



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ

สมบัติจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข (C) ในปริภูมิบานาค

Fixed point property for mappings satisfying
condition (C) in Banach spaces

โดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัญชลีย์ แก้วเจริญ และคณะ

14 มิถุนายน 2555

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ : สมบัติจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันซึ่งสอดคล้อง
เงื่อนไข (C) ในปริภูมิบานาค

Fixed point property for mappings satisfying
condition (C) in Banach spaces

คณะผู้วิจัย

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัญชลีย์ แก้วเจริญ
(หัวหน้าโครงการวิจัย)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยนเรศวร

ศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ ธรรมพงษา
(นักวิจัยที่ปรึกษา)

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

สนับสนุนโดยสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกอ. และ สกว.ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

ABSTRACT

Project Code: MRG5380208

Project Title: Fixed point property for mappings satisfying condition (C) in Banach spaces

Investigator: Assistant Professor Dr. Anchalee Kaewcharoen
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Naresuan University

Mentor: Professor Dr. Sompong Dhompongsa
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Chiang Mai University

E-mail Address: anchaleeka@nu.ac.th (Assist. Prof. Dr. Anchalee Kaewcharoen)
sompong@chiangmai.ac.th (Professor Dr. Sompong Dhompongsa)

Project Period: June 15th, 2010 – June 14th, 2012

We prove the existence of the unique common fixed point theorems of a pair of weakly compatible mappings satisfying Φ -maps in G-metric spaces.

We also obtain the unique common fixed point theorems for a pair of weakly compatible single-valued mappings satisfying some contractive conditions in G-metric spaces. Furthermore, we prove the existence of coincidence points for single-valued and multi-valued mappings satisfying a certain contractive condition. These results generalize the well-known results in the literature.

Keywords: Weakly compatible mappings, Coincidence points, Contractive conditions,
Common fixed points, Multi-valued mappings

บทคัดย่อ

รหัสโครงการ : MRG5380208
ชื่อโครงการ : สมบัติจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข (C) ในปริภูมิบานาค
ชื่อนักวิจัย : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัญชลีย์ แก้วเจริญ
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร
นักวิจัยที่ปรึกษา: ศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ ธรรมพงษา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
อีเมล: anchaleeka@nu.ac.th (ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อัญชลีย์ แก้วเจริญ)
sompong@chiangmai.ac.th (ศาสตราจารย์ ดร.สมพงษ์ ธรรมพงษา)
ระยะเวลาโครงการ : 15 มิถุนายน 2553 – 14 มิถุนายน 2555

ผู้วิจัยได้พิสูจน์ทฤษฎีบทจุดตรึงร่วมเพียงค่าเดียวของคู่ของฟังก์ชันเข้ากันได้แบบอ่อน โดยที่ฟังก์ชันดังกล่าวสอดคล้องกับฟังก์ชัน Φ ในปริภูมิ G-เมตริก

ผู้วิจัยได้พิสูจน์ทฤษฎีบทจุดตรึงร่วมเพียงค่าเดียวของคู่ของฟังก์ชันค่าเดียวซึ่งเข้ากันได้แบบอ่อน โดยที่ฟังก์ชันดังกล่าวสอดคล้องกับเงื่อนไขคอนแทรกทีฟในปริภูมิ G-เมตริก นอกจากนี้ผู้วิจัยยังได้พิสูจน์การมีจุดทับกันสนิทของฟังก์ชันค่าเดียวและฟังก์ชันหลายค่าซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขคอนแทรกทีฟในปริภูมิ G-เมตริก ซึ่งผลงานวิจัยนี้ได้ขยายองค์ความรู้ที่มีอยู่เดิม

คำหลัก : ฟังก์ชันเข้ากันได้แบบอ่อน, จุดทับกันสนิท, เงื่อนไขคอนแทรกทีฟ, จุดตรึงร่วม, ฟังก์ชันหลายค่า

บทนำ

J. Brower and S. Banach ได้ศึกษาคุณสมบัติจุดตรึง (fixed point property) และได้มีการค้นพบทฤษฎีที่มีชื่อเสียงและยังใช้อยู่ในปัจจุบัน เช่น ทฤษฎีบทจุดตรึงของ Brower และ Banach contraction principle การศึกษาคณิตศาสตร์ทางด้านการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน (Functional Analysis) นั้น ประเด็นเรื่องของจุดตรึง (fixed points) มักจะถูกหยิบยกขึ้นมาศึกษาอยู่เสมอคือการหาเงื่อนไขที่เพียงพอให้กับปริภูมิต่างๆ หรือฟังก์ชันต่างๆ เพื่อที่จะทำฟังก์ชันนั้นมีจุดตรึง (fixed points) ตัวอย่างของปริภูมิต่างๆ ที่มักถูกศึกษาในเรื่องของการมีจุดตรึง คือ ปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert Spaces) และปริภูมิบานาคคอนเวกซ์แบบเอกรูป (uniformly convex Banach spaces) เป็นต้น และฟังก์ชันที่ถูกนำมาศึกษาอยู่เสมอ ได้แก่ ฟังก์ชันแบบไม่ขยาย (nonexpansive mappings)

ทฤษฎีจุดตรึงนับเป็นแขนงที่สำคัญแขนงหนึ่งในสาขาของการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชัน ในปัจจุบันนักคณิตศาสตร์ได้ศึกษาและวิจัยในแขนงดังกล่าวกันอย่างต่อเนื่อง ในการคิดค้นทฤษฎีเพื่อหาองค์ความรู้ใหม่ๆ นั้นนับว่ามีประโยชน์เป็นอย่างมากต่อทางวิชาการ และการพัฒนาประเทศ เป็นที่ยอมรับว่าทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆ ที่เกิดจากการวิจัยนั้นนอกจากจะมีประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาความรู้เชิงวิชาการในสาขาและแขนงต่างๆ นั้นแล้ว บางครั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ในสาขาอื่นๆ และเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาทางวิทยาศาสตร์พื้นฐาน (Basic science) อันถือเป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศชาติต่อไป

นอกจากการศึกษามีจุดตรึงของฟังก์ชันค่าเดียวแล้ว ยังได้มีการขยายการศึกษาไปยังจุดตรึงร่วมของคู่ของฟังก์ชันค่าเดียว และขยายไปยังจุดตรึงของฟังก์ชันหลายค่า (multi-valued mappings) ในปริภูมิต่างๆ จากการศึกษาทางวิจัยดังกล่าวจึงทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่ขยายการศึกษามีจุดตรึงของฟังก์ชันค่าเดียวและการมีจุดตรึงของฟังก์ชันหลายค่าไปยังการมีจุดตรึงร่วมของคู่ของฟังก์ชันค่าเดียว และการมีจุดทับกันสนิทของฟังก์ชันค่าเดียวและฟังก์ชันหลายค่าในปริภูมิ G-เมตริก

จุดประสงค์ของการวิจัย

1. คิดค้นทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับ การมีจุดตรึง จุดตรึงร่วม และจุดทับกันสนิท
2. หาเงื่อนไขที่เพียงพอต่อการมีจุดตรึงร่วมสำหรับคู่ของฟังก์ชันค่าเดียวซึ่งเป็นฟังก์ชันเข้ากันได้แบบอ่อน
3. สร้างทฤษฎีใหม่เกี่ยวกับการมีจุดตรึงร่วมสำหรับคู่ของฟังก์ชันค่าเดียวซึ่งเป็นฟังก์ชันเข้ากันได้แบบอ่อน

4. เพื่อขยายองค์ความรู้ของการมีจุดตรึงร่วมสำหรับคู่ของฟังก์ชันค่าเดียวซึ่งเป็นฟังก์ชันเข้ากันได้แบบอ่อน
5. เพื่อศึกษาและหาผลสรุปของการมีจุดตรึงร่วมสำหรับคู่ของฟังก์ชันค่าเดียวซึ่งเป็นฟังก์ชันเข้ากันได้แบบอ่อน
6. หาเงื่อนไขที่เพียงพอต่อการมีจุดทับสนิทของฟังก์ชันค่าเดียวและฟังก์ชันหลายค่า
7. สร้างทฤษฎีใหม่เกี่ยวกับการมีจุดทับสนิทของฟังก์ชันค่าเดียวและฟังก์ชันหลายค่า
8. เพื่อขยายองค์ความรู้ของการมีจุดทับสนิทของฟังก์ชันค่าเดียวและฟังก์ชันหลายค่า
9. เพื่อศึกษาและหาผลสรุปของการมีจุดทับสนิทของฟังก์ชันค่าเดียวและฟังก์ชันหลายค่า

**Out Put จากโครงการวิจัยที่ได้รับทุนจาก
สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษาและสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย**

1. ผลงานวิจัยตีพิมพ์ในวารสารวิชาการนานาชาติ

- 1.1 Anchalee Kaewcharoen, Common fixed point theorems for contractive mappings satisfying Φ -maps in G-metric spaces, Banach Journal of Mathematical Analysis 6 no.1 (2012) 101–111.
- 1.2 Anchalee Kaewcharoen Coincidence points and fixed point theorems for mappings in G-metric spaces, Universal Journal of Mathematical Sciences, 2 no.1 (2012) 103–118.

2. การนำผลงานวิจัยไปใช้ประโยชน์

มีการนำไปใช้ประโยชน์ทั้งเชิงวิชาการและเชิงสาธารณะโดยทำให้มีการพัฒนาการเรียนการสอน รวมทั้งมีการสร้างเครือข่ายความร่วมมือในการทำวิจัย

3. การเสนอผลงานในที่ประชุมวิชาการ

3.1 วันที่ 2–5 สิงหาคม 2555

หัวข้อ: Common fixed points for single-valued and multi-valued mappings in G-metric spaces

ชื่อการประชุม : The seventh international conference on “Nonlinear Analysis and Convex Analysis(NACA 2011)” Pukyong National University, Korea, August 2–5, 2011

3.2 วันที่ 25–29 กรกฎาคม 2555

หัวข้อ: Coincidence points and fixed point theorems for mappings in G-metric spaces

ชื่อการประชุม : The International Conference 2012 on “Mathematical Inequalities and Nonlinear Functional Analysis with Applications” ,Gyeongsang National University, Korea, July 25–29, 2012

ภาคผนวก 1

Common fixed point theorems for contractive
mappings satisfying Φ -maps
in G-metric spaces

Anchalee Kaewcharoen

Banach Journal of Mathematical Analysis
6 (2012), no.1, 101–111

Banach Journal of Mathematical Analysis




An International Open Access Electronic & ISI Journal
ISSN 1735-8787

BJMA has been accorded an impact factor of 0.390 for 2010 by JCR

Mathematical Citation Quotient of Amer Math. Soc. (MCQ-2010): 0.26

In 2010, BJMA was added to the Prestigious list "[Reference List of Journals](#)" by MathSciNet.

Abstracted/Indexed/Reviewed by

Zentralblatt für Mathematik 	MathSciNet (Mathematical Reviews) 	SCOPUS 
ISI Alerting Service 	Science Citation Index-Expanded (SCIE) including the Web of Science 	Current Contents/Physical, Chemical & Earth Sciences 



COMMON FIXED POINT THEOREMS FOR CONTRACTIVE MAPPINGS SATISFYING Φ -MAPS IN G -METRIC SPACES

ANCHALEE KAEWCHAROEN

Communicated by M. A. Japón Pineda

ABSTRACT. We prove the existence of the unique common fixed point theorems of a pair of weakly compatible mappings satisfying Φ -maps in G -metric spaces. These results generalize the well-known results in the literature.

1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

The metric fixed point theory is very important and useful in Mathematics. It can be applied in various areas, for instant, variational inequalities, optimization, and approximation theory. There were many authors introduced the generalizations of metric spaces such as Gähler [8, 9] (called 2-metric spaces) and Dhage [6, 7] (called D -metric spaces). In 2003, Mustafa and Sims [17] found that most of the claims concerning the fundamental topological properties of D -metric spaces are incorrect. Consequently, they [18] introduced a generalization of metric spaces. Namely, G -metric spaces as the following:

Definition 1.1. Let X be a nonempty set and $G : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ be a function satisfying :

- (G1) $G(x, y, z) = 0$ if $x = y = z$,
- (G2) $0 < G(x, x, y)$, for all $x, y \in X$ with $x \neq y$,
- (G3) $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$, for all $x, y, z \in X$ with $z \neq y$,
- (G4) $G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = \cdots$ (symmetry in all three variables), and

Date: Received: 3 June 2011; Revised: 4 October 2011; Accepted: 17 October 2011.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 47H10; Secondary 47H09.

Key words and phrases. Common fixed points, G -metric spaces, Φ -maps, weakly compatible mappings.

(G5) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$, for all $x, y, z, a \in X$ (rectangle inequality).

Then the function G is called a generalized metric or more specifically a G -metric on X , and the pair (X, G) is called a G -metric space.

Since then the fixed point theory in G -metric spaces has been studied and developed by many authors (see [1, 2, 3, 4, 15, 16, 18, 19, 21, 23, 24]). The common fixed point theorems for mappings satisfying certain contractive conditions in metric spaces have been continually studied for decade (see [5, 10, 11, 12, 13, 20] and references contained therein). In 2009, Abbas and Rhoades [3], proved the unique common fixed point theorems for a pair of weakly compatible mappings in G -metric spaces. Recently, Shatanawi [22], proved the unique fixed point theorems for contractive mappings satisfying Φ -maps in G -metric spaces. In this paper, we prove the existence of the unique common fixed point theorems of a pair of weakly compatible mappings satisfying Φ -maps in G -metric spaces. These results generalize the well-known results proved by Abbas and Rhoades [3] and Shatanawi [22].

We now recall some of the basic concepts and results in G -metric spaces that have been established in [18].

Definition 1.2. Let (X, G) be a G -metric space. We say that a sequence $\{x_n\}$ in X is:

- (i) a G -convergent sequence if, for any $\varepsilon > 0$, there exist $x \in X$ and $N \in \mathbb{N}$ such that $G(x, x_n, x_m) < \varepsilon$, for all $n, m \geq N$,
- (ii) a G -Cauchy sequence if, for any $\varepsilon > 0$, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$, for all $n, m, l \geq N$.

Theorem 1.3. Let (X, G) be a G -metric space and $\{x_n\}$ be a sequence in X . Then the following are equivalent:

- (i) $\{x_n\}$ is G -convergent to x ,
- (ii) $G(x_n, x_n, x) \rightarrow 0$, as $n \rightarrow \infty$,
- (iii) $G(x_n, x, x) \rightarrow 0$, as $n \rightarrow \infty$,
- (iv) $G(x_m, x_n, x) \rightarrow 0$, as $m, n \rightarrow \infty$.

Theorem 1.4. Let (X, G) be a G -metric space and $\{x_n\}$ be a sequence in X . Then the following are equivalent:

- (i) $\{x_n\}$ is G -Cauchy.
- (ii) For every $\varepsilon > 0$, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that $G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$, for all $n, m \geq N$.

A G -metric space X is said to be complete if every G -Cauchy sequence in X is a G -convergent sequence in X .

Proposition 1.5. Let (X, G) be a G -metric space. Then the function $G(x, y, z)$ is jointly continuous in all three of its variables.

Definition 1.6. Let f and g be single-valued self mappings on a set X . If $w = fx = gx$ for some $x \in X$, then x is called a coincidence point of f and g , and w is called a point of coincidence of f and g .

Abbas and Rhoades [3] proved the existence of the unique common fixed points of a pair of weakly compatible mappings in G -metric spaces by using the following proposition as a main tool.

Proposition 1.7. ([3, Proposition 1.5]) *Let f and g be weakly compatible self mappings on a set X . If f and g have a unique point of coincidence $w = fx = gx$, then w is the unique common fixed point of f and g .*

2. COMMON FIXED POINT THEOREMS

In 1977, Matkowski [14] introduced the Φ -map as the following: let Φ be the set of all function ϕ such that $\phi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ is a nondecreasing function satisfying $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = 0$ for all $t \in (0, +\infty)$. If $\phi \in \Phi$, then ϕ is called a Φ -map. Furthermore, if ϕ is a Φ -map, then

- (i) $\phi(t) < t$ for all $t \in (0, +\infty)$,
- (ii) $\phi(0) = 0$.

From now on, unless otherwise stated, ϕ is meant the Φ -map.

Theorem 2.1. *Let (X, G) be a G -metric space. Suppose that the mappings $f, g : X \rightarrow X$ satisfy either*

$$G(fx, fy, fz) \leq \phi(\max\{G(gx, fx, fx), G(gy, fy, fy), G(gz, fz, fz)\}), \quad (2.1)$$

or

$$G(fx, fy, fz) \leq \phi(\max\{G(gx, gx, fx), G(gy, gy, fy), G(gz, gz, fz)\}) \quad (2.2)$$

for all $x, y, z \in X$. If the range of g contains the range of f and $g(X)$ is a complete subspace of X , then f and g have a unique point of coincidence in X . Moreover if f and g are weakly compatible, then f and g have a unique common fixed point.

Proof. Assume that f and g satisfy the condition (2.1). Let x_0 be an arbitrary point in X . Since the range of g contains the range of f , there is $x_1 \in X$ such that $gx_1 = fx_0$. By continuing the process as before, we can construct a sequence $\{gx_n\}$ such that $gx_{n+1} = fx_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. If there is $n \in \mathbb{N}$ such that $gx_n = gx_{n+1}$, then f and g have a point of coincidence. Thus we can suppose that $gx_n \neq gx_{n+1}$ for all $n \in \mathbb{N}$. Therefore, for each $n \in \mathbb{N}$, we obtain that

$$\begin{aligned} G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) &= G(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) \\ &\leq \phi(\max\{G(gx_{n-1}, fx_{n-1}, fx_{n-1}), G(gx_n, fx_n, fx_n), \\ &\quad G(gx_n, fx_n, fx_n)\}) \\ &\leq \phi(\max\{G(gx_{n-1}, fx_{n-1}, fx_{n-1}), G(gx_n, fx_n, fx_n)\}) \\ &\leq \phi(\max\{G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1})\}). \end{aligned}$$

If $\max\{G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1})\} = G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1})$, then

$$G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) \leq \phi(G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1})) < G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}),$$

which leads to a contradiction. This implies that

$$G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) \leq \phi(G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n)).$$

That is, for each $n \in \mathbb{N}$, we have

$$\begin{aligned} G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) &= G(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) \\ &\leq \phi(G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n)) \\ &\leq \phi^2(G(gx_{n-2}, gx_{n-1}, gx_{n-1})) \\ &\vdots \\ &\leq \phi^n(G(gx_0, gx_1, gx_1)). \end{aligned}$$

We will show that $\{gx_n\}$ is G -Cauchy. Let $\varepsilon > 0$.

Since $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(G(gx_0, gx_1, gx_1)) = 0$ and $\phi(\varepsilon) < \varepsilon$, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that

$$\phi^n(G(gx_0, gx_1, gx_1)) < \varepsilon - \phi(\varepsilon) \quad \text{for all } n \geq N.$$

This implies that

$$G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) < \varepsilon - \phi(\varepsilon) \quad \text{for all } n \geq N. \quad (2.3)$$

Let $m, n \in \mathbb{N}$ with $m > n$. We will prove that

$$G(gx_n, gx_m, gx_m) < \varepsilon \quad \text{for all } m \geq n \geq N \quad (2.4)$$

by induction on m . Since $\varepsilon - \phi(\varepsilon) < \varepsilon$ and by (2.3), we obtain that (2.4) holds for $m = n + 1$. Suppose that (2.4) holds for $m = k$. Therefore, for $m = k + 1$, we have

$$\begin{aligned} G(gx_n, gx_{k+1}, gx_{k+1}) &\leq G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) + G(gx_{n+1}, gx_{k+1}, gx_{k+1}) \\ &< \varepsilon - \phi(\varepsilon) + G(fx_n, fx_k, fx_k) \\ &\leq \varepsilon - \phi(\varepsilon) \\ &\quad + \phi(\max\{G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}), G(gx_k, gx_{k+1}, gx_{k+1})\}) \\ &\leq \varepsilon - \phi(\varepsilon) + \phi(\varepsilon) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Thus (2.4) holds for all $m \geq n \geq N$. It follows that $\{gx_n\}$ is G -Cauchy. By the completeness of $g(X)$, we obtain that $\{gx_n\}$ is G -convergent to some $q \in g(X)$. So there exists $p \in X$ such that $gp = q$. We will show that $gp = fp$. Suppose that $gp \neq fp$. By (2.1), we have

$$\begin{aligned} G(gx_n, fp, fp) &= G(fx_{n-1}, fp, fp) \\ &\leq \phi(\max\{G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), G(gp, fp, fp)\}). \end{aligned}$$

Case 1.

$$\max\{G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), G(gp, fp, fp)\} = G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n),$$

we obtain that

$$G(gx_n, fp, fp) \leq \phi(G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n)) < G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n).$$

By taking $n \rightarrow \infty$, we have $G(gp, fp, fp) = 0$ and so $gp = fp$.

Case 2.

$$\max\{G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), G(gp, fp, fp)\} = G(gp, fp, fp),$$

we obtain that

$$G(gx_n, fp, fp) \leq \phi(G(gp, fp, fp)).$$

By taking $n \rightarrow \infty$, we have $G(gp, fp, fp) \leq \phi(G(gp, fp, fp)) < G(gp, fp, fp)$, which leads to a contradiction. Therefore $gp = fp$. We now show that f and g have a unique point of coincidence. Suppose that $fq = gq$ for some $q \in X$. By applying (2.1), it follows that

$$\begin{aligned} G(gp, gp, gq) &= G(fp, fp, fq) \\ &\leq \phi(\max\{G(gp, fp, fp), G(gp, fp, fp), G(gq, fq, fq)\}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Therefore $gp = gq$. This implies that f and g have a unique point of coincidence. By Proposition 1.7, we can conclude that f and g have a unique common fixed point. The proof using (2.2) is similar. \square

Corollary 2.2. ([3, Theorem 2.5]) *Let (X, G) be a G -metric space. Suppose that the mappings $f, g : X \rightarrow X$ satisfy either*

$$G(fx, fy, fz) \leq k \max\{G(gx, fx, fx), G(gy, fy, fy), G(gz, fz, fz)\},$$

or

$$G(fx, fy, fz) \leq k \max\{G(gx, gx, fx), G(gy, gy, fy), G(gz, gz, fz)\}$$

for all $x, y, z \in X$ where $0 \leq k < 1$. If the range of g contains the range of f and $g(X)$ is a complete subspace of X , then f and g have a unique point of coincidence in X . Moreover if f and g are weakly compatible, then f and g have a unique common fixed point.

Proof. Define $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ by $\phi(t) = kt$. Therefore ϕ is a nondecreasing function and $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(t) = 0$ for all $t \in (0, +\infty)$. It follows that the contractive conditions in Theorem 2.1 are now satisfied. This completes the proof. \square

Example 2.3. Let $X = [0, 2]$, $G(x, y, z) = \max\{|x - y|, |y - z|, |x - z|\}$ and $\phi(t) = \frac{t}{2}$. Therefore ϕ is a Φ -map. Define $f, g : X \rightarrow X$ by

$$fx = 1 \text{ and } gx = 2 - x.$$

We obtain that f and g satisfy (2.1) and (2.2) in Theorem 2.1. Indeed, we have

$$\begin{aligned} G(fx, fy, fz) &= 0, \\ \phi(\max\{G(gx, fx, fx), G(gy, fy, fy), G(gz, fz, fz)\}) \\ &= \frac{1}{2}(\max\{|1 - x|, |1 - y|, |1 - z|\}), \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \phi(\max\{G(gx, gx, fx), G(gy, gy, fy), G(gz, gz, fz)\}) \\ = \frac{1}{2}(\max\{|1 - x|, |1 - y|, |1 - z|\}). \end{aligned}$$

It is obvious that the range of g contains the range of f and $g(X)$ is a complete subspace of (X, G) . Furthermore, f and g are weakly compatible. Thus all assumptions in Theorem 2.1 are satisfied. This implies that f and g have a unique common fixed point which is $x = 1$.

Theorem 2.4. *Let (X, G) be a G -metric space. Suppose that the mappings $f, g : X \rightarrow X$ satisfy*

$$G(fx, fy, fz) \leq \phi(G(gx, gy, gz)), \quad (2.5)$$

for all $x, y, z \in X$. If the range of g contains the range of f and $g(X)$ is a complete subspace of X , then f and g have a unique point of coincidence in X . Moreover if f and g are weakly compatible, then f and g have a unique common fixed point.

Proof. Let x_0 be an arbitrary point in X . Since the range of g contains the range of f , there is $x_1 \in X$ such that $gx_1 = fx_0$. By continuing the process as before, we can construct a sequence $\{gx_n\}$ such that $gx_{n+1} = fx_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. If there is $n \in \mathbb{N}$ such that $gx_n = gx_{n+1}$, then f and g have a point of coincidence. Thus we can suppose that $gx_n \neq gx_{n+1}$ for all $n \in \mathbb{N}$. Therefore, for each $n \in \mathbb{N}$, we obtain that

$$\begin{aligned} G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) &= G(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) \\ &\leq \phi(G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n)) \\ &\leq \phi^2(G(gx_{n-2}, gx_{n-1}, gx_{n-1})) \\ &\vdots \\ &\leq \phi^n(G(gx_0, gx_1, gx_1)). \end{aligned}$$

We will show that $\{gx_n\}$ is G -Cauchy. Let $\varepsilon > 0$.

Since $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(G(gx_0, gx_1, gx_1)) = 0$ and $\phi(\varepsilon) < \varepsilon$, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that

$$\phi^n(G(gx_0, gx_1, gx_1)) < \varepsilon - \phi(\varepsilon) \quad \text{for all } n \geq N.$$

This implies that

$$G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) < \varepsilon - \phi(\varepsilon) \quad \text{for all } n \geq N. \quad (2.6)$$

Let $m, n \in \mathbb{N}$ with $m > n$. We will prove that

$$G(gx_n, gx_m, gx_m) < \varepsilon \quad \text{for all } m \geq n \geq N \quad (2.7)$$

by induction on m . Since $\varepsilon - \phi(\varepsilon) < \varepsilon$ and by (2.6), we obtain that (2.7) holds for $m = n + 1$. Suppose that (2.7) holds for $m = k$. Therefore, for $m = k + 1$, we have

$$\begin{aligned} G(gx_n, gx_{k+1}, gx_{k+1}) &\leq G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) + G(gx_{n+1}, gx_{k+1}, gx_{k+1}) \\ &< \varepsilon - \phi(\varepsilon) + G(fx_n, fx_k, fx_k) \\ &\leq \varepsilon - \phi(\varepsilon) + \phi(G(gx_n, gx_k, gx_k)) \\ &\leq \varepsilon - \phi(\varepsilon) + \phi(\varepsilon) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Thus (2.7) holds for all $m \geq n \geq N$. It follows that $\{gx_n\}$ is G -Cauchy. By the completeness of $g(X)$, we obtain that $\{gx_n\}$ is G -convergent to some $q \in g(X)$. So there exists $p \in X$ such that $gp = q$. We will show that $gp = fp$. By (2.5), we have

$$\begin{aligned} G(gp, gp, fp) &\leq G(gp, gp, gx_{n+1}) + G(gx_{n+1}, gx_{n+1}, fp) \\ &\leq G(gp, gp, gx_{n+1}) + \phi(G(gx_n, gx_n, gp)) \\ &< G(gp, gp, gx_{n+1}) + G(gx_n, gx_n, gp). \end{aligned}$$

By taking $n \rightarrow \infty$, we have $G(gp, gp, fp) = 0$ and so $gp = fp$. We now show that f and g have a unique point of coincidence. Suppose that $fq = gq$ for some $q \in X$. Assume that $gp \neq gq$. By applying (2.5), it follows that

$$\begin{aligned} G(gp, gp, gq) &= G(fp, fp, fq) \\ &\leq \phi(G(gp, gp, gq)) \\ &< G(gp, gp, gq), \end{aligned}$$

which leads to a contradiction. Therefore $gp = gq$. This implies that f and g have a unique point of coincidence. By Proposition 1.7, we can conclude that f and g have a unique common fixed point. \square

By setting g to be the identity function on X , we immediately have the following corollary.

Corollary 2.5. ([22, Theorem 3.1]) *Let (X, G) be a complete G -metric space. Suppose that the mapping $f : X \rightarrow X$ satisfies*

$$G(fx, fy, fz) \leq \phi(G(x, y, z)),$$

for all $x, y, z \in X$. Then f has a unique fixed point.

Theorem 2.6. *Let (X, G) be a G -metric space. Suppose that the mappings $f, g : X \rightarrow X$ satisfy*

$$G(fx, fy, fz)$$

$$\leq \phi(\max\{G(gx, gy, gz), G(gx, fx, fx), G(gy, fy, fy), G(fx, gy, gz)\}) \quad (2.8)$$

for all $x, y, z \in X$. If the range of g contains the range of f and $g(X)$ is a complete subspace of X , then f and g have a unique point of coincidence in X . Moreover if f and g are weakly compatible, then f and g have a unique common fixed point.

Proof. Let x_0 be an arbitrary point in X . Since the range of g contains the range of f , there is $x_1 \in X$ such that $gx_1 = fx_0$. By continuing the process as before, we can construct a sequence $\{gx_n\}$ such that $gx_{n+1} = fx_n$ for all $n \in \mathbb{N}$. If there is $n \in \mathbb{N}$ such that $gx_n = gx_{n+1}$, then f and g have a point of coincidence. Thus we can suppose that $gx_n \neq gx_{n+1}$ for all $n \in \mathbb{N}$. Therefore, for each $n \in \mathbb{N}$, we obtain that

$$\begin{aligned} G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) &= G(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) \\ &\leq \phi(\max\{G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), G(gx_{n-1}, fx_{n-1}, fx_{n-1}), \\ &\quad G(gx_n, fx_n, fx_n), G(fx_{n-1}, gx_n, gx_n)\}) \\ &\leq \phi(\max\{G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), \\ &\quad G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}), G(gx_n, gx_n, gx_n)\}) \\ &\leq \phi(\max\{G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1})\}). \end{aligned}$$

If $\max\{G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1})\} = G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1})$, then

$$G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) \leq \phi(G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1})) < G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}),$$

which leads to a contradiction. This implies that

$$G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) \leq \phi(G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n)).$$

That is, for each $n \in \mathbb{N}$, we have

$$\begin{aligned} G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) &= G(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) \\ &\leq \phi(G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n)) \\ &\leq \phi^2(G(gx_{n-2}, gx_{n-1}, gx_{n-1})) \\ &\vdots \\ &\leq \phi^n(G(gx_0, gx_1, gx_1)). \end{aligned}$$

We will show that $\{gx_n\}$ is G -Cauchy. Let $\varepsilon > 0$.

Since $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^n(G(gx_0, gx_1, gx_1)) = 0$ and $\phi(\varepsilon) < \varepsilon$, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that

$$\phi^n(G(gx_0, gx_1, gx_1)) < \varepsilon - \phi(\varepsilon) \quad \text{for all } n \geq N.$$

This implies that

$$G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) < \varepsilon - \phi(\varepsilon) \quad \text{for all } n \geq N. \quad (2.9)$$

Let $m, n \in \mathbb{N}$ with $m > n$. We will prove that

$$G(gx_n, gx_m, gx_m) < \varepsilon \quad \text{for all } m \geq n \geq N \quad (2.10)$$

by induction on m . Since $\varepsilon - \phi(\varepsilon) < \varepsilon$ and by (2.9), we obtain that (2.10) holds for $m = n + 1$. Suppose that (2.10) holds for $m = k$. Therefore, for $m = k + 1$, we have

$$\begin{aligned} G(gx_n, gx_{k+1}, gx_{k+1}) &\leq G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}) + G(gx_{n+1}, gx_{k+1}, gx_{k+1}) \\ &< \varepsilon - \phi(\varepsilon) + G(fx_n, fx_k, fx_k) \\ &\leq \varepsilon - \phi(\varepsilon) + \phi(\max\{G(gx_n, gx_k, gx_k), G(gx_n, fx_n, fx_n), \\ &\quad G(gx_k, fx_k, fx_k), G(fx_n, gx_k, gx_k)\}) \\ &\leq \varepsilon - \phi(\varepsilon) + \phi(\max\{G(gx_n, gx_k, gx_k), G(gx_n, gx_{n+1}, gx_{n+1}), \\ &\quad G(gx_k, fx_k, fx_k), G(fx_n, gx_k, gx_k)\}) \\ &\leq \varepsilon - \phi(\varepsilon) + \phi(\varepsilon) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Thus (2.10) holds for all $m \geq n \geq N$. It follows that $\{gx_n\}$ is G -Cauchy. By the completeness of $g(X)$, we obtain that $\{gx_n\}$ is G -convergent to some $q \in g(X)$. So there exists $p \in X$ such that $gp = q$. We will show that $gp = fp$. By (2.8), we have

$$\begin{aligned} &G(gp, gp, fp) \\ &\leq G(gp, gp, gx_n) + G(gx_n, gx_n, fp) \\ &\leq G(gp, gp, gx_n) + G(fx_{n-1}, fx_{n-1}, fp) \\ &\leq G(gp, gp, gx_n) + \phi(\max\{G(gx_{n-1}, gx_{n-1}, gp), G(gx_{n-1}, fx_{n-1}, fx_{n-1}), \\ &\quad G(gx_{n-1}, fx_{n-1}, fx_{n-1}), G(fx_{n-1}, gx_{n-1}, gp)\}) \\ &\leq G(gp, gp, gx_n) + \phi(\max\{G(gx_{n-1}, gx_{n-1}, gp), G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), \\ &\quad G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), G(gx_n, gx_{n-1}, gp)\}). \end{aligned}$$

Case 1.

$$\begin{aligned} & \max\{G(gx_{n-1}, gx_{n-1}, gp), G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), G(gx_n, gx_{n-1}, gp)\} \\ &= G(gx_{n-1}, gx_{n-1}, gp), \end{aligned}$$

we obtain that

$$G(gp, gp, fp) < G(gp, gp, gx_n) + G(gx_{n-1}, gx_{n-1}, gp).$$

By taking $n \rightarrow \infty$, we have $G(gp, fp, fp) = 0$ and so $gp = fp$.

Case 2.

$$\begin{aligned} & \max\{G(gx_{n-1}, gx_{n-1}, gp), G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), G(gx_n, gx_{n-1}, gp)\} \\ &= G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), \end{aligned}$$

we obtain that

$$G(gp, gp, fp) < G(gp, gp, gx_n) + G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n).$$

By taking $n \rightarrow \infty$, we have $G(gp, fp, fp) = 0$ and so $gp = fp$.

Case 3.

$$\begin{aligned} & \max\{G(gx_{n-1}, gx_{n-1}, gp), G(gx_{n-1}, gx_n, gx_n), G(gx_n, gx_{n-1}, gp)\} \\ &= G(gx_n, gx_{n-1}, gp), \end{aligned}$$

we obtain that

$$G(gp, gp, fp) < G(gp, gp, gx_n) + G(gx_n, gx_{n-1}, gp).$$

By taking $n \rightarrow \infty$, we have $G(gp, fp, fp) = 0$ and so $gp = fp$. We now show that f and g have a unique point of coincidence. Suppose that $fq = gq$ for some $q \in X$. Assume that $gp \neq gq$. By applying (2.8), it follows that

$$\begin{aligned} G(gp, gp, gq) &= G(fp, fp, fq) \\ &\leq \phi(\max\{G(gp, gp, gq), G(gp, fp, fp), G(gp, fp, fp), G(fp, gp, gq)\}) \\ &\leq \phi(G(gp, gp, gq)) < G(gp, gp, gq), \end{aligned}$$

which leads to a contradiction. Therefore $gp = gq$. This implies that f and g have a unique point of coincidence. By Proposition 1.7, we can conclude that f and g have a unique common fixed point. \square

Consequently, if we suppose that g is the identity function on X , then we obtain the following corollary.

Corollary 2.7. ([22, Theorem 3.2]) *Let (X, G) be a complete G -metric space. Suppose that the mapping $f : X \rightarrow X$ satisfies*

$$\begin{aligned} & G(fx, fy, fz) \\ & \leq \phi(\max\{G(x, y, z), G(x, fx, fx), G(y, fy, fy), G(fx, y, z)\}) \end{aligned}$$

for all $x, y, z \in X$. Then f has a unique fixed point.

Acknowledgement. This research is supported by the Commission on Higher Education and the Thailand Research Fund under grant MRG5380208. The author would like to express her deep thanks to Professor Sompong Dhompongsa for his advices during the preparation of the paper and the referee for comments which lead to the improvement of this paper.

REFERENCES

1. M. Abbas, A.R. Khan and T. Nazir, *Coupled common fixed point results in two generalized metric spaces*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 6328–6336.
2. M. Abbas, T. Nazir and S. Radenović, *Some periodic point results in generalized metric spaces*, Appl. Math. Comput. **217** (2010), 195–202.
3. M. Abbas and B.E. Rhoades, *Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in generalized metric spaces*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 262–269.
4. H. Aydi, B. Damjanovic, B. Samet and W. Shatanawi, *Couple fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered G -metric spaces*, Math. Comput. Modelling **54** (2011), 2443–2450.
5. I. Beg and M. Abbas, *Coincidence point and invariant approximation for mappings satisfying generalized weak contractive condition*, Fixed Point Theory Appl. **2006** Article ID 74503, 7 pages.
6. B.C. Dhage, *Generalized metric space and mapping with fixed point*, Bull. Calcutta Math. Soc. **84** (1992), 329–336.
7. B.C. Dhage, *Generalized metric space and topological structure I*, Analele Stiintifice ale Universității "Al. I. Cuza" din Iasi. Serie Nouă. Mathematică, **46** (2000), no. 1, 3–24.
8. S. Gähler, *2-metrische Räume und ihre topologische Struktur*, Math. Nachr. **26** (1963), 115–148.
9. S. Gähler, *Zur geometrie 2-metrische räume*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **11** (1966), 665–667.
10. G. Jungck, *Compatible mappings and common fixed points*, Internat. J. Math. Sci. **9** (1986), no. 4, 771–779.
11. G. Jungck, *Common fixed points for commuting and compatible maps on compacta*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 977–983.
12. G. Jungck, *Common fixed points for noncontinuous nonself maps on nonmetric spaces*, Far East J. Math. Sci. **4** (1996), 199–215.
13. G. Jungck and N. Hussain, *Compatible maps and invariant approximations*, J. Math. Anal. Appl. **325** (2007), no. 2, 1003–1012.
14. J. Mathkowski, *Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate at a point*, Proc. Amer. Math. Soc. **62** (1977), 344–348.
15. Z. Mustafa, M. Khandaqji and W. Shatanawi, *Fixed point results on complete G -metric spaces*, Studia Sci. Math. Hungar. **48** (2011), 304–319.
16. Z. Mustafa, H. Obiedat, and F. Awawdeh, *Some common fixed point theorem for mapping on complete G -metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2008** Article ID 189870, 12 pages.
17. Z. Mustafa and B. Sims, *Some remarks concerning D -metric spaces*, Proceedings of the International Conference on Fixed Point Theory and Applications, Valencia (Spain), July (2003), 189–198.
18. Z. Mustafa and B. Sims, *A new approach to generalized metric spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **7** (2006), no. 2, 289–297.
19. Z. Mustafa and B. Sims, *Fixed point theorems for contractive mappings in complete G -metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2009** Article ID 917175, 10 pages.
20. R.P. Pant, *Common fixed points of noncommuting mappings*, J. Math. Anal. Appl. **188** (1994), 436–440.
21. R. Saadati, S.M. Vaezpour, P. Vetro and B.E. Rhoades, *Fixed point theorems in generalized partially ordered G -metric spaces*, Math. Comput. Modelling **52** (2010), 797–801.

- 22. W. Shatanawi, *Fixed point theory for contractive mappings satisfying ϕ -maps in G -metric spaces*, Fixed Point Theory Appl. **2010** Article ID 181650, 9 pages.
- 23. W. Shatanawi, *Coupled fixed point theorems in generalized metric spaces*, Hacet. J. Math. Stat. **40** (2011), 441–447.
- 24. W. Shatanawi, *Some fixed point theorems in ordered G -metric spaces and applications*, Abstr. Appl. Anal. **2011** Article ID 126205, 11 pages.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE, NARESUAN UNIVERSITY, PHIT-SANULOK, 65000, THAILAND.

E-mail address: anchaleeka@nu.ac.th