาณตัวแปรสถานะ และอัตราการลู่เข้าของค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของการประมาณตัวแปรสถานะ

ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติพัฒนาขึ้นจากการผสมผสานเทคนิคการปรับกระบวนการ ซึ่งเป็นเทคนิคตามแนวคิดการควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรม และเทคนิคแผนภูมิควบคุมซึ่งเป็นเครื่องมือทางสถิติตามแนวคิดการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ เทคนิคทั้งสองได้ประยุกต์ตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งที่พัฒนาขึ้น เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพการทำงานของระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ กล่าวคือ เทคนิคการปรับกระบวนการพัฒนาขึ้นจากทฤษฎีการควบคุมสโตคาสติกเชิงเส้น เมื่อสมมติตัวรบกวนมีการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร ผลลัพธ์ที่ได้คือตัวประมาณตัวแปรควบคุมนำเข้าเป็นฟังก์ชันของตัวประมาณตัวแปรสถานะที่มีความแข็งแกร่ง ซึ่งทำให้สามารถปรับกระบวนการกลับสู่ค่าเป้าหมายได้อย่างรวดเร็ว เนื่องจากการปรับกระบวนการดังกล่าวไม่จำเป็นต้องทราบสาเหตุความผิดปกติที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ ซึ่งจะไม่ถูกกำจัดจากกระบวนการ ด้วยเหตุนี้จึงทำให้การเปลี่ยนแปลงของกระบวนการยังคงปรากฏในอนาคต เทคนิคแผนภูมิควบคุมความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ของตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งจึงถูกสร้างขึ้นเพื่อตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่ผิดปกติของกระบวนการ แผนภูมิควบคุมความคลาดเคลื่อนของการ

พยากรณ์สามารถแสดงคาบเวลาที่กระบวนการปรากฏการเปลี่ยนแปลงที่ผิดปกติได้อย่างชัดเจน ดังนั้นระบบควบคุมกระบวนการ การเชิงสถิติทำให้การแก้ปัญหาความผิดปกติของกระบวนการเป็นไปอย่างสมบูรณ์ ซึ่งนำไปสู่การลดลงของความผันแปรของกระบวนการ และกระบวนการอยู่ในสภาพของการควบคุมเชิงสถิติ

คำหลัก: ตัวกรองที่มีความแกร่ง, การปรับกระบวนการ, แผนภูมิควบคุม, การควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ, การควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรม

Project Code: MRG5180370

Project Title: Statistical Process Control System

Investigator: Dr. Pairoj Khawsithiwong

Department of Statistics, Faculty of Science, Silpakorn University

E-mail Address: pairoj@su.ac.th

Project Period: 2 years

Abstract

This research is to develop the statistical process control system involving a nonstationary linear stochastic process. State space model is used to describe characteristics and properties of the process. To estimate and forecast a change in the process, the filter is constructed by assuming the noise terms are multivariate generalized Laplace distributed. This filter possesses a robust property to outliers in the noise terms such that a magnitude of process change can be approximated precisely. Including an adaptive factor, an effectiveness of the robust filter should be improved. An investigation of filter performance is established by Monte Carlo simulation. The results show that the robust filter with multi adaptive factors performs well in terms of both a mean squared state error and a convergence rate of mean squared state error.

Statistical process control system is introduced as an integration of a process adjustment in a conception of engineering process control and a control charting technique as a tool in statistical process control. To enhance an effectiveness of the statistical process control system, the robust filter should be applied. Process adjustment is obtained by linear stochastic control theory as the noise terms assumingly have multivariate generalized Laplace distributions. Then, the control input variable as a function of the robust state variable is provided to bring the process back to a target. However, the process adjustment does not ask to search for causes of process changes. Dealing with no elimination of causes, those changes may be occurred repeatedly. Thus, the control chart of forecast error obtained by the robust filter is constructed to monitor a process and to point out a time period when a process change is occurred. The

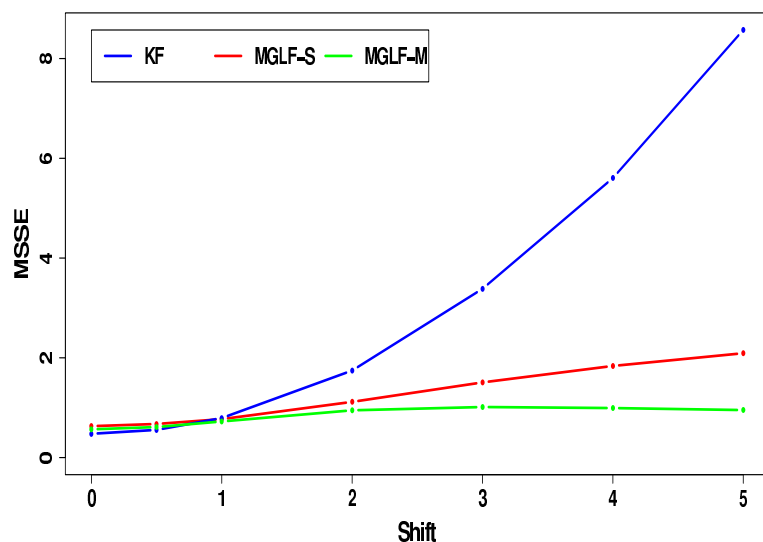
results show that statistical process control system yields a reduction in process variation and provides an absolute solution to maintain a process in a state of statistical control.

Keywords: Robust filter, Process adjustment, Control chart, Engineering process control, Statistical process control

Executive summary

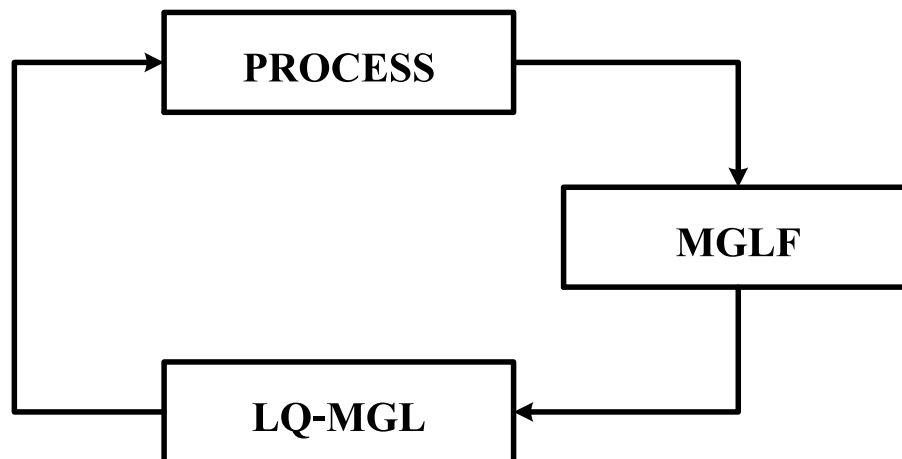
การควบคุมกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นไม่คงที่มักใช้กลยุทธ์การปรับกระบวนการ เพื่อนำกระบวนการกลับสู่ค่าเป้าหมายที่กำหนด เมื่อกระบวนการเบี่ยงเบนจากค่าเป้าหมาย แนวคิดดังกล่าวเป็นหนึ่งในวิธีการควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรม อย่างไรก็ตาม สาเหตุความผิดปกติของกระบวนการที่ส่งผลให้เกิดการเปลี่ยนแปลงจะไม่ถูกกำจัดจากกระบวนการ และยังคงปรากฏในกระบวนการ การควบคุมกระบวนการเชิงสถิติเป็นเทคนิคการปรับกระบวนการเช่นกัน แต่มุ่งตรวจจับ ค้นหา และกำจัดสาเหตุความผิดปกติ ภายใต้กระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นคงที่ ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ SPCS ถูกพัฒนาขึ้นโดยการผสมผสานเทคนิคการควบคุมกระบวนการทั้งสองข้างต้น เพื่อควบคุมกระบวนการให้อยู่บนค่าเป้าหมายที่กำหนด และอยู่ในสภาพการควบคุมเชิงสถิติ

กระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นสามารถอธิบายด้วยตัวแบบปริภูมิสถานะ ขนาดการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการสามารถประมาณหรือพยากรณ์ด้วยตัวกรองของตัวแบบปริภูมิสถานะ การเปลี่ยนแปลงของกระบวนการเป็นผลจากค่านอกกลุ่มในตัวรวบรวมนระบบ ซึ่งตัวรวบรวมนระบบมักถูกสมมติให้มีการแจกแจงหางยาวและหนากว่าการแจกแจงปกติ กรณีดังกล่าว ตัวกรองมาตรฐานคาลแมนจะเป็นตัวประมาณตัวแปรสถานะที่ไม่มีประสิทธิภาพ ตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งต่อค่านอกกลุ่มในตัวรวบรวมนระบบจึงถูกนำเสนอ เพื่อลดผลกระทบของค่านอกกลุ่มในการประมาณตัวแปรสถานะ



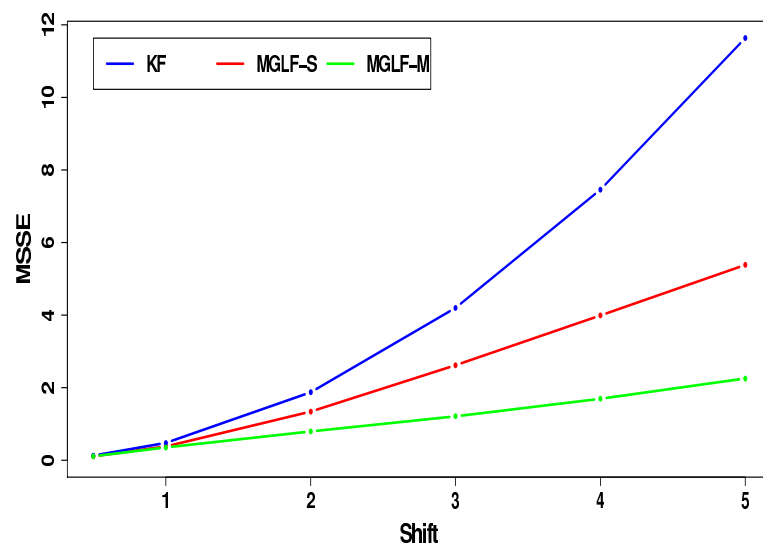
รูปที่ 1: MSSE ของตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M

งานวิจัยนี้ ตัวกรองที่มีความแข็งแกร่ง MGLF ถูกพัฒนาโดยสมมติตัวรวบรวมนระบบมีการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร ซึ่งการแจกแจงดังกล่าวสามารถอธิบายทั้งกระบวนการปกติและกระ



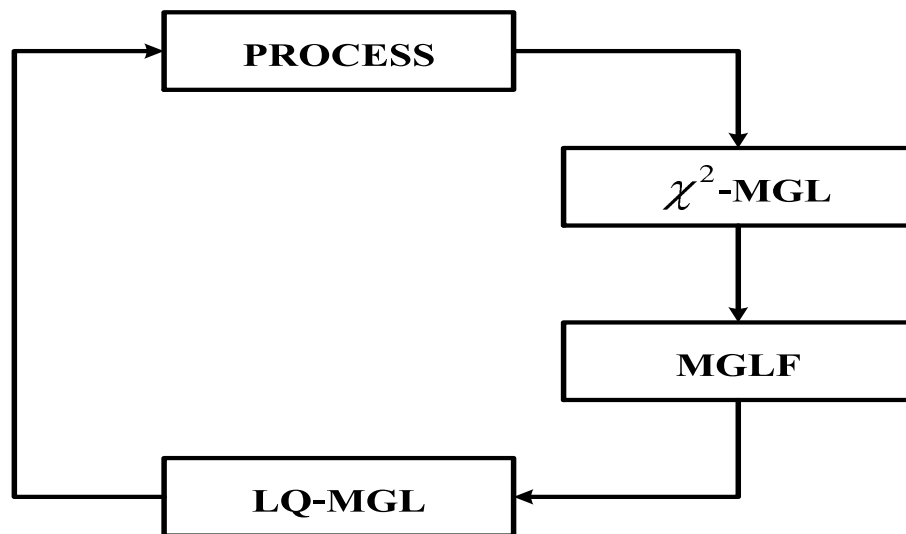
รูปที่ 2: ขั้นตอนการทำงานของควบคุม LQ-MGL

บวณการที่ปรากฏการเปลี่ยนแปลง ตัวกรอง MGLF ที่พัฒนาขึ้นอยู่กับตัวประกอบปรับค่า ซึ่งสามารถจำแนกออกเป็นตัวกรอง MGLF ที่มีตัวประกอบปรับค่าตัวเดียว MGLF-S กล่าวคือ ตัวกรอง MGLF ที่ให้น้ำหนักกับตัวแปรทุกตัวเท่ากัน แม้ว่าตัวแปรบางตัวจะไม่มี การเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ และตัวกรอง MGLF ที่มีตัวประกอบปรับค่าหลายตัว MGLF-M ซึ่งให้น้ำหนักกับตัวแปรแต่ละตัวแตกต่างกัน ขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงที่ปรากฏขึ้นในแต่ละตัวแปร



รูปที่ 3: MSSE ของการควบคุม LQ-MGL

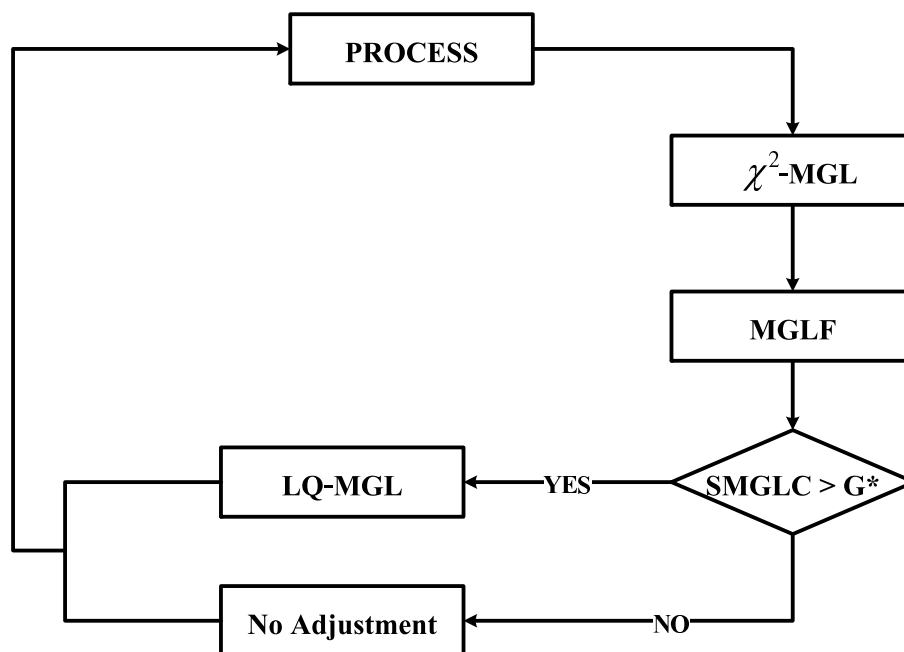
ประสิทธิภาพของตัวกรอง MGLF ถูกศึกษาด้วยการทดลองจำลองแบบมอนติคาร์โล พบว่าตัวกรอง MGLF-M มีประสิทธิภาพสูงสุด เมื่อพิจารณาค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของการประมาณตัวแปรสถานะ MSSE แสดงดังรูปที่ 1 ร่วมกับการพิจารณาอัตราการลู่เข้าของ MSSE ซึ่งตัวกรอง MGLF-M มีอัตราการลู่เข้าของ MSSE เร็วที่สุดเช่นกัน นั่นคือ ตัวกรอง MGLF-M เหมาะสมที่จะประยุกต์ในการอธิบายการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ



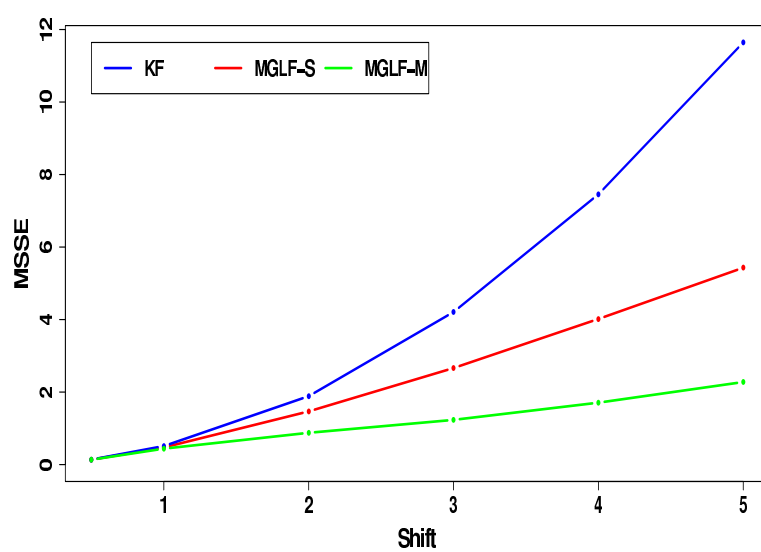
รูปที่ 4: ขั้นตอนการทำงานระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ SPCS

การปรับกระบวนการแบบป้อนกลับดำเนินการโดยการควบคุมสโตคาสติกเชิงเส้น LQ-MGL ซึ่งพัฒนาจากทฤษฎีการควบคุมสโตคาสติกเชิงเส้น การควบคุม LQ-MGL ประกอบด้วย การประมาณขนาดการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ และการประมาณขนาดการปรับกระบวนการกลับสู่ค่าเป้าหมายที่กำหนด การประมาณขนาดการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการขึ้นอยู่กับตัวกรอง MGLF นอกจากนี้ การประมาณขนาดการปรับกระบวนการเป็นฟังก์ชันของตัวประมาณตัวแปรสถานะของตัวกรอง MGLF ขั้นตอนการทำงานของการควบคุม LQ-MGL แสดงดังรูปที่ 2 การศึกษาประสิทธิภาพของการควบคุม LQ-MGL พบว่า การควบคุม LQ-MGL ที่ขึ้นอยู่กับตัวกรอง MGLF-M สามารถปรับกระบวนการกลับสู่ค่าเป้าหมายที่กำหนดได้อย่างรวดเร็วและมีประสิทธิภาพสูงสุด เมื่อขนาดการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการมีนัยสำคัญ ดังรูปที่ 3

ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ SPCS ประกอบด้วย การควบคุม LQ-MGL และแผนภูมิควบคุม χ^2 -MGL ซึ่งพิจารณาความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ แสดงดังรูปที่ 4 เพื่อตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการ ซึ่งจะนำไปสู่การค้นหาและกำจัดสาเหตุความผิดปกติดังกล่าว จนทำให้กระบวนการไม่ปรากฏการเปลี่ยนแปลงที่เป็นผลจากสาเหตุความผิดปกตินั้น อย่างไรก็ตาม เพื่อลดการปรับกระบวนการที่ไม่จำเป็น การประยุกต์ช่วงการปรับกระบวนการ กับการควบคุม LQ-MGL เรียกว่า การควบคุม LQ-MGL ที่ขึ้นอยู่กับช่วงการปรับกระบวนการ LQ-MGL(FDBA) ขั้นตอนการทำงานแสดงดังรูปที่ 5 แผนภูมิ SMGLC ที่กำหนดช่วงการปรับกระบวนการ G^* ถูกนำมาใช้เป็นเกณฑ์ตัดสินใจในการปรับกระบวนการ แผนภูมิ SMGLC ประยุกต์จากแผนภูมิควบคุม SMGLC ซึ่งสามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงได้ทั้งค่ากลางและการกระจายของกระบวนการ โดยที่ G^* จะถูกกำหนดจนทำให้แผนภูมิควบคุมมีโอกาสที่จะส่งสัญญาณผิดพลาดในการตรวจจับความผิดปกติ เมื่อกระบวนการอยู่ในการควบคุม จาก



รูปที่ 5: ขั้นตอนการทำงานระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ SPCS(FDBA)



รูปที่ 6: MSSE ของการควบคุม LQ-MGL(FDBA)

การศึกษา พบว่า แผนภูมิควบคุม SMGLC มีประสิทธิภาพในการตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการไม่แตกต่างจากการใช้คู่ของแผนภูมิควบคุมค่ากลางและแผนภูมิควบคุมการกระจาย ขณะที่แผนภูมิควบคุม SMGLC สามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงทั้งค่ากลางและการกระจายได้เพียงแผนภูมิเดียว

ประสิทธิภาพของการควบคุม LQ-MGL(FDBA) สามารถแสดงดังรูปที่ 6 พบว่า MSSE ของการควบคุม LQ-MGL(FDBA) ที่ขึ้นอยู่กับตัวกรอง MGLF-M มีค่าน้อยที่สุด และ MSSE มีค่าลดลงอย่างรวดเร็ว เมื่อขนาดการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการเพิ่มมากขึ้น หมายความว่า การควบคุม LQ-MGL(FDBA) ที่ขึ้นอยู่กับตัวกรอง MGLF-M มีประสิทธิภาพสูงสุดในการดึงกระบวนการกลับสู่ค่าเป้าหมายที่กำหนดรวดเร็วที่สุด นอกจากนี้ ประสิทธิภาพของการควบคุมยังขึ้นอยู่กับประสิทธิภาพของตัวกรอง และประสิทธิภาพของระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติขึ้นอยู่กับประสิทธิภาพของตัวกรองและประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม χ^2 -MGL ซึ่งทั้งเทคนิคตัวกรองและแผนภูมิควบคุมเป็นเทคนิคทางสถิติ ดังนั้นระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติจึงเป็นเทคนิคทางสถิติในการควบคุมกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นไม่คงที่

สารบัญ

สารบัญตาราง	xiv
สารบัญภาพ	xvi
1 ความสำคัญของปัญหา	1
1.1 ความสำคัญของปัญหา	1
1.2 การกำหนดปัญหาของโครงการวิจัย	3
1.2.1 เทคนิคตัวกรองที่มีความแกร่ง	3
1.2.2 ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ	4
1.3 วัตถุประสงค์	5
1.4 ลำดับเนื้อหาของรายงาน	5
2 วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง	7
2.1 ตัวแบบปริภูมิสถานะ	7
2.2 ตัวกรองคาลแมน	8
2.3 ตัวกรองที่มีความแกร่ง	11
2.4 การแจกแจงเส้นระดับวงรี	12
2.5 การแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร	14
2.6 ทฤษฎีการควบคุมสโตคาสติกเชิงเส้น	16
3 ตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร	20
3.1 เทคนิคตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร	20
3.2 การประยุกต์ตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร	24
3.3 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวกรอง	29

3.4	สรุป	49
4	ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ	50
4.1	แผนภูมิควบคุม MGL	52
4.1.1	ประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม MGL	55
4.2	การควบคุม LQ-MGL	64
4.2.1	ประสิทธิภาพของการควบคุม LQ-MGL	68
4.3	ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ	73
4.4	สรุป	75
5	สรุปผลการวิจัย	78
5.1	ตัวกรองที่มีความแกร่ง MGLF	78
5.2	ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ SPCS	79
5.3	ข้อเสนอแนะ	79
ก	ตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงปกติผสม	81
ข	A manuscript submitted to Communications in Statistics: Simulation and Computation	83
	เอกสารอ้างอิง	112

สารบัญตาราง

3.1	MSSE ของตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M เมื่อ $k = 2$	33
3.2	MSSE ของตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M เมื่อ $k = 5$	36
3.3	MSSE ของตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M เมื่อ $k = 10$	39
3.4	MSSE ของตัวกรอง KF, MIXTURE, MGLF-S และ MGLF-M จากความคลาดเคลื่อนของการประมาณเวกเตอร์สถานะ 10 คาบเวลาภายหลังระบบมีการเปลี่ยนแปลง เมื่อ $k = 5$	47
4.1	ARL ของแผนภูมิควบคุม SMGLC และ MEWMA เมื่อประยุกต์ตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M สำหรับการเปลี่ยนแปลงค่ากลาง	59
4.2	ARL ของแผนภูมิควบคุม SMGLC, MEWMC, EWMAD และ χ^2 เมื่อประยุกต์ตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M สำหรับการเปลี่ยนแปลงค่าความแปรปรวน . . .	60
4.3	ARL ของแผนภูมิควบคุม SMGLC, MEWMA & MEWMC, MEWMA & EWMAD และ MEWMA & χ^2 เมื่อประยุกต์ตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M สำหรับการเปลี่ยนแปลงค่ากลางและความแปรปรวนต่างๆ	61
4.4	MSSE ของการควบคุม LQ และการควบคุม LQ(FDBA)	70

สารบัญรูป

1	MSSE ของตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M	vii
2	ขั้นตอนการทำงานของการควบคุม LQ-MGL	viii
3	MSSE ของการควบคุม LQ-MGL	viii
4	ขั้นตอนการทำงานของระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ SPCS	ix
5	ขั้นตอนการทำงานของระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ SPCS(FDBA)	x
6	MSSE ของการควบคุม LQ-MGL(FDBA)	x
1.1	การผสมผสานการควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรมและการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ . .	2
1.2	ระบบการผสมผสานการควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรมและการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ	3
2.1	แผนภาพความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปทวีคูณแปร .	15
3.1	ค่าของตัวประกอบปรับค่าที่สอดคล้องกับค่าน้อยที่สุดของค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อน กำลังสองของการประมาณเวกเตอร์สถานะ สำหรับระบบที่มีการเปลี่ยนแปลง	25
3.2	ผลกระทบของตัวประกอบปรับค่าต่อการประมาณเวกเตอร์สถานะ	26
3.3	พารามิเตอร์เซฟ และประสิทธิภาพของตัวกรอง MGLF	30
3.4	MSSE ของตัวกรอง MGLF-S, MGLF-M และ KF สำหรับคู่ลำดับ (σ_W^2, σ_V^2)	42
3.5	MSSE ของตัวกรอง MGLF-S, MGLF-M และ KF สำหรับคู่ลำดับ (σ_W^2, ρ_W) . . .	43
3.6	MSSE ของตัวกรอง MGLF-S, MGLF-M และ KF สำหรับคู่ลำดับ (σ_V^2, ρ_V)	44
3.7	MSSE ของตัวกรอง MGLF-S, MGLF-M และ KF สำหรับคู่ลำดับ (ρ_W, ρ_V)	45
3.8	อัตราการใช้ของ MSSE ของตัวกรอง MGLF-S, MGLF-M, MIXTURE และ KF สำหรับขนาดของการเปลี่ยนแปลง $\delta_M = 0, 0.5, 1, 2, 3, 4$ และ 5 กรณี $(\rho_W, \rho_V) =$ $(0.4, 0.4)$	48
4.1	ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ	51

4.2	ค่าพยากรณ์และความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ล่วงหน้า 1 คาบ สำหรับกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงค่ากลาง	53
4.3	แผนภูมิของตัวสถิติ M_t และ D_t สำหรับกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงค่ากลาง . .	54
4.4	แผนภูมิควบคุม EWMA-Q ของตัวกรอง MGLF-M เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ปรับเรียบ $\gamma = 0.1$ สำหรับกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงการกระจาย	55
4.5	แผนภูมิควบคุม SMGLC เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ปรับเรียบ $\gamma = 0.1$ สำหรับกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงค่ากลางและการกระจาย	56
4.6	ขั้นตอนการทำงานของการควบคุม LQ-MGL	66
4.7	ขั้นตอนการทำงานของการควบคุม LQ-MGL ที่ขึ้นอยู่กับช่วงการปรับกระบวนการ . .	67
4.8	ขั้นตอนการทำงานของระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ เมื่อกำหนดช่วงการปรับกระบวนการ	74
4.9	ผลลัพธ์การทำงานของระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ	76

บทที่ 1

ความสำคัญของปัญหา

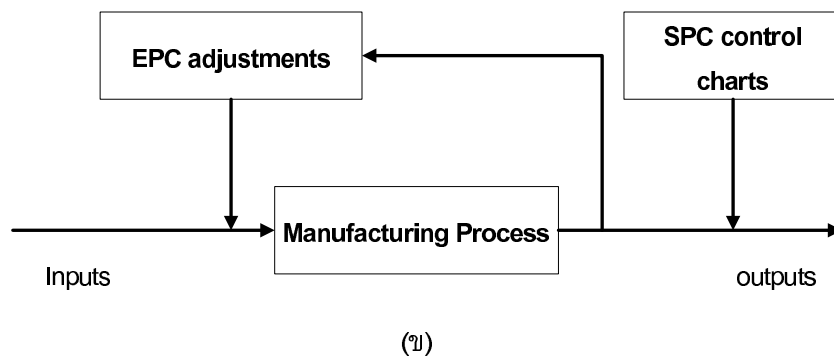
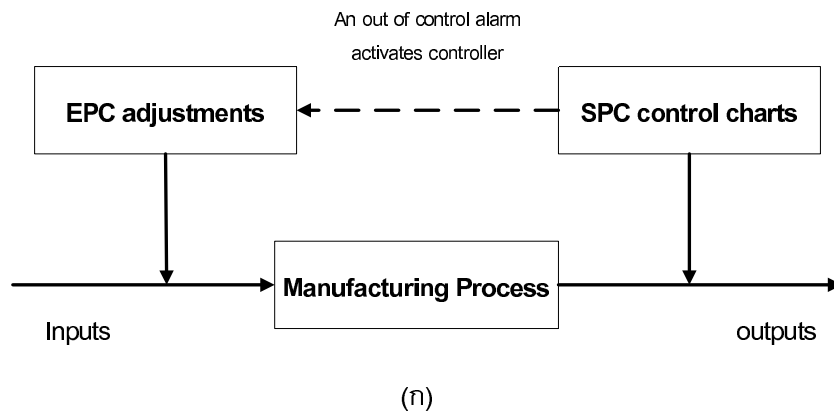
1.1 ความสำคัญของปัญหา

กระบวนการในอุตสาหกรรมปัจจุบันมีความซับซ้อนมากขึ้น ดังนั้นเทคนิคการควบคุมกระบวนการจึงได้รับการพัฒนาให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น เพื่อมุ่งลดความผันแปรของกระบวนการลง การควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ (statistical process control: SPC) และการควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรม (engineering process control: EPC) ถูกพัฒนาและประยุกต์ในสาขาที่แตกต่างกัน แต่มีเป้าหมายเดียวกันคือการลดความผันแปรของกระบวนการ SPC คือกลุ่มเครื่องมือทางสถิติที่นำมาใช้เพื่อตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการและค้นหาสาเหตุความผิดปกตินั้น ขณะที่ EPC เป็นเครื่องมือควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรมที่มุ่งลดความผันแปรของกระบวนการด้วยการปรับกระบวนการ (process adjustment) ให้อยู่ในสภาพควบคุมหรือเป้าหมาย (target)

แผนภูมิควบคุม (control chart) เป็นเครื่องมือหนึ่งที่มีประสิทธิภาพสูงและนิยมใช้ในการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติซึ่งถูกนำมาใช้เพื่อตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการโดยพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ (parameter) ของกระบวนการ กล่าวคือ ค่ากลางและค่าการกระจาย เมื่อสาเหตุความผิดปกติถูกกำจัด ความผันแปรของกระบวนการจะลดลง โดยปกติแผนภูมิควบคุมมีข้อสมมติ (assumption) ว่าข้อมูลต้องเป็นอิสระต่อกัน (uncorrelated data) แต่ในบางสถานการณ์ ข้อมูลอาจจะไม่เป็นไปตามข้อสมมติดังกล่าว ซึ่งส่งผลต่อประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมที่ลดลง การแก้ปัญหาดังกล่าวสามารถดำเนินการใน 2 แนวทาง กล่าวคือ

ก. เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลส่งผลต่อความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (standard error) ของตัวสถิติที่พิจารณา ดังนั้นขีดจำกัดควบคุม (control limits) ของแผนภูมิควบคุมจะถูกปรับด้วยค่าสหสัมพันธ์ของข้อมูล

ข. ภายใต้ข้อสมมติของข้อมูลที่เป็นอิสระต่อกัน ความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ล่วงหน้า 1 คาบ (innovation) ถูกพิจารณาจากรูปแบบความสัมพันธ์ของข้อมูล ซึ่งเป็นอิสระต่อกันใน

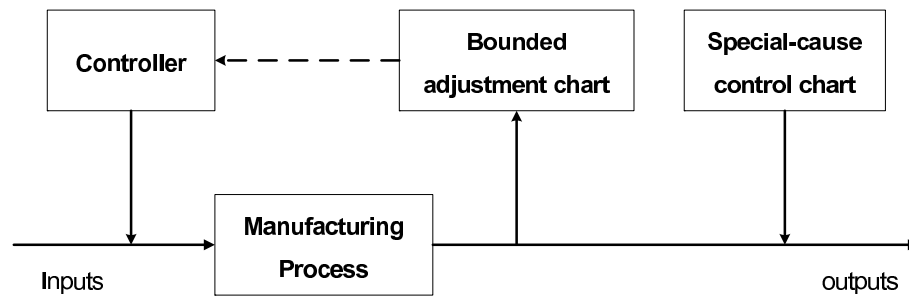


รูปที่ 1.1: การผสมผสานการควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรมและการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ

ทางทฤษฎี จากนั้นแผนภูมิควบคุมของส่วนเหลือจะถูกสร้างเพื่อใช้ตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการ

การปรับกระบวนการเป็นเทคนิคหนึ่งของ EPC ภายใต้แนวคิดการใช้ตัวแปรควบคุม (control variable) ในการชดเชย (compensate) ผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงปัจจัยต่างๆ ด้วยการปรับกระบวนการ เพื่อให้กระบวนการผลิตอยู่บนเป้าหมายที่กำหนด ดังนั้นการควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรมจะส่งผลให้ค่าการกระจายของกระบวนการผลิตลดลง

เนื่องจากการปรับกระบวนการทางวิศวกรรมไม่ได้กำจัดสาเหตุความผิดปกติของกระบวนการ ดังนั้นสาเหตุความผิดปกติดังกล่าวจะยังคงอยู่ในกระบวนการ ขณะที่การควบคุมกระบวนการเชิงสถิติพยายามค้นหาและกำจัดสาเหตุความผิดปกติเหล่านั้น ดังนั้นแนวคิดการผสมผสานการควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรมและการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติจึงเกิดขึ้น เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของการควบคุมคุณภาพของกระบวนการ รูปแบบแรก คือ การใช้แผนภูมิควบคุมเป็นตัวกรอง (filter) ในการกำหนดขนาดของการปรับกระบวนการผลิต แสดงดังรูปที่ 1.1 (ก) ส่วนรูปแบบที่สองแสดงดังรูปที่ 1.1 (ข) แผนภูมิควบคุมถูกใช้เพื่อตรวจจับความผิดปกติของผลผลิตจากกระบวนการ



รูปที่ 1.2: ระบบการผสมผสานการควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรมและการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ

Box & Paniagua-Quirónes (2007) เสนอระบบการผสมผสานการควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรมและการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ ซึ่งประกอบด้วยเทคนิคการปรับกระบวนการด้วยการใช้แผนภูมิควบคุม และเทคนิคการตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการด้วยแผนภูมิควบคุม แสดงดังรูปที่ 1.2 และ Box & Narasimhan (2010) เรียกกระบวนการผสมผสานเทคนิคการควบคุมกระบวนการนี้ว่า synergy control

โครงการวิจัยนี้มุ่งพัฒนาระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ (statistical process control system: SPCS) ที่ประกอบด้วยเทคนิคการปรับกระบวนการที่ขึ้นอยู่กับตัวกรองที่มีความแกร่งและแผนภูมิควบคุมสำหรับตรวจสอบความผิดปกติทั้งค่ากลางและการกระจายของกระบวนการสำหรับข้อมูลพหุตัวแปรที่มีสหสัมพันธ์ในตัวเอง (multivariate autocorrelated data)

1.2 การกำหนดปัญหาของโครงการวิจัย

1.2.1 เทคนิคตัวกรองที่มีความแกร่ง (robust filtering technique)

กระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้น (linear stochastic process) สามารถอธิบายได้ด้วยตัวแบบปริภูมิสถานะ (state space model) ซึ่งประกอบด้วยสมการระบบ (system equation) และสมการค่าวัด (measurement equation) การเปลี่ยนแปลงของระบบขึ้นอยู่กับเวกเตอร์สถานะ (state vector) และตัวรบกวนระบบ (system noise) ขณะที่ การเปลี่ยนแปลงของค่าวัดขึ้นอยู่กับเวกเตอร์สถานะและตัวรบกวนค่าวัด (measurement noise) ตัวกรองเชิงเส้น (linear filter) ที่นิยมใช้ในการประมาณค่าเวกเตอร์สถานะ คือ ตัวกรองคาลแมน (Kalman filter: KF) ซึ่งเป็นตัวกรองที่มีค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของการประมาณเวกเตอร์สถานะ (mean of squared state error: MSSE) น้อยที่สุด โดยปกติ ตัวรบกวนระบบและตัวรบกวนค่าวัดมักจะสมมติให้มีการแจกแจงปกติ (normal distribution) ถ้าตัวรบกวนใดปรากฏค่านอกกลุ่ม (outlier) ตัวรบกวนดังกล่าวมักจะถูกระบุว่ามีหางหนัก (heavy tails) กว่าหางของการแจกแจงปกติ กรณีนี้ KF จะเป็นตัวกรองที่ไม่มีประสิทธิภาพ

ดังนั้นตัวกรองที่มีความแกร่งจึงถูกพัฒนาขึ้นเพื่อรองรับปัญหาดังกล่าว โครงการวิจัยนี้พิจารณากระบวนการสโตคาสติกที่มีการเปลี่ยนแปลงค่ากลางของระบบซึ่งเกิดจากค่านอกกลุ่มของตัวรบกวนระบบ ดังนั้นตัวกรองที่มีความแกร่ง (robust filter) ต่อการเปลี่ยนแปลงค่ากลางของระบบจึงถูกพัฒนาขึ้นด้วยวิธีของเบย์ (Bayesian method) เมื่อตัวรบกวนระบบถูกสมมติว่ามีการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร (multivariate generalized Laplace distribution: MGL) เรียกว่า ตัวกรองที่มีความแกร่ง MGL (MGL robust filter: MGLF)

1.2.2 ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ (statistical process control system)

ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติเป็นการผสมผสานระหว่างเทคนิคการปรับกระบวนการและแผนภูมิควบคุม เทคนิคการปรับกระบวนการที่พิจารณา คือ การควบคุมเชิงเส้นรูปแบบกำลังสอง (linear quadratic control) ซึ่งประกอบด้วยการทำงาน 2 ส่วน คือ การประมาณเวกเตอร์สถานะเพื่ออธิบายการเปลี่ยนแปลงของระบบ และการประมาณค่าตัวแปรควบคุมเพื่อปรับค่ากลางของระบบกลับสู่เป้าหมายที่กำหนด เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของระบบเกิดจากค่านอกกลุ่มของตัวรบกวนระบบ นั้นหมายความว่า ตัวประมาณเวกเตอร์สถานะ (state estimate) ของ KF เป็นตัวประมาณที่ไม่มีประสิทธิภาพจึงไม่เหมาะสมที่จะนำมาใช้ในกรณีดังกล่าว ดังนั้นตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรองที่มีความแกร่งซึ่งสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของระบบได้อย่างมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของ KF การควบคุมเชิงเส้นรูปแบบกำลังสองเมื่อตัวรบกวนระบบถูกสมมติว่ามีการแจกแจง MGL (linear quadratic MGL control หรือ LQ-MGL control) จึงถูกพัฒนาขึ้น โดยที่ตัวแปรควบคุมขึ้นอยู่กับตัวประมาณเวกเตอร์สถานะที่มีความแกร่ง ซึ่งการควบคุมดังกล่าวสามารถปรับระบบกลับสู่เป้าหมายที่กำหนดได้รวดเร็ว และมีประสิทธิภาพมากขึ้น

เนื่องจากการปรับกระบวนการด้วยการควบคุม LQ-MGL จะพิจารณาปรับกระบวนการเมื่อระบบเปลี่ยนแปลงไปจากเป้าหมายที่กำหนด ซึ่งไม่พิจารณาสาเหตุความผิดปกติ ดังนั้นความผิดปกติดังกล่าวจะยังคงทำให้ระบบมีการเปลี่ยนแปลงไปจากเป้าหมายที่กำหนดต่อไป แผนภูมิควบคุมจึงถูกนำมาใช้เพื่อตรวจจับความผิดปกติดังกล่าว ซึ่งจะนำไปสู่การค้นหาสาเหตุความผิดปกติ นั้น แผนภูมิควบคุมถูกพัฒนาขึ้นจากค่าพยากรณ์ของค่าวัด ซึ่งเป็นฟังก์ชันของค่าพยากรณ์ที่มีความแกร่งของเวกเตอร์สถานะ เรียกว่า แผนภูมิควบคุม MGL (MGL control chart) โครงการวิจัยนี้มุ่งพัฒนาระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ ซึ่งประกอบด้วย การควบคุม LQ-MGL และแผนภูมิควบคุม MGL เพื่อปรับกระบวนการ และตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการ ตามลำดับ

1.3 วัตถุประสงค์

1. พัฒนาตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งสำหรับเวกเตอร์สถานะของตัวแบบปริภูมิสถานะ

ตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งถูกพัฒนาด้วยวิธีของเบย์ สำหรับกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นที่มีตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร รวมทั้งการศึกษาประสิทธิภาพของตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งที่พัฒนาขึ้น ด้วยเทคนิคการจำลองแบบมอนติคาร์โล

2. พัฒนาเทคนิคการปรับกระบวนการพหุตัวแปร (multivariate process adjustment) จากตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งสำหรับเวกเตอร์สถานะ

การควบคุมเชิงเส้นรูปแบบกำลังสองที่ขึ้นอยู่กับตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งถูกนำเสนอ และศึกษาประสิทธิภาพ

3. พัฒนาแผนภูมิควบคุมพหุตัวแปร (multivariate control chart) สำหรับการตรวจสอบทั้งค่ากลางและการกระจายของกระบวนการผลิต จากส่วนเหลือของตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งสำหรับเวกเตอร์สถานะ

แผนภูมิควบคุมสำหรับค่ากลางและการกระจายของกระบวนการถูกพัฒนาจากค่าพยากรณ์ค่าวัด และความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัด รวมทั้ง การศึกษาประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมที่พัฒนาขึ้น

4. พัฒนาระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ ซึ่งประกอบด้วยเทคนิคการปรับกระบวนการพหุตัวแปรจากตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งสำหรับเวกเตอร์สถานะ และแผนภูมิควบคุมพหุตัวแปรสำหรับการตรวจ สอบทั้งค่ากลางและการกระจายของกระบวนการผลิต

ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติถูกพัฒนาขึ้น สำหรับกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วย การควบคุมเชิงเส้นรูปแบบกำลังสองและแผนภูมิควบคุม ที่ขึ้นอยู่กับตัวกรองที่มีความแข็งแกร่ง พร้อมทั้งนำเสนอขั้นตอนการทำงานของระบบดังกล่าว

1.4 ลำดับเนื้อหาของรายงาน

บทที่ 2 ให้รายละเอียดเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานของโครงการวิจัยนี้ กล่าวคือ เทคนิคปริภูมิสถานะ ตัวกรองคาลแมน ตัวกรองที่มีความแข็งแกร่ง การควบคุมเชิงเส้นรูปแบบกำลังสอง และการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร ตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งต่อค่านอกกลูในตัวรบกวนระบบถูกนำเสนอ ในบทที่ 3 ตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งนี้พัฒนาขึ้นจากวิธีของเบย์ ขั้นตอนการทำงานของตัวกรอง

ที่มีความแกร่งนี้นำเสนอใน 2 กรณี คือ ตัวกรองที่มีความแกร่งที่มีตัวประกอบปรับค่าตัวเดียว (robust filter with single adaptive factor) และตัวกรองที่มีความแกร่งที่มีตัวประกอบปรับค่าหลายตัว (robust filter with multi adaptive factors) นอกจากนี้ การศึกษาประสิทธิภาพของตัวกรองที่มีความแกร่งที่พัฒนาขึ้นนำเสนอโดยการจำลองแบบมอนติคาร์โล

ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติถูกนำเสนอในบทที่ 4 ซึ่งประกอบด้วยการควบคุมเชิงเส้นรูปแบบกำลังสองและแผนภูมิควบคุม ที่ขึ้นอยู่กับตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรองที่มีความแกร่ง โดยพิจารณาทั้งกรณีการปรับกระบวนการอัตโนมัติ และการปรับกระบวนการด้วยการกำหนดค่าขอบเขตการปรับ สุดท้ายบทที่ 5 นำเสนอบทสรุปของโครงการวิจัยและข้อเสนอแนะรวมทั้งงานวิจัยที่อาจจะพัฒนาขึ้นในอนาคต

บทที่ 2

วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

เทคนิคปริภูมิสถานะเป็นเทคนิคการวิเคราะห์อนุกรมเวลาที่มีประสิทธิภาพ เนื่องจากเทคนิคนี้แสดงรูปแบบระบบที่สอดคล้องกับระบบที่แท้จริง ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการวิเคราะห์ระบบอย่างมีประสิทธิภาพ โดยปกติตัวกรอง KF ซึ่งเป็นตัวกรองที่มีลักษณะการคำนวณค่าแบบวนซ้ำมักถูกใช้ประมาณค่าตัวแปรสถานะ ซึ่งบ่งบอกสถานะของระบบ ตัวกรองนี้มีประสิทธิภาพ เมื่อตัวรบกวนในระบบมีการแจกแจงปกติ (Gaussian distribution) ถ้าตัวรบกวนดังกล่าวไม่มีการแจกแจงปกติ เช่น เมื่อตัวรบกวนในระบบมีค่านอกกลุ่ม การแจกแจงของตัวรบกวนมักสมมติว่ามีหางยาวและหนากว่าหางของการแจกแจงปกติ ซึ่งการวิเคราะห์อนุกรมเวลาที่มีค่านอกกลุ่มสามารถทำได้หลายวิธี เช่น การใช้เทคนิคตัวกรองที่มีความแข็งแกร่ง เพื่อลดผลกระทบของค่านอกกลุ่มต่อการประมาณและการพยากรณ์ค่าตัวแปรสถานะ ดังนั้นการวิเคราะห์อนุกรมเวลาด้วยเทคนิคปริภูมิสถานะ และตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งถูกนำเสนอ เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาต่อไป

2.1 ตัวแบบปริภูมิสถานะ

เทคนิคปริภูมิสถานะถูกเสนอเพื่อแก้ปัญหาการวิเคราะห์อนุกรมเวลา ภายใต้แนวคิดที่ว่า ระบบจะถูกอธิบายด้วยตัวแปรสถานะปัจจุบัน ซึ่งเป็นตัวแปรแบบบัญญัติที่แสดงคุณลักษณะของระบบ และรวบรวมสารสนเทศทั้งหมดของระบบในอดีต โดยพิจารณาจากค่าสังเกต เนื่องจากตัวแปรสถานะปัจจุบันขึ้นอยู่กับตัวแปรสถานะก่อนหน้าหนึ่งคาบซึ่งเป็นไปตามสมบัติของมาร์คอฟ ตัวแบบปริภูมิสถานะของกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นสำหรับอนุกรมเวลาแบบไม่ต่อเนื่อง (discrete time series) ซึ่งประกอบด้วยสมการระบบ และสมการค่าวัด กล่าวคือ

$$X_{t+1} = AX_t + BW_t$$

$$Y_t = CX_t + V_t$$

เมื่อ X_t คือ เวกเตอร์สถานะ ขนาด $r \times 1$, Y_t คือ เวกเตอร์ค่าวัด ขนาด $k \times 1$, W_t คือ เวกเตอร์ตัวรบกวนระบบ ขนาด $l \times 1$, V_t คือ เวกเตอร์ตัวรบกวนค่าวัด ขนาด $k \times 1$ และ A , B และ C คือ เมทริกซ์คงที่ ขนาด $r \times r$, $r \times l$ และ $k \times r$ ตามลำดับ

Aoki (1987) อธิบายสมบัติของระบบข้างต้น สมบัติข้อแรก คือ ความเสถียร (stability) กล่าวคือ ระบบจะเสถียร ถ้าค่าเฉพาะ (eigen value) ทุกค่าของเมทริกซ์ A มีค่าอยู่ภายในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย (unit circle) บนระนาบเชิงซ้อน (complex plane) หรืออาจกล่าวได้ว่า เมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (non-singular matrix) สมบัติข้อที่สอง คือ สมบัติของการสังเกต (observability) พิจารณาจากเมทริกซ์ A และ C กล่าวคือ ถ้าคู่ของเมทริกซ์ทั้งสองมีสมบัติของการสังเกต เมทริกซ์สมบัติของการสังเกต (observability matrix),

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{r-1} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

มีค่าลำดับชั้น (rank) เท่ากับ มิติของเวกเตอร์สถานะ สมบัติข้อสุดท้าย คือ สมบัติของการควบคุม (controllability) กล่าวคือ ถ้าคู่ของเมทริกซ์ A และ B มีสมบัติของการควบคุม เมทริกซ์สมบัติของการควบคุม (controllability matrix),

$$R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{r-1}B & \dots \end{bmatrix}$$

มีค่าลำดับชั้น เท่ากับ มิติของเวกเตอร์สถานะ จากสมบัติของระบบข้างต้น ถ้าระบบเสถียรแล้ว เวกเตอร์สถานะจะมีมิติเล็กที่สุด เมื่อระบบมีสมบัติของการสังเกต และสมบัติของการควบคุม (Kalman 1960)

2.2 ตัวกรองคาลแมน

ในปี ค.ศ. 1960 คาลแมนได้เสนอตัวกรองเชิงเส้นเพื่อการประมาณและการพยากรณ์ค่าตัวแปรสถานะ สำหรับกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้น เรียกว่า ตัวกรอง KF ซึ่งเป็นตัวกรองที่มีค่าความคลาดเคลื่อนโดยเฉลี่ยของการประมาณน้อยที่สุด ภายใต้แนวคิดของเทคนิคฉายเชิงตั้งฉาก (orthogonal projection technique) พิจารณาระบบสโตคาสติกเชิงเส้นที่พารามิเตอร์ของระบบเปลี่ยนแปลงตามเวลา และตัวรบกวนมีการแจกแจงปกติ

$$X_{t+1} = A_t X_t + W_t$$

$$Y_t = C_t X_t + V_t$$

เมื่อ W_t และ V_t คือ ตัวรบกวนระบบและตัวรบกวนค่าวัดซึ่งมีการแจกแจงปกติที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย เท่ากับ เวกเตอร์ศูนย์ และ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม เท่ากับ $\Sigma_{W(t)}$ และ $\Sigma_{V(t)}$ ตามลำดับ และเป็นอิสระซึ่งกันและกัน

ตัวกรอง KF สามารถจำแนกการคำนวณออกเป็น 2 ขั้นตอน คือ การพยากรณ์และการประมาณค่าตัวแปรสถานะ กล่าวคือ

- การพยากรณ์ตัวแปรสถานะ (Time update):

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{t|t-1} &= A_{t-1}\widehat{X}_{t-1|t-1} \\ P_{t|t-1} &= A_{t-1}P_{t-1|t-1}A'_{t-1} + \Sigma_{W(t-1)}\end{aligned}$$

- การประมาณตัวแปรสถานะ (Measurement update):

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{t|t} &= \widehat{X}_{t|t-1} + K_t(Y_t - C_t\widehat{X}_{t|t-1}) \\ P_{t|t} &= (I - K_tC_t)P_{t|t-1} \\ \text{และ } K_t &= P_{t|t-1}C'_t(C_tP_{t|t-1}C'_t + \Sigma_{V(t)})^{-1}\end{aligned}$$

เมื่อ $\widehat{X}_{t|t-1}$ คือ ค่าพยากรณ์ของเวกเตอร์สถานะล่วงหน้า 1 คาบ ณ เวลา $t-1$, $P_{t|t-1}$ คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เวกเตอร์สถานะล่วงหน้า 1 คาบ ณ เวลา $t-1$, $\widehat{X}_{t|t}$ คือ ตัวประมาณเวกเตอร์สถานะ ณ เวลา t , $P_{t|t}$ คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนของการประมาณเวกเตอร์สถานะ ณ เวลา t และ K_t คือ ตัวถ่วงน้ำหนักคาลแมน (Kalman gain) ณ เวลา t จากสมการข้างต้น พบว่า ตัวกรอง KF พิจารณาค่าสังเกตปัจจุบันและค่าพยากรณ์ตัวแปรสถานะก่อนหน้า 1 คาบเวลา เพื่อประมาณตัวแปรสถานะปัจจุบัน นอกจากนี้ ตัวกรอง KF ยังมีประสิทธิภาพในการคำนวณ เนื่องจากตัวกรอง KF เป็นการคำนวณแบบวนซ้ำ ซึ่งไม่ต้องการค่าสังเกตทั้งหมดในอดีตมาใช้ประมาณตัวแปรสถานะในแต่ละขั้นตอน (Haykin 2001) และสมการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า l คาบ คือ

$$\widehat{Y}_{t+l|t} = C_{t+l}A^l\widehat{X}_{t|t}, \quad A^l = \prod_{j=1}^l A_{t+l-j}$$

และเมทริกซ์ความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า l คาบ เท่ากับ

$$\Sigma_{Y_{t+l}-\widehat{Y}_{t+l|t}} = C_{t+l}P_{t+l|t}C'_{t+l} + \Sigma_{V(t+l)}$$

เมื่อ $P_{t+l|t} = A^lP_{t|t}(A^l)' + \sum_{j=1}^l A^{l-j}\Sigma_{W(t+j-1)}(A^{l-j})'$ และ $A^0 = I$ พบว่า ค่าพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า l คาบ ขึ้นอยู่กับค่าพยากรณ์ของตัวแปรสถานะล่วงหน้า 1 คาบ ณ เวลา t

นอกจากเทคนิคภาพฉายเชิงตั้งฉากที่ใช้ในการพัฒนาตัวกรอง KF สำหรับกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้น ยังปรากฏตัวกรองเชิงเส้นที่พัฒนาจากเทคนิคอื่นๆ เช่น Cox (1964) เสนอขั้นตอนการทำงาน (algorithm) ของการประมาณตัวแปรสถานะที่ทำให้ภาวะน่าจะเป็นของการแจกแจงภายหลัง (posterior distribution) ของตัวแปรสถานะมีค่ามากที่สุด เมื่อระบบซับซ้อนมากขึ้น เช่น ระบบที่ไม่ใช่เชิงเส้น (non-linear system) วิธีนี้อาจจะมีประโยชน์ เนื่องจากวิธีนี้อาศัยการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์เป็นหลัก

ตัวกรองเชิงเส้นที่พัฒนาจากเทคนิคของเบย์ (Bayesian technique) (Harrison & Stevens 1971, Meinhold & Singpurwalla 1983) พิจารณาการแยกส่วนประกอบของการแจกแจงภายหลัง กล่าวคือ

$$P(X_t|Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_0) \propto P(Y_t|X_t) \times P(X_t|Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_0)$$

เมื่อ $P(X_t|Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_0)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นภายหลัง (posterior probability distribution function) ของเวกเตอร์สถานะ, $P(X_t|Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_0)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นก่อนหน้า (prior probability distribution function) ของเวกเตอร์สถานะ และ $P(Y_t|X_t)$ คือ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (likelihood function) ของเวกเตอร์ค่าวัด จากความสัมพันธ์ข้างต้น พบว่า ตัวแปรสถานะปัจจุบันขึ้นอยู่กับเวกเตอร์ค่าวัดปัจจุบันและเวกเตอร์สถานะก่อนหน้า เทคนิคของเบย์ทำให้สามารถอธิบายความหมายเชิงสถิติของตัวกรองเชิงเส้นให้เข้าใจง่ายขึ้น และการประมาณตัวแปรสถานะยังสามารถอธิบายได้ด้วยแนวคิดของกระบวนการเรียนรู้เชิงสถิติ (statistical learning process)

Weidemann (1969) พัฒนาตัวกรองจากเทคนิคทฤษฎีสารสนเทศ (information theoretic technique) ซึ่งเป็นตัวกรองที่ทำให้ตัวสถิติสารสนเทศร่วมกัน (mutual information) ของความคลาดเคลื่อนของการประมาณตัวแปรสถานะมีค่ามากที่สุด กล่าวคือ ตัวกรองที่ทำให้การลดลงของความไม่แน่นอน (uncertainty) ของตัวแปรสถานะ เมื่อเปรียบเทียบกับความไม่แน่นอนของตัวประมาณตัวแปรสถานะ Tomita, Omatu & Soeda (1976) แสดงว่า การหาค่ามากที่สุดของตัวสถิติสารสนเทศร่วมกันเปรียบเสมือนการหาค่าน้อยที่สุดของความไม่แน่นอนของความคลาดเคลื่อนของการประมาณตัวแปรสถานะ นอกจากนี้ Kalata & Priemer (1979) แสดงว่า ตัวกรองคาลแมนเป็นตัวกรองที่พิจารณาจากค่าน้อยที่สุดของค่ามากที่สุดของความคลาดเคลื่อนของเอนโทรปี (entropy) เมื่อตัวระบบมีการแจกแจงปกติ

2.3 ตัวกรองที่มีความแกร่ง

ตัวกรอง KF เป็นตัวกรองเชิงเส้นที่ทำให้ความคลาดเคลื่อนของการประมาณตัวแปรสถานะมีค่าน้อยที่สุด เมื่อตัวรบกวนมีการแจกแจงปกติ อย่างไรก็ตาม ถ้าตัวรบกวนไม่มีการแจกแจงปกติ ตัวกรอง KF จะไม่เป็นตัวกรองเชิงเส้นที่ทำให้ความคลาดเคลื่อนของการประมาณตัวแปรสถานะมีค่าน้อยที่สุด จากมุมมองของเบย์ การกำหนดการแจกแจงภายหลังของตัวแปรสถานะจะทำได้ยาก ดังนั้นเทคนิคต่าง ๆ จึงถูกพัฒนาขึ้น เพื่อประมาณการแจกแจงภายหลังของตัวแปรสถานะซึ่งจะนำไปใช้ในการหาตัวประมาณของตัวแปรสถานะ และตัวกรองที่ได้จะเป็นตัวกรองที่มีความแกร่ง

Sorenson & Stubberud (1968) เสนอวิธีการประมาณการแจกแจงภายหลังของตัวแปรสถานะด้วย Edgeworth expansion ซึ่งขึ้นอยู่กับโมเมนต์ (moment) ของการแจกแจง อย่างไรก็ตาม วิธีนี้จะให้การแจกแจงภายหลังที่ประมาณได้อาจมีค่าไม่เป็นบวกเสมอ ดังนั้น Sorenson & Alspach (1971) จึงสมมติการแจกแจงภายหลังของตัวแปรสถานะด้วยการแจกแจงปกติผสม (mixture Gaussian distribution) เพื่อหลีกเลี่ยงข้อบกพร่องของวิธี Edgeworth expansion เนื่องจากการแจกแจงของค่านอกกลุ่มจะมีหางยาวและหนากว่าหางของการแจกแจงปกติ ดังนั้น Meinhold & Singpurwalla (1989) จึงประมาณการแจกแจงภายหลังของตัวแปรสถานะด้วยการแจกแจงที่ผสม (mixture t distribution) อย่างไรก็ตาม เมื่อการแจกแจงผสมถูกใช้ จำนวนการแจกแจงผสมที่เพิ่มขึ้นในแต่ละครั้งของการประมาณจะมีลักษณะคล้ายฟังก์ชันเอ็กโปเนนเชียล ซึ่งส่งผลกระทบต่อจำนวนที่ซับซ้อนและเวลาที่ใช้ รวมทั้งหน่วยความจำจำนวนมาก ดังนั้นการแจกแจงผสมที่นำมาใช้ต้องเป็นการรวมกันของการแจกแจงที่มีจุดสูงสุดเพียงจุดเดียว เพื่อหลีกเลี่ยงข้อบกพร่องดังกล่าว

โดยปกติ ตัวแปรที่มีค่านอกกลุ่มจะมีความแปรปรวนที่สูงกว่าปกติ ดังนั้นตัวกรองเชิงเส้นอาจพัฒนาโดยสมมติความแปรปรวนของตัวรบกวนพิจารณาจากผลรวมถ่วงน้ำหนักของความแปรปรวนของตัวรบกวนที่มีค่านอกกลุ่ม $\Sigma_{outlier}$ และความแปรปรวนของตัวรบกวนปกติ $\Sigma_{nominal}$ กล่าวคือ

$$\Sigma = (1 - \gamma)\Sigma_{nominal} + \gamma\Sigma_{outlier}$$

เมื่อ γ คือ ความน่าจะเป็นที่จะเกิดค่านอกกลุ่ม วิธีนี้มีข้อบกพร่อง คือ ผลกระทบของ γ ต่อค่าวัดของทุกตัวแปร กล่าวคือ สารสนเทศของตัวแปรที่ไม่มีค่านอกกลุ่มจะสูญหาย เนื่องจากความแปรปรวนของตัวกรองมีค่ามากกว่าปกติ (Schick & Mitter 1994) ดูรายละเอียดเพิ่มเติมของวิธีนี้จาก Peña & Guttman (1988), Yatawara, Abraham & MacGregor (1991)

เทคนิคตัวกรองที่มีความแกร่งที่น่าสนใจอีกเทคนิคหนึ่งมีแนวคิดในการใช้ฟังก์ชันอิทธิพลที่มีขอบเขต (bounded influence function) ซึ่งปรากฏในหัวข้อการประมาณที่มีความแกร่ง (ro-

bust estimation) เพื่อลดผลกระทบของค่านอกกลุ่ม ฟังก์ชันอิทธิพลที่นำมาใช้สร้างตัวกรองที่มีความแกร่ง เช่น ฟังก์ชันสกอร์ (score function) (Masreliez 1975), ฟังก์ชันอิทธิพลที่ใช้ในการประมาณที่มีความแกร่งแบบมิน-แมกซ์ (Masreliez & Martin 1977), ตัวสถิติมัธยฐาน (Kirlin & Moghaddamjoo 1986) เป็นต้น เมื่อไม่ทราบการแจกแจงภายหลังของตัวแปรสถานะ การประยุกต์ฟังก์ชันสกอร์นั้นจะต้องประมาณค่าฟังก์ชันสกอร์ทุกคาบเวลา Niehsen (2002) เสนอตัวกรองที่ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันสกอร์ โดยสมมติว่าตัวรบกวนมีการแจกแจงปกติทั่วๆไป (generalized Gaussian distribution) ซึ่งทำให้สามารถประมาณฟังก์ชันสกอร์ที่ใช้คำนวณตัวกรองทุกคาบเวลาได้ อย่างไรก็ตาม การใช้ฟังก์ชันอิทธิพลจะทำให้ค่าประมาณตัวแปรสถานะไม่ต่อเนื่องเมื่อฟังก์ชันอิทธิพลมีค่าเพิ่มขึ้นและลดลงอย่างรวดเร็ว (Schick & Mitter 1994)

นอกจากนี้ เมื่อระบบมีการเปลี่ยนแปลงจากสถานะหนึ่งไปสู่สถานะหนึ่ง ตัวรบกวนระบบมักจะสมมติว่าไม่มีการแจกแจงปกติ ดังนั้นตัวกรองปรับค่า (adaptive filter) จะให้ตัวประมาณเวกเตอร์สถานะที่สอดคล้องกับระบบที่เปลี่ยนแปลง กล่าวคือ ตัวกรองปรับค่ามุ่งลดความคลาดเคลื่อนด้วยการปรับค่าตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรองคาลแมนให้สอดคล้องกับระบบที่แท้จริง เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวรบกวนระบบจะต้องถูกประมาณค่าทุกคาบเวลาเพื่อปรับค่าตัวกรอง (Mehra 1972) เสนอวิธีประมาณเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมดังกล่าวไว้ 4 วิธี คือ วิธีการประมาณแบบเบย์ (Bayesian estimation) วิธีการประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood estimation) วิธีการประมาณด้วยสหสัมพันธ์ (correlation method) และวิธีการประมาณด้วยความแปรปรวนร่วม (covariance-matching techniques) (Kirlin & Moghaddamjoo 1986) เสนอตัวกรองปรับค่าที่มีความแกร่งด้วยการประมาณเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวรบกวนระบบและค่าวัดจากข้อมูลในช่วงเวลาที่กำหนด (Yang & Gao 2006) พัฒนาตัวกรองปรับค่าด้วยการถ่วงน้ำหนักที่เหมาะสมต่อความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ โดยที่ตัวถ่วงน้ำหนักพิจารณาจากขนาดความคลาดเคลื่อนของตัวรบกวน

2.4 การแจกแจงเส้นระดับวงรี

การแจกแจงเส้นระดับวงรี (elliptically contoured distribution: EC) เป็นกลุ่มการแจกแจงสมมาตรที่มีหางของเส้นโค้งการแจกแจงสัมพันธ์กับการแจกแจงปกติ กำหนดเวกเตอร์สุ่ม (random vector) Y ขนาด $k \times 1$, เวกเตอร์คงที่ μ ขนาด $k \times 1$ และเมทริกซ์ที่ไม่เป็นลบแน่นอน (nonnegative definite matrix) Σ ขนาด $k \times k$ ถ้าเวกเตอร์สุ่ม Y มีการแจกแจง EC ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย μ , เมทริกซ์พารามิเตอร์สเกล (scale parameter matrix) Σ และตัวก่อกำเนิดคุณลักษณะ (characteristic generator) g เขียนแทนด้วย $Y \sim EC_k(\mu, \Sigma; g)$ และฟังก์ชัน

ลักษณะ (characteristic function) ของ $Y - \mu$ คือ

$$\phi_Y(t) = \exp(it'\mu)g(t'\Sigma t)$$

เมื่อ $g(\cdot)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรจำนวนจริง นอกจากนี้ เวกเตอร์สุ่ม Y ที่มีการแจกแจง EC ยังสามารถแสดงในรูปแบบสโตคาสติก (stochastic representation) คือ

$$Y \stackrel{d}{=} \mu + RCU$$

เมื่อ " $\stackrel{d}{=}$ " คือ ความเท่ากันในการแจกแจง, เมทริกซ์ C คือ เมทริกซ์ขนาด $k \times k$ ที่พิจารณาจาก $\Sigma = CC'$, เวกเตอร์สุ่ม U มีการแจกแจงยูนิฟอร์ม k ตัวแปรบนช่วง $[0, 1]$ และตัวแปรสุ่ม $R = \sqrt{(Y - \mu)'\Sigma^{-1}(Y - \mu)}$ ซึ่งเป็นอิสระต่อเวกเตอร์สุ่ม U ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม (joint density function) ของเวกเตอร์สุ่ม Y คือ

$$f(y) = h_k |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} g((y - \mu)'\Sigma^{-1}(y - \mu))$$

เมื่อ h_k คือ ค่าคงที่มาตรฐาน (normalizing constant) ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมข้างต้นมีเส้นระดับของความหนาแน่นความน่าจะเป็นมีลักษณะวงรี และการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม R กำหนดโดย

$$f(r) = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} r^{k-1} g(r^2)$$

เวกเตอร์ค่าคาดหวังและเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของเวกเตอร์สุ่ม Y คือ

$$E(Y) = \mu$$

และ $Cov(Y) = \frac{E(R^2)}{k} \Sigma$

นอกจากนี้ การแจกแจงส่วนริม (marginal distribution) และการแจกแจงที่มีเงื่อนไข (conditional distribution) ของการแจกแจง EC ยังคงมีคุณสมบัติเช่นเดียวกับการแจกแจง EC

กำหนดเวกเตอร์สุ่ม $Y'_{k \times 1} = (Y_{1(k_1 \times 1)}, Y_{2((k-k_1) \times 1)})$ มีการแจกแจง EC ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\mu'_{k \times 1} = (\mu_{1(k_1 \times 1)}, \mu_{2((k-k_1) \times 1)})$ และเมทริกซ์พารามิเตอร์สเกล

$$\Sigma_{k \times k} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11(k_1 \times k_1)} & \Sigma_{12(k_1 \times (k-k_1))} \\ \Sigma_{21((k-k_1) \times k_1)} & \Sigma_{22((k-k_1) \times (k-k_1))} \end{bmatrix}$$

เวกเตอร์สุ่ม Y_1 เมื่อกำหนด $Y_2 = y_2^*$ สามารถแสดงในรูปแบบสโตคาสติก

$$Y_1|Y_2 = y_2^* \stackrel{d}{=} \mu_{1.2} + R_{q(y_2^*)} C_{11.2} U$$

ซึ่งมีการแจกแจง EC กล่าวคือ $Y_1|Y_2 = y_2^* \sim EC_{k_1}(\mu_{1.2}, \Sigma_{11.2}; g_{q(y_2^*)}^{k_1})$ เมื่อ

$$\begin{aligned}\mu_{1.2} &= \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(y_2^* - \mu_2) \\ \Sigma_{11.2} &= C_{11.2}C'_{11.2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \\ q(y_2^*) &= (y_2^* - \mu_2)' \Sigma_{22}^{-1} (y_2^* - \mu_2) \\ g_{q(y)}(v) &= \frac{g^{p+1}(v + q(y))}{g^p(q(y))} \\ q(y) &= (y - \mu)' \Sigma^{-1} (y - \mu)\end{aligned}$$

และ $g^p(v)$ กำหนดโดย

$$g^p(v) = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\Gamma(\frac{p}{2})} \int r^{p-1} g^{p+1}(r^2 + v) dr, \quad v \geq 0$$

รวมทั้ง $R(a^2)$ เมื่อ $a \geq 0$ เป็นอิสระต่อเวกเตอร์สุ่ม U ซึ่งมีการแจกแจงยูนิฟอร์ม k_1 ตัวแปรบนช่วง $[0, 1]$ และการแจกแจงของ $R_{q(y_2^*)}$ คือ

$$R_{q(y_2^*)} \stackrel{d}{=} (R^2 - q(y_2^*))^{\frac{1}{2}} | Y_2 = y_2^*$$

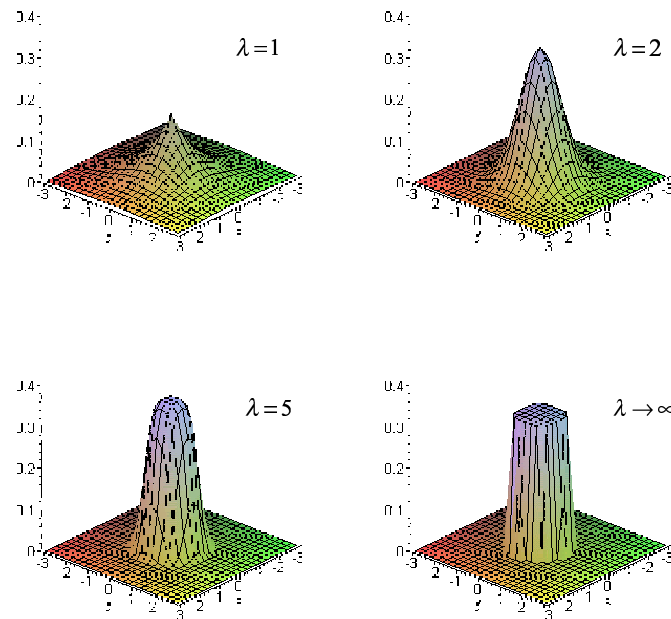
และ $g_{q(y_2^*)}$ คือ ตัวก่อกำเนิดคุณลักษณะที่ขึ้นอยู่กับเวกเตอร์สุ่ม Y_1 ดูรายละเอียดเพิ่มเติมจาก Fang, Kotz & Ng (1990), Liu & Dey (2004)

2.5 การแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร

การแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร (Ernst 1998) เป็นกลุ่มของการแจกแจงความหนาแน่นของความน่าจะเป็นพหุตัวแปร (multivariate probability density function) ซึ่งรูปร่างโค้งการแจกแจงขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์เชฟ (shape parameter: λ) ดังนั้นค่าของพารามิเตอร์เชฟสามารถกำหนดการแจกแจงต่างๆ เช่น ถ้า $\lambda = 1$ จะได้การแจกแจงลาปลาพหุตัวแปร ถ้า $\lambda = 2$ จะได้การแจกแจงปกติพหุตัวแปร และเมื่อ $\lambda \rightarrow \infty$ จะได้การแจกแจงยูนิฟอร์มพหุตัวแปร

กำหนด Y คือ เวกเตอร์สุ่มขนาด $k \times 1$, μ คือ เวกเตอร์คงที่ขนาด $k \times 1$ และ Σ คือ เมทริกซ์ที่ไม่เป็นลบแน่นอนขนาด $k \times k$ ถ้าเวกเตอร์สุ่ม Y มีการแจกแจง MGL ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย μ , เมทริกซ์พารามิเตอร์สเกล Σ และพารามิเตอร์สเกล λ เขียนแทนด้วย $Y \sim MGL_k(\mu, \Sigma, \lambda)$ และฟังก์ชันความหนาแน่นร่วม คือ

$$f(y) = \frac{\lambda \Gamma(\frac{k}{2})}{2\pi^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{\lambda})} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp\{ -[(y - \mu)' \Sigma^{-1} (y - \mu)]^{\frac{\lambda}{2}} \}, \quad \lambda > 0$$



รูปที่ 2.1: แผนภาพความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร

เมื่อ $\Gamma(\cdot)$ คือ ฟังก์ชันแกมมา เวกเตอร์ค่าคาดหวังและเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของเวกเตอร์สุ่ม Y ที่มีการแจกแจง MGL คือ

$$E(Y) = \mu$$

และ

$$Cov(Y) = \frac{\Gamma(\frac{k+2}{\lambda})}{k\Gamma(\frac{k}{\lambda})} \Sigma$$

รูปที่ 2.1 แสดงแผนภาพความหนาแน่นของความน่าจะเป็นของการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร เมื่อพารามิเตอร์ $\lambda = 1, 2, 5$ และ ∞ จะได้ว่า เมื่อ $\lambda < 2$ การแจกแจงจะมีหางหนากว่าหางของการแจกแจงปกติ ถ้า $\lambda > 2$ การแจกแจงจะมีหางบาง (light tails) กว่าหางของการแจกแจงปกติ และเมื่อ $\lambda \rightarrow \infty$ การแจกแจงจะเข้าสู่การแจกแจงยูนิฟอร์ม

นอกจากนี้ การแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปรเป็นการแจกแจงในกลุ่มการแจกแจงเส้นระดับวงรี ดังนั้นการแจกแจง MGL จึงมีคุณสมบัติของการแจกแจง EC กล่าวคือ การแจกแจงส่วนริมและการแจกแจงที่มีเงื่อนไขของเวกเตอร์สุ่ม MGL ยังคงเป็นการแจกแจงในกลุ่มการแจกแจง EC ถ้า $Y \sim MGL_k(\mu, \Sigma, \lambda)$ ซึ่งสามารถเขียนในรูปของการแจกแจง EC คือ $Y \sim EC_k(\mu, \Sigma; g)$ เมื่อตัวก่อกำเนิดคุณลักษณะ $g(t) = \exp\left(-(t'\Sigma^{-1}t)^{\frac{\lambda}{2}}\right)$ และ $R = \sqrt{(Y - \mu)'\Sigma^{-1}(Y - \mu)}$ มีการแจกแจงแกมมานัยทั่วไป (generalized gamma distribution) ซึ่งพัฒนาโดย Stacy (1962)

และฟังก์ชันความหนาแน่น คือ

$$f(r) = \frac{\lambda}{\Gamma(\frac{k}{\lambda})} r^{k-1} \exp(-r^\lambda), \quad r > 0$$

เขียนแทนด้วย $R \sim G\Gamma(k, 1, \lambda)$ และค่าคาดหวังของ R^2 เท่ากับ $E(R^2) = \frac{\Gamma(\frac{k+2}{\lambda})}{\Gamma(\frac{k}{\lambda})}$

กำหนดเวกเตอร์สุ่ม $\mathbf{Y}'_{k \times 1} = (\mathbf{Y}_{1(k_1 \times 1)}, \mathbf{Y}_{2((k-k_1) \times 1)})$ ซึ่งสอดคล้องกับเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\boldsymbol{\mu}'_{k \times 1} = (\boldsymbol{\mu}_{1(k_1 \times 1)}, \boldsymbol{\mu}_{2((k-k_1) \times 1)})$ และเมทริกซ์พารามิเตอร์สเกล

$$\boldsymbol{\Sigma}_{k \times k} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11(k_1 \times k_1)} & \boldsymbol{\Sigma}_{12(k_1 \times (k-k_1))} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21((k-k_1) \times k_1)} & \boldsymbol{\Sigma}_{22((k-k_1) \times (k-k_1))} \end{bmatrix}$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไข (conditional probability density function)

ของเวกเตอร์สุ่ม MGL $\mathbf{Y}_1 | \mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_2^*$ คือ

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2^*) &= \frac{\Gamma(\frac{k}{2})\Gamma(\frac{k-k_1}{\lambda})}{\pi^{\frac{k_1}{2}} \Gamma(\frac{k}{\lambda})\Gamma(\frac{k-k_1}{2})} |\boldsymbol{\Sigma}_{11.2}|^{-\frac{1}{2}} \\ &\exp\{ -[(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_{1.2})' \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{-1} (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_{1.2}) + (\mathbf{y}_2^* - \boldsymbol{\mu}_2)' \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\mathbf{y}_2^* - \boldsymbol{\mu}_2)]^{\frac{\lambda}{2}} \} \\ &+ [(\mathbf{y}_2^* - \boldsymbol{\mu}_2)' \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\mathbf{y}_2^* - \boldsymbol{\mu}_2)]^{\frac{\lambda}{2}}, \quad \lambda > 0 \end{aligned}$$

เมื่อ $\boldsymbol{\mu}_{1.2} = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\mathbf{y}_2^* - \boldsymbol{\mu}_2)$ และ $\boldsymbol{\Sigma}_{11.2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{21}$ เวกเตอร์ค่าคาดหวังและเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของเวกเตอร์สุ่มที่มีเงื่อนไข $\mathbf{Y}_1 | \mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_2^*$ คือ

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Y}_1 | \mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_2^*) &= \boldsymbol{\mu}_{1.2} \\ \text{และ} \quad \text{Cov}(\mathbf{Y}_1 | \mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_2^*) &= \frac{\Gamma(\frac{k_1+2}{\lambda})}{k_1 \Gamma(\frac{k_1}{\lambda})} \boldsymbol{\Sigma}_{11.2} \end{aligned}$$

นอกจากนี้ เวกเตอร์สุ่ม $\mathbf{Y}_1 | \mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_2^*$ ยังคงมีการแจกแจง MGL และมีสมบัติเช่นเดียวกับการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร

2.6 ทฤษฎีการควบคุมสโตคาสติกเชิงเส้น

ทฤษฎีการควบคุมสโตคาสติกเชิงเส้น (linear stochastic control theory) มุ่ง (ก) อธิบายคุณสมบัติเชิงสถิติของกระบวนการ (ข) ประมาณค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการ และ (ค) กำหนดการควบคุมที่เหมาะสม (optimal control) ซึ่งเป็นการควบคุมในลักษณะการควบคุมแบบป้อนกลับ (feedback control) พิจารณากระบวนการสโตคาสติกสำหรับเวลาไม่ต่อเนื่อง กำหนดโดยระบบสมการ

$$\mathbf{X}_{t+1} = f(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_t; t)$$

$$\mathbf{Y}_t = h(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t; t)$$

เมื่อ $f(\cdot; t)$ และ $h(\cdot; t)$ คือ ฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้น (nonlinear function) ของเวกเตอร์สถานะ X_t เวกเตอร์ตัวแปรควบคุมนำเข้า (control input vector) U_t และเวกเตอร์ตัวรบกวนระบบ W_t และเวกเตอร์ตัวรบกวนค่าวัด V_t การควบคุมแบบป้อนกลับสำหรับกระบวนการข้างต้นสามารถกำหนดโดยการประมาณเวกเตอร์ตัวแปรควบคุมนำเข้า และเวกเตอร์สถานะ ที่ทำให้ฟังก์ชันเป้าหมาย (objective functional) มีค่าน้อยที่สุด ด้วยเทคนิคโปรแกรมไดนามิกของเบลล์แมน (Bellman's dynamic programming technique) ฟังก์ชันเป้าหมายซึ่งอยู่ในรูปแบบกำลังสองของเวกเตอร์ตัวแปรควบคุมนำเข้า และเวกเตอร์สถานะ กล่าวคือ

$$J = E \left(\sum_{t=0}^N g(x_t, u_t; t) \right)$$

เมื่อ $g(\cdot; t)$ คือ ฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้น และ $E(\cdot)$ คือ ค่าคาดหวัง (expected value) ผลลัพธ์ซึ่งแสดงโดยทฤษฎีการแบ่งแยก (separation theorem) ทำให้การควบคุมที่เหมาะสมสามารถจำแนกออกเป็น 2 ส่วน คือ การประมาณเวกเตอร์สถานะ และการคำนวณค่าของเวกเตอร์ตัวแปรควบคุมนำเข้า ที่ทำให้การควบคุมแบบป้อนกลับมีค่าฟังก์ชันเป้าหมายน้อยที่สุด ถ้าสมมติตัวรบกวนมีการแจกแจงปกติ การควบคุมแบบป้อนกลับ เรียกว่า การควบคุมเชิงเส้นรูปแบบกำลังสอง เมื่อตัวรบกวนมีการแจกแจงปกติ (linear quadratic Gaussian control: LQG control)

พิจารณากระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้น กำหนดโดย

$$X_{t+1} = A_t X_t + B_t U_t + W_t$$

$$Y_t = C_t X_t + V_t$$

เมื่อ X_t , U_t และ Y_t คือ เวกเตอร์สถานะ, เวกเตอร์ตัวแปรควบคุมนำเข้า และเวกเตอร์ค่าวัด ตามลำดับ และ A_t , B_t และ C_t เป็นเมทริกซ์ค่าคงที่ รวมทั้งเวกเตอร์ตัวรบกวน W_t และ V_t สมมติว่ามีการแจกแจงปกติที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยเท่ากับเวกเตอร์ศูนย์ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\Sigma_{W(t)}$ และ $\Sigma_{V(t)}$ ตามลำดับ เวกเตอร์ตัวรบกวนทั้งสองเป็นอิสระต่อกันและไม่ขึ้นอยู่กับการวัด ดังนั้นเวกเตอร์ตัวแปรควบคุมนำเข้า U_t ที่ทำให้ฟังก์ชันเป้าหมาย J มีค่าน้อยที่สุด ฟังก์ชันเป้าหมายกำหนดโดย

$$J = E \left(X'_N Q_{1N} X_N + \sum_{t=0}^{N-1} (X'_t Q_{1t} X_t + U'_t Q_{2t} U_t) \mid Y_{N-1}, Y_{N-2}, \dots, Y_0 \right)$$

เมื่อ N คือ เวลา Q_{1t} และ Q_{2t} คือ เมทริกซ์ถ่วงน้ำหนักซึ่งเป็นเมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) ที่ไม่เป็นลบแน่นอน และ $E(\cdot \mid Y_{N-1}, Y_{N-2}, \dots, Y_0)$ คือ ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข เมื่อกำหนดเวกเตอร์ค่าวัดในอดีต

ณ เวลา $t = N$ ค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันเป้าหมายขึ้นอยู่กับเวกเตอร์สถานะ X_N เท่ากับ

$$V_N(X_N) = E(X'_N Q_{1N} X_N | Y_{N-1}, Y_{N-2}, \dots, Y_0)$$

และ ณ เวลา $t \leq N - 1$ ค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันเป้าหมายกำหนดโดย

$$V_j(X_j) = \min_{U_j} E(X'_j S_j X_j | Y_j, Y_{j-1}, \dots, Y_0) + c_j$$

เมื่อ S_j คือ เมทริกซ์ที่ไม่เป็นลบแน่นอน และ c_j คือ ค่าคงที่ ด้วยเทคนิคโปรแกรมไดนามิกของเบลล์แมน Rustagi (1994) จะได้

$$\begin{aligned} V_j(X_j) &= \min_{U_j} E(X'_j Q_{1j} X_j + U'_j Q_{2j} U_j + V_{j+1}(X_{j+1}) | Y_j, Y_{j-1}, \dots, Y_0) \\ &= \min_{U_j} E(X'_j Q_{1j} X_j + U'_j Q_{2j} U_j + E(X'_{j+1} S_{j+1} X_{j+1} | Y_{j+1}, Y_j, \dots, Y_0) \\ &\quad + c_{j+1} | Y_j, Y_{j-1}, \dots, Y_0) \\ &= \min_{U_j} E(X'_j Q_{1j} X_j + U'_j Q_{2j} U_j \\ &\quad + (A_j X_j + B_j U_j + W_j)' S_{j+1} (A_j X_j + B_j U_j + W_j) | Y_j, Y_{j-1}, \dots, Y_0) \\ &\quad + c_{j+1} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $E(X'_j W_j) = 0$ และ $E(U'_j W_j) = 0$ ดังนั้นค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันเป้าหมาย เท่ากับ

$$\begin{aligned} V_j(X_j) &= \min_{U_j} E(X'_j Q_{1j} X_j + U'_j Q_{2j} U_j \\ &\quad + (A_j X_j + B_j U_j)' S_{j+1} (A_j X_j + B_j U_j) | Y_j, Y_{j-1}, \dots, Y_0) \\ &\quad + E(W'_j S_{j+1} W_j) + c_{j+1} \end{aligned}$$

และด้วยเทคนิคทางแคลคูลัส จะได้ตัวประมาณเวกเตอร์ตัวแปรควบคุมนำเข้า U_j^*

$$\begin{aligned} U_j^* &= -L_j A_j E(X_j | Y_j, Y_{j-1}, \dots, Y_0) \\ &= -L_j A_j \widehat{X}_{j|j} \end{aligned}$$

เมื่อ $\widehat{X}_{j|j}$ คือ ตัวประมาณของเวกเตอร์สถานะของตัวกรอง KF และ L_j คือ เมทริกซ์คงที่ ซึ่งคำนวณแบบวนซ้ำ สำหรับ $j = N - 1, N - 2, \dots, 1$ เมื่อ

$$S_N = Q_{1N}$$

$$S_j = A'_j [S_{j+1} - L'_j (B'_j S_{j+1} B_j + Q_{2j}) L_j] A_j + Q_{1j}$$

และ
$$L_j = (B'_j S_{j+1} B_j + Q_{2j})^{-1} B'_j S_{j+1}$$

ดังนั้นค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันเป้าหมายในแต่ละคาบเวลา คือ

$$V_j(\mathbf{Y}_j, \mathbf{Y}_{j-1}, \dots, \mathbf{Y}_0) = \widehat{\mathbf{X}}_{j|j}' \mathbf{S}_j \widehat{\mathbf{X}}_{j|j} + c_j$$

เมื่อ $c_j = c_{j+1} + \text{tr}(\mathbf{S}_{j+1} \boldsymbol{\Sigma}_{V(t)}) + \text{tr}[(\mathbf{Q}_{1j} - \mathbf{S}_j + \mathbf{A}_j' \mathbf{S}_{j+1} \mathbf{A}_j) \mathbf{P}_{j|j}]$ และ $c_N = 0$ โดยที่ $\mathbf{P}_{j|j}$ คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนของการประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรอง KF และ $\text{tr}(\cdot)$ คือ ผลบวกของสมาชิกบนเส้นทแยงมุมของเมทริกซ์

นอกจากนี้ การควบคุมกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้น พบว่า อนุกรมของตัวประมาณเวกเตอร์ตัวแปรควบคุมนำเข้า $\mathbf{U}_t^*$ เป็นอนุกรมไม่คงที่ (nonstationary series) และเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของเวกเตอร์สถานะ (Kalman 1960) ดังนั้นการทำงานของ การควบคุม LQG ข้างต้น ประกอบด้วยการทำงาน 2 ส่วน คือ ตัวกรองเพื่อประมาณเวกเตอร์สถานะ และการควบคุมเพื่อประมาณเวกเตอร์ตัวแปรควบคุมนำเข้า ดูรายละเอียดเพิ่มเติมจาก Meditch (1969), Åström (1970), Anderson & Moore (1989), Chen, Chen & Hsu (1995)

บทที่ 3

ตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร

เนื่องจากตัวกรอง KF จะมีประสิทธิภาพลดลง เมื่อตัวรบกวนไม่มีการแจกแจงปกติ ดังนั้นเทคนิคต่างๆ จึงถูกนำเสนอเพื่อพัฒนาตัวกรองที่มีความแกร่ง แนวคิดหนึ่งในการพัฒนาตัวกรองที่มีความแกร่งคือการลดผลกระทบของค่านอกกลุ่มด้วยการถ่วงน้ำหนักที่เหมาะสมต่อความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัด (Masreliez 1975) ตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบมีการแจกแจง MGL ถูกพัฒนาขึ้นจากแนวคิดดังกล่าว โดยสมมติตัวรบกวนระบบมีการแจกแจง KF และ ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ตัวกรอง MGLF จะเป็นตัวกรองที่มีความแกร่งต่อค่านอกกลุ่มในตัวรบกวนระบบ

3.1 เทคนิคตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร

Girón & Rojano (1994) แสดงคุณสมบัติของตัวกรอง KF จากวิธีของเบย์ เมื่อสมมติตัวรบกวนมีการแจกแจงเส้นระดับวงรี พบว่า การแจกแจงภายหลังที่มีเงื่อนไขของเวกเตอร์สถานะ และการแจกแจงของการพยากรณ์เวกเตอร์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ มีการแจกแจงเส้นระดับวงรีเช่นเดียวกับการแจกแจงของตัวรบกวน เนื่องจากการแจกแจง MGL เป็นสมาชิกหนึ่งในกลุ่มของการแจกแจงเส้นระดับวงรี ดังนั้นผลลัพธ์ข้างต้นจึงสามารถประยุกต์เมื่อกระบวนการสโตคาสติกประกอบด้วยตัวรบกวนที่มีการแจกแจง MGL พิจารณาตัวแบบปริภูมิสถานะของกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นประกอบด้วยสมการระบบและสมการค่าวัด คือ

$$X_{t+1} = A_t X_t + W_t$$

$$Y_t = C_t X_t + V_t$$

เมื่อ X_t คือ เวกเตอร์สถานะ ขนาด $r \times 1$, Y_t คือ เวกเตอร์ค่าวัด ขนาด $k \times 1$, W_t คือ เวกเตอร์ตัวรบกวนระบบ ขนาด $r \times 1$, V_t คือ เวกเตอร์ตัวรบกวนค่าวัด ขนาด $k \times 1$ รวมทั้ง A_t และ C_t คือ เมทริกซ์คงที่ ขนาด $r \times r$ และ $k \times r$ ตามลำดับ สมมติเวกเตอร์ $(W_t, V_t)'$ มีการแจกแจง EC ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย เท่ากับ เวกเตอร์ศูนย์ และ เมทริกซ์พารามิเตอร์สเกล เท่ากับ $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_W & 0 \\ 0 & \Sigma_V \end{bmatrix}$ กล่าวคือ $(W_t, V_t)' \sim EC_{r+k}(0, \Sigma; g)$ และเวกเตอร์ตัวรบกวน W_t , และ V_t เป็นอิสระซึ่งกันและกัน และเมทริกซ์พารามิเตอร์สเกล Σ_W และ Σ_V ทราบค่าและเป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน (positive definite matrix) กล่าวคือ

$$\begin{aligned} E(W_t W_{t'}') &= \frac{\Gamma(\frac{r+2}{\lambda_W})}{r\Gamma(\frac{r}{\lambda_W})} \Sigma_W \delta_{tt^*} \\ E(V_t V_{t'}') &= \frac{1}{2} \Sigma_V \delta_{tt^*} \\ E(W_t V_{t'}') &= 0 \quad \forall t, t^* \end{aligned}$$

เมื่อ $\delta_{tt^*} = 1$ ถ้า $t = t^*$ และ $\delta_{tt^*} = 0$ ถ้า $t \neq t^*$ รวมทั้งเวกเตอร์สถานะเริ่มต้น X_0 เป็นอิสระต่อเวกเตอร์ตัวรบกวนระบบและค่าวัด ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย เท่ากับ $\hat{X}_{0|0}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $P_{0|0}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่ไม่เป็นลบแน่นอน

จากทฤษฎีบท 3.1 ของ Girón & Rojano (1994) ถ้าเวกเตอร์ $(X_0, V_1, W_1, \dots, V_n, W_n)'$ $\sim EC(\mu_0, \Sigma_0; g^0)$ และจนกระทั่งคาบเวลา $t-1$ สำหรับ $t \leq n$ จะได้รับการแจกแจงภายหลังที่มีเงื่อนไข

$$(X_{t-1}, V_t, W_{t-1}, \dots, V_n, W_{n-1})' | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_1 \sim EC(\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}; g^{t-1})$$

เมื่อเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\mu_{t-1} = (\mu_{X(t-1)}, 0, \dots, 0)'$, เมทริกซ์พารามิเตอร์สเกล $\Sigma_{t-1} = \text{diag}(\Sigma_{X(t-1)}, \Sigma_{V(t)}, \Sigma_{W(t-1)}, \dots, \Sigma_{V(n)}, \Sigma_{W(n-1)})$ และ $g^t = g_{e_t}^{t-1}$ คือ ตัวก่อกำเนิดคุณลักษณะที่มีเงื่อนไข โดยที่ $e_t = S_t' (Cov(S_t))^{-1} S_t$ ซึ่ง $S_t = Y_t - \hat{Y}_{t|t-1}$ คือ ความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ และ $Cov(S_t)$ คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ

กำหนดสมการเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \\ V_{t+1} \\ W_t \\ \vdots \\ V_n \\ W_{n-1} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} C_t A_{t-1} & I & C_t & 0 \\ A_{t-1} & 0 & I & 0 \\ \hline 0 & & & I \end{array} \right] \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ V_t \\ W_{t-1} \\ \vdots \\ V_n \\ W_{n-1} \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ F_t เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ทางด้านขวาของสมการข้างต้น จะได้ว่า $(Y_t, X_t, V_{t+1}, W_t, \dots, V_n, W_{n-1})' | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_1$ มีการแจกแจง EC ที่ขึ้นอยู่กัตัวก่อกำเนิดคุณลักษณะที่มีเงื่อนไข g^{t-1} ซึ่งมีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยเท่ากับ $F_t \mu_{t-1} = (C_t A_{t-1} \mu_{X(t-1)}, A_{t-1} \mu_{X(t-1)}, 0, \dots, 0)'$ และเมทริกซ์พารามิเตอร์สเกล เท่ากับ $F_t \Sigma_{t-1} F_t' = \begin{bmatrix} \Sigma_{t-1}^{*(11)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{t-1}^{*(22)} \end{bmatrix}$ เมื่อ

$$\Sigma_{t-1}^{*(11)} = \begin{bmatrix} C_t(A_{t-1}\Sigma_{X(t-1)}A_{t-1}' + \Sigma_{W(t-1)})C_t' + \Sigma_{V(t)} & C_t(A_{t-1}\Sigma_{X(t-1)}A_{t-1}' + \Sigma_{W(t-1)}) \\ (A_{t-1}\Sigma_{X(t-1)}A_{t-1}' + \Sigma_{W(t-1)})C_t' & A_{t-1}\Sigma_{X(t-1)}A_{t-1}' + \Sigma_{W(t-1)} \end{bmatrix}$$

และ

$$\Sigma_{t-1}^{*(22)} = \begin{bmatrix} \Sigma_{V(t+1)} & & & & \\ & \Sigma_{W(t)} & & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & \Sigma_{V(n)} & \\ & & & & \Sigma_{W(n-1)} \end{bmatrix}$$

เนื่องจากเวกเตอร์ $(Y_t, X_t)'$ และเวกเตอร์ $(V_{t+1}, W_t, \dots, V_n, W_{n-1})'$ เมื่อกำหนด $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_1$ เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า เวกเตอร์สุ่มที่มีเงื่อนไข $(Y_t, X_t)' | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_1$ มีการแจกแจงเช่นเดียวกับเวกเตอร์สุ่มที่มีเงื่อนไข $(Y_t, X_t, V_{t+1}, W_t, \dots, V_n, W_{n-1})' | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_1$ ดังนั้นการแจกแจงภายหลังที่มีเงื่อนไขของเวกเตอร์สถานะ $X_t | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_1$ กำหนดโดยการแจกแจง EC ที่ขึ้นอยู่กัตัวก่อกำเนิดคุณลักษณะที่มีเงื่อนไข g^t ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย เท่ากับ

$$\mu_{X(t)} = A_{t-1}\mu_{X(t-1)} + (A_{t-1}\Sigma_{X(t-1)}A_{t-1}' + \Sigma_{W(t-1)})C_t' [C_t(A_{t-1}\Sigma_{X(t-1)}A_{t-1}' + \Sigma_{W(t-1)})C_t' + \Sigma_{V(t)}]^{-1} (Y_t - C_t A_{t-1}\mu_{X(t-1)})$$

และเมทริกซ์พารามิเตอร์สเกล เท่ากับ

$$\begin{aligned} \Sigma_{X(t)} &= (A_{t-1}\Sigma_{X(t-1)}A_{t-1}' + \Sigma_{W(t-1)}) - (A_{t-1}\Sigma_{X(t-1)}A_{t-1}' + \Sigma_{W(t-1)})C_t' \\ &\quad [C_t(A_{t-1}\Sigma_{X(t-1)}A_{t-1}' + \Sigma_{W(t-1)})C_t' + \Sigma_{V(t)}]^{-1} C_t(A_{t-1}\Sigma_{X(t-1)}A_{t-1}' \\ &\quad + \Sigma_{W(t-1)}) \\ &= \{I - (A_{t-1}\Sigma_{X(t-1)}A_{t-1}' + \Sigma_{W(t-1)})C_t' \\ &\quad [C_t(A_{t-1}\Sigma_{X(t-1)}A_{t-1}' + \Sigma_{W(t-1)})C_t' + \Sigma_{V(t)}]^{-1} C_t\} (A_{t-1}\Sigma_{X(t-1)}A_{t-1}' \\ &\quad + \Sigma_{W(t-1)}) \end{aligned}$$

เวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\mu_{X(t)}$ และเมทริกซ์พารามิเตอร์สเกล $\Sigma_{X(t)}$ สามารถคำนวณแบบวนซ้ำซึ่งขึ้นอยู่กัเวกเตอร์ค่าเฉลี่ยและเมทริกซ์พารามิเตอร์สเกลของเวกเตอร์สถานะคาบก่อนหน้า กล่าวคือ $\mu_{X(t-1)}$ และ $\Sigma_{X(t-1)}$ ตามลำดับ นอกจากนี้ ค่าพยากรณ์ล่วงหน้า 1 คาบ ของเวกเตอร์ค่าวัด

Y_t กำหนด $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_1$ มีการแจกแจง EC ที่ขึ้นอยู่กับตัวก่อกำเนิดคุณลักษณะที่มีเงื่อนไข g^t ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\hat{Y}_{t|t-1} = C_t A_{t-1} \mu_{X(t-1)}$ และเมทริกซ์พารามิเตอร์สเกล $\Sigma_{S(t)} = C_t (A_{t-1} \Sigma_{X(t-1)} A_{t-1}' + \Sigma_{W(t-1)}) C_t' + \Sigma_{V(t)}$

จากกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นข้างต้น สมมติตัวรบกวนมีการแจกแจง MGL กล่าวคือ ตัวรบกวนระบบ $W_t \sim MGL_r(0, \Sigma_W, \lambda)$ และตัวรบกวนค่าวัด $V_t \sim MGL_k(0, \Sigma_V, \lambda)$ จะได้ว่า $X_t | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_1$ มีการแจกแจง MGL ที่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์เซฟ λ โดยปกติ รูปร่างการแจกแจงของเวกเตอร์สถานะจะมีลักษณะเช่นเดียวกับการแจกแจงของตัวรบกวนระบบ นั่นคือ พารามิเตอร์เซฟของเวกเตอร์สถานะและตัวรบกวนระบบเป็นตัวเดียวกัน ถ้าพารามิเตอร์เซฟของตัวรบกวนค่าวัด เท่ากับ 2 และพารามิเตอร์เซฟของตัวรบกวนระบบ คือ λ_W พร้อมทั้งพิจารณาเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\mu_{X(t)}$ เขียนแทนด้วย $\hat{X}_{t|t}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $\frac{\Gamma(\frac{r+2}{\lambda_W})}{r\Gamma(\frac{r}{\lambda_W})} \Sigma_{X(t)}$ เขียนแทนด้วย $P_{t|t}$ เวกเตอร์ค่าเฉลี่ยและเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของเวกเตอร์สถานะ $X_t | Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_1$ ตามลำดับ กำหนดโดย

$$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + K_t (Y_t - C_t \hat{X}_{t|t-1})$$

$$P_{t|t} = (I - K_t C_t) P_{t|t-1}$$

เมื่อ

$$\hat{X}_{t|t-1} = A_{t-1} \hat{X}_{t-1|t-1}$$

$$P_{t|t-1} = A_{t-1} P_{t-1|t-1} A_{t-1}' + \frac{\Gamma(\frac{r+2}{\lambda_W})}{r\Gamma(\frac{r}{\lambda_W})} \Sigma_W$$

$$K_t = P_{t|t-1} C_t' \left(C_t P_{t|t-1} C_t' + \frac{1}{2} \Sigma_V \right)'$$

รวมทั้งเวกเตอร์ค่าสังเกตที่มีเงื่อนไข $Y_t | Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_1$ มีการแจกแจง MGL ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย $\hat{Y}_{t|t-1} = C_t \hat{X}_{t|t-1}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม $Cov(Y_t - \hat{Y}_{t|t-1}) = C_t (A_{t-1} P_{t-1|t-1} A_{t-1}' + \frac{\Gamma(\frac{r+2}{\lambda_W})}{r\Gamma(\frac{r}{\lambda_W})} \Sigma_W) C_t' + \frac{1}{2} \Sigma_V$

เนื่องจากการกำหนดตัวรบกวนระบบมีการแจกแจง MGL ตัวกรองข้างต้นจึงเรียกว่า ตัวกรอง MGL ซึ่งตัวกรองนี้สามารถอธิบายได้ทั้งระบบปกติและระบบที่มีค่านอกกลุ่มในตัวรบกวนระบบ สังเกตจากเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เวกเตอร์สถานะ ล่วงหน้า 1 คาบ $P_{t|t-1}$ ซึ่งขึ้นอยู่กับเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวรบกวนระบบ กล่าวคือ ถ้าตัวรบกวนระบบมีค่านอกกลุ่ม การแจกแจงของตัวรบกวนระบบจะเป็นการแจกแจงหางยาว และหนากว่าการแจกแจงปกติ ซึ่งตัวรบกวนระบบจะมีความแปรปรวนสูงกว่าความแปรปรวนของตัวรบกวนระบบที่มีการแจกแจงปกติ ดังนั้นตัวกรอง MGLF น่าจะเป็นตัวกรองที่มีความแกร่ง

3.2 การประยุกต์ตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงลาปาส์น้อยทั่วไปพหุตัวแปร²⁴

ต่อค่านอกกลุ่มในตัวรบกวนระบบ เพราะตัวกรองนี้สามารถอธิบายระบบที่มีค่านอกกลุ่มในตัวรบกวนระบบได้

3.2 การประยุกต์ตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงลาปาส์น้อยทั่วไปพหุตัวแปร

ตัวกรอง MGLF เป็นตัวกรองที่พัฒนาขึ้น โดยสมมติตัวรบกวนระบบมีการแจกแจง MGL ซึ่งรูปร่างการแจกแจงถูกกำหนดโดยพารามิเตอร์เซฟ ตัวกรองนี้ไม่สามารถทำงานได้ ถ้าไม่ทราบค่าพารามิเตอร์เซฟของตัวรบกวนระบบ λ_W ดังนั้นพารามิเตอร์เซฟของตัวรบกวนระบบต้องถูกประมาณค่า ซึ่งพิจารณาจากค่าประมาณความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เวกเตอร์สถานะ กำหนดโดย

$$Z_t = \widehat{X}_{t|t} - \widehat{X}_{t|t-1} = K_t(Y_t - C_t\widehat{X}_{t|t-1}) = K_t S_t$$

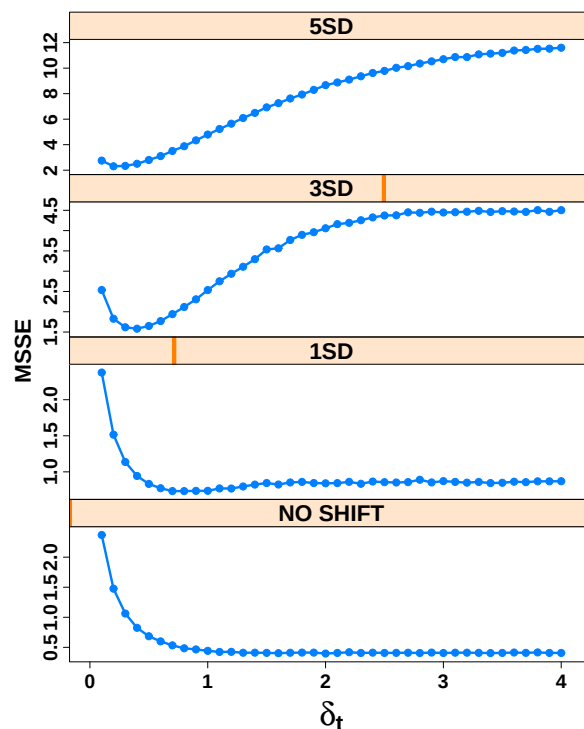
เมื่อ S_t คือ ความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ ซึ่ง S_t มีการแจกแจง MGL ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย เท่ากับ เวกเตอร์ศูนย์, เมทริกซ์พารามิเตอร์สเกล เท่ากับ Σ_S และพารามิเตอร์เซฟ $\lambda_{S(t)}$ กล่าวคือ $S_t \sim MGL_k(0, \Sigma_S, \lambda_{S(t)})$ เนื่องจาก Z_t เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ S_t ดังนั้น Z_t จึงมีการแจกแจง MGL เช่นกัน กล่าวคือ $Z_t \sim MGL_r(0, \Sigma_Z, \lambda_{Z(t)})$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เวกเตอร์สถานะ คือ

$$\begin{aligned} Cov(Z_t) &= K_t Cov(S_t) K_t' \\ \frac{\Gamma(\frac{r+2}{\lambda_{Z(t)}})}{r\Gamma(\frac{r}{\lambda_{Z(t)}})} \Sigma_Z &= K_t (C_t P_{t|t-1} C_t' + Cov(V_t)) K_t' \\ &= P_{t|t-1} C_t' \left(C_t P_{t|t-1} C_t' + \frac{1}{2} \Sigma_V \right)^{-1} C_t P_{t|t-1} \end{aligned}$$

ตัวประมาณภาวะนั้นจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood estimator: MLE) ของพารามิเตอร์เซฟของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เวกเตอร์สถานะ ($\hat{\lambda}_{Z(t)}$) ที่ทำให้ค่าลอการิทึม (log-arithm) ของฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เวกเตอร์สถานะมีค่ามากที่สุด เมื่อพิจารณาเทียบกับ $\lambda_{Z(t)}$ โดยที่เมทริกซ์พารามิเตอร์สเกลมีค่าเท่ากับ $\Sigma_Z = 2\delta_t^2 P_{t|t-1} C_t' (C_t P_{t|t-1} C_t' + \frac{1}{2} \Sigma_V)^{-1} C_t P_{t|t-1}$ และ $\delta_t = \frac{\hat{\lambda}_{Z(t-1)}}{2}$ คือ ตัวประกอบปรับค่า (adaptive factor) กล่าวคือ

$$\frac{d}{d\lambda_{Z(t)}} \left[\log \left(\lambda_{Z(t)} \Gamma \left(\frac{r}{\lambda_{Z(t)}} \right) \right) + (Z_t' \Sigma_Z^{-1} Z_t)^{\frac{\lambda_{Z(t)}}{2}} \right] = 0$$

3.2 การประยุกต์ตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงลาปัสหน่วยทั่วไปพหุตัวแปร 25



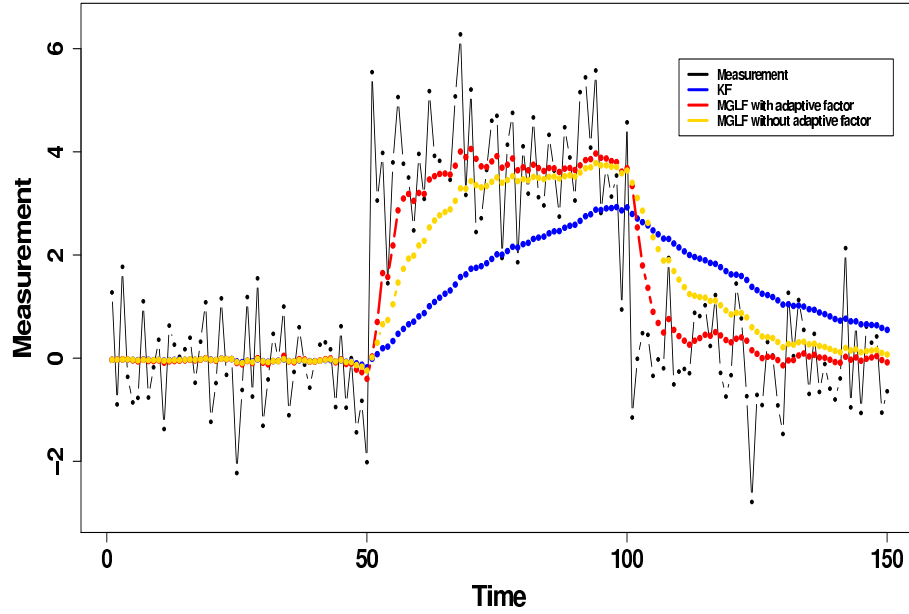
รูปที่ 3.1: ค่าของตัวประกอบปรับค่าที่สอดคล้องกับค่าน้อยที่สุดของค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองของการประมาณเวกเตอร์สถานะ สำหรับระบบที่มีการเปลี่ยนแปลง

เนื่องจากตัวรบกวนระบบที่มีค่านอกกลุ่มจะมีการแจกแจงหางยาวและหนากว่าหางของการแจกแจงปกติ พารามิเตอร์เซฟจะมีค่าน้อยกว่า 2 สำหรับการแจกแจงลาปัสหน่วยทั่วไปพหุตัวแปร ดังนั้นการประมาณค่า $\lambda_{Z(t)}$ จะพิจารณาค่าในช่วง 0 ถึง 2 เท่านั้น เนื่องจากกรณี $\lambda_{Z(t)}$ มีค่ามากกว่า 2 การแจกแจงของตัวรบกวนระบบจะมีหางสั้นและบางซึ่งทำให้ตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรอง MGLF ไม่แตกต่างจากตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรอง KF

ตัวประกอบปรับค่าถูกนำมาใช้เพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของการประมาณเวกเตอร์สถานะ รูปที่ 3.1 พบว่า เมื่อระบบมีการเปลี่ยนแปลงด้วยขนาดที่ใหญ่มากขึ้น ค่าของตัวประกอบปรับค่าจะมีแนวโน้มลู่เข้าสู่ศูนย์ ซึ่งทำให้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองของการประมาณเวกเตอร์สถานะ (mean of squared state error: MSSE) มีค่าน้อยที่สุด ดังนั้นตัวประกอบปรับค่าควรจะมีค่าแตกต่างกันในแต่ละคาบเวลา เพื่อปรับค่าความผันแปรของความคลาดเคลื่อนของการประมาณเวกเตอร์สถานะ รูปที่ 3.2 แสดงประสิทธิภาพของตัวกรอง MGLF ที่ประยุกต์ตัวประกอบปรับค่า กล่าวคือ ตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรอง MGLF ที่ประยุกต์ตัวประกอบปรับค่าสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของระบบได้อย่างมีประสิทธิภาพ เมื่อเปรียบเทียบกับตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรอง KF และตัวกรอง MGLF ที่ไม่มีตัวประกอบปรับค่า

จากแนวคิดการประมาณค่า λ_W ทำให้ตัวกรอง MGLF สามารถประยุกต์กับสถานการณ์ที่

3.2 การประยุกต์ตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงลาปัสนัยทั่วไปพหุตัวแปร26



รูปที่ 3.2: ผลกระทบของตัวประกอบปรับค่าต่อการประมาณเวกเตอร์สถานะ

ปรากฏได้ ดังนั้นขั้นตอนการทำงานของตัวกรอง MGLF สามารถแสดงได้ดังนี้

1. นำเข้าค่าพยากรณ์ของเวกเตอร์สถานะ $\hat{X}_{t|t-1}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เวกเตอร์สถานะ $P_{t|t-1}$ ล่วงหน้า 1 คาบ ณ เวลา $t - 1$
2. นำเข้าเวกเตอร์ค่าวัด Y_t
3. คำนวณเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก $K_t = P_{t|t-1} C_t' (C_t P_{t|t-1} C_t' + \frac{1}{2} \Sigma_V)^{-1}$
4. คำนวณค่าตัวประมาณเวกเตอร์สถานะ $\hat{X}_{t|t}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนของการประมาณเวกเตอร์สถานะ $P_{t|t}$

$$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + K_t (Y_t - C_t \hat{X}_{t|t-1})$$

$$P_{t|t} = (I - K_t C_t) P_{t|t-1}$$

5. การประมาณค่าพารามิเตอร์เซฟ λ_W

- ก. คำนวณค่าประมาณของเวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เวกเตอร์สถานะ

$$Z_t = \hat{X}_{t|t} - \hat{X}_{t|t-1} \text{ และ } Z_t \sim MGL_r(0, \Sigma_Z, \lambda_{Z(t)})$$

- ข. คำนวณค่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\lambda}_{Z(t)}$ เมื่อกำหนดเมทริกซ์พารามิเตอร์สเกล

$\Sigma_Z = 2\delta_t^2 P_{t|t-1} C_t' (C_t P_{t|t-1} C_t' + \frac{1}{2} \Sigma_V)^{-1} C_t P_{t|t-1}$ โดยที่ $\delta_t = \frac{\hat{\lambda}_{Z(t-1)}}{2}$ คือตัวประกอบปรับค่า ในขั้นตอนนี้ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวรบกวนระบบสามารถประมาณค่าได้ทุกคาบเวลา

3.2 การประยุกต์ตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไปพหุตัวแปร²⁷

6. คำนวณค่าพยากรณ์ของเวกเตอร์สถานะล่วงหน้า 1 คาบ $\widehat{X}_{t+1|t}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เวกเตอร์สถานะล่วงหน้า 1 คาบ $P_{t+1|t}$

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{t+1|t} &= A_t \widehat{X}_{t|t} \\ P_{t+1|t} &= A_t P_{t|t} A_t' + \frac{\Gamma(\frac{r+2}{\lambda_{Z(t)}})}{r \Gamma(\frac{r}{\lambda_{Z(t)}})} \Sigma_W\end{aligned}$$

7. กำหนด $t = t + 1$ และกลับไปขั้นตอนที่ 2.

ตัวกรอง MGLF ข้างต้น เรียกว่า ตัวกรอง **MGLF ที่มีตัวประกอบปรับค่าตัวเดียว (MGLF with single adaptive factor: MGLF-S)** เนื่องจากตัวกรอง MGLF ใช้ตัวประกอบปรับค่าเพียงตัวเดียวสำหรับทุกตัวแปรในการคำนวณเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวรบกวนระบบ กล่าวคือ ตัวแปรทุกตัวได้รับน้ำหนักเพื่อลดผลกระทบของค่านอกกลุ่มเช่นเดียวกันไม่ว่าจะมีค่า นอกกลุ่มหรือไม่ ซึ่งอาจจะทำให้ค่าประมาณเวกเตอร์สถานะมีความผันแปรมากกว่าปกติ สำหรับตัวแปรที่ไม่มีค่านอกกลุ่ม ดังนั้นการพิจารณาใช้ตัวประกอบปรับค่าของตัวแปรแต่ละตัวในการคำนวณเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวรบกวนระบบอาจจะเป็นแนวทางในการแก้ไขข้อบกพร่องดังกล่าว (Yang & Cui 2008) ซึ่งจะทำให้ตัวประมาณเวกเตอร์สถานะมีประสิทธิภาพมากขึ้น เนื่องจากตัวประมาณเวกเตอร์สถานะประกอบด้วยสารสนเทศของค่าวัดมากขึ้น ตัวกรอง MGLF ที่ได้จะเรียกว่า ตัวกรอง **MGLF ที่มีตัวประกอบปรับค่าหลายตัว (MGLF with mulit adaptive factors: MGLF-M)**

กำหนดเวกเตอร์สุ่มที่มีการแจกแจง MGL r ตัวแปร $Z_t = (Z_{jt}, Z_t^*)'$ เมื่อ $Z_t^* = (Z_{1t}, Z_{2t}, \dots, Z_{(j-1)t}, Z_{(j+1)t}, \dots, Z_{rt})$ และเมทริกซ์พารามิเตอร์สเกลที่สอดคล้องกัน คือ

$$\Sigma_Z = \begin{bmatrix} \sigma_{jj} & \Sigma_j^* \\ \Sigma_j^* & \Sigma^* \end{bmatrix}$$

สำหรับ $j = 1, 2, \dots, r$ ตัวแปรสุ่มแบบมีเงื่อนไข Z_{jt} กำหนด $Z_t^* = z_t^*$ มีการแจกแจงลาปลาสนัยทั่วไป (generalized Laplace distribution) ที่มีค่าเฉลี่ย เท่ากับ ศูนย์, พารามิเตอร์สเกล เท่ากับ $\sigma_j^2 = \sigma_{jj} - \Sigma_j^{*'} \Sigma^{*-1} \Sigma_j^*$ และพารามิเตอร์เซฟ เท่ากับ $\lambda_{Z_j(t)}$ เขียนแทนด้วย $Z_{jt}|Z_t^* = z_t^* \sim MGL_1(0, \sigma_j^2, \lambda_{Z_j(t)})$ ซึ่งความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่ม $Z_{jt}|Z_t^* = z_t^*$ เท่ากับ

$$\sigma_{Z_{jt}|Z_t^*=z_t^*}^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\lambda_{Z_j(t)}}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda_{Z_j(t)}}\right)} \sigma_j^2$$

กำหนด $\hat{\lambda}_{Z_j(t)}$ คือ ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ $\lambda_{Z_j(t)}$ สำหรับ $j = 1, 2, \dots, r$ ซึ่งเป็นตัวประมาณที่ทำให้ค่าลอการิทึมของฟังก์ชันความหนาแน่นของตัวแปรสุ่มแบบมีเงื่อนไข

3.2 การประยุกต์ตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงลาปาส์หน่วยทั่วไปพหุตัวแปร²⁸

$Z_{jt}|Z_t^* = z_t^*$ ที่มีพารามิเตอร์สเกล เท่ากับ $\sigma_j^2 = 2\delta_{jt}^2 (\sigma_{jj} - \Sigma_j^{*'} \Sigma^{*-1} \Sigma_j^*)$ เมื่อ δ_{jt} คือ ตัวประกอบปรับค่าของตัวแปรที่ j ณ คาบเวลา t จะได้เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวรบกวนระบบสามารถประมาณด้วย $\Lambda^{\frac{1}{2}} \Sigma_W \Lambda^{\frac{1}{2}}$ เมื่อ

$$\Lambda = \text{diag} \left(\frac{\Gamma \left(\frac{r+2}{\hat{\lambda}_{Z_1(t)}} \right)}{r\Gamma \left(\frac{r}{\hat{\lambda}_{Z_1(t)}} \right)}, \frac{\Gamma \left(\frac{r+2}{\hat{\lambda}_{Z_2(t)}} \right)}{r\Gamma \left(\frac{r}{\hat{\lambda}_{Z_2(t)}} \right)}, \dots, \frac{\Gamma \left(\frac{r+2}{\hat{\lambda}_{Z_k(t)}} \right)}{r\Gamma \left(\frac{r}{\hat{\lambda}_{Z_k(t)}} \right)} \right)$$

คือ เมทริกซ์ทแยงมุม (diagonal matrix) ของตัวประกอบปรับค่าของตัวแปรแต่ละตัว ดังนั้นตัวกรอง MGLF-M สามารถนำมาประยุกต์ได้ตามขั้นตอนการทำงานดังนี้

1. นำเข้าค่าพยากรณ์ของเวกเตอร์สถานะ $\widehat{X}_{t|t-1}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เวกเตอร์สถานะ $P_{t|t-1}$ ล่วงหน้า 1 คาบ ณ เวลา $t-1$
2. นำเข้าเวกเตอร์ค่าวัด Y_t
3. คำนวณเมทริกซ์ถ่วงน้ำหนัก $K_t = P_{t|t-1} C_t' (C_t P_{t|t-1} C_t' + \frac{1}{2} \Sigma_V)^{-1}$
4. คำนวณค่าตัวประมาณเวกเตอร์สถานะ $\widehat{X}_{t|t}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนของการประมาณเวกเตอร์สถานะ $P_{t|t}$

$$\widehat{X}_{t|t} = \widehat{X}_{t|t-1} + K_t (Y_t - C_t \widehat{X}_{t|t-1})$$

$$P_{t|t} = (I - K_t C_t) P_{t|t-1}$$

5. การประมาณค่าพารามิเตอร์เซฟ

ก. คำนวณค่าประมาณเวกเตอร์ความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เวกเตอร์สถานะ $Z_t = \widehat{X}_{t|t} - \widehat{X}_{t|t-1}$ และ $Z_t \sim MGL_r(0, \Sigma_Z, \lambda_{Z(t)})$

ข. คำนวณค่าตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด $\hat{\lambda}_{Z_j(t)}$ สำหรับ $j = 1, 2, \dots, r$ ซึ่งสอดคล้องกับตัวแปรสุ่มแบบมีเงื่อนไข $Z_{jt}|Z_t^* = z_t^*$ ที่มีพารามิเตอร์สเกล เท่ากับ $\sigma_j^2 = 2\delta_{jt}^2 (\sigma_{jj} - \Sigma_j^{*'} \Sigma^{*-1} \Sigma_j^*)$ เมื่อ δ_{jt} คือ ตัวประกอบปรับค่าของตัวแปรที่ j ณ คาบเวลา t

6. คำนวณค่าพยากรณ์ของเวกเตอร์สถานะล่วงหน้า 1 คาบ $\widehat{X}_{t+1|t}$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เวกเตอร์สถานะล่วงหน้า 1 คาบ $P_{t+1|t}$

$$\widehat{X}_{t+1|t} = A_t \widehat{X}_{t|t}$$

$$P_{t+1|t} = A_t P_{t|t} A_t' + \Lambda^{\frac{1}{2}} \Sigma_W \Lambda^{\frac{1}{2}}$$

เมื่อ

$$\Lambda = \text{diag} \left(\frac{\Gamma \left(\frac{r+2}{\hat{\lambda}_{Z_1(t)}} \right)}{r\Gamma \left(\frac{r}{\hat{\lambda}_{Z_1(t)}} \right)}, \frac{\Gamma \left(\frac{r+2}{\hat{\lambda}_{Z_2(t)}} \right)}{r\Gamma \left(\frac{r}{\hat{\lambda}_{Z_2(t)}} \right)}, \dots, \frac{\Gamma \left(\frac{r+2}{\hat{\lambda}_{Z_k(t)}} \right)}{r\Gamma \left(\frac{r}{\hat{\lambda}_{Z_k(t)}} \right)} \right)$$

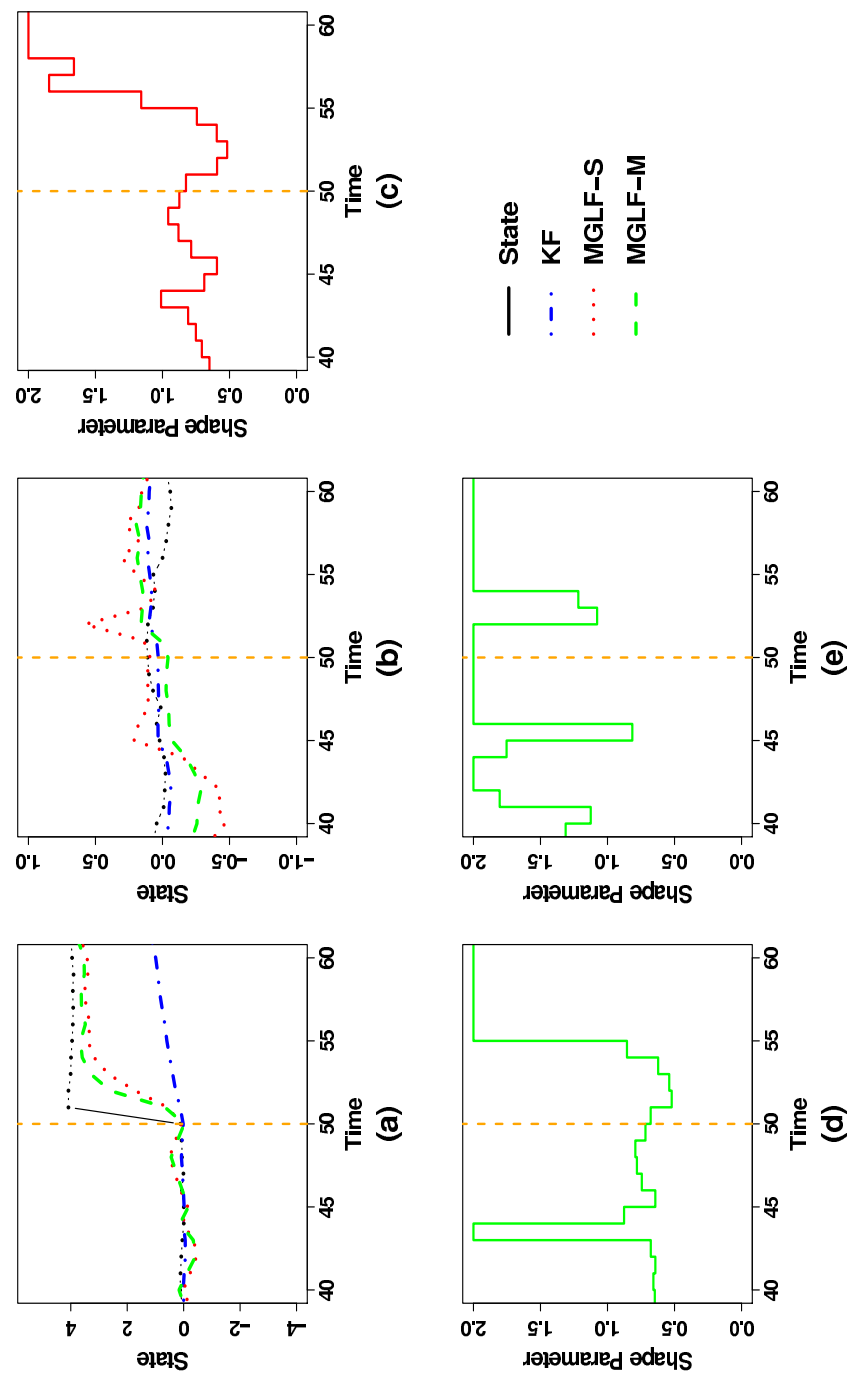
7. กำหนด $t = t + 1$ และกลับไปขั้นตอนที่ 2.

ขั้นตอนการทำงานข้างต้นของตัวกรอง MGLF-M แสดงการแก้ปัญหาของตัวกรอง MGLF-S ที่ขึ้นอยู่กับตัวประกอบปรับค่าเพียงตัวเดียว ดังนั้นตัวกรอง MGLF-M จะให้น้ำหนักกับตัวแปรแต่ละตัวแตกต่างกันขึ้นอยู่กับขนาดกำลังสองของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์เวกเตอร์สถานะ และตัวกรองนี้จึงจะทำให้ตัวประมาณเวกเตอร์สถานะที่มีความแม่นยำ (precision) และสามารถอธิบายระบบได้อย่างมีประสิทธิภาพ

กระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นทวิตัวแปร สำหรับเวลาไม่ต่อเนื่อง ที่มีการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการในตัวแปรที่หนึ่ง ณ คาบเวลา 51 แต่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงใดๆ ในตัวแปรที่สอง แสดงดัง รูปที่ 3.3(a) และ (b) ตามลำดับ พบว่า ตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M สามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการได้อย่างมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรอง KF (รูปที่ 3.3(a)) นอกจากนี้ ตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรอง MGLF-M สามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการได้ดีกว่าตัวกรอง MGLF-S และตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรอง MGLF-M สำหรับตัวแปรที่สอง มีความผันแปรน้อยกว่าตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรอง MGLF-S (รูปที่ 3.3(b)) เมื่อพิจารณาค่าประมาณพารามิเตอร์เซฟของตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M พบว่า ค่าประมาณพารามิเตอร์เซฟของตัวกรอง MGLF-M สำหรับตัวแปรที่หนึ่งในรูปที่ 3.3(d) มีลักษณะรูปแบบการเปลี่ยนแปลงค่าคล้ายคลึงกับค่าประมาณพารามิเตอร์เซฟของตัวกรอง MGLF-S ในรูปที่ 3.3(c) ขณะที่ค่าประมาณพารามิเตอร์เซฟของตัวกรอง MGLF-M สำหรับตัวแปรที่สอง มีรูปแบบการเปลี่ยนแปลงค่าแตกต่างไปตามค่าของตัวแปรที่สองที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง (รูปที่ 3.3(e)) ดังนั้นตัวกรอง MGLF-M น่าจะให้ตัวประมาณเวกเตอร์สถานะที่สามารถอธิบายกระบวนการได้อย่างมีประสิทธิภาพ

3.3 การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวกรอง

การศึกษาประสิทธิภาพของตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M เมื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพกับตัวกรอง KF โดยพิจารณากระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้น 5 ตัวแปร ที่มีคุณสมบัติของการสังเกต



รูปที่ 3.3: พารามิเตอร์และประสิทธิภาพของตัวกรอง MGLF

และสมบัติของการควบคุม

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t$$

ซึ่งจำลองแบบด้วยเทคนิคมอนติคาร์โล (Monte Carlo technique) ประสิทธิภาพของตัวกรองพิจารณาจากค่า MSSE และพารามิเตอร์ของการทดลองกำหนดโดย

1. $\mathbf{W}_t$ และ $\mathbf{V}_t$ คือ เวกเตอร์ตัวรบกวนระบบ และเวกเตอร์ตัวรบกวนค่าวัด ตามลำดับ ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน และไม่ขึ้นอยู่กับเวลา สมมติ $\mathbf{W}_t$ และ $\mathbf{V}_t$ มีการแจกแจงปกติ k ตัวแปร กล่าวคือ $\mathbf{W}_t \sim N_k(\mathbf{0}, \Sigma_W)$ และ $\mathbf{V}_t \sim N_k(\mathbf{0}, \Sigma_V)$ ตามลำดับ เมื่อ $\Sigma_W = \sigma_W^2(1 - \rho_W)\mathbf{I} + \sigma_W^2\rho_W\mathbf{J}$ และ $\Sigma_V = \sigma_V^2(1 - \rho_V)\mathbf{I} + \sigma_V^2\rho_V\mathbf{J}$ โดยที่ $\mathbf{I}$ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) และ $\mathbf{J}$ คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเท่ากับหนึ่ง
2. ความแปรปรวนของตัวรบกวนระบบ (σ_W^2) และความแปรปรวนของตัวรบกวนค่าวัด (σ_V^2) กำหนดโดยคู่ลำดับของความแปรปรวนทั้งสอง คือ $(\sigma_W^2, \sigma_V^2) = (0.1, 1), (0.02, 1), (0.01, 1), (0.01, 0.5)$ และ $(0.01, 0.1)$
3. สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของตัวรบกวนระบบ (ρ_W) และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของตัวรบกวนค่าวัด (ρ_V) เท่ากับ 0.1, 0.4 และ 0.8
4. ความยาวของอนุกรมเวลา (n) เท่ากับ 50
5. จำนวนตัวแปร (k) เท่ากับ 2, 5 และ 10
6. ค่าเริ่มต้นของเวกเตอร์สถานะ ($\mathbf{X}_{0|0}$) และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ($\mathbf{P}_{0|0}$) กำหนดโดย $\mathbf{X}_{0|0} \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{P}_{0|0})$ เมื่อ $\mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{I}$
7. ขนาดของการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการในตัวแปรที่หนึ่งกำหนดโดย δ_M เท่ากับ 0, 0.5, 1, 2, 3, 4 และ 5 กล่าวคือ ตัวรบกวนระบบ $\mathbf{W}_{t(1)} \sim N(\delta_M, \sigma_W^2)$ เมื่อ $t = 26$
8. จำนวนรอบของการทดลองด้วยการจำลองแบบมอนติคาร์โล เท่ากับ 2,000 ด้วยโปรแกรมอาร์ (R)
9. ตัวสถิติตัดสินใจที่ใช้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวกรอง คือ MSSE ซึ่งคำนวณจากความคลาดเคลื่อนของการประมาณเวกเตอร์สถานะทั้งหมด 50 คาบเวลา

$$MSSE = \frac{1}{2000} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t})' (\mathbf{X}_t - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t}) \right)$$

ถ้า MSSE มีค่าลู่เข้าสู่ศูนย์ แสดงว่า ตัวประมาณเวกเตอร์สถานะนั้นเป็นตัวประมาณที่มีประสิทธิภาพ

ตารางที่ 3.1 - 3.3 แสดงค่า MSSE ของตัวกรอง MGLF-S, MGLF-M และ KF เมื่อ k เท่ากับ 2, 5 และ 10 ตามลำดับ พบว่า รูปแบบการเปลี่ยนแปลงค่า MSSE ของทุกตัวกรองไม่แตกต่างกัน สำหรับทุกค่า k กล่าวคือ MSSE ของตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M มีค่าน้อยกว่า MSSE ของตัวกรอง KF เมื่อระบบเปลี่ยนแปลงอย่างมีนัยสำคัญ ขณะที่ MSSE ของตัวกรอง KF มีค่าน้อยกว่า MSSE ของตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M เมื่อระบบไม่เปลี่ยนแปลง หรือ ระบบเปลี่ยนแปลงอย่างไม่มีนัยสำคัญ นอกจากนี้ ตัวกรอง MGLF-M มีค่า MSSE น้อยกว่าตัวกรอง MGLF-S ยกเว้นกรณีความแปรปรวนของตัวรบกวนค่าวัดมีค่าน้อย จากผลลัพธ์ข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า ตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M เป็นตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งต่อค่านอกกลุ่มในตัวรบกวนระบบ หรือต่อการเปลี่ยนแปลงของระบบ และตัวกรอง KF เป็นตัวกรองที่ไม่คงเส้นคงวาต่อการเปลี่ยนแปลงของระบบ

โดยปกติ σ_W^2 จะมีค่าน้อยมาก เมื่อเปรียบเทียบกับ σ_V^2 และถ้า σ_W^2 มีค่ามากจะทำให้การพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของระบบยากมากขึ้นเนื่องจากระบบมีความผันแปรมากทำให้การเปลี่ยนแปลงของระบบปรากฏไม่ชัดเจน ตารางที่ 3.1 - 3.3 พบว่า เมื่อ σ_W^2 มีค่ามากขึ้น ตัวกรอง KF จะมีความแข็งแกร่งต่อการเปลี่ยนแปลงของระบบ และมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M ทุกค่า k อย่างไรก็ตาม ตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M ยังคงมีคุณสมบัติความคงเส้นคงวาต่อการเปลี่ยนแปลงของระบบในกรณีนี้ ซึ่งสามารถแสดงดังรูปที่ 3.4 นอกจากนี้ ถ้า σ_V^2 มีค่าลดลง พบว่า ประสิทธิภาพของตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M มีแนวโน้มใกล้เคียงกัน ตัวกรอง MGLF-S จะมีค่า MSSE น้อยที่สุด เมื่อการเปลี่ยนแปลงของระบบมีขนาดใหญ่มาก และค่า MSSE ของตัวกรอง MGLF-M มีค่าน้อยที่สุด เมื่อระบบเปลี่ยนแปลงอย่างมีนัยสำคัญ อย่างไรก็ตาม ประสิทธิภาพของตัวกรอง MGLF-S จะลดลง เมื่อ k มีค่ามากขึ้น

รูปที่ 3.5 แสดงผลกระทบของตัวรบกวนระบบต่อประสิทธิภาพของตัวกรอง พบว่า กรณี σ_W^2 น้อย ค่า MSSE ของตัวกรอง KF มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น และเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว เมื่อขนาดการเปลี่ยนแปลงของระบบเพิ่มขึ้น และ ρ_W มีค่ามากขึ้น แต่ถ้า σ_W^2 มีค่ามาก ตัวกรอง KF จะเป็นตัวกรองที่คงเส้นคงวาต่อการเปลี่ยนแปลงของระบบ อย่างไรก็ตาม ตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M ยังคงเป็นตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งในทุกกรณี ส่วนผลกระทบของตัวรบกวนค่าวัดต่อประสิทธิภาพของตัวกรองแสดงดังรูปที่ 3.6 พบว่า ตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M มีความแข็งแกร่งต่อการเปลี่ยนแปลงของระบบทุกกรณี ขณะที่ ค่า MSSE ของตัวกรอง KF เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว เมื่อขนาดการเปลี่ยนแปลงของระบบเพิ่มขึ้น สำหรับกรณี σ_V^2 มีค่ามาก และ ρ_V มีค่าน้อย ถ้า σ_V^2 มี

ตารางที่ 3.1: MSSE ของตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M เมื่อ $k = 2$

(ρ_w, ρ_v)	δ_M	(σ_w^2, σ_v^2)						(0.01, 0.5)			(0.01, 0.1)		
		(0.1, 1)			(0.02, 1)			(0.01, 1)			(0.01, 0.1)		
		KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M
(0.1, 0.1)	0	0.51687	0.66021	0.61293	0.23807	0.35160	0.31241	0.16391	0.25892	0.22457	0.11740	0.17364	0.15344
	0.5	0.52199	0.66400	0.61733	0.25206	0.35830	0.31911	0.18645	0.26808	0.23755	0.13358	0.18312	0.16489
	1	0.54068	0.67311	0.62877	0.29797	0.37773	0.34089	0.25329	0.30058	0.27341	0.18002	0.20320	0.18629
	2	0.60801	0.70844	0.66435	0.47948	0.44829	0.41427	0.52586	0.38815	0.36432	0.36352	0.26025	0.24053
	3	0.72805	0.75843	0.71730	0.79489	0.53415	0.49860	0.98901	0.49536	0.45980	0.66728	0.32376	0.30118
(0.1, 0.4)	4	0.88729	0.81407	0.77213	1.22682	0.62671	0.58507	1.61024	0.59941	0.55573	1.09525	0.40493	0.38406
	5	1.08817	0.87445	0.83516	1.77491	0.72853	0.68647	2.43403	0.72794	0.67841	1.64983	0.49927	0.48541
	0	0.50063	0.63778	0.59218	0.23291	0.34003	0.30120	0.15827	0.24944	0.21581	0.11621	0.16955	0.15000
	0.5	0.51014	0.64673	0.60050	0.24615	0.34745	0.30964	0.18061	0.26001	0.22821	0.13112	0.17816	0.15987
	1	0.52907	0.65542	0.61036	0.29084	0.36854	0.33468	0.24802	0.29283	0.26533	0.17422	0.19669	0.18036
(0.1, 0.8)	2	0.59169	0.68742	0.64426	0.46632	0.43336	0.40183	0.51135	0.37391	0.35057	0.35429	0.25122	0.23254
	3	0.70760	0.73202	0.68917	0.77762	0.51533	0.47979	0.96774	0.47874	0.44382	0.65187	0.31141	0.29189
	4	0.86121	0.79003	0.74606	1.20104	0.60835	0.56809	1.57423	0.57790	0.53348	1.06949	0.39210	0.37361
	5	1.06107	0.84727	0.81049	1.72863	0.70507	0.66583	2.38101	0.70208	0.66077	1.60813	0.48331	0.47829
	0	0.45176	0.55899	0.51984	0.21035	0.29464	0.26266	0.14169	0.21581	0.18683	0.10410	0.14665	0.13018
(0.1, 0.8)	0.5	0.45888	0.56780	0.52709	0.22181	0.30188	0.27070	0.16206	0.22672	0.19923	0.11735	0.15505	0.13963
	1	0.47645	0.57716	0.53683	0.26156	0.32264	0.29426	0.22116	0.25624	0.23233	0.15622	0.17148	0.15799
	2	0.53345	0.60529	0.56884	0.42153	0.37798	0.35220	0.45997	0.32417	0.30432	0.31908	0.21683	0.20371
	3	0.63818	0.64490	0.61154	0.70116	0.44595	0.42433	0.87871	0.41153	0.39223	0.58886	0.26982	0.26494
	4	0.77442	0.69414	0.66445	1.08777	0.52857	0.51264	1.42632	0.49625	0.47930	0.96541	0.34229	0.34421
	5	0.95375	0.74499	0.72570	1.56198	0.61505	0.61157	2.15149	0.60448	0.61373	1.45171	0.42582	0.44924
(0.1, 0.8)	0	0.05167	0.06607	0.06158	0.05167	0.06607	0.06158	0.05167	0.06607	0.06158	0.05167	0.06607	0.06158
	0.5	0.05765	0.06976	0.06530	0.05765	0.06976	0.06530	0.05765	0.06976	0.06530	0.05765	0.06976	0.06530
	1	0.07247	0.07667	0.07247	0.07247	0.07667	0.07247	0.07247	0.07667	0.07247	0.07247	0.07667	0.07247
	2	0.09574	0.09809	0.09574	0.09574	0.09809	0.09574	0.09574	0.09809	0.09574	0.09574	0.09809	0.09574
	3	0.13388	0.13388	0.13388	0.13388	0.13388	0.13388	0.13388	0.13388	0.13388	0.13388	0.13388	0.13388
(0.1, 0.8)	4	0.17887	0.17887	0.17887	0.17887	0.17887	0.17887	0.17887	0.17887	0.17887	0.17887	0.17887	0.17887
	5	0.24281	0.24281	0.24281	0.24281	0.24281	0.24281	0.24281	0.24281	0.24281	0.24281	0.24281	0.24281
	0	0.05024	0.06394	0.05946	0.05024	0.06394	0.05946	0.05024	0.06394	0.05946	0.05024	0.06394	0.05946
	0.5	0.05616	0.06766	0.06327	0.05616	0.06766	0.06327	0.05616	0.06766	0.06327	0.05616	0.06766	0.06327
	1	0.07004	0.07421	0.07004	0.07004	0.07421	0.07004	0.07004	0.07421	0.07004	0.07004	0.07421	0.07004
(0.1, 0.8)	2	0.09267	0.09469	0.09267	0.09267	0.09469	0.09267	0.09267	0.09469	0.09267	0.09267	0.09469	0.09267
	3	0.12897	0.12897	0.12897	0.12897	0.12897	0.12897	0.12897	0.12897	0.12897	0.12897	0.12897	0.12897
	4	0.17392	0.17392	0.17392	0.17392	0.17392	0.17392	0.17392	0.17392	0.17392	0.17392	0.17392	0.17392
	5	0.23693	0.23693	0.23693	0.23693	0.23693	0.23693	0.23693	0.23693	0.23693	0.23693	0.23693	0.23693
	0	0.04505	0.05584	0.05205	0.04505	0.05584	0.05205	0.04505	0.05584	0.05205	0.04505	0.05584	0.05205
(0.1, 0.8)	0.5	0.05036	0.05936	0.05547	0.05036	0.05936	0.05547	0.05036	0.05936	0.05547	0.05036	0.05936	0.05547
	1	0.06195	0.06521	0.06195	0.06195	0.06521	0.06195	0.06195	0.06521	0.06195	0.06195	0.06521	0.06195
	2	0.08353	0.08353	0.08353	0.08353	0.08353	0.08353	0.08353	0.08353	0.08353	0.08353	0.08353	0.08353
	3	0.11411	0.11411	0.11411	0.11411	0.11411	0.11411	0.11411	0.11411	0.11411	0.11411	0.11411	0.11411
	4	0.15362	0.15362	0.15362	0.15362	0.15362	0.15362	0.15362	0.15362	0.15362	0.15362	0.15362	0.15362
(0.1, 0.8)	5	0.21063	0.21063	0.21063	0.21063	0.21063	0.21063	0.21063	0.21063	0.21063	0.21063	0.21063	0.21063

ตารางที่ 3.1: (ต่อ)

(ρ_W, ρ_V)	δ_M	(σ_W^2, σ_V^2)											
		(0.1, 1)				(0.02, 1)				(0.01, 1)			
		KF	MGLF-S	MGLF-M		KF	MGLF-S	MGLF-M		KF	MGLF-S	MGLF-M	
(0.8, 0.1)	0	0.44774	0.58174	0.56710		0.20772	0.31100	0.29245		0.14154	0.22765	0.20898	
	0.5	0.46282	0.59115	0.57698		0.23032	0.32184	0.30331		0.17843	0.24384	0.22751	
	1	0.49406	0.60786	0.59504		0.30179	0.35177	0.33620		0.28137	0.28655	0.27640	
	2	0.60855	0.66036	0.65131		0.59092	0.45040	0.43324		0.69104	0.41264	0.39225	
	3	0.80541	0.72535	0.71557		1.07639	0.56527	0.53663		1.40406	0.55965	0.51541	
	4	1.06274	0.79873	0.78659		1.75834	0.68783	0.65140		2.35794	0.69589	0.64024	
(0.8, 0.4)	5	1.40875	0.87446	0.86520		2.60954	0.80989	0.76957		3.59564	0.84746	0.78906	
	0	0.49384	0.64301	0.61361		0.23043	0.34394	0.31505		0.15603	0.25098	0.22626	
	0.5	0.50535	0.65242	0.62327		0.24710	0.35172	0.32410		0.18633	0.26508	0.24104	
	1	0.52875	0.66272	0.63276		0.31183	0.38161	0.35691		0.27916	0.30766	0.28462	
	2	0.62402	0.71034	0.68414		0.55610	0.46613	0.43986		0.64041	0.41140	0.38269	
	3	0.79109	0.76832	0.74074		0.98369	0.56255	0.52416		1.26184	0.53533	0.48742	
(0.8, 0.8)	4	1.01122	0.83046	0.80443		1.56764	0.66795	0.62578		2.09591	0.65136	0.59588	
	5	1.30483	0.90245	0.88472		2.30153	0.78066	0.73536		3.19469	0.79498	0.73599	
	0	0.51291	0.65767	0.61194		0.24099	0.35233	0.31110		0.16222	0.25683	0.22159	
	0.5	0.52385	0.66910	0.62505		0.25020	0.35822	0.31808		0.18453	0.27002	0.23626	
	1	0.53977	0.67691	0.63047		0.29954	0.38553	0.34995		0.25395	0.30614	0.27357	
	2	0.60798	0.71503	0.67380		0.47894	0.44604	0.41064		0.52427	0.37639	0.34333	
(0.8, 0.8)	3	0.72631	0.75751	0.72015		0.79606	0.51652	0.48041		0.99099	0.46661	0.42738	
	4	0.88065	0.81057	0.77966		1.23114	0.60454	0.57455		1.61163	0.55832	0.52503	
	5	1.08597	0.87058	0.85250		1.77034	0.69907	0.67739		2.43660	0.67572	0.65760	
	0									0.11761	0.17393	0.15279	
	0.5									0.13393	0.18556	0.16620	
	1									0.17930	0.20548	0.18833	
(0.8, 0.8)	2									0.36314	0.25308	0.23446	
	3									0.66651	0.30798	0.29532	
	4									1.09455	0.38981	0.38389	
	5									1.64747	0.48506	0.49570	
	0									0.04520	0.05860	0.05707	
	0.5									0.05488	0.06387	0.06277	
(0.8, 0.8)	1									0.08367	0.07342	0.07229	
	2									0.19806	0.09974	0.10057	
	3									0.38921	0.14100	0.14646	
	4									0.65571	0.19671	0.20773	
	5									1.00094	0.27321	0.29322	
	0									0.11303	0.17003	0.15521	
(0.8, 0.8)	0.5									0.13455	0.18235	0.16984	
	1									0.19637	0.20746	0.19561	
	2									0.44655	0.27368	0.25547	
	3									0.85968	0.34373	0.32178	
	4									1.43747	0.43544	0.41408	
	5									2.18371	0.53928	0.52765	
(0.8, 0.8)	0									0.05122	0.06581	0.06132	
	0.5									0.05755	0.07050	0.06623	
	1									0.07481	0.07636	0.07308	
	2									0.14269	0.09787	0.09810	
	3									0.25870	0.13376	0.14187	
	4									0.41572	0.17829	0.19762	
(0.8, 0.8)	5									0.62062	0.24265	0.26840	

ตารางที่ 3.2: MSSE ของตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M เมื่อ $k = 5$

(ρ_w, ρ_v)	δ_M	(σ_w^2, σ_v^2)						$(0.01, 0.5)$					
		$(0.1, 1)$			$(0.02, 1)$			$(0.01, 1)$			$(0.01, 0.1)$		
		KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M
$(0.1, 0.1)$	0	1.28574	1.55868	1.45241	0.59080	0.77785	0.70216	0.40257	0.55297	0.49211	0.29765	0.39075	0.35330
	0.5	1.29601	1.56660	1.46237	0.60899	0.78305	0.71159	0.42819	0.56234	0.50522	0.31362	0.40042	0.36357
	1	1.32136	1.58020	1.47868	0.65204	0.81028	0.73817	0.50086	0.60105	0.54928	0.35712	0.41704	0.38400
	2	1.38317	1.61667	1.51195	0.83575	0.88969	0.81829	0.77251	0.71210	0.65312	0.53932	0.49296	0.44577
	3	1.49462	1.66558	1.56247	1.13657	1.00159	0.90169	1.22376	0.87093	0.76041	0.84242	0.58419	0.50956
	4	1.65912	1.73798	1.62425	1.56671	1.13666	0.99645	1.86155	1.03942	0.85722	1.27380	0.69063	0.59063
	5	1.87042	1.81790	1.69987	2.12331	1.27857	1.10658	2.66857	1.22926	0.98966	1.82011	0.81237	0.70516
	0	1.19644	1.43365	1.34412	0.55533	0.72113	0.65279	0.37423	0.51021	0.45569	0.27732	0.36046	0.32648
	0.5	1.20959	1.44090	1.35618	0.56987	0.72549	0.66128	0.39594	0.51871	0.46710	0.29214	0.36953	0.33761
	1	1.23190	1.45648	1.37127	0.61053	0.74828	0.68726	0.46248	0.55392	0.50625	0.33116	0.38418	0.35495
$(0.1, 0.4)$	2	1.29068	1.48941	1.40175	0.78119	0.82415	0.75601	0.71980	0.65947	0.59475	0.50320	0.45573	0.40639
	3	1.38810	1.53307	1.43978	1.06833	0.92890	0.83042	1.14362	0.80165	0.68575	0.78548	0.53834	0.46809
	4	1.55632	1.60774	1.50900	1.46421	1.04770	0.91105	1.75179	0.96208	0.78200	1.19003	0.63778	0.54664
	5	1.74193	1.67779	1.57776	1.97342	1.17191	1.00348	2.48793	1.12665	0.89823	1.70075	0.74812	0.65612
	0	0.93341	1.07293	1.02912	0.43320	0.54191	0.50022	0.28839	0.38172	0.34497	0.21650	0.27040	0.24920
	0.5	0.94159	1.07460	1.03410	0.44523	0.54776	0.50940	0.30453	0.38919	0.35470	0.22909	0.27880	0.25916
	1	0.96891	1.09857	1.05511	0.47708	0.56417	0.52787	0.35514	0.41586	0.37988	0.25662	0.28939	0.26787
	2	1.00464	1.11859	1.07481	0.60742	0.62331	0.56661	0.56727	0.50332	0.43840	0.39295	0.34538	0.30136
	3	1.08310	1.15808	1.10183	0.83591	0.70770	0.61937	0.90086	0.61179	0.49941	0.62018	0.41373	0.35996
	4	1.21714	1.22342	1.16833	1.14729	0.79769	0.69145	1.38740	0.73842	0.58679	0.93783	0.49290	0.43475
$(0.1, 0.8)$	5	1.35695	1.27382	1.22345	1.55092	0.90042	0.78654	1.96492	0.86989	0.69902	1.33614	0.57937	0.53910
	0	0.93341	1.07293	1.02912	0.43320	0.54191	0.50022	0.28839	0.38172	0.34497	0.21650	0.27040	0.24920
	0.5	0.94159	1.07460	1.03410	0.44523	0.54776	0.50940	0.30453	0.38919	0.35470	0.22909	0.27880	0.25916
	1	0.96891	1.09857	1.05511	0.47708	0.56417	0.52787	0.35514	0.41586	0.37988	0.25662	0.28939	0.26787
	2	1.00464	1.11859	1.07481	0.60742	0.62331	0.56661	0.56727	0.50332	0.43840	0.39295	0.34538	0.30136
$(0.1, 0.8)$	3	1.08310	1.15808	1.10183	0.83591	0.70770	0.61937	0.90086	0.61179	0.49941	0.62018	0.41373	0.35996
	4	1.21714	1.22342	1.16833	1.14729	0.79769	0.69145	1.38740	0.73842	0.58679	0.93783	0.49290	0.43475
	5	1.35695	1.27382	1.22345	1.55092	0.90042	0.78654	1.96492	0.86989	0.69902	1.33614	0.57937	0.53910
	0	0.93341	1.07293	1.02912	0.43320	0.54191	0.50022	0.28839	0.38172	0.34497	0.21650	0.27040	0.24920
	0.5	0.94159	1.07460	1.03410	0.44523	0.54776	0.50940	0.30453	0.38919	0.35470	0.22909	0.27880	0.25916
$(0.1, 0.8)$	1	0.96891	1.09857	1.05511	0.47708	0.56417	0.52787	0.35514	0.41586	0.37988	0.25662	0.28939	0.26787
	2	1.00464	1.11859	1.07481	0.60742	0.62331	0.56661	0.56727	0.50332	0.43840	0.39295	0.34538	0.30136
	3	1.08310	1.15808	1.10183	0.83591	0.70770	0.61937	0.90086	0.61179	0.49941	0.62018	0.41373	0.35996
	4	1.21714	1.22342	1.16833	1.14729	0.79769	0.69145	1.38740	0.73842	0.58679	0.93783	0.49290	0.43475
	5	1.35695	1.27382	1.22345	1.55092	0.90042	0.78654	1.96492	0.86989	0.69902	1.33614	0.57937	0.53910

ตารางที่ 3.2: (ต่อ)

(ρ_W, ρ_V)	δ_M	(σ_W^2, σ_V^2)																			
		(0.1, 1)				(0.02, 1)				(0.01, 1)				(0.01, 0.5)				(0.01, 0.1)			
		KF	MGLF-S	MGLF-M		KF	MGLF-S	MGLF-M		KF	MGLF-S	MGLF-M		KF	MGLF-S	MGLF-M		KF	MGLF-S	MGLF-M	
(0.4, 0.1)	0	1.21043	1.46563	1.39356		0.55573	0.73497	0.67810		0.38150	0.52278	0.47704		0.27654	0.36532	0.33712		0.12088	0.14667	0.13935	
	0.5	1.20817	1.46153	1.38588		0.57241	0.74089	0.68905		0.40384	0.53139	0.48830		0.29754	0.37670	0.35018		0.12768	0.15069	0.14377	
	1	1.22735	1.47229	1.40194		0.62623	0.76740	0.71521		0.48198	0.56862	0.53054		0.34593	0.39677	0.37190		0.14816	0.16063	0.15272	
	2	1.31525	1.52534	1.45701		0.84053	0.86067	0.80711		0.80109	0.70304	0.65158		0.56000	0.48359	0.43960		0.23169	0.18783	0.17859	
	3	1.45085	1.59057	1.51054		1.19463	0.98725	0.89222		1.31581	0.87011	0.74814		0.92348	0.58954	0.50794		0.36782	0.22624	0.22214	
(0.4, 0.4)	4	1.63761	1.65226	1.56732		1.70368	1.14212	0.99018		2.08113	1.07711	0.86867		1.43479	0.71087	0.59631		0.56501	0.28126	0.28632	
	5	1.89055	1.74655	1.64846		2.36632	1.31246	1.11398		3.04484	1.28848	1.00479		2.07905	0.84083	0.71093		0.81138	0.34729	0.36549	
	0	1.28974	1.55979	1.45968		0.59781	0.78750	0.71263		0.41073	0.55925	0.50037		0.29804	0.39093	0.35303		0.12962	0.15721	0.14639	
	0.5	1.29316	1.56751	1.46321		0.61514	0.79788	0.72084		0.43144	0.57081	0.51199		0.31373	0.40039	0.36414		0.13465	0.15970	0.14964	
	1	1.31182	1.57234	1.47426		0.65556	0.81126	0.74073		0.49693	0.59388	0.54244		0.35632	0.41696	0.38162		0.15125	0.16820	0.15661	
(0.4, 0.8)	2	1.38479	1.61507	1.51492		0.83910	0.89840	0.81270		0.78419	0.71537	0.63580		0.53989	0.49271	0.43327		0.22215	0.19322	0.18213	
	3	1.50135	1.67413	1.56480		1.15027	1.00289	0.88032		1.21266	0.85073	0.70973		0.84084	0.57722	0.49414		0.33409	0.22797	0.22357	
	4	1.66985	1.74094	1.62772		1.57238	1.12395	0.96645		1.84632	1.01052	0.80609		1.27575	0.67804	0.57621		0.49588	0.27760	0.28111	
	5	1.86521	1.81854	1.69900		2.12039	1.25841	1.07299		2.66881	1.18836	0.93423		1.82623	0.79394	0.69326		0.69968	0.33762	0.35682	
	0	1.19893	1.39146	1.31326		0.55126	0.70337	0.62676		0.38351	0.50631	0.44705		0.27466	0.35110	0.31464		0.12107	0.14084	0.13286	
(0.4, 0.8)	0.5	1.18774	1.38725	1.30963		0.55970	0.71156	0.63885		0.38616	0.50919	0.44748		0.28501	0.35377	0.32082		0.12392	0.14260	0.13419	
	1	1.20812	1.39940	1.32094		0.58063	0.71481	0.64321		0.43266	0.53254	0.47176		0.31288	0.37202	0.33230		0.13406	0.14974	0.13930	
	2	1.25650	1.43502	1.34774		0.71213	0.77835	0.68501		0.62922	0.61541	0.51530		0.44029	0.42219	0.36523		0.17735	0.16791	0.15967	
	3	1.33180	1.48126	1.38130		0.91300	0.85377	0.73657		0.91319	0.69690	0.56979		0.65182	0.48495	0.42113		0.24980	0.19294	0.19117	
	4	1.41100	1.51506	1.41994		1.22046	0.94649	0.81884		1.37318	0.81036	0.66280		0.94142	0.56268	0.50096		0.34932	0.22698	0.23563	
5	1.56492	1.58623	1.49106		1.58450	1.04983	0.91774		1.93722	0.93886	0.77161		1.31101	0.65133	0.60111		0.48048	0.27495	0.29737		

ตารางที่ 3.2: (ต่อ)

(ρ_W, ρ_V)	δ_M	(σ_W^2, σ_V^2)											
		(0.1, 1)				(0.02, 1)				(0.01, 1)			
		KF	MGLF-S	MGLF-M		KF	MGLF-S	MGLF-M		KF	MGLF-S	MGLF-M	
(0.8, 0.1)	0	0.93714	1.15481	1.18391		0.43267	0.58188	0.58518		0.29537	0.41272	0.41193	
	0.5	0.95215	1.16668	1.19525		0.46012	0.59402	0.59646		0.33747	0.42933	0.43105	
	1	0.98615	1.17916	1.20802		0.55042	0.64001	0.64326		0.46883	0.49050	0.49021	
	2	1.12853	1.25587	1.28199		0.93383	0.79888	0.76709		1.00383	0.71031	0.64018	
	3	1.38781	1.36140	1.35602		1.54309	1.00285	0.87577		1.90329	1.00102	0.77660	
	4	1.74110	1.47911	1.44022		2.41543	1.24540	0.99760		3.13136	1.31062	0.91584	
	5	2.18985	1.60566	1.54120		3.51567	1.47151	1.12419		4.70244	1.61731	1.06062	
	0	1.19851	1.48192	1.42105		0.55113	0.74616	0.69368		0.38173	0.52968	0.49277	
	0.5	1.19861	1.48421	1.42305		0.57660	0.75680	0.70833		0.40767	0.54331	0.50139	
	1	1.23299	1.49938	1.44683		0.63926	0.78272	0.73551		0.51358	0.59015	0.54968	
(0.8, 0.4)	2	1.35521	1.57144	1.50131		0.94898	0.91480	0.82739		0.95558	0.76648	0.65923	
	3	1.50061	1.66295	1.56711		1.43879	1.07430	0.91198		1.67264	0.98015	0.75783	
	4	1.81548	1.73991	1.63160		2.15571	1.25517	1.01538		2.70193	1.20925	0.87545	
	5	2.17934	1.85359	1.73920		3.04420	1.44604	1.14564		4.00085	1.44244	1.00660	
	0	1.29112	1.55520	1.45995		0.59411	0.78576	0.70102		0.41523	0.56306	0.49997	
	0.5	1.28448	1.55828	1.45913		0.60809	0.79672	0.71823		0.42400	0.57191	0.50373	
	1	1.30950	1.57094	1.47520		0.64153	0.80968	0.72332		0.49113	0.60509	0.53198	
	2	1.38263	1.62758	1.51796		0.83171	0.89684	0.77665		0.77701	0.71889	0.59011	
	3	1.50067	1.69357	1.56450		1.13550	0.99819	0.84769		1.19991	0.83005	0.66100	
	4	1.63918	1.74184	1.62440		1.58694	1.11384	0.94436		1.86084	0.96572	0.76268	
(0.8, 0.8)	5	1.86610	1.82644	1.72169		2.11962	1.23284	1.05408		2.67420	1.11457	0.88549	
	0	0.09354	0.11484	0.11758		0.21561	0.28753	0.28932		0.21561	0.28753	0.28932	
	0.5	0.10649	0.12239	0.12555		0.24750	0.30519	0.30803		0.24750	0.30519	0.30803	
	1	0.14418	0.13808	0.13692		0.34077	0.34800	0.34708		0.34077	0.34800	0.34708	
	2	0.29538	0.18042	0.17114		0.70548	0.48297	0.42701		0.70548	0.48297	0.42701	
	3	0.54895	0.23330	0.22532		1.33144	0.64726	0.51230		1.33144	0.64726	0.51230	
	4	0.90051	0.30229	0.30100		2.18923	0.82160	0.61384		2.18923	0.82160	0.61384	
	5	1.35178	0.38985	0.39842		3.32463	1.00932	0.74029		3.32463	1.00932	0.74029	
	0	0.12075	0.14942	0.14350		0.27540	0.37170	0.34768		0.27540	0.37170	0.34768	
	0.5	0.13022	0.15441	0.14856		0.29798	0.38001	0.35692		0.29798	0.38001	0.35692	
(0.8, 0.8)	1	0.15981	0.16836	0.15836		0.37292	0.41732	0.38829		0.37292	0.41732	0.38829	
	2	0.27704	0.20166	0.18933		0.67204	0.52496	0.45211		0.67204	0.52496	0.45211	
	3	0.47638	0.24788	0.24131		1.17899	0.65068	0.52360		1.17899	0.65068	0.52360	
	4	0.75152	0.30964	0.31200		1.87164	0.78281	0.62101		1.87164	0.78281	0.62101	
	5	1.11189	0.39524	0.40826		2.77247	0.93339	0.74753		2.77247	0.93339	0.74753	
	0	0.13082	0.15787	0.14861		0.29644	0.39160	0.35198		0.29644	0.39160	0.35198	
	0.5	0.13544	0.16102	0.15087		0.31141	0.39775	0.36092		0.31141	0.39775	0.36092	
	1	0.15211	0.17091	0.15836		0.35539	0.42529	0.37612		0.35539	0.42529	0.37612	
	2	0.21997	0.19488	0.18665		0.54157	0.49239	0.41758		0.54157	0.49239	0.41758	
	3	0.33414	0.22935	0.23510		0.85358	0.56981	0.48457		0.85358	0.56981	0.48457	
(0.8, 0.8)	4	0.49198	0.27546	0.29570		1.28004	0.66238	0.57669		1.28004	0.66238	0.57669	
	5	0.69944	0.34201	0.38678		1.82693	0.77012	0.69704		1.82693	0.77012	0.69704	

ตารางที่ 3.3: MSSE ของตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M เมื่อ $k = 10$

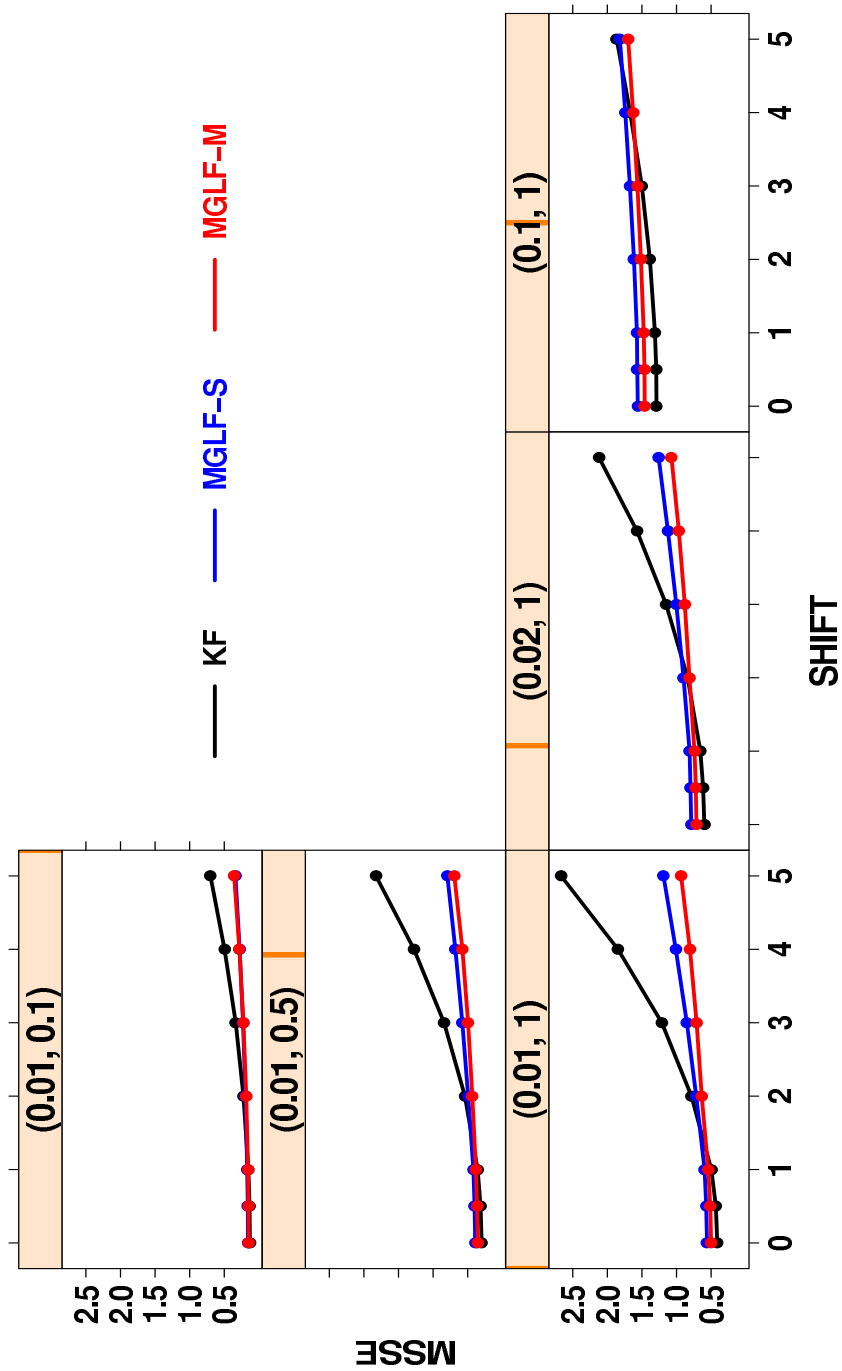
(ρ_w, ρ_v)	δ_M	(σ_w^2, σ_v^2)						$(0.01, 0.5)$					
		$(0.1, 1)$			$(0.02, 1)$			$(0.01, 1)$			$(0.01, 0.1)$		
		KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M
(0.1, 0.1)	0	2.58607	3.02644	2.88254	1.18255	1.46739	1.36760	0.82119	1.04177	0.96544	0.59042	0.73350	0.68333
	0.5	2.59655	3.03640	2.89171	1.19574	1.47489	1.37853	0.83720	1.04286	0.96990	0.61082	0.74785	0.69918
	1	2.62568	3.05034	2.90708	1.25272	1.50833	1.41491	0.91194	1.09352	1.02165	0.65546	0.76925	0.72256
	2	2.67727	3.07907	2.93764	1.42514	1.58957	1.48934	1.17658	1.21210	1.12392	0.84069	0.85558	0.78563
	3	2.79162	3.13236	2.98241	1.72793	1.72618	1.57635	1.62246	1.40222	1.22708	1.13904	0.96856	0.84747
	4	2.93834	3.20170	3.03546	2.17168	1.90513	1.67361	2.26890	1.64456	1.33791	1.57196	1.11183	0.92987
(0.1, 0.4)	5	3.16405	3.30179	3.12365	2.71929	2.09135	1.77711	3.07065	1.90424	1.46324	2.12598	1.26082	1.03720
	0	2.31408	2.66735	2.56045	1.06746	1.30595	1.22467	0.73280	0.92336	0.85646	0.52781	0.65048	0.60860
	0.5	2.31783	2.67407	2.56883	1.07333	1.31441	1.23163	0.74802	0.92552	0.86652	0.54641	0.66367	0.62114
	1	2.34118	2.68654	2.57217	1.11805	1.33708	1.25646	0.81281	0.97504	0.90912	0.58510	0.68126	0.63979
	2	2.39251	2.71870	2.61201	1.27181	1.41315	1.32115	1.06309	1.08343	0.99068	0.75505	0.76321	0.69293
	3	2.51793	2.78758	2.67013	1.55162	1.53787	1.38944	1.45844	1.25114	1.07266	1.02762	0.86069	0.74540
(0.1, 0.8)	4	2.63845	2.83875	2.70179	1.94053	1.68813	1.47248	2.02104	1.45078	1.15488	1.41866	0.98764	0.82732
	5	2.83945	2.93274	2.78844	2.45168	1.86274	1.57760	2.75426	1.67610	1.27241	1.91450	1.12374	0.94077
	0	1.62823	1.80551	1.77484	0.75496	0.89516	0.85555	0.51240	0.62963	0.59163	0.37428	0.44621	0.42551
	0.5	1.63642	1.81774	1.78543	0.75724	0.90266	0.85968	0.52375	0.63294	0.60111	0.38410	0.45512	0.43382
	1	1.65036	1.82633	1.78753	0.79319	0.92187	0.87807	0.57256	0.67468	0.63065	0.41408	0.46880	0.44371
	2	1.69813	1.86177	1.82137	0.89582	0.97215	0.90416	0.75331	0.75285	0.66404	0.53799	0.53208	0.47588
(0.1, 0.8)	3	1.79263	1.92274	1.87454	1.09979	1.06648	0.95665	1.04243	0.87520	0.72881	0.73552	0.60294	0.52411
	4	1.87527	1.95905	1.89505	1.37788	1.17791	1.02771	1.43813	1.01339	0.79732	1.01565	0.69719	0.59797
	5	2.00590	2.02547	1.96235	1.76786	1.32330	1.14008	1.95310	1.17198	0.90932	1.37368	0.80781	0.69781

ตารางที่ 3.3: (ต่อ)

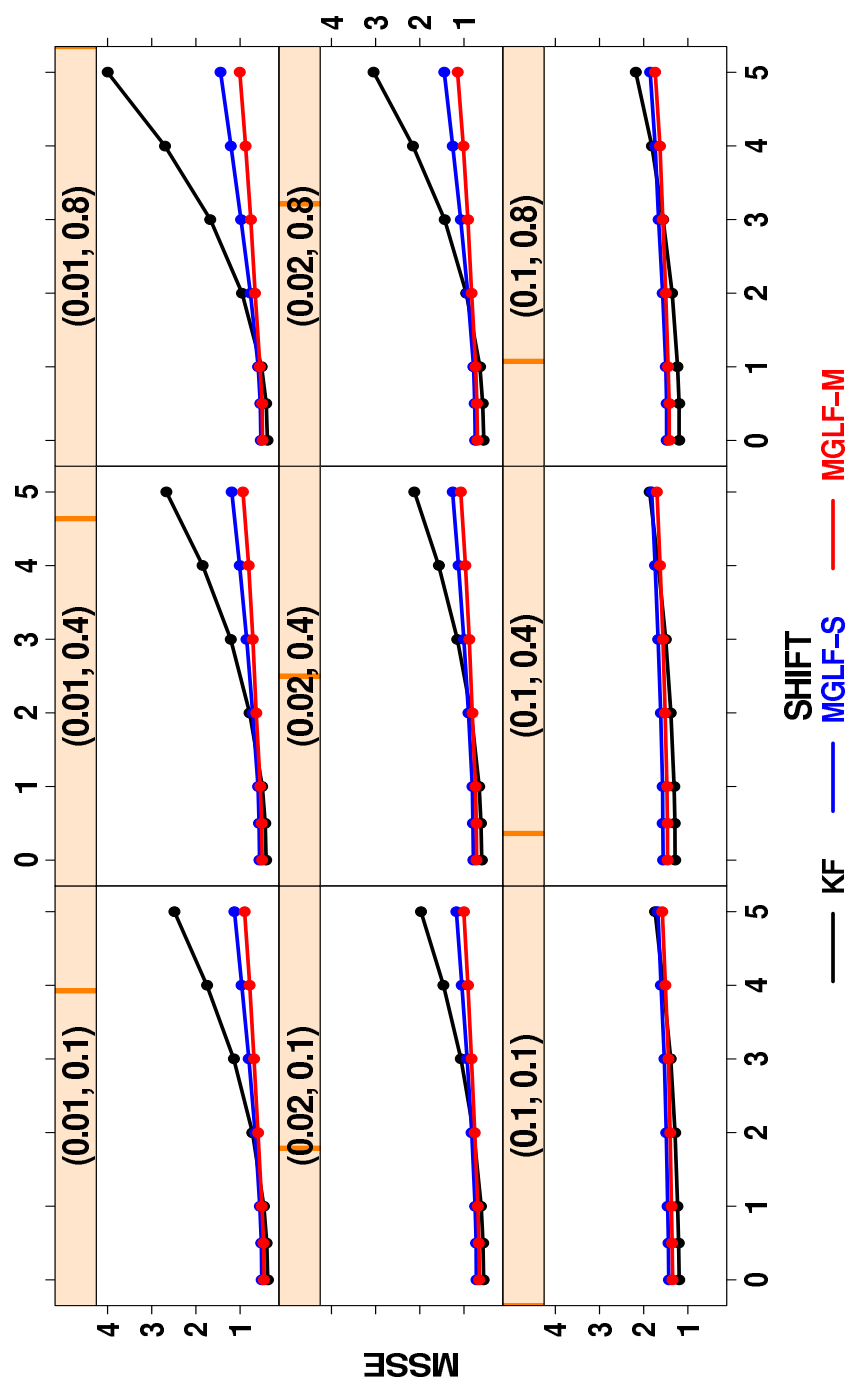
(ρ_W, ρ_V)	δ_M	(σ_W^2, σ_V^2)											
		(0.1, 1)				(0.02, 1)				(0.01, 1)			
		KF	MGLF-S	MGLF-M		KF	MGLF-S	MGLF-M		KF	MGLF-S	MGLF-M	
(0.4, 0.1)	0	2.32716	2.73379	2.65468		1.06434	1.32569	1.26570		0.73256	0.93579	0.88988	
	0.5	2.32774	2.73775	2.65964		1.07446	1.33156	1.27333		0.75080	0.93824	0.89475	
	1	2.36500	2.75646	2.68027		1.13126	1.36070	1.30552		0.84659	0.99804	0.95575	
	2	2.43619	2.79666	2.71909		1.36689	1.47574	1.40560		1.17451	1.14675	1.07316	
	3	2.59263	2.87133	2.78167		1.73631	1.64169	1.50211		1.72728	1.38030	1.18784	
	4	2.77493	2.95136	2.83480		2.27388	1.85335	1.60262		2.51569	1.67561	1.30439	
(0.4, 0.4)	5	3.05794	3.06879	2.92743		2.97738	2.08677	1.72331		3.51384	1.98121	1.42831	
	0	2.57732	3.01739	2.88381		1.18791	1.46596	1.37812		0.81587	1.03464	0.95903	
	0.5	2.59180	3.03277	2.90148		1.20387	1.48531	1.39217		0.82778	1.03352	0.96550	
	1	2.61644	3.04665	2.91215		1.25038	1.50957	1.41591		0.92530	1.10835	1.03477	
	2	2.68155	3.08780	2.95567		1.41760	1.58668	1.47584		1.17708	1.21300	1.09728	
	3	2.79720	3.15119	2.99793		1.73060	1.72670	1.54750		1.62037	1.39463	1.18301	
(0.4, 0.8)	4	2.94550	3.21355	3.04923		2.16520	1.88970	1.63900		2.26580	1.61931	1.27943	
	5	3.17767	3.32110	3.14005		2.71884	2.06653	1.73858		3.09006	1.86106	1.40346	
	0	2.33783	2.64372	2.56023		1.08470	1.30046	1.21998		0.73930	0.91601	0.84399	
	0.5	2.36685	2.67006	2.60178		1.09927	1.32329	1.23795		0.74066	0.91094	0.84514	
	1	2.37441	2.67817	2.58912		1.12251	1.33731	1.24960		0.81808	0.98211	0.90151	
	2	2.41970	2.71685	2.61968		1.20976	1.37524	1.26437		0.96130	1.03595	0.91232	
(0.4, 0.8)	3	2.48285	2.76781	2.66039		1.41402	1.47207	1.32863		1.23537	1.14438	0.97486	
	4	2.56229	2.80014	2.67864		1.68063	1.57610	1.40640		1.65046	1.28103	1.06321	
	5	2.70864	2.89399	2.76874		2.01189	1.68949	1.49619		2.13467	1.41720	1.17902	
	0	0.23159	0.27229	0.26471		0.53097	0.66209	0.63232		0.53097	0.66209	0.63232	
	0.5	0.23879	0.27682	0.26909		0.55351	0.67737	0.64971		0.55351	0.67737	0.64971	
	1	0.26093	0.28810	0.27860		0.60576	0.70158	0.67441		0.60576	0.70158	0.67441	
(0.4, 0.8)	2	0.34876	0.32254	0.30558		0.84114	0.81264	0.74953		0.84114	0.81264	0.74953	
	3	0.49475	0.36974	0.35098		1.20594	0.94529	0.81095		1.20594	0.94529	0.81095	
	4	0.69902	0.42813	0.41540		1.74429	1.12024	0.90020		1.74429	1.12024	0.90020	
	5	0.96726	0.50432	0.50127		2.43871	1.29881	1.01465		2.43871	1.29881	1.01465	
	0	0.25783	0.30119	0.28854		0.59158	0.73298	0.68571		0.59158	0.73298	0.68571	
	0.5	0.26518	0.30650	0.29428		0.61114	0.74934	0.70046		0.61114	0.74934	0.70046	
(0.4, 0.8)	1	0.28127	0.31497	0.29921		0.65413	0.76960	0.71897		0.65413	0.76960	0.71897	
	2	0.35027	0.34429	0.32489		0.83700	0.85458	0.76799		0.83700	0.85458	0.76799	
	3	0.46147	0.38181	0.36539		1.14207	0.96030	0.82687		1.14207	0.96030	0.82687	
	4	0.62356	0.43466	0.42681		1.57515	1.09508	0.91519		1.57515	1.09508	0.91519	
	5	0.82827	0.49994	0.50377		2.13049	1.23676	1.02845		2.13049	1.23676	1.02845	
	0	0.23570	0.26547	0.25768		0.53795	0.64827	0.60622		0.53795	0.64827	0.60622	
(0.4, 0.8)	0.5	0.24035	0.26998	0.26030		0.55284	0.66282	0.62107		0.55284	0.66282	0.62107	
	1	0.24769	0.27479	0.26418		0.58261	0.67874	0.63264		0.58261	0.67874	0.63264	
	2	0.28556	0.29573	0.28364		0.68744	0.73143	0.65714		0.68744	0.73143	0.65714	
	3	0.34720	0.32106	0.31357		0.87128	0.79382	0.70810		0.87128	0.79382	0.70810	
	4	0.43663	0.35793	0.36237		1.13879	0.88521	0.79073		1.13879	0.88521	0.79073	
	5	0.55040	0.39889	0.41907		1.47259	0.98358	0.88520		1.47259	0.98358	0.88520	

ตารางที่ 3.3: (ต่อ)

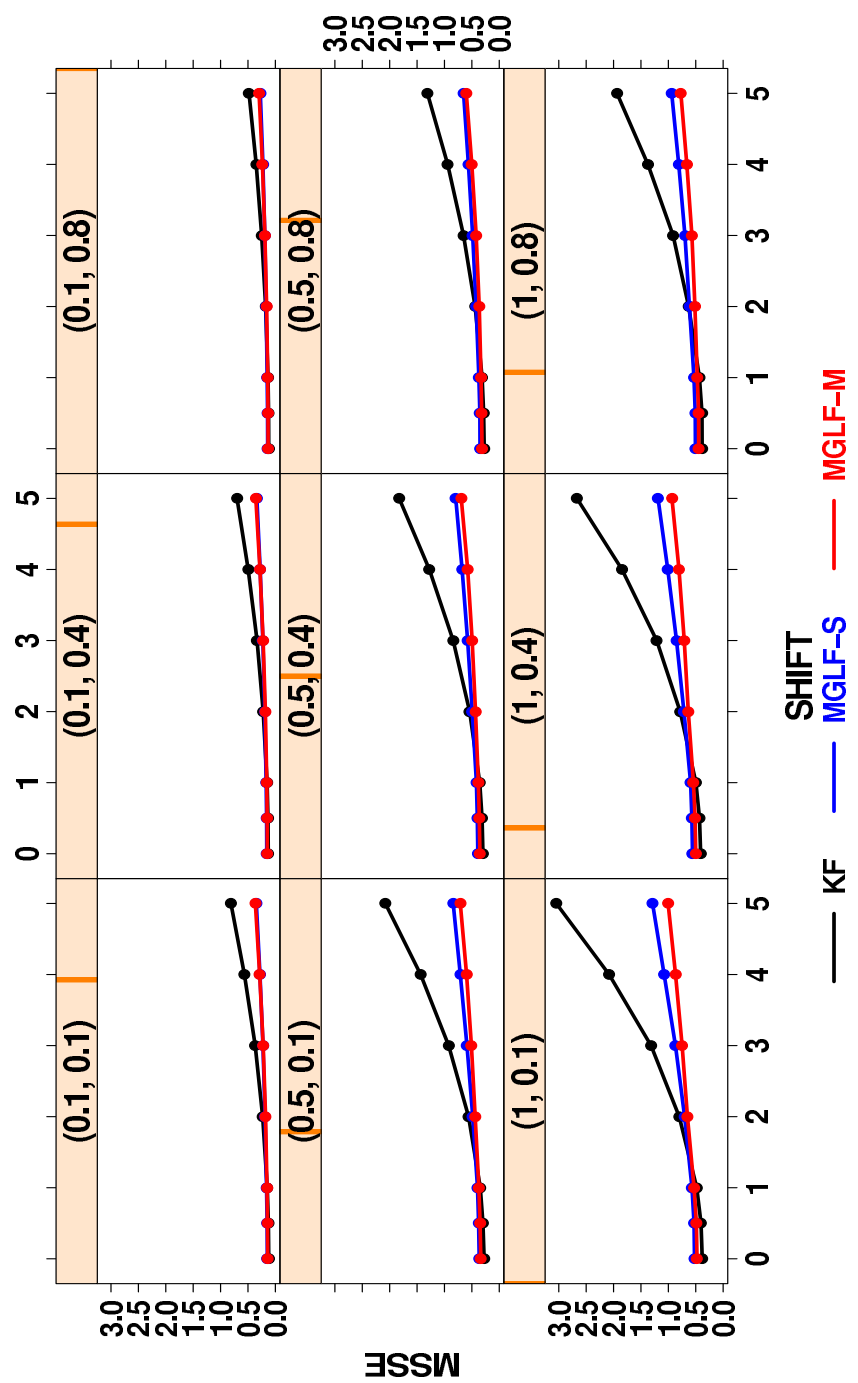
(ρ_W, ρ_V)	δ_M	(σ_W^2, σ_V^2)														
		(0.1, 1)			(0.02, 1)			(0.01, 1)			(0.01, 0.5)			(0.01, 0.1)		
		KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M
(0.8, 0.1)	0	1.65332	1.97040	2.09492	0.75252	0.95487	1.01044	0.50913	0.66479	0.70630	0.37366	0.47517	0.50446	0.16409	0.19596	0.20868
	0.5	1.66579	1.97961	2.10992	0.78176	0.96841	1.02515	0.55409	0.68371	0.72311	0.40950	0.49618	0.52525	0.17857	0.20434	0.21636
	1	1.71073	2.00349	2.13407	0.87810	1.01826	1.07167	0.70266	0.76897	0.80074	0.51181	0.54565	0.56646	0.22017	0.22364	0.22955
	2	1.86460	2.08381	2.19744	1.29155	1.21612	1.21010	1.27949	1.03702	0.96084	0.91871	0.72896	0.66044	0.38591	0.28130	0.26364
	3	2.16105	2.21935	2.28642	1.96587	1.50343	1.33144	2.25255	1.44061	1.10257	1.59421	0.96572	0.74137	0.66236	0.35220	0.32058
(0.8, 0.4)	4	2.51813	2.36356	2.36427	2.90031	1.84812	1.44599	3.59352	1.92656	1.23696	2.54356	1.24137	0.84013	1.05324	0.43549	0.40156
	5	3.03414	2.55148	2.47227	4.15486	2.23078	1.58837	5.33305	2.43581	1.38434	3.76729	1.52823	0.96696	1.55598	0.53853	0.50963
	0	2.34977	2.81995	2.80019	1.07905	1.35997	1.33973	0.73879	0.95525	0.92687	0.53897	0.68177	0.66626	0.23486	0.28151	0.27892
	0.5	2.36562	2.84483	2.82291	1.11665	1.39534	1.36392	0.76732	0.96305	0.94120	0.57024	0.70370	0.68601	0.24744	0.29040	0.28769
	1	2.40629	2.86814	2.83194	1.19473	1.43414	1.39624	0.91042	1.06162	1.02452	0.65067	0.74355	0.71588	0.27818	0.30508	0.29574
(0.8, 0.8)	2	2.52942	2.93677	2.90114	1.48929	1.57264	1.48348	1.35610	1.25672	1.11935	0.96164	0.88313	0.77881	0.40617	0.35064	0.32895
	3	2.74658	3.04672	2.95325	2.03561	1.80171	1.57837	2.12099	1.55556	1.22881	1.49901	1.05632	0.85278	0.61391	0.40390	0.38251
	4	3.02731	3.15687	3.03974	2.76820	2.05244	1.68377	3.20165	1.90793	1.34127	2.24549	1.25910	0.95164	0.91595	0.47666	0.46387
	5	3.45208	3.32219	3.15993	3.73862	2.33116	1.80148	4.60008	2.27802	1.48397	3.19432	1.46491	1.07512	1.29521	0.56576	0.56467
	0	2.56552	3.00302	2.95085	1.18885	1.46397	1.39420	0.81023	1.02701	0.96232	0.58940	0.73106	0.69591	0.25787	0.30114	0.29612
(0.8, 0.8)	0.5	2.59086	3.03569	2.99423	1.21206	1.49789	1.42710	0.81816	1.02587	0.97220	0.61213	0.75188	0.71532	0.26568	0.30861	0.30177
	1	2.60890	3.05119	2.99500	1.25369	1.52174	1.44083	0.92957	1.12235	1.04577	0.66015	0.77915	0.73196	0.28057	0.31758	0.30758
	2	2.68770	3.11494	3.03752	1.40837	1.59763	1.47945	1.17216	1.22066	1.07498	0.83342	0.86119	0.76429	0.34862	0.34728	0.33686
	3	2.79988	3.19570	3.09049	1.73807	1.74122	1.55598	1.62197	1.38653	1.14690	1.14094	0.95275	0.82895	0.46132	0.38366	0.38926
	4	2.94802	3.25304	3.14535	2.16815	1.88293	1.63813	2.27771	1.57584	1.24504	1.57870	1.07198	0.93079	0.62394	0.43830	0.46777
(0.8, 0.8)	5	3.19676	3.37878	3.28478	2.71799	2.04014	1.75259	3.07601	1.76049	1.37646	2.12931	1.20139	1.05300	0.82870	0.50165	0.55636



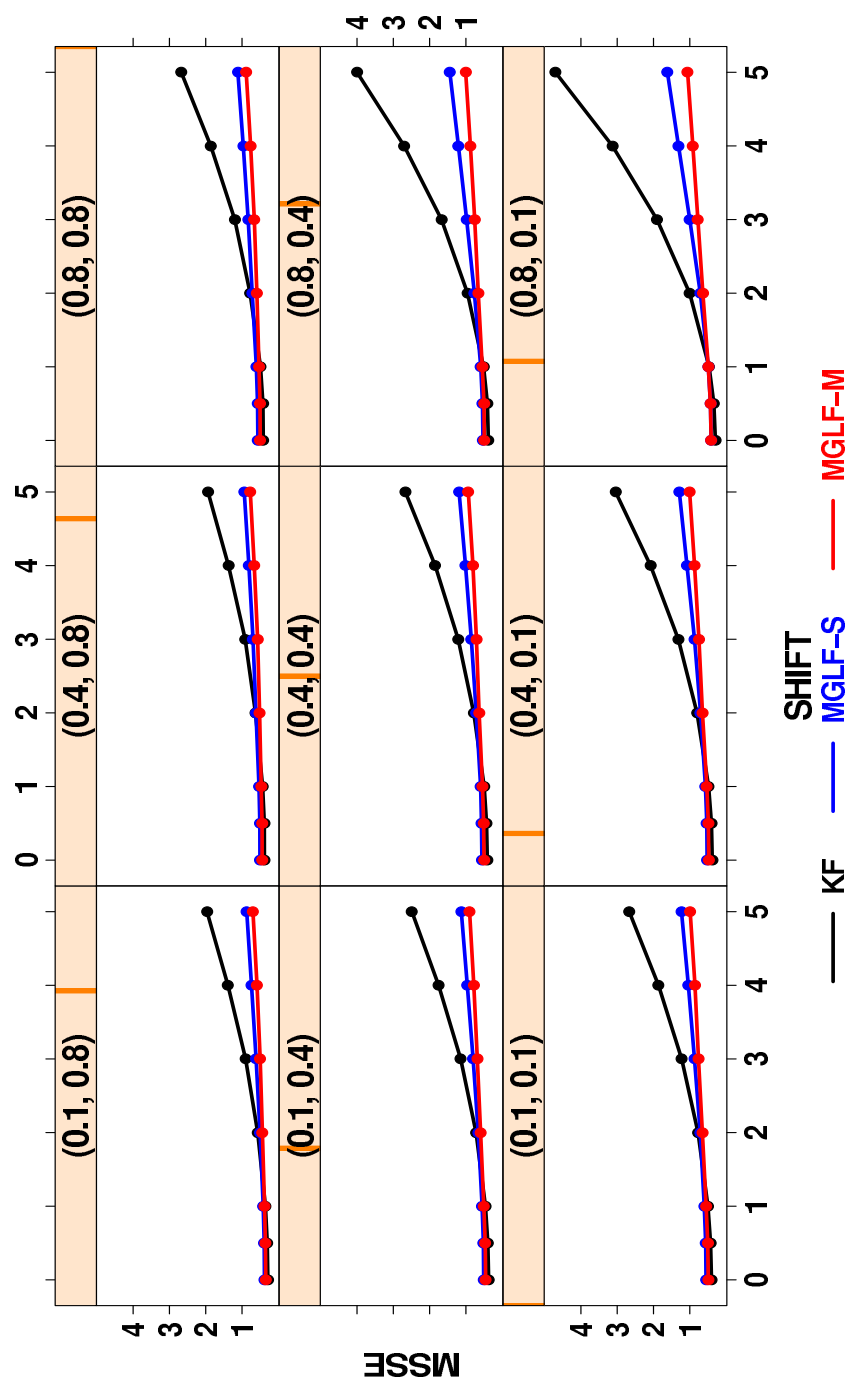
รูปที่ 3.4: MSSE ของตัวกรอง MGLF-S, MGLF-M และ KF สำหรับผู้ล่า (σ_w^2, σ_v^2)



รูปที่ 3.5: MSSE ของตัวกรอง MGLF-S, MGLF-M และ KF สำหรับคู่ลำดับ (σ_w^2, ρ_w)



รูปที่ 3.6: MSSE ของตัวกรอง MGLF-S, MGLF-M และ KF สำหรับคู่ลำดับ (σ_V^2, ρ_V)



รูปที่ 3.7: MSSE ของตัวกรอง MGLF-S, MGLF-M และ KF สำหรับคู่ลำดับ (ρ_W, ρ_V)

ค่าน้อยลง และ ρ_V มีค่ามากขึ้น อัตราการเพิ่มขึ้นของค่า MSSE ของตัวกรอง KF มีแนวโน้มลดลง

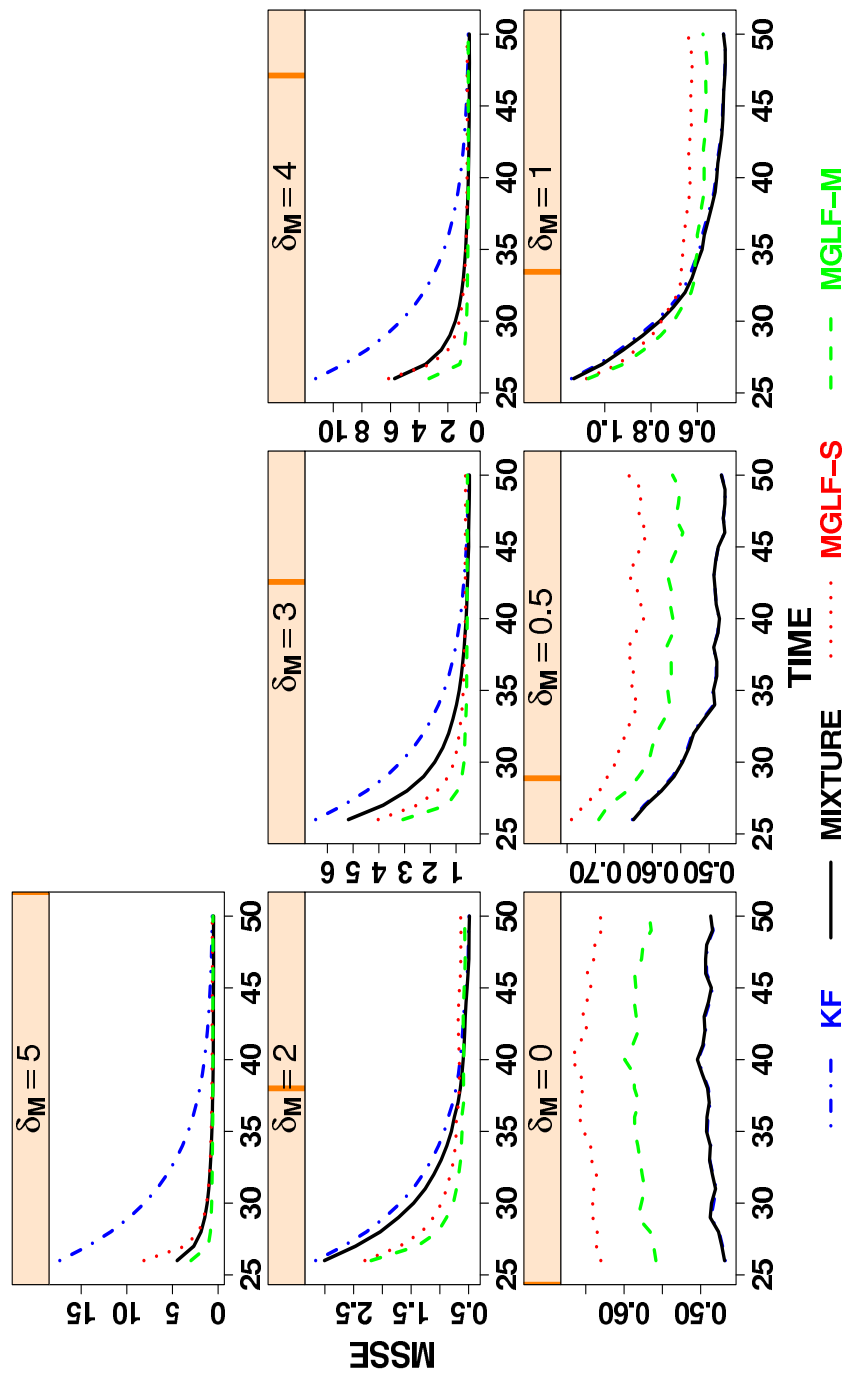
รูปที่ 3.7 แสดงการเคลื่อนไหวของค่า MSSE ของตัวกรองซึ่งได้รับผลกระทบจาก ρ_W และ ρ_V พบว่า ตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M มีความแข็งแกร่งต่อการเปลี่ยนแปลงของระบบทุกกรณี ขณะที่ ค่า MSSE ของตัวกรอง KF มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น และเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว เมื่อขนาดการเปลี่ยนแปลงของระบบใหญ่ขึ้น สำหรับกรณี ρ_V มีค่ามากขึ้น ในทางตรงกันข้าม ถ้า ρ_W มีค่ามากขึ้น ค่า MSSE ของตัวกรอง KF มีแนวโน้มลดลง เมื่อขนาดการเปลี่ยนแปลงของระบบเพิ่มขึ้น

จากผลการทดลองข้างต้น พบว่า ค่า MSSE ของตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M น้อยกว่าค่า MSSE ของตัวกรอง KF เมื่อ $\delta_M \geq 2$ ซึ่งตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M ควรจะมีประสิทธิภาพสูงกว่าตัวกรอง KF สำหรับกรณีระบบเปลี่ยนแปลงไม่มากนัก เช่น $\delta_M \geq 1$ ดังนั้น Khawsithiwong, N.Yatawara & Pongsapukdee (2011) จึงพิจารณาอัตราการลู่เข้าของค่า MSSE ภายหลังการเปลี่ยนแปลงของระบบจึงถูกพิจารณาภายใต้ขอบเขตการทดลองเช่นเดิม ซึ่งแก้ไขเพิ่มเติมบางเงื่อนไข คือ (1) ความแปรปรวนของตัวรบกวน $\sigma_W^2 = 0.01$ และ $\sigma_V^2 = 1$ (2) จำนวนตัวแปร $k = 5$ (3) MSSE คำนวณจากความคลาดเคลื่อนของการประมาณเวกเตอร์สถานะ 10 คาบเวลา ภายหลังระบบมีการเปลี่ยนแปลง กล่าวคือ ความคลาดเคลื่อนของการประมาณเวกเตอร์สถานะ ตั้งแต่ คาบที่ 26 ถึง คาบที่ 35 จะถูกนำมาคำนวณค่า MSSE ตามสูตร $MSSE = \frac{1}{2000} \left(\frac{1}{10} \sum_{t=26}^{35} (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t})' (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}) \right)$ และ (4) เปรียบเทียบค่า MSSE ของตัวกรอง KF และ MGLF ทั้งสอง และตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบสมมติว่ามีการแจกแจงปกติผสม (robust filter with mixture Gaussian system noise: MIXTURE) โดยกำหนดความน่าจะเป็นของการเกิดค่านอกกลุ่ม เท่ากับ 0.05 (รายละเอียดแสดงในภาคผนวก ก)

ตารางที่ 3.4 พบว่า กรณีระบบไม่มีการเปลี่ยนแปลง ($\delta_M = 0$) ตัวกรอง KF มีค่า MSSE น้อยที่สุด เมื่อ $\delta_M = 0.5$ ตัวกรอง MIXTURE มีค่า MSSE น้อยที่สุด และตัวกรอง MGLF-M มีค่า MSSE น้อยที่สุด เมื่อ $\delta_M \geq 1$ ทุกค่า (ρ_W, ρ_V) จากผลลัพธ์ข้างต้น พบว่า การคำนวณ MSSE ด้วยความคลาดเคลื่อนของการประมาณเวกเตอร์สถานะทุกคาบเวลา อาจจะทำให้เกิดความไม่ชัดเจนของประสิทธิภาพของตัวกรอง MGLF เมื่อระบบเปลี่ยนแปลงน้อย

รูปที่ 3.8 แสดงอัตราการลู่เข้าของค่า MSSE ภายหลังการเปลี่ยนแปลงของระบบ พบว่า กรณี $\delta_M = 0$ และ 0.5 ตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M มีค่า MSSE มากกว่าตัวกรอง KF และ MIXTURE แต่เมื่อระบบเปลี่ยนแปลงอย่างมีนัยสำคัญ ($\delta_M \geq 1$) ค่า MSSE ของตัวกรอง MGLF-M มีค่าน้อยที่สุด และลดลงอย่างรวดเร็วกว่าตัวกรองอื่น ในทางตรงกันข้าม ค่า MSSE ของตัวกรอง KF ลดลงอย่างช้าๆ และมีค่ามากขึ้น เมื่อ δ_M มีค่ามากขึ้น ค่า MSSE ของตัวกรอง MIXTURE ลู่เข้าสู่ค่า MSSE ของตัวกรอง MGLF-M เมื่อ δ_M มีค่ามากขึ้น นอกจากนี้ ตัวกรอง

ρ_W	δ_M	ρ_V											
		0.1			0.4			0.8					
		KF	MIXTURE	MGLF-S	MGLF-M	KF	MIXTURE	MGLF-S	MGLF-M	KF	MIXTURE	MGLF-S	MGLF-M
0.1	0	0.47306	0.47351	0.62759	0.56687	0.44519	0.44571	0.58836	0.52951	0.33066	0.33162	0.43776	0.39486
	0.5	0.54853	0.54632	0.66713	0.60918	0.50892	0.50693	0.61494	0.56322	0.38418	0.38405	0.46858	0.43362
	1	0.80302	0.79079	0.77635	0.74448	0.74167	0.72835	0.72911	0.69935	0.55562	0.54411	0.56040	0.51760
	2	1.76552	1.65742	1.12863	1.04947	1.59116	1.44404	1.03751	0.91943	1.15418	0.86298	0.78913	0.56478
	3	3.35479	2.75679	1.56973	1.21407	3.11503	2.19364	1.43165	1.01234	2.21408	0.90197	1.03920	0.59230
	4	5.66575	3.33769	1.98901	1.24630	5.11525	2.07543	1.74691	0.99905	3.65632	1.05598	1.27708	0.60305
	5	8.52175	2.86450	2.31587	1.21557	7.72958	1.65953	2.03978	0.96043	5.55024	1.36908	1.48399	0.64258
0.4	0	0.43686	0.43730	0.58704	0.53526	0.47704	0.47748	0.62938	0.56642	0.43708	0.43813	0.57344	0.50412
	0.5	0.53176	0.52939	0.63899	0.59534	0.55529	0.55270	0.67367	0.61205	0.49812	0.49774	0.61934	0.55478
	1	0.80035	0.78652	0.74960	0.72858	0.79237	0.77821	0.77053	0.72434	0.65673	0.64157	0.68350	0.60001
	2	1.89129	1.77652	1.18731	1.07480	1.74497	1.56634	1.11680	0.94753	1.28498	0.91278	0.87591	0.62314
	3	3.74580	3.05963	1.73108	1.29312	3.38400	2.23078	1.50707	1.01349	2.36920	0.91058	1.06529	0.59882
	4	6.25678	3.62481	2.25208	1.34365	5.60411	2.01532	1.83702	0.99266	3.87421	1.05157	1.21801	0.59907
	5	9.57008	3.07329	2.69843	1.33901	8.57257	1.56396	2.09234	0.95245	5.76528	1.28089	1.29987	0.60281
0.8	0	0.33839	0.33870	0.47722	0.47394	0.42751	0.42793	0.58113	0.54110	0.47304	0.47354	0.64046	0.56837
	0.5	0.46595	0.46404	0.54466	0.54371	0.55203	0.54940	0.65677	0.62284	0.55684	0.55543	0.68207	0.60777
	1	0.85827	0.84862	0.76548	0.75477	0.89735	0.88085	0.83868	0.77381	0.80269	0.77461	0.80331	0.68161
	2	2.43277	2.32896	1.52171	1.24368	2.31026	2.05126	1.43225	1.07659	1.77115	1.05534	1.14735	0.76462
	3	5.01866	4.26382	2.50489	1.53625	4.63855	2.81756	2.10278	1.17461	3.37481	0.91471	1.38656	0.74408
	4	8.65884	5.18856	3.50083	1.65543	7.90570	2.33690	2.70485	1.20841	5.65228	1.05940	1.60624	0.75353
	5	13.47593	4.27368	4.49276	1.78279	12.18559	1.65301	3.22789	1.19132	8.54040	1.25765	1.68928	0.74807



รูปที่ 3.8: อัตราการเข้าสู่ของ MSSE ของตัวกรอง MGLF-S, MGLF-M, MIXTURE และ KF สำหรับขนาดของการเปลี่ยนแปลง $\delta_M = 0, 0.5, 1, 2, 3, 4$ และ 5 กรณี $(\rho_W, \rho_V) = (0.4, 0.4)$

MGLF-S มีอัตราการลู่เข้าของค่า MSSE ลดลง ขณะที่ δ_M มีค่ามากขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับอัตรา
การลู่เข้าของค่า MSSE ของตัวกรอง MGLF-M

3.4 สรุป

ตัวกรอง MGLF ถูกพัฒนาขึ้นโดยสมมติตัวระบบที่มีการแจกแจง MGL ซึ่งสามารถอธิบาย
ลักษณะของตัวระบบทั้งกรณีตัวระบบมีค่านอกกลุ่ม และไม่มีค่านอกกลุ่ม เนื่องจา
การเกิดค่านอกกลุ่มในตัวระบบทำให้ระบบมีการเปลี่ยนแปลงไปยังสถานะใหม่ ดังนั้นตัว
กรอง MGLF จึงสามารถอธิบายระบบที่เปลี่ยนแปลงได้อย่างมีประสิทธิภาพ ด้วยคุณสมบัติ
จากการประยุกต์การแจกแจง MGL ขณะที่ตัวกรอง KF เป็นตัวกรองที่ไม่มีประสิทธิภาพในกรณี
ดังกล่าว

ความสามารถของตัวกรอง MGLF ขึ้นอยู่กับตัวประกอบปรับค่า กล่าวคือ ตัวกรอง MGLF ที่
ขึ้นอยู่กับตัวประกอบปรับค่าตัวเดียว (MGLF-S) และตัวกรอง MGLF ที่ขึ้นอยู่กับตัวประกอบปรับ
ค่าหลายตัว (MGLF-M) ตัวกรอง MGLF-M ถูกพัฒนาขึ้นภายใต้แนวคิดของการกำหนดตัวถ่วง
น้ำหนักที่แตกต่างกันของตัวแปรแต่ละตัว ผลลัพธ์จากการจำลองแบบ พบว่า ตัวกรอง MGLF-S
และ MGLF-M เป็นตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งต่อการเปลี่ยนแปลงของระบบ และตัวกรอง MGLF-M
มีประสิทธิภาพสูงกว่าตัวกรอง MGLF-S สำหรับกรณีส่วนใหญ่

ตัวกรอง MGLF-M มีประสิทธิภาพสูงที่สุด เมื่อเปรียบเทียบกับตัวกรอง KF, MIXTURE และ
MGLF-S และมีอัตราการลู่เข้าของค่า MSSE สูงกว่าตัวกรองที่ทำการศึกษาทั้งหมด หมายความว่า
ตัวกรอง MGLF-M สามารถประมาณเวกเตอร์สถานะได้อย่างแม่นยำกว่าตัวกรองอื่น ดังนั้นตัว
กรอง MGLF-M จึงสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงของระบบได้ถูกต้องกว่าตัวกรองอื่นที่นำมา
ศึกษา

ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ

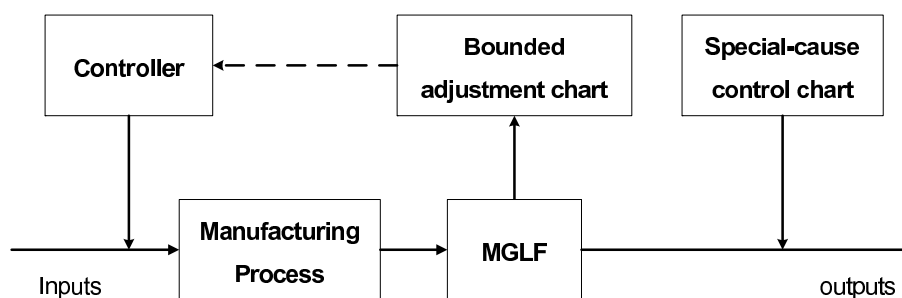
$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}_t \mathbf{X}_t + \mathbf{B}_t \mathbf{U}_t + \mathbf{W}_t$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{C}_t \mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t$$

เมื่อ X_t คือ เวกเตอร์สถานะ ขนาด $r \times 1$, U_t คือ เวกเตอร์ตัวแปรควบคุมนำเข้า ขนาด $l \times 1$, Y_t คือ เวกเตอร์ค่าวัด ขนาด $k \times 1$ และ A_t , B_t และ C_t คือ เมทริกซ์คงที่ ขนาด $r \times r$, $r \times l$ และ $k \times r$ ตามลำดับ W_t คือ เวกเตอร์ตัวรบกวนระบบ ขนาด $r \times 1$, V_t คือ เวกเตอร์ตัวรบกวนค่าวัด ขนาด $k \times 1$ สมมติเวกเตอร์ $(W_t, V_t)'$ มีการแจกแจง MGL ที่มีเวกเตอร์ค่าเฉลี่ย เท่ากับ เวกเตอร์ศูนย์ และ เมทริกซ์พารามิเตอร์สเกล เท่ากับ $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_W & 0 \\ 0 & \Sigma_V \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์

เทคนิคที่นำมาใช้เพื่อควบคุมกระบวนการให้อยู่บนเป้าหมายที่กำหนด คือ การควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรม หรือ EPC การปรับกระบวนการแบบป้อนกลับเป็นเทคนิคหนึ่งที่ยอมรับ ซึ่งจะดำเนินการโดยปราศจากการกำจัดสาเหตุความผิดปกติของกระบวนการ และเป็นเหตุให้การเปลี่ยนแปลงของค่ากลาง และ/หรือ การกระจายของกระบวนการยังคงปรากฏอยู่ ดังนั้นการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ หรือ SPC จึงถูกนำมาใช้ เพื่อตรวจจับและค้นหาสาเหตุความผิดปกติของกระบวนการ จนกระทั่งสาเหตุความผิดปกติของกระบวนการเหล่านั้นถูกกำจัด

Box & Narasimhan (2010) เสนอการผสมผสานเทคนิคการควบคุมกระบวนการทั้งสองข้างต้น เรียกว่า synergistic control ซึ่งนำแผนภูมิปรับค่ากำหนดเขต (bounded adjustment chart)



รูปที่ 4.1: ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ

มาใช้ เพื่อกำหนดการปรับกระบวนการ ด้วยการปรับกระบวนการแบบป้อนกลับ และนำแผนภูมิควบคุมมาใช้ เพื่อตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการ

งานวิจัยนี้มุ่งพัฒนาระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ หรือ SPCS ซึ่งเป็นการผสมผสานเทคนิคการปรับกระบวนการแบบป้อนกลับ ซึ่งพัฒนาจากทฤษฎีการควบคุมสโตคาสติกเชิงเส้น และเทคนิคแผนภูมิควบคุม เทคนิคทั้งสองขึ้นอยู่กับตัวกรอง MGLF โครงสร้างของ SPCS ประกอบด้วย 3 องค์ประกอบ คือ

1. ตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งปรับค่า

การประมาณเวกเตอร์สถานะซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการด้วยตัวกรอง MGLF เมื่อสมมติว่าตัวกรองระบบมีการแจกแจง MGL ซึ่งสามารถอธิบายกระบวนการปกติ หรือกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลง ตัวกรอง MGLF เป็นตัวกรองที่มีความแข็งแกร่งด้วยการประมาณเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวกรองระบบ ซึ่งขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์เซฟของการแจกแจง MGL

2. การควบคุมสโตคาสติกเชิงเส้น

ผลลัพธ์ของทฤษฎีการควบคุมสโตคาสติกเชิงเส้น โดยสมมติตัวกรองระบบมีการแจกแจง MGL สามารถแสดงออกเป็น 2 ส่วน คือ การประมาณเวกเตอร์สถานะด้วยตัวกรอง MGLF และการประมาณเวกเตอร์ตัวแปรควบคุม ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวประมาณเวกเตอร์สถานะ ทั้งสองส่วนข้างต้นประกอบขึ้นเป็นการควบคุมแบบป้อนกลับ LQ-MGL ทำให้การปรับกระบวนการกลับสู่เป้าหมายได้อย่างรวดเร็วและมีประสิทธิภาพ

3. แผนภูมิควบคุม

แผนภูมิควบคุมของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ ของตัวกรอง MGLF ถูกนำมาใช้เพื่อตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการ แผนภูมิควบคุมดังกล่าวสามารถแสดงคาบเวลา เมื่อกระบวนการมีการเปลี่ยนแปลง เนื่องจากความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ มีการแจกแจง MGL ถ้ากระบวนการปกติ แผนภูมิ

ควบคุมข้างต้นจะขึ้นอยู่กับการแจกแจงไคกำลังสอง เมื่อขนาดตัวอย่างใกล้เคียงกับ (asymptotic χ^2 distribution)

โครงสร้างของ SPCS สามารถแสดงดังรูปที่ 4.1 ซึ่งประสิทธิภาพของระบบควบคุมกระบวนการนี้จะขึ้นอยู่กับการประสิทธิภาพของตัวกรอง MGLF ดังนั้นลำดับเนื้อหาในบทนี้จะแสดงแผนภูมิควบคุมที่ขึ้นอยู่กับการกรอง MGLF ลำดับต่อมา การควบคุมสโตคาสติกเชิงเส้น เมื่อตัวกรองระบบมีการแจกแจง MGL ถูกนำเสนอ สุดท้าย SPCS ซึ่งประกอบขึ้นจากการผสมผสานการควบคุมสโตคาสติกเชิงเส้น และแผนภูมิควบคุมจะถูกนำเสนอ

4.1 แผนภูมิควบคุม MGL

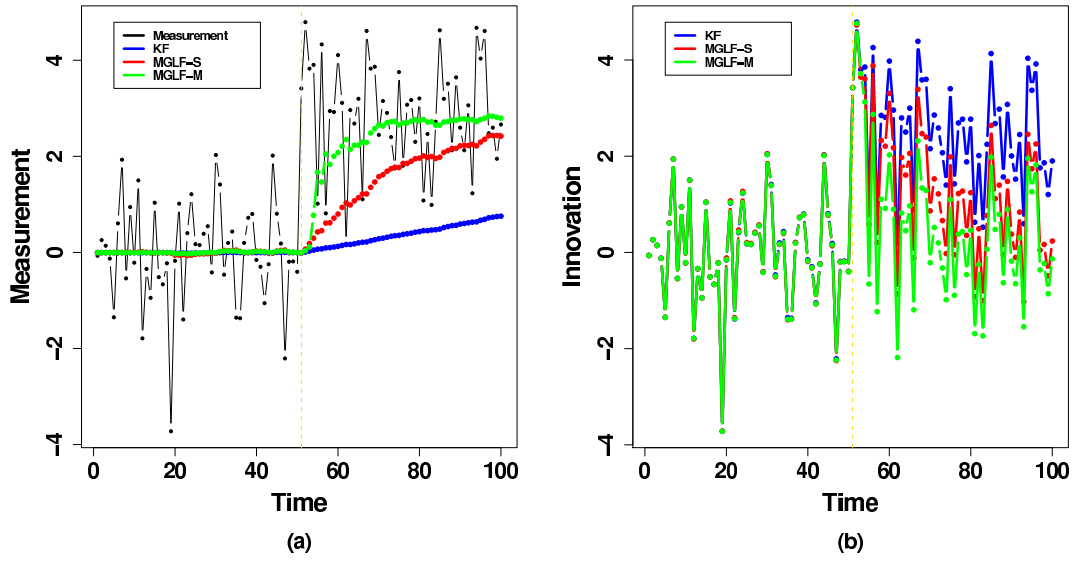
แผนภูมิควบคุม MGL ถูกพัฒนาขึ้นเพื่อตรวจจับความผิดปกติของค่ากลางและการกระจาย ซึ่งขึ้นอยู่กับการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ จากตัวกรอง MGLF ถ้ากระบวนการอยู่ในการควบคุมและมีการแจกแจงปกติ กล่าวคือ $S_t \sim N_k(0, 2(C_t P_{t|t-1} C_t' + \frac{1}{2} \Sigma V))$ จะได้ว่า

$$D_t = \frac{1}{2} (Y_t - \hat{Y}_{t|t-1})' \left(C_t P_{t|t-1} C_t' + \frac{1}{2} \Sigma V \right)^{-1} (Y_t - \hat{Y}_{t|t-1})$$

และตัวแปรสุ่ม D_t มีการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาความเป็นอิสระ (degrees of freedom) k เขียนแทนด้วย $D_t \sim \chi_k^2$ ซึ่งแสดงการเปลี่ยนแปลงค่าการกระจายของกระบวนการ ขณะที่ค่าวัดเชิงปริมาณ M_t แสดงการเปลี่ยนแปลงค่ากลางของกระบวนการ เมื่อพิจารณาเทียบกับค่าเป้าหมายของกระบวนการ T กล่าวคือ

$$M_t = \frac{1}{2} (\hat{Y}_{t|t-1} - T)' \left(C_t P_{t|t-1} C_t' + \frac{1}{2} \Sigma V \right)^{-1} (\hat{Y}_{t|t-1} - T)$$

อย่างไรก็ตาม M_t ถูกพิจารณาในรูปแบบเดียวกับตัวแปรสุ่ม D_t เนื่องจากความต้องการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงค่ากลางและการกระจายของกระบวนการในเวลาเดียวกัน รูปที่ 4.2(a) แสดงค่าพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ ของตัวกรอง MGLF พบว่า ค่าพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ สามารถแสดงการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ ขณะที่รูปที่ 4.2(b) แสดงการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการอันเนื่องมาจากความผันแปรของตัวกรอง เนื่องจากการคลาดเคลื่อนของค่าพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ ขึ้นอยู่กับตัวกรองระบบและตัวกรองค่าวัด รูปที่ 4.3(a) พบว่า M_t มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว เมื่อกระบวนการมีการเปลี่ยนแปลง ขณะที่ 4.3(b) แสดงคาบเวลาที่กระบวนการมีการเปลี่ยนแปลง เนื่องด้วยความผันแปรของตัวกรองที่เพิ่มขึ้น ณ คาบเวลานั้น ดังนั้น D_t จึงสามารถแสดงการผันแปรของตัวกรองที่เพิ่มขึ้น แต่ไม่สามารถแสดงการผันแปรของตัวกรองที่ลดลง ดังนั้นแผนภูมิควบคุมไคกำลังสอง (χ^2 control chart) ถูกสร้าง



รูปที่ 4.2: ค่าพยากรณ์และความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ล่วงหน้า 1 คาบ สำหรับกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงค่ากลาง

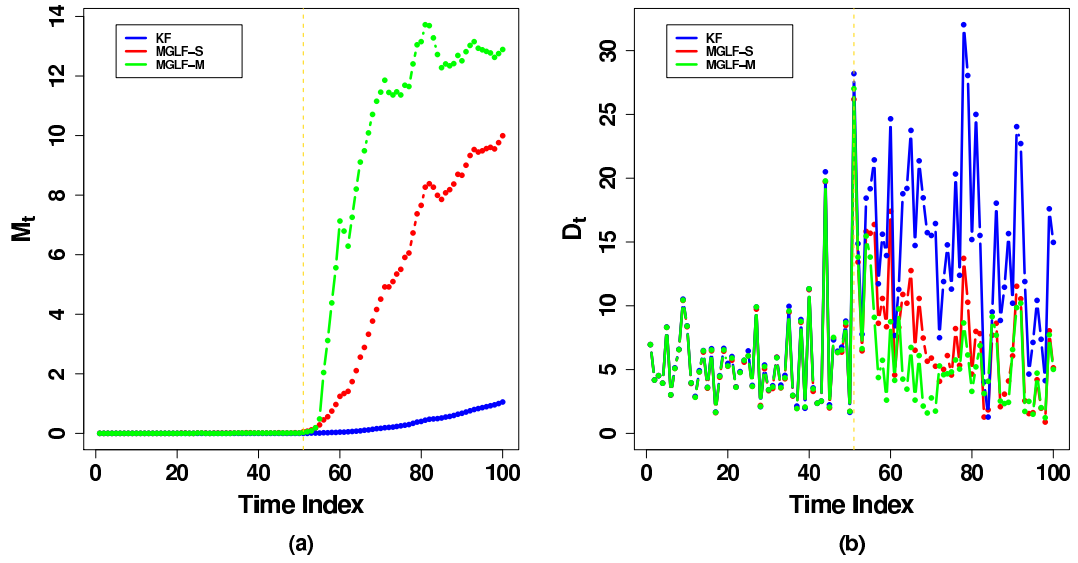
ขึ้นจากตัวแปรสุ่ม D_t เรียกว่า แผนภูมิควบคุม χ^2 -MGL (χ^2 -MGL control chart) กระบวนการพิจารณาว่าไม่อยู่ในการควบคุม (out of control) ถ้า D_t มีค่ามากกว่าค่าควอนไทล์ (quantile) ของการแจกแจงไคกำลังสอง ที่กำหนดโดยความน่าจะเป็นของความผิดพลาดในการตัดสินใจปฏิเสธกระบวนการที่อยู่ในการควบคุม (α)

เนื่องจากแผนภูมิควบคุม χ^2 -MGL ไม่สามารถตรวจจับการลดลงของค่าการกระจายของกระบวนการ ดังนั้นเพื่อแสดงการลดลงของค่าการกระจายของกระบวนการ ตัวแปรสุ่ม D_t จะถูกแปลงข้อมูลด้วยบางฟังก์ชัน โดยพิจารณาค่าควอนไทล์ของการแจกแจงปกติมาตรฐาน (standard normal distribution) จากค่าความน่าจะเป็นสะสม (cumulative probability) ของตัวแปรสุ่ม D_t กล่าวคือ

$$F_t = \Phi^{-1}[H_k(D_t)]$$

เมื่อ $\Phi^{-1}(\cdot)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงผกผันของตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน, $H_k(\cdot)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่มไคกำลังสองที่มีองศาความเป็นอิสระ k และตัวแปรสุ่ม F_t มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน ถ้า D_t มีค่ามาก ความน่าจะเป็นสะสม $H_k(D_t)$ จะมีค่ามากเช่นกัน ซึ่งจะทำให้ F_t มีค่ามากทางบวก ในทางตรงกันข้าม ถ้า D_t มีค่าน้อยเข้าใกล้ศูนย์ ความน่าจะเป็นสะสม $H_k(D_t)$ จะมีค่าน้อยเช่นกัน แล้ว F_t จะมีค่ามากทางลบ

การตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าการกระจายของกระบวนการจะพิจารณาแผนภูมิควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอ็กโปเนนเชียล (exponentially weighted moving average control



รูปที่ 4.3: แผนภูมิของตัวสถิติ M_t และ D_t สำหรับกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงค่ากลาง

chart: EWMA) ของ F_t ซึ่งค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอ็กโปเนนเชียลของ F_t คำนวณโดย

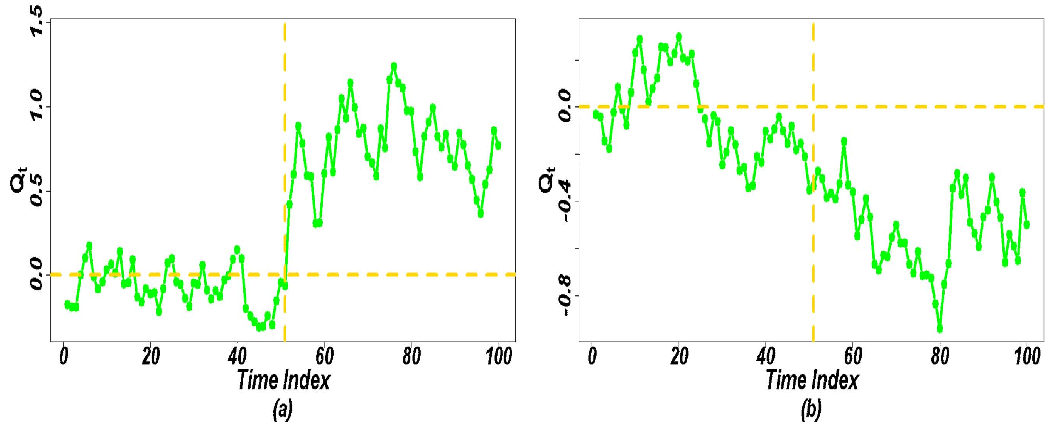
$$Q_t = \gamma F_t + (1 - \gamma)Q_{t-1}, \quad 0 < \gamma < 1$$

เมื่อ γ คือ พารามิเตอร์ปรับเรียบ (smoothing parameter) โดยปกติ พารามิเตอร์ปรับเรียบมักถูกกำหนดค่าอยู่ระหว่าง 0.05 ถึง 0.25 (Montgomery 2005) ซึ่งแผนภูมิควบคุม EWMA-Q สามารถแสดงการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของค่าการกระจายของกระบวนการ แสดงดังรูปที่ 4.4(a) และ (b) ตามลำดับ ค่าเฉลี่ยของ Q_t เท่ากับ $\mu_Q = 0$ และความแปรปรวนของ Q_t เท่ากับ $\sigma_Q^2 = \frac{\gamma}{2-\gamma}\sigma_F^2$ ซึ่งความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม F_t เท่ากับ $\sigma_F^2 = 1$ ดังนั้น $\sigma_Q^2 = \frac{\gamma}{2-\gamma}$ เนื่องจากความแปรปรวนของค่าเฉลี่ย $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n F_t$ เท่ากับ $\frac{1}{n}\sigma_F^2$ เมื่อ n คือขนาดตัวอย่าง ดังนั้นขนาดตัวอย่างโดยเฉลี่ยของการคำนวณค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอ็กโปเนนเชียล Q_t เท่ากับ $\frac{2-\gamma}{\gamma}$

แผนภูมิควบคุมทั้งค่ากลางและการกระจายของกระบวนการ (simultaneous MGL control chart: SMGLC) กำหนดโดย

$$G_t = |Q_t| + \eta M_t, \quad G_t > 0$$

เมื่อ $\eta = \frac{2-\gamma}{\gamma}$ คือ ขนาดตัวอย่างโดยเฉลี่ยของการคำนวณค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอ็กโปเนนเชียล แผนภูมิควบคุมข้างต้นสามารถตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการอันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงค่ากลาง และ/หรือ การกระจายของกระบวนการ กระบวนการจะถูกพิจารณาว่าไม่อยู่ในการควบคุม ถ้า $G_t > G^*$ เมื่อ G^* คือ ขีดจำกัดควบคุม (upper control limit: UCL) ที่เหมาะสม และทำให้แผนภูมิควบคุมมีความสามารถในการตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการตามที่กำหนด



รูปที่ 4.4: แผนภูมิควบคุม EWMA-Q ของตัวกรอง MGLF-M เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ปรับเรียบ $\gamma = 0.1$ สำหรับกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงการกระจาย

รูปที่ 4.5 แสดงแผนภูมิควบคุม SMGLC ของกระบวนการในสถานการณ์ต่างๆ กล่าวคือ รูปที่ 4.5(a) ค่ากลางของกระบวนการเพิ่มขึ้น รูปที่ 4.5(b) และรูปที่ 4.5(c) การกระจายของกระบวนการเพิ่มขึ้นและลดลงตามลำดับ และรูปที่ 4.5(d) และรูปที่ 4.5(e) ค่ากลางของกระบวนการเพิ่มขึ้นและการกระจายของกระบวนการเพิ่มขึ้นและลดลงตามลำดับ พบว่า แผนภูมิควบคุม SMGLC ทุกแผนภูมิสามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ของกระบวนการ ซึ่งค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอ็กโปเนนเชียล G_t มีค่าเพิ่มขึ้น

4.1.1 ประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม MGL

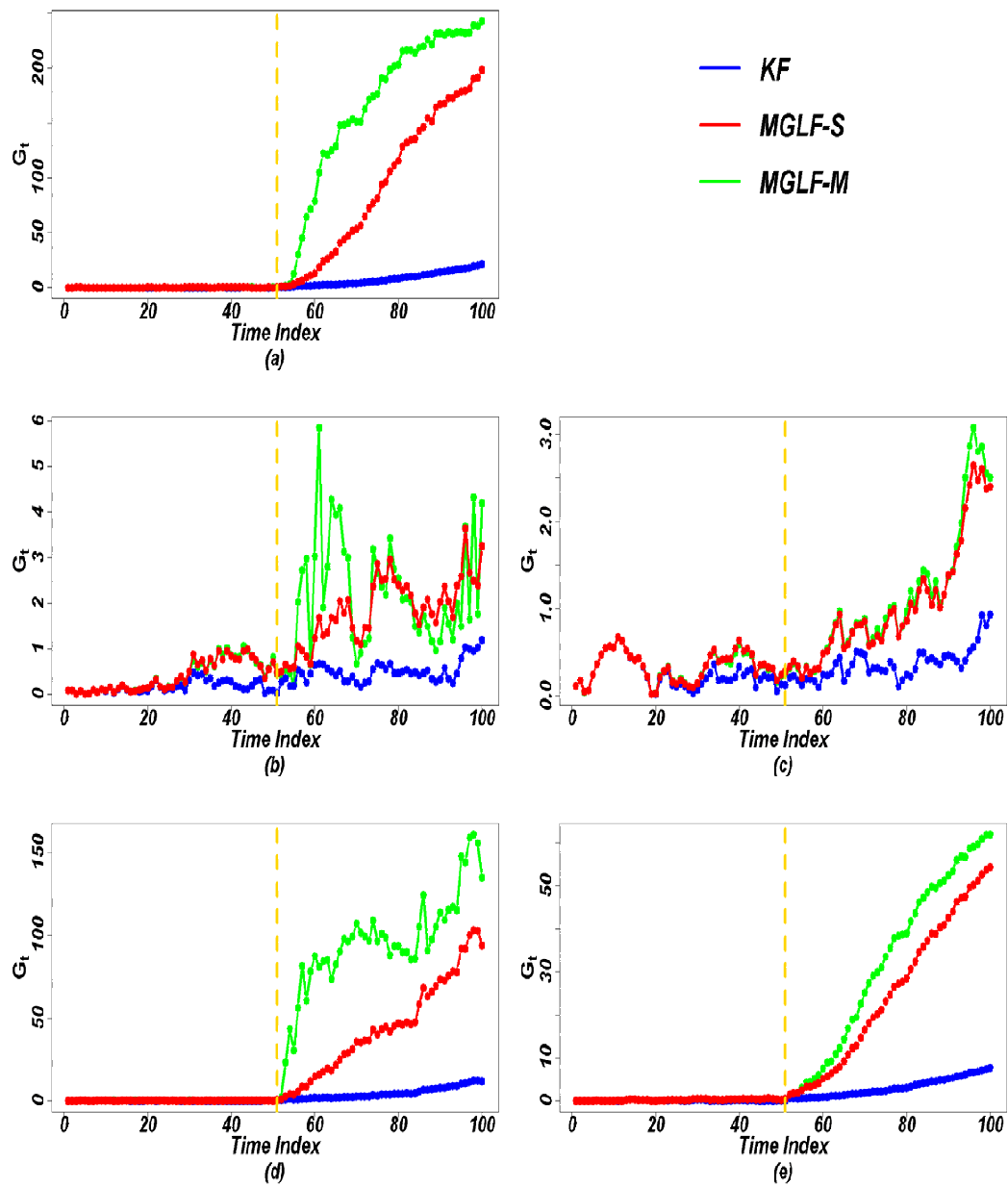
การศึกษาประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม SMGLC และเปรียบเทียบประสิทธิภาพแผนภูมิควบคุมมาตรฐาน (standard control chart) ของตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M โดยพิจารณากระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้น 5 ตัวแปร ที่มีสมบัติของการสังเกตและสมบัติของการควบคุม

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t$$

ด้วยเทคนิคการทดลองจำลองแบบมอนติคาร์โล ประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุมพิจารณาจากขนาดตัวอย่างโดยเฉลี่ยที่แผนภูมิควบคุมจะสามารถตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการ (average run length: ARL) และพารามิเตอร์ของการทดลองกำหนดโดย

1. $\mathbf{W}_t$ และ $\mathbf{V}_t$ คือ เวกเตอร์ตัวรบกวนระบบ และเวกเตอร์ตัวรบกวนค่าวัด ตามลำดับ ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน และไม่ขึ้นอยู่กัเวลา สมมติ $\mathbf{W}_t$ และ $\mathbf{V}_t$ มีการแจกแจงปกติ k ตัวแปร กล่าวคือ $\mathbf{W}_t \sim N_k(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{W}})$ และ $\mathbf{V}_t \sim N_k(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{V}})$ เมื่อ $\Sigma_{\mathbf{W}} = \sigma_W^2(1-\rho_W)\mathbf{I} + \sigma_W^2\rho_W\mathbf{J}$



รูปที่ 4.5: แผนภูมิควบคุม SMGLC เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ปรับเรียบ $\gamma = 0.1$ สำหรับกระบวนการที่มีการเปลี่ยนแปลงค่ากลางและการกระจาย

และ $\Sigma_V = \sigma_V^2(1 - \rho_V)I + \sigma_V^2\rho_V J$ โดยที่ I คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ และ J คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเท่ากับหนึ่ง

2. ความแปรปรวนของตัวรบกวนระบบ $\sigma_W^2 = 0.0001$ และความแปรปรวนของตัวรบกวนค่าวัด $\sigma_V^2 = 1$
3. สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของตัวรบกวนระบบ (ρ_W) และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของตัวรบกวนค่าวัด (ρ_V) เท่ากับ 0.4
4. ความยาวของอนุกรมเวลา (n) เท่ากับ 60
5. จำนวนตัวแปร (k) เท่ากับ 5
6. ค่าเริ่มต้นของเวกเตอร์สถานะ ($X_{0|0}$) และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ($P_{0|0}$) กำหนดโดย $X_{0|0} \sim N_k(0, P_{0|0})$ เมื่อ $P_{0|0} = I$
7. ขนาดของการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการในตัวแปรที่หนึ่งกำหนดโดย δ_M เท่ากับ 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2 และ 3 กล่าวคือ ตัวรบกวนระบบ $W_{t(1)} \sim N(\delta_M, \sigma_W^2)$ เมื่อ $t = 11$ และขนาดของการเปลี่ยนแปลงของการกระจายในตัวแปรที่หนึ่งกำหนดโดย δ_V เท่ากับ 0.2, 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.4 และ 2 ซึ่งเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของเวกเตอร์ตัวรบกวนค่าวัด เมื่อ $t > 10$ คือ

$$\Sigma_{V(t)} = \begin{bmatrix} \delta_V^2\sigma_V^2 & \delta_V\sigma_V^2\rho_V & \delta_V\sigma_V^2\rho_V & \dots & \delta_V\sigma_V^2\rho_V \\ \delta_V\sigma_V^2\rho_V & \sigma_V^2 & \sigma_V^2\rho_V & \dots & \sigma_V^2\rho_V \\ \delta_V\sigma_V^2\rho_V & \sigma_V^2\rho_V & \sigma_V^2 & \dots & \sigma_V^2\rho_V \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_V\sigma_V^2\rho_V & \sigma_V^2\rho_V & \sigma_V^2\rho_V & \dots & \sigma_V^2 \end{bmatrix}_{k \times k}$$

8. จำนวนรอบของการทดลองด้วยการจำลองแบบมอนติคาร์โล เท่ากับ 5,000 ด้วยโปรแกรมอาร์
9. พารามิเตอร์ปรับเรียบ (γ) เท่ากับ 0.2
10. ความน่าจะเป็นที่แผนภูมิควบคุมจะส่งสัญญาณผิดพลาดเมื่อกระบวนการอยู่ในการควบคุมสำหรับแผนภูมิควบคุมร่วม (simultaneous control chart) เท่ากับ $\alpha = 0.004$ และความน่าจะเป็นที่แผนภูมิควบคุมจะส่งสัญญาณผิดพลาดเมื่อกระบวนการอยู่ในการควบคุมสำหรับแผนภูมิควบคุม เท่ากับ $\alpha = 0.002$

11. การเปรียบเทียบประสิทธิภาพระหว่างแผนภูมิควบคุม SMGLC และแผนภูมิควบคุมมาตรฐานของตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M แผนภูมิควบคุมมาตรฐานประกอบด้วยแผนภูมิควบคุม MEWMA (multivariate exponentially weighted moving average control chart) พัฒนาขึ้นโดย Lowry, Woodall, Champ & Rigdon (1992) เพื่อตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการ เมื่อค่ากลางของกระบวนการเปลี่ยนแปลง แผนภูมิควบคุม MEWMA-C (multivariate exponentially weighted moving covariance matrix) พัฒนาขึ้นเพื่อตรวจจับความผิดปกติของการกระจายของกระบวนการด้วยการพิจารณาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอ็กโปเนนเชียลของเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (Hawkins & Maboudou-Tchao 2008) และ Khawsithiwong & Yatawara (2007) เสนอแผนภูมิควบคุม EWMAD (exponentially weighted moving average of distance) โดยประยุกต์เทคนิคค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอ็กโปเนนเชียล 2 ครั้ง (double exponentially weighted moving average) ซึ่งเสนอโดย Sweet (1986) โดยพิจารณาค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอ็กโปเนนเชียลของขนาดเวกเตอร์ค่าวัดกำลังสอง ซึ่งปรับค่าด้วยค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอ็กโปเนนเชียลของเวกเตอร์ค่าวัด แผนภูมิควบคุมทุกแผนภูมิประยุกต์กับความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ

สถานการณ์	แผนภูมิควบคุม	ขีดจำกัดควบคุม
ค่ากลางและการกระจายเปลี่ยนแปลง	SMGLC vs (MEWMA & MEWMC) SMGLC vs (MEWMA & EWMAD) SMGLC vs (MEWMA & χ^2 -MGL)	$UCL_{SMGLC(MGLF-S)} = 1.371$ $UCL_{SMGLC(MGLF-M)} = 1.263$ $UCL_{SMGLC(KF)} = 0.979$ $UCL_{MEWMA(MGLF-S)} = 0.1192$ $UCL_{MEWMA(MGLF-M)} = 0.1047$ $UCL_{MEWMA(KF)} = 0.01002$ $UCL_{MEWMC(MGLF-S)} = 8.49$ $UCL_{MEWMC(MGLF-M)} = 8.55$ $UCL_{MEWMC(KF)} = 8.87$ $(LCL_{EWMAD(MGLF-S)}, UCL_{EWMAD(MGLF-S)}) = (2.42, 8.86)$ $(LCL_{EWMAD(MGLF-M)}, UCL_{EWMAD(MGLF-M)}) = (2.43, 8.94)$ $(LCL_{EWMAD(KF)}, UCL_{EWMAD(KF)}) = (2.46, 9.165)$ $UCL_{\chi^2-MGL(MGLF-S)} = 18.35$ $UCL_{\chi^2-MGL(MGLF-M)} = 18.525$ $UCL_{\chi^2-MGL(KF)} = 18.84$
ค่ากลางเปลี่ยนแปลง	SMGLC vs MEWMA	$UCL_{SMGLC(MGLF-S)} = 1.497$ $UCL_{SMGLC(MGLF-M)} = 1.393$ $UCL_{SMGLC(KF)} = 1.0494$ ขีดจำกัดควบคุมของแผนภูมิควบคุม MEWMA กำหนดข้างต้น
การกระจายเปลี่ยนแปลง	SMGLC vs MEWMC SMGLC vs EWMAD SMGLC vs χ^2 -MGL	ขีดจำกัดควบคุมของแผนภูมิควบคุม SMGLC, MEWMC, EWMAD และ χ^2 -MGL กำหนดข้างต้น

12. ตัวสถิติตัดสินใจที่ใช้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม คือ ARL ซึ่งคำนวณจากความน่าจะเป็นที่ค่าสถิติของแผนภูมิควบคุมจะตกนอกขีดจำกัดควบคุม (p)

$$ARL = \frac{1}{p}$$

ถ้ากระบวนการมีการเปลี่ยนแปลง ARL จะมีค่าเข้าใกล้ 1 แต่ถ้ากระบวนการอยู่ในการควบคุม ARL จะมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{\alpha}$

ตารางที่ 4.1: ARL ของแผนภูมิควบคุม SMGLC และ MEWMA เมื่อประยุกต์ตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M สำหรับการเปลี่ยนแปลงค่ากลาง

δ_M	SMGLC			MEWMA		
	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M
0.00	500.00	500.00	500.00	497.02	500.00	500.00
0.25	472.59	79.09	83.58	75.62	61.76	63.45
0.50	270.86	10.06	9.01	10.49	7.99	7.14
0.75	76.48	3.25	2.66	3.98	2.90	2.42
1.00	21.18	2.03	1.65	2.68	1.96	1.61
2.00	1.29	1.20	1.11	1.64	1.28	1.12
3.00	1.04	1.07	1.05	1.41	1.14	1.06

ตารางที่ 4.1 พบว่า ARL ของแผนภูมิควบคุม MEWMA มีค่าน้อยกว่า ARL ของแผนภูมิควบคุม SMGLC ของตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M เมื่อ δ_M มีค่าน้อยถึงปานกลาง และเมื่อ δ_M มีค่ามาก ARL ของแผนภูมิควบคุม MEWMA มีค่ามากกว่า ARL ของแผนภูมิควบคุม SMGLC ของตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M นั่นคือ ความสามารถในการตรวจจับความผิดปกติของค่ากลางของแผนภูมิควบคุม MEWMA สูงกว่าแผนภูมิควบคุม SMGLC กรณีค่ากลางมีค่าเพิ่มขึ้นเล็กน้อยถึงปานกลาง แต่ถ้าค่ากลางของกระบวนการเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ ความสามารถในการตรวจจับความผิดปกติของค่ากลางของแผนภูมิควบคุม SMGLC ไม่แตกต่างจากแผนภูมิควบคุม SMGLC

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม SMGLC, MEWMA, EWMAD และ χ^2 -MGL เมื่อการกระจายของกระบวนการเปลี่ยนแปลง ตารางที่ 4.2 พบว่า สำหรับตัวกรองทั้งสาม แผนภูมิควบคุม EWMAD มีค่า ARL น้อยที่สุด เมื่อความแปรปรวนของกระบวนการลดลง ในทางตรงกันข้าม แผนภูมิควบคุม SMGLC มีค่า ARL น้อยที่สุด เมื่อความแปรปรวนของกระบวนการเพิ่มขึ้น ขณะที่แผนภูมิควบคุม SMGLC(MGLF-S), MEWMA และ χ^2 มีความสามารถในการตรวจจับการลดลงของค่าการกระจายต่ำกว่าแผนภูมิควบคุมอื่นๆ นอกจากนี้ แผนภูมิควบคุม

ตารางที่ 4.2: ARL ของแผนภูมิควบคุม SMGLC, MEWMC, EWMAD และ χ^2 เมื่อประยุกต์ตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M สำหรับการเปลี่ยนแปลงค่าความแปรปรวน

δ_V	SMGLC			MEWMC			EWMAD			χ^2		
	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M
0.2	67.70	510.20	185.74	113.90	95.71	107.16	76.99	75.83	73.23	606.80	591.02	620.35
0.6	166.44	1004.02	336.93	902.53	822.37	883.39	156.54	153.56	152.91	806.45	766.87	793.65
0.8	347.71	936.33	465.55	943.40	919.12	957.85	335.57	328.08	332.01	741.84	726.74	733.14
1.0	500.00	500.00	500.00	501.00	497.02	500.00	492.13	498.01	498.01	500.00	500.00	500.00
1.2	227.89	137.82	101.38	140.29	147.67	151.33	232.34	237.19	241.78	223.02	227.48	234.96
1.4	58.19	37.68	19.18	32.77	36.05	41.10	53.95	58.45	64.65	84.23	89.22	95.79
2.0	4.42	3.75	2.71	2.86	3.09	3.76	3.71	4.11	4.94	13.46	14.56	16.90

ตารางที่ 4.3: ARL ของแผนภูมิควบคุม SMGLC, MEWMA & MEWMC, MEWMA & EWMAD และ MEWMA & χ^2 เมื่อประยุกต์ตัวกรอง KF, MGLF-S และ MGLF-M สำหรับการเปลี่ยนแปลงค่ากลางและความแปรปรวนต่างๆ

δ_V	δ_M	SMGLC			(MEWMA & MEWMC)			(MEWMA & EWMAD)			(MEWMA & χ^2)		
		KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M
1.0	0.00	251.26	249.75	249.75	250.50	249.75	251.26	247.52	250.00	250.25	250.00	250.00	250.75
	0.25	234.74	51.68	54.93	65.60	55.27	56.34	66.68	55.49	56.70	65.02	54.62	55.92
	0.50	145.01	7.95	7.30	10.13	7.82	7.01	10.26	7.87	7.04	10.23	7.86	7.03
	0.75	47.40	2.94	2.46	3.87	2.87	2.40	3.91	2.88	2.41	3.92	2.88	2.40
	1.00	14.72	1.93	1.60	2.56	1.93	1.60	2.60	1.94	1.60	2.64	1.95	1.61
	2.00	1.23	1.18	1.10	1.17	1.14	1.10	1.24	1.17	1.10	1.56	1.25	1.11
1.2	3.00	1.04	1.06	1.04	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.23	1.09	1.04
	0.00	126.65	82.13	62.69	98.54	73.25	57.14	135.80	89.70	66.26	131.86	87.72	65.33
	0.25	102.92	24.45	16.99	39.71	25.07	16.68	45.68	25.73	17.35	45.96	25.81	17.40
	0.50	52.02	5.63	4.11	8.73	5.55	4.01	9.12	5.65	4.05	9.24	5.67	4.05
	0.75	20.97	2.62	2.03	3.71	2.58	2.01	3.83	2.62	2.03	3.91	2.64	2.03
	1.00	8.37	1.82	1.50	2.40	1.81	1.50	2.49	1.84	1.50	2.61	1.86	1.51
1.4	2.00	1.24	1.17	1.10	1.16	1.13	1.09	1.21	1.16	1.10	1.53	1.24	1.11
	3.00	1.04	1.06	1.04	1.03	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.22	1.09	1.04
	0.00	38.09	25.73	14.67	28.29	20.92	13.72	42.55	26.68	15.44	58.58	31.16	16.46
	0.25	30.71	11.60	7.16	17.70	10.85	7.02	22.92	12.25	7.41	28.49	13.30	7.69
	0.50	18.97	4.16	2.89	6.61	4.07	2.86	7.38	4.26	2.92	8.13	4.39	2.96
	0.75	9.97	2.32	1.78	3.27	2.28	1.77	3.50	2.34	1.79	3.79	2.40	1.80
2.0	1.00	5.15	1.71	1.42	2.17	1.68	1.41	2.31	1.73	1.43	2.56	1.78	1.44
	2.00	1.23	1.17	1.10	1.14	1.12	1.09	1.19	1.14	1.09	1.51	1.23	1.11
	3.00	1.04	1.06	1.05	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.03	1.21	1.09	1.04
	0.00	3.69	3.17	2.42	2.78	2.43	2.18	3.55	2.89	2.40	10.75	4.78	3.00
	0.25	3.50	2.75	2.18	2.61	2.22	2.00	3.26	2.57	2.17	8.53	3.83	2.61
	0.50	3.04	2.08	1.73	2.18	1.80	1.63	2.58	1.98	1.72	4.97	2.55	1.93
3.00	0.75	2.53	1.67	1.44	1.78	1.51	1.39	2.01	1.60	1.43	3.18	1.88	1.53
	1.00	2.04	1.44	1.28	1.49	1.32	1.24	1.63	1.38	1.26	2.34	1.56	1.32
	2.00	1.18	1.14	1.09	1.10	1.08	1.07	1.13	1.10	1.08	1.44	1.19	1.10
	3.00	1.04	1.06	1.05	1.03	1.03	1.03	1.04	1.03	1.03	1.20	1.08	1.04

ตารางที่ 4.3: (ต่อ)

δ_V	δ_M	SMGLC			(MEWMA & MEWMC)			(MEWMA & EWMAD)			(MEWMA & χ^2)		
		KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M
0.8	0.00	176.30	443.26	225.23	398.09	591.02	304.88	225.84	273.82	190.40	357.65	505.05	277.78
	0.25	218.91	91.81	117.70	91.44	123.64	151.98	82.29	105.35	126.52	88.25	119.45	145.26
	0.50	226.24	10.80	15.13	11.21	11.22	15.34	11.17	11.14	15.21	11.20	11.21	15.30
	0.75	104.65	3.24	3.21	3.94	3.16	3.10	3.95	3.16	3.10	3.95	3.16	3.10
	1.00	26.41	2.02	1.72	2.62	2.00	1.71	2.63	2.01	1.71	2.65	2.01	1.71
	2.00	1.22	1.18	1.10	1.18	1.15	1.10	1.26	1.19	1.11	1.59	1.26	1.11
0.6	3.00	1.04	1.06	1.04	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.24	1.09	1.04
	0.00	90.98	425.89	162.44	426.62	649.35	305.25	131.30	146.28	115.21	403.88	614.25	293.77
	0.25	121.12	120.71	114.42	114.21	237.87	194.10	82.05	123.58	112.31	111.81	231.05	190.26
	0.50	185.46	12.97	25.49	11.89	15.62	31.16	11.73	15.14	29.52	11.87	15.58	30.96
	0.75	168.46	3.44	4.30	3.93	3.39	4.14	3.94	3.39	4.14	3.93	3.39	4.14
	1.00	42.52	2.09	1.84	2.63	2.06	1.81	2.64	2.06	1.81	2.64	2.06	1.81
0.2	2.00	1.21	1.18	1.10	1.19	1.16	1.10	1.29	1.20	1.11	1.61	1.27	1.11
	3.00	1.04	1.06	1.04	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.25	1.10	1.04
	0.00	41.18	210.79	83.47	101.05	93.01	88.28	70.74	74.05	63.66	355.62	498.01	273.52
	0.25	56.99	93.21	70.21	87.05	128.01	115.42	59.12	77.76	69.29	113.12	256.94	177.68
	0.50	120.71	13.40	26.18	12.28	19.58	36.60	12.00	18.35	33.12	12.35	19.97	37.55
	0.75	200.32	3.53	5.61	3.89	3.55	5.55	3.91	3.55	5.57	3.90	3.55	5.56
1.00	1.00	53.98	2.12	1.94	2.62	2.08	1.89	2.63	2.08	1.90	2.63	2.08	1.90
	2.00	1.19	1.18	1.10	1.21	1.17	1.10	1.31	1.21	1.11	1.61	1.27	1.11
	3.00	1.04	1.06	1.04	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.27	1.11	1.04

SMGLC(KF) มีความสามารถในการตรวจจับการลดลงของค่าการกระจายใกล้เคียงกับแผนภูมิควบคุม EWMAD แม้ว่าแผนภูมิควบคุม SMGLC(MGLF-M) จะมีความสามารถในการตรวจจับการลดลงของค่าการกระจายไม่สูงมาก แต่ความสามารถในการตรวจจับการเพิ่มขึ้นของค่าการกระจายสูงที่สุด

เนื่องจากแผนภูมิควบคุม SMGLC เป็นแผนภูมิควบคุมที่สามารถตรวจจับความผิดปกติของทั้งค่ากลางและการกระจายของกระบวนการ การศึกษาความสามารถของแผนภูมิควบคุมจะดำเนินการเปรียบเทียบกับคู่ของแผนภูมิควบคุมสำหรับค่ากลางและการกระจาย คือ (MEWMA & MEWMC), (MEWMA & EWMAD) และ (MEWMA & χ^2) เมื่อ MEWMA คือ แผนภูมิควบคุมสำหรับค่ากลาง, MEWMC, EWMAD และ χ^2 คือ แผนภูมิควบคุมสำหรับการกระจาย พิจารณาประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม SMGLC จากตารางที่ 4.3 พบว่า แผนภูมิควบคุม SMGLC(MGLF-M) มีค่า ARL น้อยที่สุดในกรณีส่วนใหญ่ นั้นหมายความว่า แผนภูมิควบคุม SMGLC(MGLF-M) มีความสามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่ากลาง และ/หรือ การกระจายของกระบวนการได้อย่างมีประสิทธิภาพ ยกเว้นเมื่อความแปรปรวนของกระบวนการลดลง แผนภูมิควบคุม SMGLC(KF) มีค่า ARL น้อยกว่า แต่แผนภูมิควบคุม SMGLC(KF) มีประสิทธิภาพลดลงในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่ากลางที่เพิ่มขึ้นปานกลาง เมื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภูมิควบคุม SMGLC(MGLF-M) และคู่ของแผนภูมิควบคุมที่กำหนด สำหรับตัวกรอง MGLF-M พบว่า กรณีความแปรปรวนไม่มีการเปลี่ยนแปลง และกรณีความแปรปรวนของกระบวนการมีค่าเพิ่มขึ้น แผนภูมิควบคุม SMGLC, (MEWMA & MEWMC), (MEWMA & EWMAD) และ (MEWMA & χ^2) มีความสามารถในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่ากลางไม่แตกต่างกัน เนื่องจาก ARL ของทุกแผนภูมิควบคุมมีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งแผนภูมิควบคุมคู่ได้รับอิทธิพลของแผนภูมิควบคุม MEWMA แต่เมื่อความแปรปรวนของกระบวนการมีค่าลดลง แผนภูมิควบคุม SMGLC(MGLF-M) และ (MEWMA & EWMAD) มีความสามารถในการตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่ากลางไม่แตกต่างกัน ดังนั้นแผนภูมิควบคุม SMGLC(MGLF-M) จึงมีความเหมาะสมในการประยุกต์ใช้งานเนื่องจากแผนภูมิควบคุม SMGLC(MGLF-M) มีความสามารถตรวจจับการเปลี่ยนแปลงค่ากลาง และ/หรือ การกระจายของกระบวนการอย่างมีประสิทธิภาพ ด้วยแผนภูมิควบคุมเพียงแผนภูมิเดียว และมีประสิทธิภาพไม่แตกต่างจากแผนภูมิควบคุมคู่ของแผนภูมิควบคุมมาตรฐาน

4.2 การควบคุม LQ-MGL

พิจารณากระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นข้างต้น อนุกรมของเวกเตอร์ตัวแปรควบคุมนำเข้า U_t ซึ่งทำให้ฟังก์ชันเป้าหมาย

$$J = E \left(X_N' Q_{1N} X_N + \sum_{t=0}^{N-1} (X_t' Q_{1t} X_t + U_t' Q_{2t} U_t) \mid Y_{N-1}, Y_{N-2}, \dots, Y_0 \right)$$

มีค่าน้อยที่สุด ด้วยเทคนิคโปรแกรมไดนามิกของเบลล์แมน เท่ากับ

$$\begin{aligned} V_t(X_t) = \min_{U_t} & E(X_t' Q_{1t} X_t + U_t' Q_{2t} U_t \\ & + (A_t X_t + B_t U_t)' S_{t+1} (A_t X_t + B_t U_t) \mid Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_0) \\ & + E(W_t' S_{t+1} W_t) + c_{t+1} \end{aligned}$$

เมื่อ $t = N-1, N-2, \dots, 1$ และด้วยเทคนิคทางแคลคูลัส จะได้ตัวประมาณเวกเตอร์ตัวแปรควบคุมนำเข้า

$$\hat{U}_t = -L_t A_t E(X_t \mid Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_0)$$

เมื่อ $E(X_t \mid Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_0)$ คือ ค่าคาดหวังของเวกเตอร์สถานะคาบเวลา t เมื่อกำหนดเวกเตอร์ค่าวัด $Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_0$ มีค่าเท่ากับ $\hat{X}_{t|t}$ คือ ตัวประมาณเวกเตอร์สถานะของตัวกรอง MGLF และ L_t คือ เมทริกซ์คงที่ กำหนดโดย

$$\begin{aligned} L_t &= (B_t' S_{t+1} B_t + Q_{2t})^{-1} B_t' S_{t+1} \\ S_t &= A_t' [S_{t+1} - L_t' (B_t' S_{t+1} B_t + Q_{2t}) L_t] A_t + Q_{1t} \\ \text{และ} \quad S_N &= Q_{1N} \end{aligned}$$

ดังนั้นค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชันเป้าหมายในแต่ละคาบเวลา เท่ากับ

$$V_t(Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_0) = \hat{X}_{t|t}' S_t \hat{X}_{t|t} + c_t$$

เมื่อ $c_t = c_{t+1} + \text{tr}(S_{t+1} \Sigma_{V(t)}) + \text{tr}[(Q_{1t} - S_t + A_t' S_{t+1} A_t) P_{t|t}]$ และ $c_N = 0$ โดยที่ $P_{t|t}$ คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนของการประมาณเวกเตอร์สถานะ คาบเวลา t ของตัวกรอง MGLF

ขั้นตอนการทำงานของ การควบคุมเชิงเส้นรูปแบบกำลังสองของกระบวนการลาปาสันยทั่วไป พหุตัวแปร (LQ-MGL control) ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ

1. การควบคุมแบบป้อนกลับ อนุกรมของเวกเตอร์ตัวแปรควบคุมนำเข้า

$$\widehat{U}_t = -L_t A_t \widehat{X}_{t|t}$$

เมื่อ $\widehat{X}_{t|t}$ คือ ตัวประมาณเวกเตอร์สถานะคาบเวลา t ของตัวกรอง MGLF และสำหรับ $t = N-1, N-2, \dots, 1$

$$L_t = (B_t' S_{t+1} B_t + Q_{2t})^{-1} B_t' S_{t+1}$$

$$S_t = A_t' [S_{t+1} - L_t' (B_t' S_{t+1} B_t + Q_{2t}) L_t] A_t + Q_{1t}$$

และ $S_N = Q_{1N}$

2. ตัวกรอง MGLF

$$\widehat{X}_{t|t} = \widehat{X}_{t|t-1} + K_t (Y_t - C_t \widehat{X}_{t|t-1})$$

$$P_{t|t} = (I - K_t C_t) P_{t|t-1}$$

เมื่อ

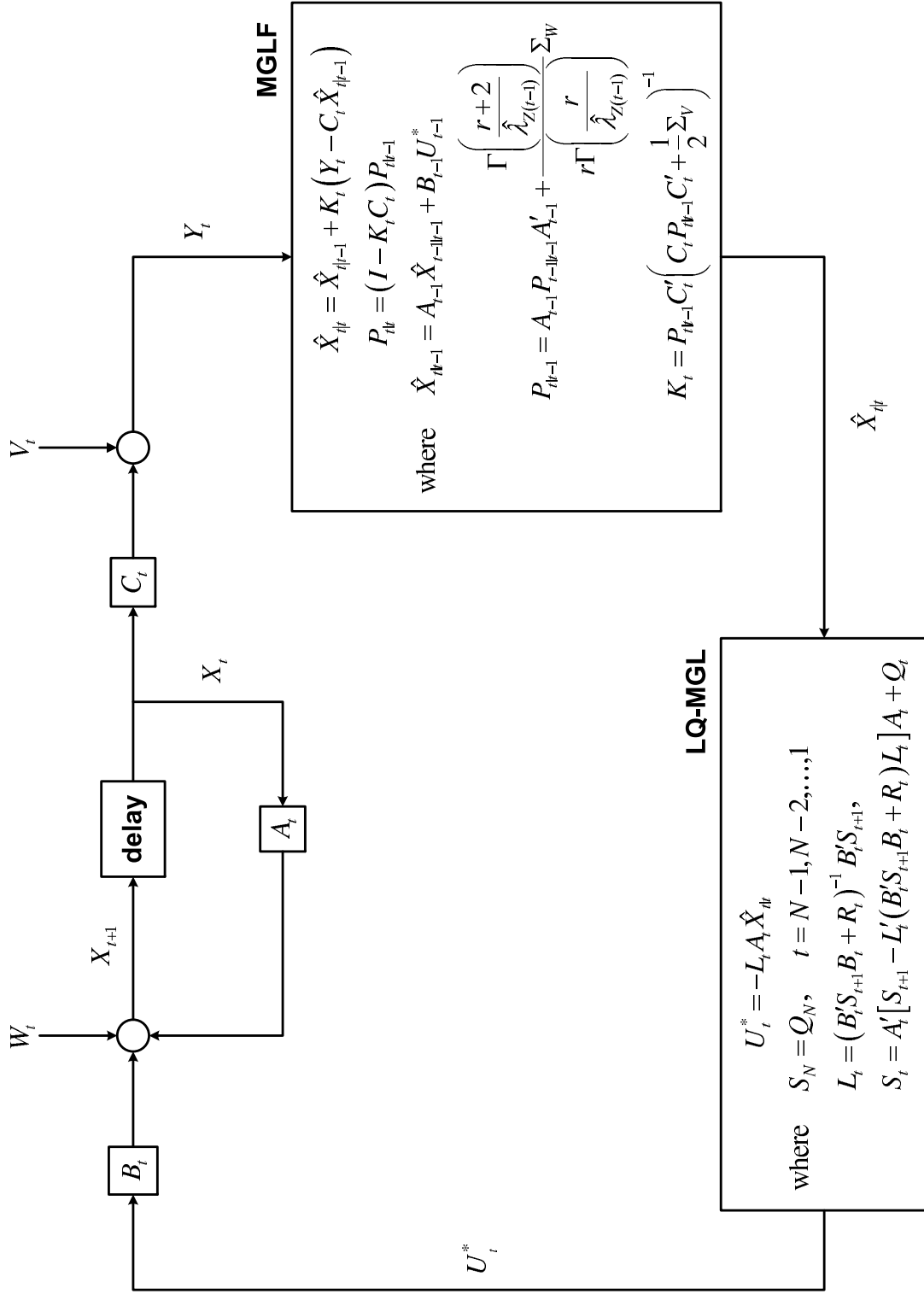
$$\widehat{X}_{t|t-1} = A_{t-1} \widehat{X}_{t-1|t-1}$$

$$P_{t|t-1} = A_{t-1} P_{t-1|t-1} A_{t-1}' + \frac{\Gamma(\frac{r+2}{\lambda_w})}{r \Gamma(\frac{r}{\lambda_w})} \Sigma_w$$

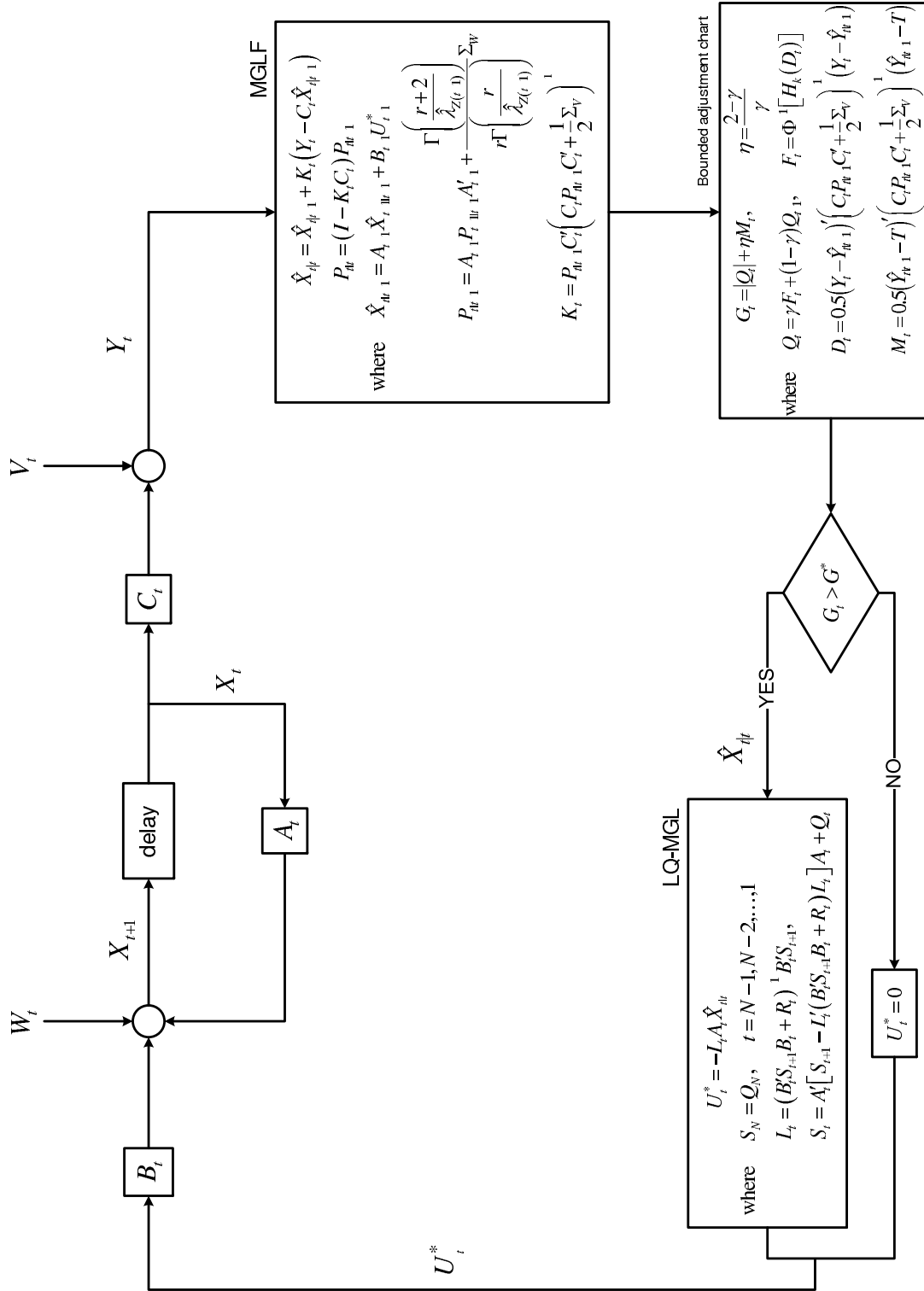
$$K_t = P_{t|t-1} C_t' \left(C_t P_{t|t-1} C_t' + \frac{1}{2} \Sigma_v \right)'$$

และขั้นตอนการทำงานของ การควบคุม LQ-MGL สามารถแสดงดังแผนภาพในรูปที่ 4.6 การประยุกต์ตัวกรอง MGLF สามารถทำได้กับทั้งตัวกรอง MGLF-S และ MGLF-M ซึ่งขึ้นอยู่กับ การประมาณค่าพารามิเตอร์เซฟของการแจกแจง MGL

นอกจากการควบคุม LQ-MGL ซึ่งจะทำการปรับกระบวนการตลอดเวลา เมื่อค่ากลางของ กระบวนการเบี่ยงเบนจากค่าเป้าหมายของกระบวนการ การปรับกระบวนการด้วยการควบคุม แบบป้อนกลับที่ขึ้นอยู่กับช่วงการปรับกระบวนการ (feedback dead-band adjustment: FD-BA) เป็นเครื่องมือหนึ่งของการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ (Luceño 2003) ซึ่งมุ่งลดการปรับ กระบวนการที่ไม่จำเป็น เทคนิคดังกล่าวจะทำให้ค่าใช้จ่ายของการปรับกระบวนการลดลง (Luceño & González 1999) การปรับกระบวนการ FDBA จึงให้สารสนเทศเกี่ยวกับ เมื่อใดกระบวนการจะ ถูกปรับด้วยเทคนิคการควบคุมแบบป้อนกลับ และขนาดของการปรับกระบวนการด้วยการ ประเมินค่ากลางของกระบวนการที่เบี่ยงเบนจากค่าเป้าหมาย



รูปที่ 4.6: ขั้นตอนการทำงานของการควบคุม LQ-MGL



รูปที่ 4.7: ขั้นตอนการทำงานของการควบคุม LQ-MGL ที่ขึ้นอยู่กับช่วงการปรับกระบวนการ

ในงานวิจัยนี้ การปรับกระบวนการ FDBA ประกอบด้วยการควบคุมสโตคาสติกเชิงเส้น และตัวกรอง MGLF เพื่อประมาณค่ากลางของกระบวนการที่เบี่ยงเบนจากค่าเป้าหมาย ขณะที่แผนภูมิ SMGLC ที่กำหนดช่วงการปรับกระบวนการ G^* เรียกว่า แผนภูมิปรับกระบวนการกำหนดเขต (bounded adjustment chart) เพื่อตรวจจับคาบเวลาที่จะต้องปรับกระบวนการ เมื่อค่าของตัวสถิติ G_t มีค่ามากกว่าช่วงการปรับกระบวนการ G^* แผนภาพขั้นตอนการทำงานของ การปรับกระบวนการ FDBA แสดงดังรูปที่ 4.7

4.2.1 ประสิทธิภาพของการควบคุม LQ-MGL

การศึกษาประสิทธิภาพของการควบคุม LQ-MGL และการควบคุม LQ-MGL ที่ขึ้นอยู่กับช่วงการปรับกระบวนการ (LQ-MGL(FDBA)) โดยพิจารณากระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้น 5 ตัวแปร ที่มีสมบัติของการสังเกตและสมบัติของการควบคุม

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t$$

ด้วยเทคนิคการทดลองจำลองแบบมอนติคาร์โล ประสิทธิภาพของการควบคุม LQ-MGL พิจารณาจาก MSSE ของกระบวนการและพารามิเตอร์ของการทดลองกำหนดโดย

1. $\mathbf{W}_t$ และ $\mathbf{V}_t$ คือ เวกเตอร์ตัวรบกวนระบบ และเวกเตอร์ตัวรบกวนค่าวัด ตามลำดับ ซึ่งเป็นอิสระต่อกัน และไม่ขึ้นอยู่กับเวลา สมมติ $\mathbf{W}_t$ และ $\mathbf{V}_t$ มีการแจกแจงปกติ k ตัวแปร กล่าวคือ $\mathbf{W}_t \sim N_k(\mathbf{0}, \Sigma_W)$ และ $\mathbf{V}_t \sim N_k(\mathbf{0}, \Sigma_V)$ เมื่อ $\Sigma_W = \sigma_W^2(1-\rho_W)\mathbf{I} + \sigma_W^2\rho_W\mathbf{J}$ และ $\Sigma_V = \sigma_V^2(1-\rho_V)\mathbf{I} + \sigma_V^2\rho_V\mathbf{J}$ โดยที่ $\mathbf{I}$ คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ และ $\mathbf{J}$ คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเท่ากับหนึ่ง
2. ความแปรปรวนของตัวรบกวนระบบ $\sigma_W^2 = 0.0001$ และความแปรปรวนของตัวรบกวนค่าวัด $\sigma_V^2 = 1$
3. สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของตัวรบกวนระบบ (ρ_W) และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของตัวรบกวนค่าวัด (ρ_V) เท่ากับ 0.1, 0.4 และ 0.8
4. ความยาวของอนุกรมเวลา (n) เท่ากับ 50
5. จำนวนตัวแปร (k) เท่ากับ 5
6. ค่าเริ่มต้นของเวกเตอร์สถานะ ($\mathbf{X}_{0|0}$) และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ($\mathbf{P}_{0|0}$) กำหนดโดย $\mathbf{X}_{0|0} \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{P}_{0|0})$ เมื่อ $\mathbf{P}_{0|0} = \mathbf{I}$

7. ขนาดของการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการในตัวแปรที่หนึ่งกำหนดโดย δ_M เท่ากับ 0.5, 1, 2, 3, 4 และ 5 กล่าวคือ ตัวกระบวนการ $W_{t(1)} \sim N(\delta_M, \sigma_W^2)$ เมื่อ $t = 26$
8. จำนวนรอบของการทดลองด้วยการจำลองแบบมอนติคาร์โล เท่ากับ 2,000 ด้วยโปรแกรมอาร์
9. พารามิเตอร์ค่าใช้จ่ายของการควบคุม LQ กำหนดโดย Q_{1t} และ Q_{2t} เท่ากับ I
10. ช่วงการปรับกระบวนการของการควบคุม LQ(FDBA) กำหนดโดยขีดจำกัดควบคุมบนของแผนภูมิควบคุม SMGLC(MGLF-S), SMGLC(MGLF-M) และ SMGLC(KF) แสดงดังตาราง

การควบคุม	ตัวกรอง	ขีดจำกัดควบคุม
LQ-MGL(FDBA)	MGLF-S	$UCL_{SMGLC(MGLF-S)} = 1.371$
	MGLF-M	$UCL_{SMGLC(MGLF-M)} = 1.263$
	KF	$UCL_{SMGLC(KF)} = 0.979$

11. ตัวสถิติตัดสินใจที่ใช้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวกรอง คือ MSSE ซึ่งคำนวณจากความคลาดเคลื่อนของการประมาณเวกเตอร์สถานะทั้งหมด 50 คาบเวลา

$$MSSE = \frac{1}{2000} \left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t})' (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t}) \right)$$

ตารางที่ 4.4 แสดง MSSE ของกระบวนการภายหลังการปรับกระบวนการด้วยการควบคุม LQ และการควบคุม LQ(FDBA) พบว่า รูปแบบแนวโน้มการเปลี่ยนแปลงค่า MSSE ของการควบคุม LQ และ LQ(FDBA) สำหรับตัวกรองทั้งสาม ไม่แตกต่างกัน การปรับกระบวนการ LQ-MGL-S และ LQ-MGL-M ทำให้ความคลาดเคลื่อนของกระบวนการจากค่าเป้าหมายน้อยกว่าการปรับกระบวนการ LQ-KF โดยพิจารณา MSSE ของการควบคุมทั้งสองที่ขึ้นอยู่กับตัวกรอง KF มีค่ามากกว่า MSSE ของการควบคุม LQ-MGL ทั้งสอง ดังนั้นจึงอาจสรุปได้ว่า ประสิทธิภาพของการควบคุมขึ้นอยู่กับประสิทธิภาพของตัวกรอง

การควบคุม LQ-MGL-S และ LQ-MGL-S(FDBA) ให้ค่า MSSE น้อยที่สุด เมื่อ ρ_W และ δ_M มีค่าน้อย กล่าวคือ การปรับกระบวนการที่ขึ้นอยู่กับตัวกรอง MGLF-S มีประสิทธิภาพสูงกว่าการปรับกระบวนการอื่น เมื่อขนาดความสัมพันธ์ระหว่างตัวกระบวนการและขนาดของค่ากลางไม่มีนัยสำคัญ แต่ถ้าค่ากลางของกระบวนการเพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญ การควบคุม LQ-MGL-M และ LQ-MGL-M(FDBA) จะมีประสิทธิภาพในการปรับกระบวนการกลับสู่ค่าเป้าหมายสูงกว่า และเมื่อ ρ_W มีค่ามากอย่างมีนัยสำคัญ การควบคุม LQ-MGL-M ทั้งสองจะมีค่า MSSE น้อยที่สุด ทุกค่า δ_M นอกจากนี้ LQ-MGL(FDBA) ที่ขึ้นอยู่กับตัวกรอง MGLF ทั้งสอง มีค่า MSSE

ตารางที่ 4.4: MSSE ของการควบคุม LQ และการควบคุม LQ(FDBA)

ρ_W	ρ_V	δ_M	LQ			LQ(FDBA)		
			KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M
0.1	0.1	0.5	0.12776	0.10850	0.11382	0.13833	0.13692	0.13715
		1	0.47587	0.37960	0.38031	0.51045	0.48356	0.47385
		2	1.87201	1.37621	0.95665	1.91085	1.57166	1.10895
		3	4.19949	2.77330	1.38448	4.20658	2.89058	1.43890
		4	7.44563	4.34396	1.86188	7.45482	4.38370	1.88590
		5	11.64026	5.95421	2.43271	11.64927	5.99656	2.45889
	0.4	0.5	0.12616	0.10377	0.10899	0.13796	0.13278	0.13413
		1	0.46839	0.35685	0.34641	0.50324	0.44437	0.42875
		2	1.84015	1.26114	0.78713	1.85742	1.38098	0.86727
		3	4.11889	2.45888	1.16336	4.12910	2.52848	1.18188
		4	7.31642	3.77818	1.62512	7.31766	3.81324	1.63342
		5	11.41469	5.14418	2.18907	11.42942	5.17756	2.19923
	0.8	0.5	0.11161	0.08230	0.08550	0.12973	0.09930	0.10472
		1	0.41309	0.26596	0.22814	0.43742	0.29777	0.25852
		2	1.62219	0.84635	0.48623	1.62483	0.86060	0.48990
		3	3.63691	1.57407	0.81941	3.63235	1.59581	0.82620
		4	6.44801	2.40424	1.27194	6.45895	2.45201	1.26918
		5	10.08944	3.33894	1.82190	10.08741	3.38653	1.82101

ตารางที่ 4.4: (ต่อ)

ρ_W	ρ_V	δ_M	LQ			LQ(FDBA)		
			KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M
0.4	0.1	0.5	0.12854	0.11230	0.11476	0.13895	0.13801	0.13809
		1	0.48107	0.39534	0.38748	0.51007	0.49074	0.47734
		2	1.88792	1.44066	1.03116	1.92203	1.62621	1.18377
		3	4.23326	2.92830	1.55341	4.23616	3.03145	1.61427
		4	7.52196	4.63616	2.11660	7.51898	4.67050	2.14379
		5	11.73836	6.41563	2.77536	11.73153	6.43568	2.78167
	0.4	0.5	0.12755	0.10829	0.11073	0.13755	0.13577	0.13480
		1	0.47781	0.37921	0.35247	0.51059	0.47269	0.43963
		2	1.87334	1.34079	0.79401	1.88731	1.46737	0.87710
		3	4.19922	2.61915	1.21070	4.20827	2.66310	1.23330
		4	7.45758	3.99028	1.69395	7.45477	4.01674	1.70803
		5	11.63422	5.38357	2.25409	11.64280	5.43005	2.27703
	0.8	0.5	0.11788	0.08817	0.08649	0.13570	0.11027	0.10792
		1	0.43438	0.28267	0.19382	0.45549	0.32276	0.22028
		2	1.71103	0.87497	0.41112	1.71606	0.90485	0.41701
		3	3.83559	1.58123	0.71380	3.83801	1.60962	0.71920
		4	6.81203	2.34089	1.11437	6.81995	2.38361	1.11538
		5	10.63278	3.18170	1.62411	10.64011	3.21954	1.62314

ตารางที่ 4.4: (ต่อ)

ρ_W	ρ_V	δ_M	LQ			LQ(FDBA)		
			KF	MGLF-S	MGLF-M	KF	MGLF-S	MGLF-M
0.8	0.1	0.5	0.13024	0.12120	0.11857	0.13772	0.13622	0.13673
		1	0.48717	0.43393	0.41027	0.50933	0.49471	0.48464
		2	1.91436	1.62974	1.19766	1.94214	1.75685	1.36019
		3	4.29208	3.44977	1.98420	4.29878	3.50481	2.06929
		4	7.62471	5.69608	2.83605	7.61836	5.70559	2.86461
		5	11.89987	8.18325	3.78265	11.91903	8.21507	3.85056
	0.4	0.5	0.13155	0.12103	0.11685	0.13773	0.13754	0.13659
		1	0.49029	0.42834	0.37698	0.51017	0.50391	0.46355
		2	1.92904	1.58110	0.95949	1.93629	1.67894	1.05143
		3	4.32986	3.20870	1.53553	4.33368	3.22536	1.57600
		4	7.68219	5.06538	2.21630	7.68115	5.07619	2.23462
		5	12.00879	7.02982	3.00973	12.00729	7.03707	3.04910
	0.8	0.5	0.12866	0.10824	0.09426	0.13750	0.13123	0.11653
		1	0.47664	0.35925	0.21601	0.48730	0.40542	0.24477
		2	1.87126	1.10885	0.48471	1.87441	1.12686	0.49221
		3	4.19882	1.95719	0.85098	4.19805	1.95541	0.84926
		4	7.45927	2.84246	1.33473	7.46421	2.83835	1.33199
		5	11.63978	3.74772	1.91734	11.64717	3.77855	1.92618

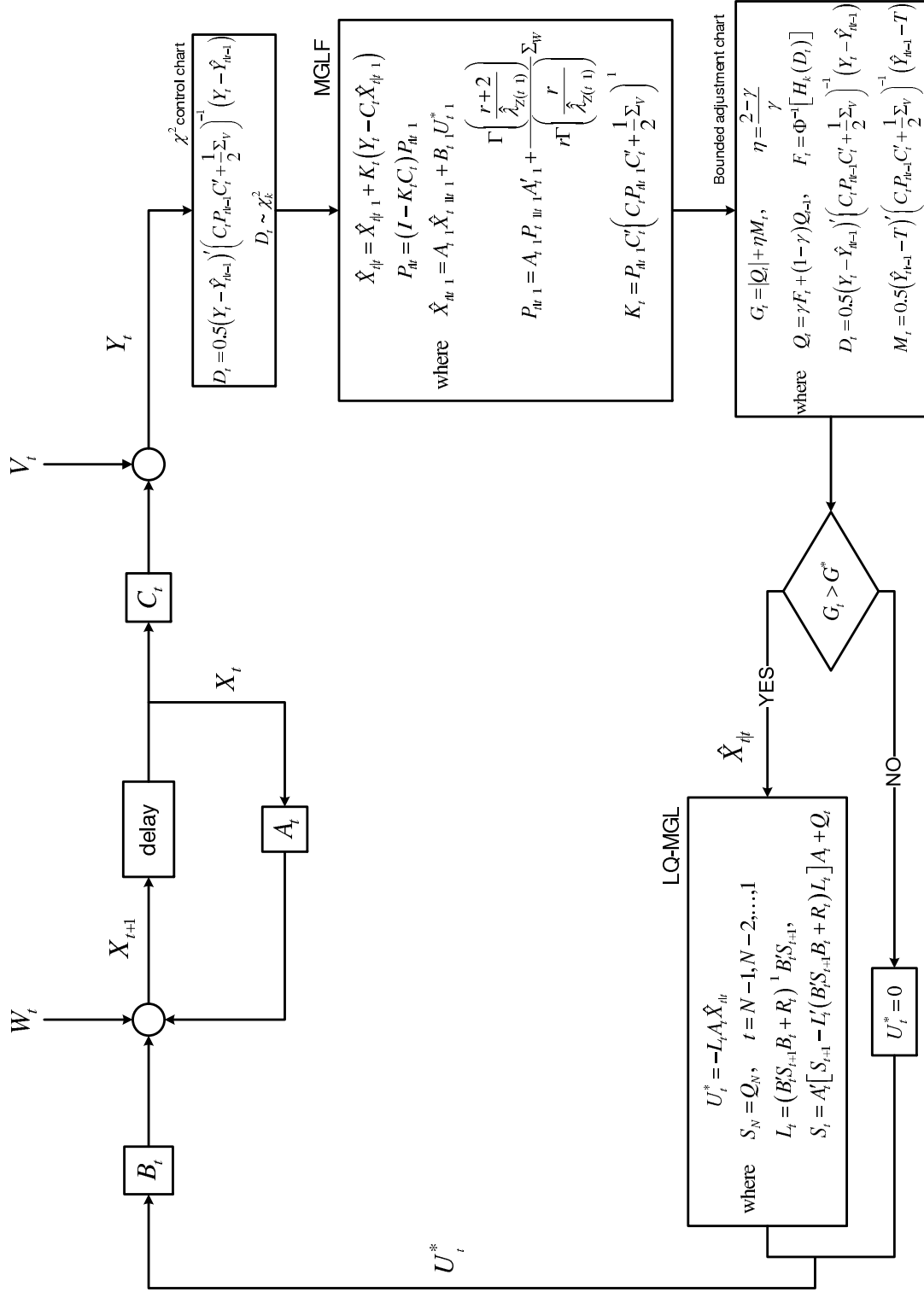
มากกว่าการปรับกระบวนการ LQ-MGL เสมอ แต่จำนวนครั้งการปรับกระบวนการจะน้อยกว่าเสมอเช่นกัน นั่นคือ การควบคุม LQ-MGL(FDBA) สามารถปรับกระบวนการกลับสู่ค่าเป้าหมายได้อย่างมีประสิทธิภาพ ภายใต้ค่าใช้จ่ายของการปรับกระบวนการที่ต่ำกว่า

4.3 ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ

กระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นที่ปรากฏการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการจากสาเหตุความผิดปกติใดๆ จะถูกพิจารณาเป็นกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นที่ไม่คงที่ ซึ่งสะท้อนลักษณะของกระบวนการที่ปรากฏตามจริง โดยปกติ เทคนิคการควบคุมกระบวนการที่นิยมกันทั่วไป คือ การควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรม ซึ่งเน้นการปรับกระบวนการกลับสู่ค่าเป้าหมาย โดยปราศจากการค้นหาและกำจัดสาเหตุความผิดปกติของกระบวนการ เนื่องจากเทคนิคการควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรมพัฒนาจากกระบวนการสโตคาสติกไม่คงที่ ขณะที่การควบคุมกระบวนการเชิงสถิติพัฒนาจากกระบวนการสโตคาสติกคงที่ ดังนั้นการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติจึงเน้นการค้นหาสาเหตุความผิดปกติของกระบวนการ เพื่อกำจัดสาเหตุความผิดปกติเหล่านั้น ซึ่งจะทำให้กระบวนการไม่ปรากฏความผิดปกติดังกล่าวยื่นอีก การควบคุมกระบวนการทั้งสองข้างต้นมีจุดมุ่งหมายเดียวกัน คือ การลดความผันแปรของกระบวนการ ภายใต้แนวคิดที่แตกต่างกัน อันเนื่องมาจากลักษณะของกระบวนการสโตคาสติกที่แตกต่างกันภายใต้การควบคุม

ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ SPCS ประกอบด้วย เทคนิคการปรับกระบวนการ LQ-MGL และเทคนิคแผนภูมิควบคุม χ^2 -MGL ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวกรองที่มีความแกร่ง MGLF ทำให้สามารถประมาณขนาดการเปลี่ยนแปลงค่ากลางของกระบวนการได้อย่างมีประสิทธิภาพและต่อเนื่องทั้งกระบวนการ ดังนั้นกระบวนการจะสามารถถูกปรับสู่ค่าเป้าหมายได้อย่างรวดเร็ว และสามารถแสดงคาบเวลาที่กระบวนการมีการเปลี่ยนแปลง จากนั้นการค้นหาสาเหตุความผิดปกติจะเริ่มต้นขึ้นและจนกระทั่งสามารถกำจัดสาเหตุความผิดปกติเหล่านั้นจากกระบวนการได้ สุดท้ายกระบวนการจะดำรงอยู่บนค่าเป้าหมายที่กำหนด และอยู่ภายใต้การควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ

การควบคุม LQ-MGL ประกอบด้วย เทคนิคการปรับกระบวนการแบบป้อนกลับที่พัฒนาจากทฤษฎีการควบคุมสโตคาสติกเชิงเส้นที่ขึ้นอยู่กับตัวกรองที่มีความแกร่ง MGLF ประสิทธิภาพของการควบคุม LQ-MGL ขึ้นอยู่กับประสิทธิภาพของตัวกรอง MGLF ในการประมาณตัวแปรสถานะ ที่ใช้ในการอธิบายการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ นอกจากนี้ การควบคุม LQ-MGL ยังสามารถประยุกต์ช่วงการปรับกระบวนการ เพื่อลดการปรับกระบวนการที่ไม่จำเป็น ตามแนวคิดดังกล่าว แผนภูมิปรับค่ากำหนดเขตถูกนำมาใช้เพื่อตรวจจับการเบี่ยงเบนของค่ากลางของกระบวนการจากค่าเป้าหมาย การควบคุม LQ-MGL(FDBA) จะนำไปสู่การลดลงของจำนวนครั้งของการปรับกระบวนการ ขณะที่กระบวนการยังคงอยู่บนค่าเป้าหมายที่กำหนด



รูปที่ 4.8: ขั้นตอนการทำงานของระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ เมื่อกำหนดช่วงการปรับกระบวนการ

แผนภูมิควบคุมเป็นเทคนิคที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลายในการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ ซึ่งนำมาใช้เพื่อตรวจจับสาเหตุความผิดปกติที่ปรากฏในกระบวนการ แผนภูมิควบคุม χ^2 -MGL ของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ ถูกพิจารณา เมื่อแผนภูมิควบคุมสามารถตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการได้ การค้นหาและกำจัดสาเหตุความผิดปกติเหล่านั้นจะถูกดำเนินการ จนกระทั่งกระบวนการคงอยู่ในสภาพของการควบคุมเชิงสถิติ

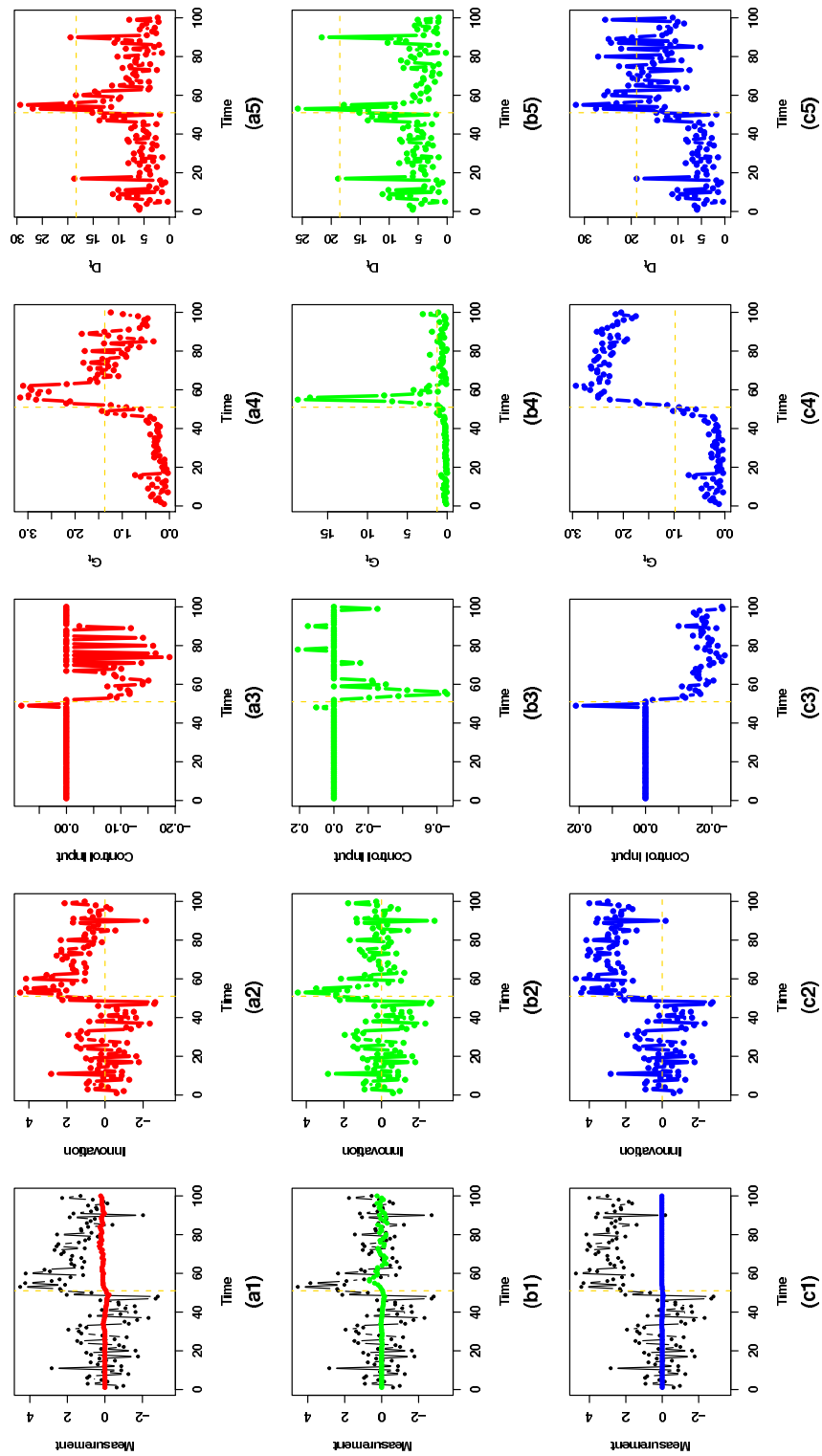
ขั้นตอนการทำงานของ SPCS แสดงดังรูปที่ 4.8 โดยแผนภูมิปรับค่ากำหนดเขตได้ประยุกต์แผนภูมิควบคุม SMGLC โดยกำหนดค่า G^* เป็นขอบเขตการปรับกระบวนการ และแผนภูมิควบคุม χ^2 -MGL ถูกนำมาใช้ เพื่อตรวจจับการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ

รูปที่ 4.9 แสดงการปรับกระบวนการ เมื่อค่ากลางของกระบวนการเปลี่ยนแปลง รูปที่ 4.9(a1), (b1) และ (c1) แสดงค่าวัดของกระบวนการที่ถูกปรับกลับสู่ค่าเป้าหมายด้วย SPCS และค่าพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวกรอง MGLF-S, MGLF-M และ KF ตามลำดับพบว่า การควบคุม LQ-KF ไม่สามารถดึงกระบวนการกลับสู่ค่าเป้าหมายได้อย่างมีประสิทธิภาพ ขณะที่การควบคุม LQ-MGL-M สามารถดึงกระบวนการกลับสู่ค่าเป้าหมายได้อย่างรวดเร็ว ความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ แสดงดังรูปที่ 4.9(a2), (b2) และ (c2) ถูกนำมาพิจารณาความผิดปกติของกระบวนการ ซึ่งความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ ของตัวกรอง MGLF-S และ KF จะส่งสัญญาณความผิดปกติของกระบวนการผิดพลาด แสดงด้วยแผนภูมิควบคุม χ^2 ดังรูปที่ 4.9(a5) และ (c5) ขณะที่ รูปที่ 4.9(b5) แสดงแผนภูมิควบคุม χ^2 ที่ขึ้นอยู่กับตัวกรอง MGLF-M ซึ่งสามารถแสดงคาบเวลาที่กระบวนการปรากฏความผิดปกติ

รูปที่ 4.9(a4), (b4) และ (c4) แสดงแผนภูมิปรับค่ากำหนดเขตซึ่งเป็นเครื่องมือที่ใช้เพื่อกำหนดการปรับกระบวนการ ขณะที่การปรับกระบวนการและขนาดของการปรับกระบวนการสามารถพิจารณาจากตัวแปรควบคุมนำเข้าซึ่งเป็นอนุกรมไม่คงที่ แสดงดังรูปที่ 4.9(a3), (b3) และ (c3) แผนภูมิของตัวแปรควบคุมนำเข้าและแผนภูมิปรับค่ากำหนดเขตไม่สามารถแสดงคาบเวลาที่กระบวนการผิดปกติได้ โดยปกติ การตรวจจับความผิดปกติของกระบวนการจะกระทำด้วยการพิจารณาแผนภูมิควบคุมของความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์ค่าวัดล่วงหน้า 1 คาบ

4.4 สรุป

SPCS พัฒนาขึ้นจากการผสมแนวคิดของการควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรม และการควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ เพื่อดำรงกระบวนการให้อยู่บนค่าเป้าหมายที่กำหนด และรักษากระบวนการให้อยู่ในการควบคุมเชิงสถิติ SPCS ประกอบด้วยเทคนิคการปรับกระบวนการแบบป้อนกลับ และเทคนิคแผนภูมิควบคุม โดยประยุกต์ตัวกรองที่มีความแกร่ง MGLF ผลการศึกษา พบว่า



รูปที่ 4.9: ผลลัพธ์การทำงานของระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ

1. แผนภูมิควบคุม SMGLC ซึ่งสามารถตรวจจับความผิดปกติของค่ากลาง และ/หรือ การกระจายของกระบวนการได้อย่างมีประสิทธิภาพ
2. การปรับกระบวนการ LQ-MGL สามารถดึงกระบวนการกลับสู่ค่าเป้าหมายได้อย่างมีประสิทธิภาพและรวดเร็วกว่าการปรับกระบวนการที่ขึ้นอยู่กับตัวกรองอื่น
3. การปรับกระบวนการ LQ-MGL(FDBA) ได้นำแผนภูมิควบคุม SMGLC ที่กำหนดช่วงการปรับกระบวนการมาประยุกต์เป็นแผนภูมิรับค่ากำหนดเขต เพื่อกำหนดการปรับกระบวนการ ซึ่งทำให้จำนวนครั้งของการปรับกระบวนการที่ไม่จำเป็นลดลง
4. SPCS จึงได้ประยุกต์การปรับกระบวนการ LQ-MGL(FDBA) เพื่อปรับกระบวนการ และแผนภูมิควบคุม χ^2 -MGL เพื่อตรวจจับการเปลี่ยนแปลงที่ผิดปกติของกระบวนการ

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้มุ่งพัฒนาระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ SPCS เพื่อควบคุมกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นที่ไม่คงที่ ด้วยการผสานเทคนิคการปรับกระบวนการแบบป้อนกลับที่กำหนดช่วงการปรับกระบวนการ การปรับกระบวนการดังกล่าวพัฒนาจากทฤษฎีการควบคุมสโตคาสติกเชิงเส้น และเทคนิคแผนภูมิควบคุม ประสิทธิภาพของ SPCS ขึ้นอยู่กับประสิทธิภาพของตัวกรองที่นำมาประมาณและพยากรณ์ขนาดการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ SPCS ส่งผลให้กระบวนการดำรงอยู่บนค่าเป้าหมายที่กำหนด และอยู่ในสภาพการควบคุมเชิงสถิติ ซึ่งนำไปสู่การลดความผันแปรของกระบวนการ

5.1 ตัวกรองที่มีความแกร่ง MGLF

ตัวแบบปริภูมิสถานะถูกนำมาอธิบายกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้น ซึ่งการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการอธิบายโดยตัวแปรสถานะไม่ทราบค่า ดังนั้นการประมาณและการพยากรณ์ค่าตัวแปรสถานะจึงถูกพัฒนาขึ้น เพื่อประมาณขนาดและอธิบายรูปแบบการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ เรียกตัวประมาณนี้ว่า ตัวกรอง เมื่อกระบวนการปรากฏค่านอกกลุ่มในตัวกระบวนการซึ่งส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ ตัวกรอง MGLF จึงถูกพัฒนาขึ้นซึ่งเป็นตัวกรองที่มีความแกร่ง นั่นคือ ตัวกรอง MGLF สามารถแสดงการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการได้อย่างรวดเร็วและมีประสิทธิภาพ ขณะที่ ตัวกรองมาตรฐาน KF ไม่คงเส้นคงวาในกรณีนี้ ซึ่งทำให้ตัวกรอง KF มีความสามารถต่ำในการอธิบายการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ

ประสิทธิภาพของตัวกรอง MGLF กำหนดโดยตัวประกอบปรับค่า ซึ่งสามารถพิจารณาใน 2 ลักษณะ คือ ตัวกรอง MGLF ที่ขึ้นอยู่กับตัวประกอบปรับค่าตัวเดียว (MGLF-S) และตัวกรอง MGLF ที่ขึ้นอยู่กับตัวประกอบปรับค่าหลายตัว (MGLF-M) ตัวกรอง MGLF-S ให้น้ำหนักของการประมาณตัวแปรสถานะแต่ละตัวแปรเท่ากัน ทั้งตัวแปรที่มีการเปลี่ยนแปลงและไม่มีการเปลี่ยนแปลง ซึ่งตัวแปรที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงจะได้รับน้ำหนักจนทำให้ค่าประมาณของตัวแปร

ดังกล่าวแตกต่างไปจากกระบวนการที่ปรากฏ ขณะที่ตัวกรอง MGLF-M ให้น้ำหนักของการประมาณตัวแปรสถานะแต่ละตัวแปรแตกต่างกัน ซึ่งตัวกรองนี้จะลดความบกพร่องของตัวกรอง MGLF-S ทำให้การอธิบายการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการของตัวแปรแต่ละตัวถูกต้องมากขึ้น

การทดลองจำลองแบบด้วยเทคนิคมอนติคาร์โลถูกกำหนดขึ้นเพื่อศึกษาและเปรียบเทียบประสิทธิภาพของตัวกรอง พบว่า ตัวกรอง MGLF-M มีประสิทธิภาพสูงสุด เมื่อเปรียบเทียบกับตัวกรอง KF, MGLF-S และ MIXTURE รวมถึงอัตราการลู่เข้าของ MSSE สูงกว่าตัวกรองอื่น กล่าวคือ ตัวกรอง MGLF-M สามารถประมาณขนาดการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการได้อย่างแม่นยำกว่าตัวกรองอื่น

5.2 ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ SPCS

SPCS พัฒนารูปแบบแนวคิดของการควบคุมกระบวนการ ซึ่งจำแนกออกเป็น 2 แนวคิดใหญ่ๆ คือ การควบคุมกระบวนการเชิงวิศวกรรม ซึ่งเป็นกลุ่มของเทคนิคการปรับกระบวนการที่ไม่คงที่ ให้ดำรงอยู่บนค่าเป้าหมายที่กำหนด การปรับกระบวนการตามแนวคิดข้างต้นจะไม่มุ่งค้นหาและกำจัดสาเหตุของความผิดปกติของกระบวนการ ขณะที่การควบคุมกระบวนการเชิงสถิติถูกพัฒนาขึ้นจากข้อสมมติที่ว่า กระบวนการสโตคาสติกคงที่ ถ้ากระบวนการไม่ปรากฏความผิดปกติ ดังนั้นการปรับกระบวนการตามแนวคิดนี้จะดำเนินการได้ เมื่อกำจัดสาเหตุความผิดปกติดังกล่าว จนทำให้กระบวนการอยู่ภายใต้การควบคุมเชิงสถิติ หรือกระบวนการมีการกระจายคงที่ งานวิจัยนี้จึงพัฒนา SPCS ที่ประกอบด้วยเทคนิคการปรับกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นแบบป้อนกลับ LQ-MGL ร่วมกับแผนภูมิปรับค่ากำหนดเขต SMGLC และแผนภูมิควบคุม χ^2 -MGL ซึ่งเทคนิคทั้งสองข้างต้นขึ้นอยู่กับตัวกรองที่มีความแกร่ง MGLF ดังนั้น SPCS เป็นการแก้ปัญหาการปรับกระบวนการสโตคาสติกไม่คงที่อย่างยั่งยืนด้วยความพยายามดำรงกระบวนการให้อยู่บนค่าเป้าหมายที่กำหนด และกำจัดสาเหตุความผิดปกติที่ปรากฏ

5.3 ข้อเสนอแนะ

1. ตัวกรอง MGLF สามารถประยุกต์กับกระบวนการสโตคาสติกเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น ทั้งกรณีเวลาต่อเนื่องและเวลาไม่ต่อเนื่อง นั่นหมายความว่า ระบบควบคุมกระบวนการเชิงสถิติ SPCS สามารถประยุกต์กับกระบวนการดังกล่าวได้ด้วย
2. โดยปกติ ข้อมูลทางการเงินมักถูกสมมติว่ามีการแจกแจงเบ้ ดังนั้นตัวรบกวนของตัวแบบปริภูมิสถานะอาจจะถูกสมมติว่ามีการแจกแจงเส้นระดับวงรีและเบ้ (skew-elliptical distribution) ตัวประมาณตัวแปรสถานะและตัวประมาณพารามิเตอร์ความเบ้ (skewness pa-

rameter) ถูกพิจารณาเพื่ออธิบายการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการ (Naveau, Genton & Ammann 2004)

3. ประสิทธิภาพของการควบคุม LQ-MGL ขึ้นอยู่กับตัวกรองของตัวแบบปริภูมิสถานะ ถ้าการกำหนดตัวแบบปริภูมิสถานะไม่สอดคล้องกับกระบวนการ ประสิทธิภาพของการควบคุม LQ-MGL จะลดลง เนื่องจากตัวกรองไม่สามารถประมาณการเปลี่ยนแปลงของกระบวนการได้อย่างแม่นยำ นอกจากนี้ การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการควบคุม LQ-MGL และการควบคุมอื่นอาจถูกดำเนินการ เช่น การควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอ็กโปเนนเชียลหลายตัวแปร (multivariate exponentially weighted moving average controller), การควบคุมค่าเฉลี่ยเคลื่อนที่ถ่วงน้ำหนักเอ็กโปเนนเชียลคู่หลายตัวแปร (multivariate double exponentially weighted moving average controller)

ภาคผนวก ก

ตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงปกติผสม

ตัวกรองที่มีความแกร่ง เมื่อตัวรบกวนค่าวัดมีการแจกแจงปกติผสม (robust filter with mixture Gaussian measurement noise: MIXTURE) ถูกพัฒนาขึ้นด้วยเทคนิคของเบย์ โดยสมมติตัวรบกวนระบบมีการแจกแจงปกติผสม (mixture Gaussian distribution) ดูรายละเอียดเพิ่มเติมจาก Yatawara (1986) และ Chuang (1988) ซึ่งตัวกรองนี้มุ่งที่จะประมาณเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวรบกวนระบบทั้งสถานะปกติ และสถานะที่มีค่านอกกลุ่ม ดังนั้นตัวแบบปริภูมิสถานะกำหนดโดย

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{t+1} &= \mathbf{A}_t \mathbf{X}_t + \gamma_1 \mathbf{W}_{t(1)} + \gamma_2 \mathbf{W}_{t(2)} \\ \mathbf{Y}_t &= \mathbf{C}_t \mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t \end{aligned}$$

เมื่อ $\mathbf{V}_t \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{V}})$, $\mathbf{W}_{t(1)} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{W}(1)})$ และ $\mathbf{W}_{t(2)} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{W}(2)})$ โดยที่ $\Sigma_{\mathbf{W}(1)} \ll \Sigma_{\mathbf{W}(2)}$ สมมติว่า $\mathbf{W}_{t(1)}$ และ $\mathbf{W}_{t(2)}$ คือ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวรบกวนระบบของสถานะปกติ และสถานะที่มีค่านอกกลุ่ม ตามลำดับ γ_2 คือ ความน่าจะเป็นของการเกิดค่านอกกลุ่ม, $0 < \gamma_2 < 1$ และ $\gamma_1 = 1 - \gamma_2$ ด้วยเทคนิคของเบย์จะได้ตัวประมาณเวกเตอร์สถานะ และ เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของความคลาดเคลื่อนของการประมาณเวกเตอร์สถานะ คือ

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{X}}_{t|t} &= \sum_{j=1}^2 \gamma_{t(j)} \widehat{\mathbf{X}}_{t|t}^{(j)} \\ \mathbf{P}_{t|t} &= \sum_{j=1}^2 \gamma_{t(j)} \left[\mathbf{P}_{t|t}^{(j)} + \left(\widehat{\mathbf{X}}_{t|t}^{(j)} - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t} \right)' \left(\widehat{\mathbf{X}}_{t|t}^{(j)} - \widehat{\mathbf{X}}_{t|t} \right) \right] \end{aligned}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbf{X}}_{t|t}^{(j)} &= \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} + \mathbf{P}_{t|t-1}^{(j)} \mathbf{C}_t' \mathbf{M}_{t(j)}^{-1} \left(\mathbf{Y}_t - \mathbf{C}_t \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} \right) \\
 \mathbf{P}_{t|t}^{(j)} &= \mathbf{P}_{t|t-1}^{(j)} - \mathbf{P}_{t|t-1}^{(j)} \mathbf{C}_t' \mathbf{M}_{t(j)}^{-1} \mathbf{C}_t \mathbf{P}_{t|t-1}^{(j)} \\
 \mathbf{M}_{t(j)} &= \mathbf{C}_t \mathbf{P}_{t|t-1}^{(j)} \mathbf{C}_t' + \Sigma_{\mathbf{V}} \\
 \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} &= \mathbf{A}_{t-1} \widehat{\mathbf{X}}_{t-1|t-1} \\
 \mathbf{P}_{t|t-1}^{(j)} &= \mathbf{A}_{t-1} \mathbf{P}_{t-1|t-1} \mathbf{A}_{t-1}' + \Sigma_{\mathbf{W}(j)}, \quad j = 1, 2
 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
 \gamma_{t(1)} &= \left[1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left| \frac{\mathbf{P}_{t|t-1}^{(1)}}{\mathbf{P}_{t|t-1}^{(2)}} \right|^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(\mathbf{Y}_t - \mathbf{C}_t \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} \right)' \left(\mathbf{M}_{t(1)}^{-1} - \mathbf{M}_{t(2)}^{-1} \right) \left(\mathbf{Y}_t - \mathbf{C}_t \widehat{\mathbf{X}}_{t|t-1} \right) \right\} \right]^{-1} \\
 \gamma_{t(2)} &= 1 - \gamma_{t(1)}
 \end{aligned}$$

ภาคผนวก ข

**A manuscript submitted to
Communications in Statistics:
Simulation and Computation**

Communications in Statistics - Simulation and Computation



**ADAPTIVE KALMAN FILTERING WITH MULTIVARIATE
GENERALIZED LAPLACE SYSTEM NOISE**

Journal:	<i>Communications in Statistics - Simulation and Computation</i>
Manuscript ID:	Draft
Manuscript Type:	Original Paper
Date Submitted by the Author:	n/a
Complete List of Authors:	Khawsithiwong, Pairoj; Silpakorn University, Statistics Yatawara, Nihal; Curtin University of Technology, Mathematics and Statistics
Keywords:	adaptive filter, multivariate generalized Laplace distribution, system noise outlier
Abstract:	Adaptive Kalman filter is proposed to estimate the states of a system where the system noise is assumed to be a multivariate generalized Laplace random vector. In the presence of outliers in the system noise, it is shown that improved state estimates can be obtained by using an adaptive factor to estimate the dispersion matrix of the system noise term. A Monte-Carlo investigation is carried out to access the performance of the proposed filters and other robust filters. The results show that the proposed filter is superior to other filters when the magnitude of system change is moderate or large.

SCHOLARONE™
Manuscripts

URL: <http://mc.manuscriptcentral.com/lssp> E-mail: comstat@univmail.cis.mcmaster.ca

Adaptive Kalman Filtering with Multivariate Generalized Laplace System Noise**Khawsithiwong, P.**

Department of Statistics, Faculty of Science, Silpakorn University, Nakorn Phatom, Thailand

Yatawara, N.

Department of Mathematics and Statistics, Curtin University of Technology, Perth, Western Australia

Pongsapukdee, V.

Department of Statistics, Faculty of Science, Silpakorn University, Nakorn Phatom, Thailand

Keywords: Adaptive filter, Multivariate generalized Laplace distribution, System noise outlier**Mathematics Subject Classification** 62M; 62M20.**Abstract**

An adaptive Kalman filter is proposed to estimate the states of a system where the system noise is assumed to be a multivariate generalized Laplace random vector. In the presence of outliers in the system noise, it is shown that improved state estimates can be obtained by using an adaptive factor to estimate the dispersion matrix of the system noise term. For the implementation of the filter, an algorithm which includes both single and multiple adaptive factors is proposed. A Monte-Carlo

investigation is also carried out to access the performance of the proposed filters in comparison with other robust filters. The results show that, in the sense of minimum mean squared state error, the proposed filter is superior to other filters when the magnitude of a system change is moderate or large.

1. Introduction

The well-known Kalman filter (Kalman 1960) was introduced to deal with problems of linear estimation and prediction for a linear Gaussian system defined by

$$\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{A}_t \mathbf{X}_t + \mathbf{W}_t \quad (1.1)$$

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{C}_t \mathbf{X}_t + \mathbf{V}_t \quad (1.2)$$

where $\mathbf{W}_t$ and $\mathbf{V}_t$ are respectively system noise and measurement noise sequences which are mutually uncorrelated. $\mathbf{W}_t$ and $\mathbf{V}_t$ are distributed as zero mean Gaussian random vectors with covariance matrices Σ_w and Σ_v , respectively. By means of orthogonal projections, the original Kalman filter was derived in the sense of minimum mean squared state error. It consists of estimates of the state and its covariance matrix given by

$$\hat{\mathbf{X}}_{t|t} = \hat{\mathbf{X}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t (\mathbf{Y}_t - \mathbf{C}_t \hat{\mathbf{X}}_{t|t-1}) \quad (1.3)$$

and

$$\mathbf{P}_{t|t} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{C}_t) \mathbf{P}_{t|t-1} \quad (1.4)$$

where

$$\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1} = \mathbf{A}_{t-1} \hat{\mathbf{X}}_{t-1|t-1} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{A}_{t-1} \mathbf{P}_{t-1|t-1} \mathbf{A}_{t-1}' + \Sigma_w \quad (1.6)$$

1
2
3
4 and
$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{C}_t' \left(\mathbf{C}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{C}_t' + \frac{1}{2} \Sigma_v \right)^{-1} \quad (1.7)$$

5
6
7

8 However, the presence of outliers in the system noise term can cause a shift in the mean to a new level.
9
10 In this situation, the traditional Kalman filter is no longer optimal due to the non-Gaussian noise term.
11
12 To accommodate the outlier, the noise term is frequently assumed to have a symmetric heavy-tailed
13 distribution such as a mixture of Gaussian components (Sorenson & Alspach 1971, Pena & Guttman
14 1988, Yatawara et al. 1991), a mixture of Student-t distributions (Meinhold & Singpurwalla 1989) or a
15 univariate generalized Gaussian distribution (Niehsen 2002).
16
17
18
19
20
21
22

23 The construction of the adaptive filter proposed in this manuscript depends on a covariance
24 matrix of the system noise which is estimated sequentially in time by exploiting system knowledge
25 based on the discrepancy between the predicted state estimate and the measurement at a given time.
26
27 There are several techniques available to estimate the noise covariance matrix such as Bayesian
28 estimation, maximum likelihood estimation, correlation method, and covariance matching technique
29 (Mehra 1972). In addition, a single adaptive factor (see, Yang et al. (2001)) which acts as a weighting
30 factor between the predicted state estimates and the measurements can also be used in conjunction
31 with the estimated noise covariance matrix to obtain an improved adaptive filter. A drawback of the
32 latter technique is that all variables of the state vector are weighed by a single adaptive factor at the
33 same time. Yang and Cui (2008) introduced an alternative adaptive filter with multi adaptive factors.
34 This approach could reduce the state estimation errors more significantly than the filter with a single
35 adaptive factor.
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51

52 In this manuscript, an adaptive Kalman filter is developed by assuming that the system noise
53 term is multivariate generalized Laplace distributed whose shape depends upon a shape parameter. In
54 the presence of outliers, the shape parameter can be easily manipulated to estimate the covariance
55
56
57
58
59
60

matrix of the system noise term in real time which enhances the performance of the filter. It is also shown that further gains in efficiency of the filters are achievable through the introduction of single and multi adaptive factors.

The paper is organized as follows. In Section 2, a brief description of the multivariate generalized Laplace distribution is given. The adaptive Kalman filtering as well as the algorithms with single and multi adaptive factors are developed in Section 3. In Section 4, the performances of the proposed adaptive filters are compared with the traditional Kalman filter and other robust filters. Finally, the summary and conclusions are provided in Section 5.

2. Multivariate Generalized Laplace Distribution

The multivariate generalized Laplace (MGL) distribution was introduced by Ernst (1998) as a class of multivariate models consisting of several distributions depending on the value of a shape parameter. This shape parameter λ distinguishes between members of the family such as the multivariate Laplace ($\lambda = 1$), the multivariate normal ($\lambda = 2$) and the multivariate uniform ($\lambda \rightarrow \infty$) distributions as shown in Figure 1.

Let $\mathbf{Y}$ be a $k \times 1$ random vector, $\boldsymbol{\mu}$ be a $k \times 1$ vector of constants, and $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]$ be a $k \times k$ non-negative definite matrix. Suppose the random vector $\mathbf{Y}$ has an MGL distribution with the mean vector $\boldsymbol{\mu}$, the scale parameter matrix $\boldsymbol{\Sigma}$, and the shape parameter λ , denoted by $\mathbf{Y} \sim MGL_k(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \lambda)$, with the joint density of $\mathbf{Y}$ defined as

$$f(\mathbf{y}) = \frac{\lambda \Gamma(\frac{k}{\lambda})}{2\pi^{\frac{k}{\lambda}} \Gamma(\frac{k}{\lambda})} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{\lambda}} \exp \left\{ - \left[(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \right]^{\frac{\lambda}{2}} \right\} \quad (2.1)$$

where $\Gamma(\cdot)$ denotes a gamma function. The mean vector and the covariance matrix of the MGL random vector $\mathbf{Y}$ are given respectively by

$$E\mathbf{Y} = \boldsymbol{\mu} \quad (2.2)$$

and

$$Cov(\mathbf{Y}) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{\lambda}\right)}{k\Gamma\left(\frac{k}{\lambda}\right)} \boldsymbol{\Sigma} \quad (2.3)$$

Also, let a partitioned random vector $\mathbf{Y}'_{k \times 1} = (\mathbf{Y}'_{1 \times k_1}, \mathbf{Y}'_{2 \times (k-k_1)})$ with a mean vector

$$\boldsymbol{\mu}'_{k \times 1} = (\boldsymbol{\mu}'_{1 \times k_1}, \boldsymbol{\mu}'_{2 \times (k-k_1)}), \text{ and a scale parameter matrix } \boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11(k_1 \times k_1)} & \boldsymbol{\Sigma}_{12(k_1 \times (k-k_1))} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{21((k-k_1) \times k_1)} & \boldsymbol{\Sigma}_{22((k-k_1) \times (k-k_1))} \end{bmatrix} \text{ be given.}$$

Then, the conditional MGL density of $\mathbf{Y}_1 | \mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_2^*$ is defined as

$$f(\mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_2^*) = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{\lambda}\right) \Gamma\left(\frac{k-k_1}{\lambda}\right)}{\pi^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{\lambda}\right) \Gamma\left(\frac{k-k_1}{\lambda}\right)} |\boldsymbol{\Sigma}_{11.2}|^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ - \left[(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_{1.2})' \boldsymbol{\Sigma}_{11.2}^{-1} (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_{1.2}) + (\mathbf{y}_2^* - \boldsymbol{\mu}_2)' \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\mathbf{y}_2^* - \boldsymbol{\mu}_2) \right]^{\frac{\lambda}{2}} + \left[(\mathbf{y}_2^* - \boldsymbol{\mu}_2)' \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\mathbf{y}_2^* - \boldsymbol{\mu}_2) \right]^{\frac{\lambda}{2}} \right\} \quad (2.4)$$

where $\boldsymbol{\mu}_{1.2} = \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} (\mathbf{y}_2^* - \boldsymbol{\mu}_2)$ and $\boldsymbol{\Sigma}_{11.2} = \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12} \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{21}$. The mean vector and the covariance matrix of $\mathbf{Y}_1 | \mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_2^*$ are given respectively by

$$E(\mathbf{Y}_1 | \mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_2^*) = \boldsymbol{\mu}_{1.2} \quad (2.5)$$

and

$$Cov(\mathbf{Y}_1 | \mathbf{Y}_2 = \mathbf{y}_2^*) = \frac{\Gamma\left(\frac{k_1+2}{\lambda}\right)}{k_1 \Gamma\left(\frac{k_1}{\lambda}\right)} \boldsymbol{\Sigma}_{11.2} \quad (2.6)$$

See further details in Fang, Kotz & Ng (1990).

3. Adaptive Kalman Filtering

Consider a linear discrete-time stochastic system which possesses properties of observability and reachability given by equations (1.1) and (1.2) where W_t is assumed to be distributed as an zero mean MGL random vector with a scale parameter Σ_w and a shape parameter λ_w , denoted by $W_t \sim MGL_r(0, \Sigma_w, \lambda_w)$. V_t is a Gaussian random vector, denoted by $V_t \sim MGL_k(0, \Sigma_v, 2)$ and the scale parameter matrices Σ_w and Σ_v are assumed to be known positive definite matrices. Then, by means of the least squares technique (Kalman 1960, Duncan & Horn 1972), an unbiased minimum variance state estimate can be derived leading to an adaptive Kalman filter with recursive estimates of the state and its covariance matrix given by

$$\hat{X}_{t|t} = \hat{X}_{t|t-1} + K_t (Y_t - C_t \hat{X}_{t|t-1}) \quad (3.1)$$

and

$$P_{t|t} = (I - K_t C_t) P_{t|t-1} \quad (3.2)$$

where

$$\hat{X}_{t|t-1} = A_{t-1} \hat{X}_{t-1|t-1} \quad (3.3)$$

$$P_{t|t-1} = A_{t-1} P_{t-1|t-1} A_{t-1}' + \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{\lambda_w}\right)}{r \Gamma\left(\frac{r}{\lambda_w}\right)} \Sigma_w \quad (3.4)$$

and

$$K_t = P_{t|t-1} C_t' \left(C_t P_{t|t-1} C_t' + \frac{1}{2} \Sigma_v \right)^{-1} \quad (3.5)$$

The use of MGL system noise term makes the adaptive Kalman filter, referred to as the MGLF here after, more versatile as it can accommodate outliers appearing in a system. However, to implement the MGLF, the shape parameter of the system noise term λ_w in (3.4) should be estimated at each point in time.

Define a pseudo state innovation, $\mathbf{Z}_t = \hat{\mathbf{X}}_{t|t} - \hat{\mathbf{X}}_{t|t-1} = \mathbf{K}_t (\mathbf{Y}_t - \mathbf{C}_t \hat{\mathbf{X}}_{t|t-1})$, which is assumed to be an MGL distributed random vector with time-varying shape parameter, denoted by $\mathbf{Z}_t \sim MGL_r(\mathbf{0}, \Sigma_{\mathbf{Z}}, \lambda_{\mathbf{Z}(t)})$, with the covariance matrix

$$\Sigma_{\mathbf{Z}(t)} = \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{\lambda_{\mathbf{Z}(t)}}\right)}{r\Gamma\left(\frac{r}{\lambda_{\mathbf{Z}(t)}}\right)} \Sigma_{\mathbf{Z}} = \mathbf{K}_t \left(\mathbf{C}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{C}_t' + \frac{1}{2} \Sigma_v \right) \mathbf{K}_t'. \text{ Also, define a partitioned random vector}$$

$\mathbf{Z}_t = (\mathbf{Z}_j, \mathbf{Z}_t^*)'$ where $\mathbf{Z}_t^* = (Z_{1t}, Z_{2t}, \dots, Z_{(j-1)t}, Z_{(j+1)t}, \dots, Z_{rt})$ and the corresponding covariance

parameter matrix $\Sigma_{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \sigma_{jj} & \Sigma_j^{*'} \\ \Sigma_j^* & \Sigma^* \end{bmatrix}$ for $j=1, 2, \dots, r$. Then, the conditional density function of $\mathbf{Z}_j$

given $\mathbf{Z}_t^* = \mathbf{z}_t^*$ is also distributed as a zero mean univariate generalized Laplace random variable with a

scale parameter $\sigma_j^2 = \sigma_{jj} - \Sigma_j^{*'} \Sigma^{*-1} \Sigma_j^*$ and a shape parameter $\lambda_{\mathbf{Z}_j(t)}$, denoted by

$Z_j | \mathbf{Z}_t^* = \mathbf{z}_t^* \sim MGL_1(0, \sigma_j^2, \lambda_{\mathbf{Z}_j(t)})$, where the conditional variance of $Z_j | \mathbf{Z}_t^* = \mathbf{z}_t^*$ is given by

$$\sigma_{Z_j | \mathbf{Z}_t^* = \mathbf{z}_t^*}^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\lambda_{\mathbf{Z}_j(t)}}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\lambda_{\mathbf{Z}_j(t)}}\right)} \sigma_j^2. \text{ The MGLF can be implemented using the following algorithm.}$$

1. Enter the initial estimates $\hat{\mathbf{X}}_{t|t-1}$ and $\mathbf{P}_{t|t-1}$.

2. Collect a new measurement $\mathbf{Y}_t$.

3. Compute the filter gain $\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{C}_t' \left(\mathbf{C}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{C}_t' + \frac{1}{2} \Sigma_v \right)^{-1}$.

4. **State vector update**

Update the state estimate $\hat{\mathbf{X}}_{t|t}$ and state error covariance matrix $\mathbf{P}_{t|t}$ by

$$\hat{\mathbf{X}}_{t|t} = \hat{\mathbf{X}}_{t|t-1} + \mathbf{K}_t (\mathbf{Y}_t - \mathbf{C}_t \hat{\mathbf{X}}_{t|t-1})$$

$$\mathbf{P}_{t|t} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{C}_t) \mathbf{P}_{t|t-1}.$$

5. **Approximating the shape parameter**

Compute a pseudo state innovation, $\mathbf{Z}_t = \hat{\mathbf{X}}_{t|t} - \hat{\mathbf{X}}_{t|t-1}$, by assuming that $\mathbf{Z}_t$ is distributed as an

MGL random vector, denoted by $\mathbf{Z}_t \sim MGL_r(\mathbf{0}, \Sigma_z, \lambda_{\mathbf{Z}(t)})$.

a. **MGLF with single adaptive factor (MGLF-S)**

Obtain a maximum likelihood estimate $\hat{\lambda}_{\mathbf{Z}(t)}$ with the scale parameter matrix Σ_z defined

by $\Sigma_z = 2\delta_t^2 \mathbf{K}_t' \left(\mathbf{C}_t \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{C}_t' + \frac{1}{2} \Sigma_v \right) \mathbf{K}_t$ where $\delta_t = \frac{\hat{\lambda}_{\mathbf{Z}(t-1)}}{2}$ is a time-varying adaptive

factor.

b. **MGLF with multi adaptive factors (MGLF-M)**

Obtain maximum likelihood estimators $\hat{\lambda}_{\mathbf{Z}_j(t)}$ for $j=1,2,\dots,r$ from the conditional

distribution of $\mathbf{Z}_{jt}$ given $\mathbf{Z}_t^* = \mathbf{z}_t^*$ with the scale parameter matrix σ_j^2 defined by

$\sigma_j^2 = 2\delta_j^2 \left(\sigma_{jj} - \Sigma_j^* \Sigma^{*-1} \Sigma_j^* \right)$ where $\delta_j = \frac{\hat{\lambda}_{\mathbf{Z}_j(t-1)}}{2}$ is a time-varying adaptive factor of variable

j at time t .

6. **Time update**

Compute the one step ahead state estimate $\hat{\mathbf{X}}_{t+1|t}$ and state forecast error covariance matrix

$\mathbf{P}_{t+1|t}$ given by

a. For MGLF-S,

$$\hat{\mathbf{X}}_{t+1|t} = \mathbf{A}_t \hat{\mathbf{X}}_{t|t}$$

and

$$\mathbf{P}_{t+1|t} = \mathbf{A}_t \mathbf{P}_{t|t} \mathbf{A}_t' + \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{\hat{\lambda}_{z(t)}}\right)}{r\Gamma\left(\frac{r}{\hat{\lambda}_{z(t)}}\right)} \Sigma_w.$$

b. For MGLF-M,

$$\hat{\mathbf{X}}_{t+1|t} = \mathbf{A}_t \hat{\mathbf{X}}_{t|t}$$

and

$$\mathbf{P}_{t+1|t} = \mathbf{A}_t \mathbf{P}_{t|t} \mathbf{A}_t' + \Lambda^{\frac{1}{2}} \Sigma_w \Lambda^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{where } \Lambda = \text{diag} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{\hat{\lambda}_{z_1(t)}}\right)}{r\Gamma\left(\frac{r}{\hat{\lambda}_{z_1(t)}}\right)}, \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{\hat{\lambda}_{z_2(t)}}\right)}{r\Gamma\left(\frac{r}{\hat{\lambda}_{z_2(t)}}\right)}, \dots, \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{\hat{\lambda}_{z_p(t)}}\right)}{r\Gamma\left(\frac{r}{\hat{\lambda}_{z_p(t)}}\right)} \right).$$

7. Let $t = t + 1$ and go to step 2.

The algorithms of both MGLF-S and MGLF-M are similar. However, as shown in the simulation study their performances are significantly different. Suppose a bivariate linear discrete-time stochastic system with a shift in the first variable is considered. In Figure 2(a), both the MGLFs and the traditional Kalman

filter are presented to illustrate their performances. It is clear that the state estimates of MGLFs can describe the system more accurately than those of the traditional Kalman filter. Furthermore, the state estimates from MGLF-M are much smoother than those of MGLF-S in the second variable as shown in Figure 2(b).

Consider a particular system shift at time 51 in the first variable. For this case, the evolution of the estimated shape parameter values of the first variable, calculated by MGLF-M, are given in Figure 2(d). These values are similar to those of MGLF-S as in Figure 2(c). However, unlike in this case the shape parameter values of MGLF-M in the second variable are rarely affected by a change in the first variable as shown in Figure 2(e). Hence, it can be argued that the use of multi adaptive factors tend to protect against over adjustment providing state estimates which are more reliable for all variables.

4. Effect of adaptive factor

Essentially the adaptive factor ranging between 0 and 1 is used as a weighting factor in the covariance matrix of the state innovations for calculating the shape parameter. Its role is pivotal to the efficiency of the MGLF algorithm and facilitates a spontaneous response to a large system change by assuming a value less than 1 in a short period of time. In the estimation of adaptive state estimates, the adaptive factor and the adaptively estimated covariance matrix of the system noise term function together to significantly improve the ability of the MGLFs.

Figure 3 shows the mean squared state error (MSSE) for each value of the adaptive factor δ_i in a range of 0.1 to 4 stepped up by 0.1 when the systems are subjected shifts of various magnitudes 0, 1, 3, and 5 times the standard deviation. In the absence of a shift, the value of δ_i becomes approximately equal to one when the filter attains a minimum MSSE value. However, when the magnitude of a system

shift increases, δ_i tends to zero when MSSE is minimum. Therefore, the adaptive factor should be varied over time depending upon the magnitude of the pseudo state innovation. This further suggests that the use of a time-varying adaptive factor could considerably improve the performance of the MGLF. These are explored in the next section.

5. Performance Study

Consider the 5-variate linear discrete-time Gaussian system defined by equations (1.1) and (1.2) where the matrices A_i and C_i are set to be the identity matrices, I . A Monte Carlo simulation consisting of 2,000 iterations with MSSE as a preferred criterion for comparison was conducted under following conditions.

1. To compare with the traditional Kalman filter (KALMAN), the robust filter with mixture Gaussian noises (MIXTURE) (see Yatawara (1986)), the robust filter with generalized Gaussian noise (GGAUSSIAN) (see Masreliez (1975) and Niehsen (2002)), the MGLF-S and the MGLF-M are selected.
2. Measurement noise variances $\sigma_v^2 = 1$ and correlation coefficients of the measurement noise terms $\rho_v = 0, 0.4$, and 0.8 ,
3. System noise variances $\sigma_w^2 = 0.01$ and correlation coefficients of system noise terms $\rho_w = 0, 0.4$, and 0.8 ,
4. Magnitude of system shift $\delta_M = 0, 0.5, 1, 2, 3, 4$, and 5 ,

5. A mean shift in the first variable at time 26 of the multivariate time series of length 50 is introduced, by means of $W_{1(26)}$ which is distributed as Gaussian random variable with mean $\mu_1 = \mu_0 + \delta_M \sigma_V$ where $\mu_0 = 0$ and variance σ_W^2 .

6. MSSE using 10 time points after a system shift is calculated by,

$$MSSE = \frac{1}{10} \sum_{t=26}^{35} (\mathbf{X}_t - \hat{\mathbf{X}}_t)' (\mathbf{X}_t - \hat{\mathbf{X}}_t).$$

The structure of both noise covariance matrices is based on $\Sigma = \sigma^2(1-\rho)\mathbf{I} + \sigma^2\rho\mathbf{J}$ where $\mathbf{J}$ is a matrix of one and $\mathbf{I}$ is an identity matrix.

The results in Table 1 reveal that MSSE values of KALMAN tend to increase rapidly and are considerably higher than those of the robust filters when δ_M increases for all cases of correlation of the system and the measurement noise terms. Evidently, the KALMAN is not optimal following an occurrence of a system shift. In comparison, the MSSE values of the robust filters also increase but at a slower rate and with significantly less magnitudes than the KALMAN. This implies that robust filters provide more consistent state estimates than the KALMAN.

When a system is not subjected to a shift ($\delta_M = 0$), KALMAN clearly provides the smallest MSSE values for all combinations of ρ_W and ρ_V showing its optimality in this situation. However, for $\delta_M = 0.5$, MSSE values of MIXTURE become the smallest in comparison to all other filters. When δ_M is moderate or large, MGLF-M shows superiority over other filters in the minimum MSSE sense. This implies that MGLF-M gives more precise state estimates than other filters for all significant δ_M and (ρ_W, ρ_V) combinations.

All filters excluding GGAUSSIAN are affected by ρ_w and ρ_v and the MSSE values of the filters tend to increase proportional to ρ_w . Unfortunately, a large value of ρ_w depreciates the precision of the state estimates. In contrast, MSSE values decrease as ρ_v increases. But, the effects of ρ_w and ρ_v are not overwhelming as shown by the results of the comparisons. It's also noticeable that the MSSE values of GGAUSSIAN are consistently higher than for other robust filters when $\rho_v = 0.4$ and 0.8 but are insensitive to the value of ρ_w .

The rate of convergence in MSSE of all filters excluding GGAUSSIAN are illustrated in Figure 4. For $\delta_M = 0$ and 0.5 , MGLF-S and MGLF-M provide larger MSSE values than KALMAN and MIXTURE. When the magnitude of a shift is significant ($\delta_M \geq 1$), MSSE values of MGLF-M are the smallest values and decrease more rapidly than in other filters after a shift occurs. In contrast, KALMAN yields a gradual decrease in MSSE values and then becomes excessively large when δ_M is large. MSSE values of MIXTURE become closer to those of MGLF-M as δ_M increases. Clearly, the larger δ_M , the slower the convergence rate in MSSE of MGLF-S is, in comparison to MGLF-M.

6. Conclusion

The adaptive Kalman filtering approach proposed in this paper mainly deals with the presence of an outlier in the system noise term. The filters are developed by assuming an MGL system noise distribution to adaptively estimate the system noise covariance matrix requiring only information of the current measurement. In addition, a time-varying adaptive factor is also used to enhance the performance of the MGLFs. This leads to a more accurate recursive estimation procedure to represent the evolution of a system.

Moreover, algorithms to implement the MGLFs are given in both situations of the single and multi adaptive factors. The adaptive factor is mainly used as a weight in the scale parameter matrix of the state innovation to approximate the shape parameter. The single adaptive factor suggested treats all variables equally. This was shown to be a drawback of the method as it tends to adjust all variables whether they are changing or not. To eliminate this drawback, the single adaptive factor was replaced by multi adaptive factors which were determined by considering magnitudes of innovations corresponding to each state variable. This leads to an efficient recursive filter with reduced estimation error of the state and provides more reliable information of each variable.

The simulation results show that when a system shift is moderate or large, the MGLFs are more effective than the traditional Kalman filter and other investigated robust filters for all combinations of ρ_w and ρ_v . Also, MGLF-M provides the most rapid reduction in MSSE. Moreover, MGLFs are not more cumbersome to implement than the algorithm of the traditional Kalman filter. However, it is far superior to track the evolution of a system than the traditional one.

Acknowledgements

This work is supported by Office of the Higher Education Commission and Thailand Research Fund which are greatly acknowledged, through project number MRG5180370. The anonymous reviewers are acknowledged. With their critical comments and helpful revisions, the manuscript has been greatly improved.

References

- Duncan, D. B., Horn, S. D. (1972). Linear dynamic recursive estimation from the viewpoint of regression analysis. *Journal of the American Statistical Association* 67:815-821.
- Ernst, M. D. (1998). A multivariate generalized Laplace distribution. *Computational Statistics* 13:227-232.
- Fang, K.-T., Kotz, S., Ng, K. W. (1990). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. New York: Chapman and Hall.
- Kalman, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering* 82(D):35-45.
- Masreliez, C. J. (1975). Approximate non-Gaussian filtering with linear state and observation relations. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-20,107-110.
- Meinhold, R. J., Singpurwalla, N. D. (1989). Robustification of Kalman filter models. *Journal of the American Statistical Association* 84:479-486.
- Mehra, R. K. (1972). Approaches to adaptive filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control* 17:693-698.
- Niehse, W. (2002). Robust Kalman filtering with generalized Gaussian measurement noise. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* 38:1409-1412.
- Pena, D., Guttman, I. (1988). Bayesian approach to robustifying the Kalman filter. In: Spall, J. C., ed., *Bayesian Analysis of Time Series and Dynamic Models*. New York:Marcel Dekker, pp. 227-253.
- Sorenson, H. W., Alspach, D. L. (1971). Recursive Bayesian estimation using Gaussian sums. *Automatica* 7:465-479.

Yatawara, N. (1986). Detection of outliers and random events in time series, PhD thesis, Department of Statistics and Actuarial Science, University of Waterloo, Canada.

Yatawara, N., Abraham, B., MacGregor, J. F. (1991). A Kalman filter in the presence of outliers. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 20:1803-1820.

Yang, Y., He, H., Xu, G. (2001). A new adaptively robust filtering for kinematic geodetic positioning. *Journal of Geodesy* 75:109-116.

Yang, Y., Cui, X. (2008). Adaptively robust filter with multi adaptive factor. *Survey Review* 40:260-270.

Figures

Figure 1 Density plots of the bivariate MGL distribution with $\mu = \mathbf{0}$ and $\Sigma = \mathbf{I}$ when values of the shape parameter are 1, 2, 5, and ∞

Figure 2 Performances and shape parameters of MGLF-S and MGLF-M: (a) the state estimates of the first variable $(\hat{X}_{1ij})$, (b) the state estimates of the second variable $(\hat{X}_{2ij})$, (c) the estimated shape parameter $\hat{\lambda}_{z(i)}$ of MGLF-S, (d) the estimated shape parameter $\hat{\lambda}_{z_1(i)}$ of MGLF-M for the first variable, (e) the estimated shape parameter $\hat{\lambda}_{z_2(i)}$ of MGLF-M for the second variable.

Figure 3 The magnitude of adaptive factor δ_i corresponding to a minimum mean of squared state error for various magnitudes of system shift.

Figure 4 Rate of convergence in MSSE for various magnitudes of system shift.

Tables

Table 1 MSSE of the filters for various magnitudes of system shifts and combinations of correlation coefficients ρ_w and ρ_v .

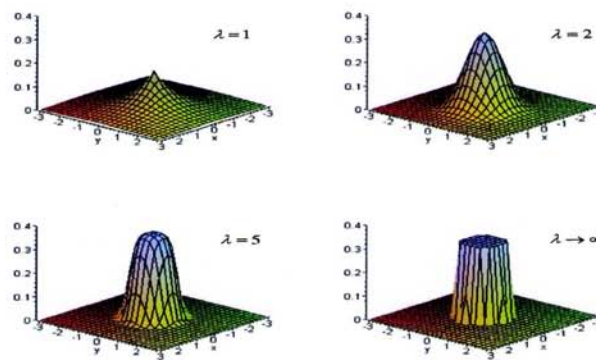


Figure 1 Density plots of the bivariate MGL distribution with $\mu = \mathbf{0}$ and $\Sigma = \mathbf{I}$ when values of the shape parameter are 1, 2, 5, and ∞

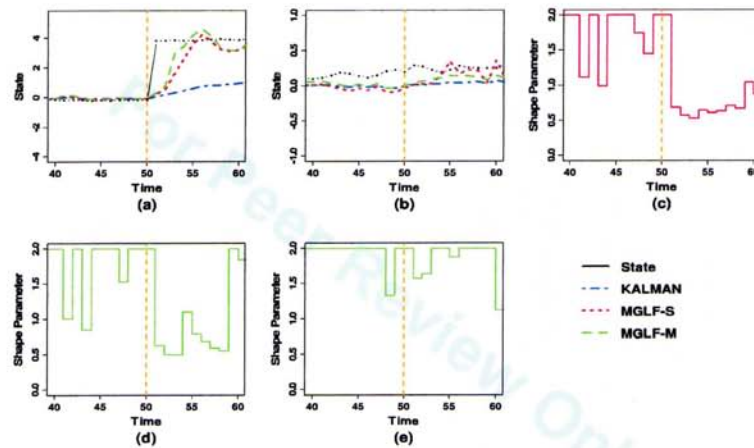


Figure 2 Performances and shape parameters of MGLF-S and MGLF-M: (a) the state estimates of the first variable $(\hat{X}_{1(t)})$, (b) the state estimates of the second variable $(\hat{X}_{2(t)})$, (c) the estimated shape parameter $\hat{\lambda}_{z(t)}$ of MGLF-S, (d) the estimated shape parameter $\hat{\lambda}_{z(t)}$ of MGLF-M for the first variable, (e) the estimated shape parameter $\hat{\lambda}_{z(t)}$ of MGLF-M for the second variable.

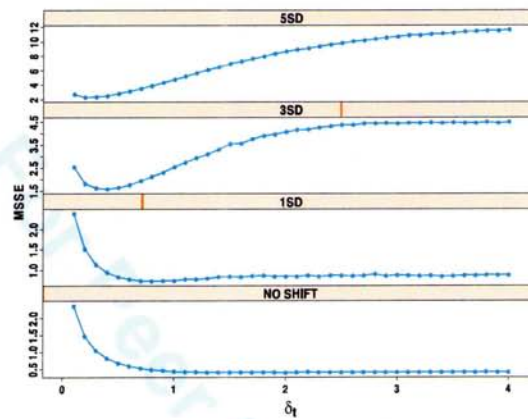


Figure 3 The magnitude of adaptive factor δ_t corresponding to a minimum mean of squared state error for various magnitudes of system shift.

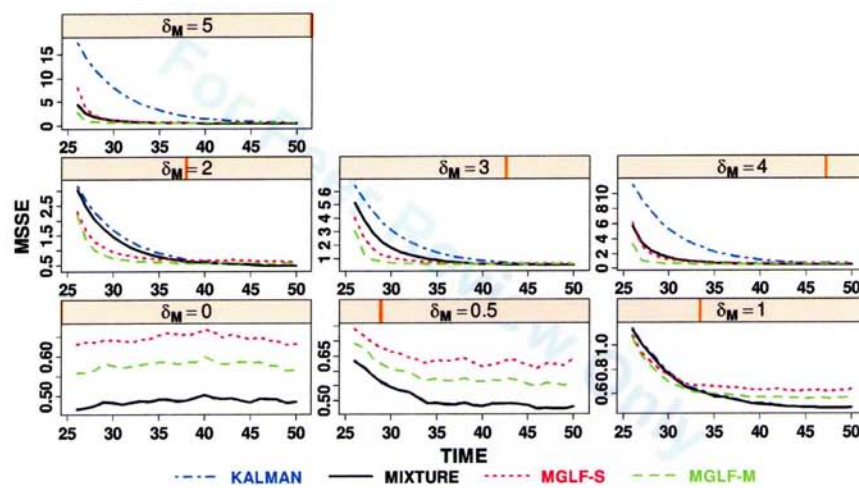


Figure 4 Rate of convergence in MSSE for various magnitudes of system shift.

Table 1

MSSE of the filters for various magnitudes of system shifts and combinations of correlation coefficients

 ρ_w and ρ_v .

ρ_w	ρ_v	δ_M	FILTER				
			KALMAN	MIXTURE	GGAUSSIAN	MGLF-S	MGLF-M
0	0	0	0.47306	0.47351	1.56170	0.62759	0.56687
		0.5	0.54853	0.54632	1.57122	0.66713	0.60918
		1	0.80302	0.79079	1.63258	0.77635	0.74448
		2	1.76552	1.65742	1.65939	1.12863	1.04947
		3	3.35479	2.75679	1.67633	1.56973	1.21407
		4	5.66575	3.33769	1.61848	1.98901	1.24630
		5	8.52175	2.86450	1.64129	2.31587	1.21557
	0.4	0	0.44519	0.44571	16.67773	0.58836	0.52951
		0.5	0.50892	0.50693	16.35445	0.61494	0.56322
		1	0.74167	0.72835	16.38809	0.72911	0.69935
		2	1.59116	1.44404	16.28529	1.03751	0.91943
		3	3.11503	2.19364	15.90009	1.43165	1.01234
		4	5.11525	2.07543	15.74169	1.74691	0.99905
		5	7.72958	1.65953	15.60685	2.03978	0.96043
	0.8	0	0.33066	0.33162	45.71241	0.43776	0.39486
		0.5	0.38418	0.38405	45.66550	0.46858	0.43362
		1	0.55562	0.54411	45.73173	0.56040	0.51760
		2	1.15418	0.86298	45.65861	0.78913	0.56478
		3	2.21408	0.90197	45.99350	1.03920	0.59230
		4	3.65632	1.05598	45.67210	1.27708	0.60305
		5	5.55024	1.36908	45.60713	1.48399	0.64258

Table 1

continued

ρ_w	ρ_v	δ_M	FILTER				
			KALMAN	MIXTURE	GGAUSSIAN	MGLF-S	MGLF-M
0.4	0	0	0.43686	0.43730	1.56489	0.58704	0.53526
		0.5	0.53176	0.52939	1.58837	0.63899	0.59534
		1	0.80035	0.78652	1.60171	0.74960	0.72858
		2	1.89129	1.77652	1.64419	1.18731	1.07480
		3	3.74580	3.05963	1.65336	1.73108	1.29312
	0.4	4	6.25678	3.62481	1.63848	2.25208	1.34365
		5	9.57008	3.07329	1.65172	2.69843	1.33901
		0	0.47704	0.47748	16.59604	0.62938	0.56642
		0.5	0.55529	0.55270	16.51674	0.67367	0.61205
		1	0.79237	0.77821	16.52560	0.77053	0.72434
		2	1.74497	1.56634	16.31735	1.11680	0.94753
		3	3.38400	2.23078	15.94353	1.50707	1.01349
		4	5.60411	2.01532	15.77101	1.83702	0.99266
		5	8.57257	1.56396	15.74194	2.09234	0.95245
	0.8	0	0.43708	0.43813	45.94689	0.57344	0.50412
		0.5	0.49812	0.49774	46.00221	0.61934	0.55478
		1	0.65673	0.64157	45.75734	0.68350	0.60001
		2	1.28498	0.91278	45.64017	0.87591	0.62314
		3	2.36920	0.91058	45.94054	1.06529	0.59882
		4	3.87421	1.05157	45.78245	1.21801	0.59907
		5	5.76528	1.28089	45.67897	1.29987	0.60281

Table 1

Continued

ρ_w	ρ_v	δ_M	FILTER				
			KALMAN	MIXTURE	GGAUSSIAN	MGLF-S	MGLF-M
0.8	0	0	0.33839	0.33870	1.57574	0.47722	0.47394
		0.5	0.46595	0.46404	1.57797	0.54466	0.54371
		1	0.85827	0.84862	1.64532	0.76548	0.75477
		2	2.43277	2.32896	1.67108	1.52171	1.24368
		3	5.01866	4.26382	1.67592	2.50489	1.53625
	0.4	4	8.65884	5.18856	1.64364	3.50083	1.65543
		5	13.47593	4.27368	1.63858	4.49276	1.78279
		0	0.42751	0.42793	16.56262	0.58113	0.54110
		0.5	0.55203	0.54940	16.53059	0.65677	0.62284
		1	0.89735	0.88085	16.51947	0.83868	0.77381
		2	2.31026	2.05126	16.34804	1.43225	1.07659
		3	4.63855	2.81756	15.54790	2.10278	1.17461
		4	7.90570	2.33690	15.53645	2.70485	1.20841
		5	12.18559	1.65301	15.65867	3.22789	1.19132
	0.8	0	0.47304	0.47354	46.08451	0.64046	0.56837
		0.5	0.55684	0.55543	45.43531	0.68207	0.60777
		1	0.80269	0.77461	45.88378	0.80331	0.68161
		2	1.77115	1.05534	45.63807	1.14735	0.76462
		3	3.37481	0.91471	46.11275	1.38656	0.74408
		4	5.65228	1.05940	45.86809	1.60624	0.75353
		5	8.54040	1.25765	45.69582	1.68928	0.74807

เอกสารอ้างอิง

Anderson, B. D. O. & Moore, J. B. (1989), *Optimal Control*, Prentice-Hall, New Jersey.

Aoki, M. (1987), *State Space Modeling of Time Series*, Springer-Verlag, Germany.

Åström, K. J. (1970), *Introduction to Stochastic Control Theory*, Academec Press, New York.

Box, G. E. P. & Narasimhan, S. (2010), 'Rethinking statistics for quality control', *Quality Engineering* **22**, 60–72.

Box, G. E. P. & Paniagua-Quirónes, C. (2007), 'Two charts: not one', *Quality Engineering* **19**, 93–100.

Chen, G., Chen, G. & Hsu, S.-H. (1995), *Linear Stochastic Control System*, CRC Press, New York.

Chuang, A. Z. (1988), Time Series Modeling in the Presence of Outliers, PhD thesis, Department of Statistics and Actuarial Science, University of Waterloo, Canada.

Cox, H. (1964), 'On the estimation of state variables and parameters for noisy dynamic systems', *IEEE Transactions on Automatic Control* **9**, 5–12.

Ernst, M. D. (1998), 'A multivariate generalized Laplace distribution', *Computational Statistics* **13**, 227–232.

Fang, K.-T., Kotz, S. & Ng, K. W. (1990), *Symmetric Multivariate and Related Distributions*, Chapman and Hall, New York.

Girón, F. J. & Rojano, J. C. (1994), 'Bayesian Kalman filtering with elliptically contoured errors', *Biometrika* **80**(2), 390–395.

- Harrison, P. J. & Stevens, C. F. (1971), 'A Bayesian approach to short-term forecasting', *Operational Research Quarterly* 22(4), 341–362.
- Hawkins, D. M. & Maboudou-Tchao, E. M. (2008), 'Multivariate exponentially weighted moving covariance matrix', *Technometrics* 50(2), 155–166.
- Haykin, S. (2001), Kalman filters, in S. Haykin, ed., 'Kalman Filtering and Neural Networks', John Wiley & Sons, New York, pp. 1–21.
- Kalata, P. & Priemer, R. (1979), 'Linear prediction, filtering, and smoothing: an information-theoretic approach', *Information Sciences* 17, 1–14.
- Kalman, R. E. (1960), 'A new approach to linear filtering and prediction problems', *Journal of Basic Engineering* 82(D), 35–45.
- Khawsithiwong, P., N.Yatawara & Pongsapukdee, V. (2011), 'Adaptive Kalman filtering with multivariate generalized Laplace system noise', *submitted to Communications in Statistics, Simulation and Computation*.
- Khawsithiwong, P. & Yatawara, N. (2007), 'Monitoring process variability with individual measurements following elliptically contoured distributions', *Communications in Statistics, Simulation and Computation* 36, 699–718.
- Kirlin, R. L. & Moghaddamjoo, A. (1986), 'Robust adaptive Kalman filtering for systems with unknown step inputs and non-Gaussian measurement errors', *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing ASSP-34*(2), 252–263.
- Liu, J. & Dey, D. K. (2004), Skew-elliptical distributions, in M. G. Genton, ed., 'Skew-Elliptical Distributions and Their Applications', Chapman & Hall/CRC, New York, pp. 43–64.
- Lowry, C. A., Woodall, W. H., Champ, C. W. & Rigdon, S. E. (1992), 'A multivariate exponentially weighted moving average control chart', *Technometrics* 34(1), 46–53.
- Luceño, A. (2003), Dead-band adjustment schemes for on-line feedback quality control, in R. Khattee & C. R. Rao, eds, 'Handbook of Statistics', Vol. 22, Elsevier Science B. V., Amsterdam, pp. 695–727.

- Luceño, A. & González, F. J. (1999), 'Effects of dynamics on the properties of feedback adjustment schemes with dead band', *Technometrics* **41**(2), 142–152.
- Masreliez, C. J. (1975), 'Approximate non-Gaussian filtering with linear state and observation relations', *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-20**, 107–110.
- Masreliez, C. J. & Martin, R. D. (1977), 'Robust Bayesian estimation for the linear model and robustifying the Kalman filter', *IEEE Transactions on Automatic Control* **AC-22**(3), 361–371.
- Meditch, J. S. (1969), *Stochastic Optimal Linear Estimation and Control*, McGraw-Hill, New York.
- Mehra, K. R. (1972), 'Approaches to adaptive filtering', *IEEE Transactions on Automatic Control* **17**, 693–698.
- Meinhold, R. J. & Singpurwalla, N. D. (1983), 'Understanding the Kalman filter', *American Statistician* **37**(2), 123–127.
- Meinhold, R. J. & Singpurwalla, N. D. (1989), 'Robustification of Kalman filter models', *Journal of the American Statistical Association* **84**(406), 479–486.
- Montgomery, D. C. (2005), *Introduction to Statistical Quality Control*, 5 edn, John Wiley & Sons, New York.
- Naveau, P., Genton, M. G. & Ammann, C. (2004), Time series analysis with a skewed Kalman filter, in M. G. Genton, ed., 'Skew-Elliptical Distributions and Their Applications', Chapman & Hall/CRC, New York, pp. 259–278.
- Niehse, W. (2002), 'Robust Kalman filtering with generalized Gaussian measurement noise', *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems* **38**(4), 1409–1412.
- Peña, D. & Guttman, I. (1988), Bayesian approach to robustifying the Kalman filter, in J. C. Spall, ed., 'Bayesian Analysis of Time Series and Dynamic Models', Marcel Dekker, New York, pp. 227–253.
- Rustagi, J. S. (1994), *Optimization Techniques in Statistics*, Academic Press, Boston.

- Schick, I. C. & Mitter, S. K. (1994), 'Robust recursive estimation in the presence of heavy-tailed observation noise', *Annals of Statistics* **22**(2), 1045–1080.
- Sorenson, H. W. & Alspach, D. L. (1971), 'Recursive Bayesian estimation using Gaussian sums', *Automatica* **7**, 465–479.
- Sorenson, H. W. & Stubberud, A. R. (1968), 'Non-linear filtering by approximation of the *a posteriori* density', *International Journal of Control* **8**(1), 33–51.
- Stacy, E. W. (1962), 'A generalization of the gamma distribution', *Annals of Mathematical Statistics* **33**, 1187–1192.
- Sweet, A. L. (1986), 'Control chart using coupled exponentially weighted moving averages', *IIE Transactions* **18**, 26–33.
- Tomita, Y., Omatu, S. & Soeda, T. (1976), 'An application of the information theory to filtering problems', *Information sciences* **11**, 13–27.
- Weidemann, H. L. (1969), Entropy analysis of feedback control systems, in C. T. Leondes, ed., 'Advances in Control Systems', Vol. 7, Academic Press, New York, pp. 225–255.
- Yang, Y. & Cui, X. (2008), 'Adaptively robust filter with multi adaptive factors', *Survey Review* **40**, 260–270.
- Yang, Y. & Gao, W. (2006), 'An optimal adaptive Kalman filter', *Journal of Geodesy* **80**, 177–183.
- Yatawara, N. (1986), Detection of Outliers and Random Events in Time Series, PhD thesis, Department of Statistics and Actuarial Science, University of Waterloo, Canada.
- Yatawara, N., Abraham, B. & MacGregor, J. F. (1991), 'A Kalman filter in the presence of outliers', *Communications in Statistics, Theory and Methods* **20**, 1803–1820.