



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การหาผลเฉลี่ยคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในทฤษฎีดิฟฟิเคอร์บีวชัน

เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการบางตัวและการประยุกต์

โดย วันจักร สาทสนิทและคณะ

14 มิถุนายน 2556

บทคัดย่อ

งานวิจัยชิ้นนี้ได้ศึกษามหาผลเฉลยของสมการความร้อนในมิติ n ซึ่งผลการศึกษาทำให้ได้คุณสมบัติต่างๆที่มีความสัมพันธ์กับสเปกตรัม นอกจากนี้ยังได้ศึกษาสมการคลื่นในมิติ แบบไม่เชิงเส้น ในส่วนสุดท้ายได้ศึกษาผลคูณของตัวดำเนินการไดมอนด์และตัวดำเนินการไดมอนด์เบสเซลและนำไปหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยบางสมการ

Abstract

In this research we studied Laplacian operator, Ultrahyperbolic operator , Diamond operator and Diamond Bessel operator. Firstly, we are to find solution of heat equation in n dimensional. It was found that the solution related to its spectrum. After that we use the Laplacian operator to find the solution of nonlinear wave equation. Finally, we study the product of Diamond operator and Diamond Bessel operator it was found that related to solution of some partial differential equation.

Executive Summary

1. ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

ทฤษฎีการกระจาย (Distribution Theory) เริ่มศึกษาจากนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย S.L.Sobolev ในปี 1936 ต่อมาถูกพัฒนาโดยนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อ L. Schwartz ซึ่งเขาได้ศึกษาทฤษฎีและคุณสมบัติต่างๆ ของทฤษฎีการกระจาย และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในงาน คณิตศาสตร์หลายสาขา ในปัจจุบันทฤษฎีการกระจาย (Distribution theory) นับเป็นแขนงที่สำคัญแขนงหนึ่ง ที่นักคณิตศาสตร์ได้ศึกษาและวิจัยในแขนงดังกล่าวกันอย่างต่อเนื่อง ในการคิดค้นทฤษฎีเพื่อหาคำตอบใหม่ๆ นั้น นับว่ามีประโยชน์อย่างมากต่อทางวิชาการและการพัฒนาประเทศ โดยเป็นที่ยอมรับว่าทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆ ที่เกิดจากการวิจัยนั้น นอกจากจะมีประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาความรู้เชิงวิชาการในสาขาและแขนงต่างๆ แล้วนั้น บางครั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาอื่นๆ และเป็นพื้นฐานสำคัญในการพัฒนาทางวิทยาศาสตร์พื้นฐาน อันถือเป็นพื้นฐานในการพัฒนาประเทศชาติ

ทฤษฎีการกระจาย นับเป็นคณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่สามารถประยุกต์ได้อย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่งต่อการศึกษาเกี่ยวกับ การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เช่น สมการ ความร้อน (Heat equation) สมการคลื่น (Wave equation) เป็นต้น นอกจากสมการดังกล่าว ยังมีสมการอื่นๆ ทั้งในทางวิศวกรรมศาสตร์ ทางฟิสิกส์ยุคใหม่ก็ยังสามารถนำทฤษฎีการกระจายไปช่วยในการแก้ปัญหาได้ อีกทั้งทฤษฎีการกระจายยังสามารถนำไปหา ฟังก์ชันกรีน (Green's function) หรือคำตอบพื้นฐาน (Elementary solution) ของตัวดำเนินการ (Operator) ต่างๆ เช่น ตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก (Ultra-hyperbolic) และตัวดำเนินการลาปลาเซียน (Laplacian) เป็นต้น ซึ่ง ฟังก์ชันกรีนนี้สามารถนำไปใช้ในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (linear) และสมการแบบไม่เชิงเส้น (Nonlinear) โดยใช้วิธีการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform) จากนั้นนักคณิตศาสตร์ก็ให้ความสนใจ ศึกษา คุณสมบัติอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง และเป็นปัญหาที่กำลังได้รับความสนใจอย่างกว้างขวาง

ผลงานวิจัยโดยสรุป ในแนวทางดังกล่าวข้างต้นเป็นการศึกษา คิดค้นหาทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับทฤษฎีการกระจาย ซึ่งแบ่งเป็น

- (1) การใช้การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transformation) ในปริภูมิเทมเปอร์ ดิสทริบิวชัน (Space of tempered distribution) ใช้ในการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในรูปแบบต่างๆ
- (2) การพัฒนาตัวดำเนินการ (Operator) ต่างๆ และศึกษาฟังก์ชันกรีน (Green's function) หรือคำตอบพื้นฐาน (Elementary solution) และนำฟังก์ชันกรีนไปใช้ในการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น
- (3) การใช้ทฤษฎีและคุณสมบัติต่างๆ ของฟังก์ชันวงนัยทั่วไปแก้ปัญหาในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในรูปแบบต่างๆ

2.วัตถุประสงค์ของโครงการ

- 2.1 สร้างและพัฒนาตัวดำเนินการตัวใหม่ ซึ่งสัมพันธ์กับตัวดำเนินการลาปลาเซียน (Laplacian operator) ตัวดำเนินการอัลตราไฮเพอร์โบลิก (ultrahyperbolic operator) และตัวดำเนินการไดมอนด์ (Diamond operator)
- 2.2 ศึกษาฟังก์ชันกรีน (Green's function) หรือคำตอบพื้นฐาน (Elementary undamental) ของตัวดำเนินการตัวใหม่ และนำไปหาผลเฉลยของสมการความร้อนในมิติ N และสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยบางสมการ

3. ระเบียบวิธีวิจัย

- 3.1. รวบรวมความรู้พื้นฐานทั้งหมดที่เกี่ยวกับปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยและสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น
- 3.2. ค้นคว้าหาเอกสาร ตำรา วารสาร และ เอกสารสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยที่กำลังดำเนินการวิจัยอยู่จากแหล่งข้อมูลต่างๆ
- 3.3. รวบรวมความรู้พื้นฐานทั้งหมดที่เกี่ยวกับฟังก์ชันวงนัยทั่วไปและนำไปพัฒนาตัวดำเนินการตัว ใหม่
- 3.4. โดยการอาศัยความรู้พื้นฐานที่ได้จากการศึกษาตามระเบียบวิธีวิจัยข้อ 8.1 – 8.3 และ ประสบการณ์ที่ได้จากการ แลกเปลี่ยนความคิดเห็นจากทั้งนักวิจัยชาวไทย และนักวิจัยชาวต่างประเทศที่มีการเชื่อมโยงการทำวิจัยกันอยู่ เพื่อหาแนวทางในการพัฒนาศักยภาพและการ คิดค้นทฤษฎีบทใหม่ ๆ
- 3.5. เขียนผลงานวิจัยที่ได้ส่งให้นักวิจัยที่ปรึกษาตรวจสอบความถูกต้อง
- 3.6. ปรับปรุงแก้ไขผลงานวิจัยเพื่อส่งไปตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ

4. แผนการดำเนินงานตลอดโครงการวิจัยในแต่ละช่วง 6 เดือน

ปีที่1

กิจกรรม	วัตถุประสงค์	ช่วงเวลา	ผลที่คาดว่าจะได้ (out put)	ความก้าวหน้า
1. รวบรวมเอกสารที่มีอยู่ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยและจัดหมวดหมู่อย่างเป็นระเบียบ	เพื่อตรวจสอบว่ามีเอกสารหรือข้อมูลใดบ้างและเอกสารอะไรบ้างที่จำเป็นแต่ยังไม่มี	เดือนที่ 1	ได้ทราบข้อมูลว่ามีเอกสารอะไรบ้างและยังขาดเอกสารอะไรบ้างที่จำเป็นต้องใช้ในงานวิจัย	15 %
2. จัดหาเอกสารที่จำเป็นเพิ่มเติมโดยการสืบค้นจากฐานข้อมูลต่างๆทั้งในและต่างประเทศ	เพื่อให้ได้ข้อมูลที่จำเป็นทั้งหมดต่อหัวข้อวิจัย	เดือนที่ 2	ได้เอกสารที่ยังไม่มีเพิ่มเติม	
3. พบนักวิจัยที่ปรึกษา	เพื่อขอคำแนะนำและแนวทางปฏิบัติเกี่ยวกับการทำวิจัยและเสนอแผนวิจัยต่อนักวิจัยที่ปรึกษา	เดือนที่ 3	ได้รับคำแนะนำที่มีประโยชน์และได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นเกี่ยวกับแผนการดำเนินการวิจัยเพื่อความสะดวกสมบูรณ์แผนงานวิจัย	50%
4. ศึกษาความรู้พื้นฐานทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับประเภทและลักษณะคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นกับปัญหาค่าขอบและเตรียมบทความส่งไปตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ	เพื่อทราบถึงประเภทและลักษณะคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นกับปัญหาค่าขอบ	เดือนที่ 4-6	ทราบถึงประเภทและลักษณะคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นกับปัญหาค่าขอบและผลงานได้รับการตีพิมพ์วารสารนานาชาติ	100%
5. ศึกษาเงื่อนไขที่ทำให้เกิดการมีอยู่จริงและการมีเพียงหนึ่งเดียวของคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นกับปัญหาค่าขอบ	เพื่อทราบถึงเงื่อนไขที่ทำให้เกิดการมีอยู่จริงและการมีเพียงหนึ่งเดียวของคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นกับปัญหาค่าขอบ	เดือนที่ 7 – 9	ทราบถึงเงื่อนไขที่ทำให้เกิดการมีอยู่จริงและการมีเพียงหนึ่งเดียวของคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นกับปัญหาค่าขอบ	50%

6.พบนักวิจัยที่ปรึกษา และเตรียมส่งผลงานชิ้นที่ 2 ไป ตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ	เพื่อนำเสนอความรู้ ข้อคำปรึกษา และข้อเสนอแนะ ตลอดจนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นจากนักวิจัยที่ปรึกษา	เดือนที่ 10-12	มีความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับความรู้ในเรื่องที่ทำการศึกษามา เพื่อนำไปเป็นพื้นฐานในงานวิจัยต่อไป และผลงานชิ้นที่ 2 ได้รับการตีพิมพ์วารสารนานาชาติ	100%
---	--	----------------	--	------

ปีที่2

กิจกรรม	วัตถุประสงค์	ช่วงเวลา	ผลที่คาดว่าจะได้ (out put)	ความก้าวหน้า
1. ศึกษาความพื้นฐานรู้ทั้งหมดที่เกี่ยวข้องกับประเภทและลักษณะตัวดำเนินการในรูปแบบต่างๆ	เพื่อทราบถึงประเภทและลักษณะของตัวดำเนินการในรูปแบบต่างๆ	เดือนที่ 1-2	ทราบถึงประเภทและลักษณะตัวดำเนินการในรูปแบบต่างๆ	40%
2.พบนักวิจัยที่ปรึกษา	เพื่อนำเสนอความรู้ ข้อคำปรึกษา และข้อเสนอแนะ ตลอดจนแลกเปลี่ยนความคิดเห็นจากนักวิจัยที่ปรึกษา	เดือนที่ 3	มีความเข้าใจที่ถูกต้องเกี่ยวกับความรู้ในเรื่องที่ทำการศึกษามา เพื่อนำไปเป็นพื้นฐานในงานวิจัยต่อไป	70%
3. ศึกษางานวิจัยอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับเรื่องที่ทำวิจัย	เพื่อเป็นแนวทางในการทำวิจัย	เดือนที่ 4-6	ผลงานได้รับการตีพิมพ์	100%
4.ศึกษาฟังก์ชันของกรีน (Green'function) หรือคำตอบพื้นฐานของตัวดำเนินการตัวใหม่	เพื่อให้ได้คำตอบพื้นฐานของตัวดำเนินการตัวใหม่	เดือนที่ 7	ได้คำตอบพื้นฐานของตัวดำเนินการตัวใหม่	20%
5.นำคำตอบพื้นฐานของตัวดำเนินการตัวใหม่หาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น	เพื่อให้ได้คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น	เดือนที่ 8-9	ได้คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น	50%
6. พบนักวิจัยที่ปรึกษา และแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับผู้เชี่ยวชาญทั้งในและต่างประเทศทาง e-mail	1.เพื่อรายงานความก้าวหน้าของผลงานวิจัยทั้งหมด 2. เพื่อรายงานปัญหาต่างๆ และรับการแนะนำเกี่ยวกับปัญหา	เดือนที่ 10-11	ได้ผลงานที่ดีขึ้นและสมบูรณ์มากขึ้นที่คาดว่าจะตีพิมพ์ได้	75%
7. พิมพ์งานวิจัยที่แก้ไขปรับปรุงเรียบร้อยแล้ว	1. เพื่อให้ได้ผลงานวิจัยฉบับสมบูรณ์ 2. เพื่อส่งผลงานวิจัยไปตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ	เดือนที่ 12	ได้ผลงานวิจัยชิ้นที่ 4 ตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ	100%

5. Output

5.1) ผลงานที่ได้รับการตีพิมพ์ในปี 2011

1. ชื่อเรื่อง : On the Biultrahyperbolic heat kernel
ชื่อวารสาร : Journal of Advanced Research Differential Equation
Impact factor ปี 2011 : None.
2. ชื่อเรื่อง : On the Diamond Heat kernel
ชื่อวารสาร : Journal of Applied Mathematics.
Impact factor ปี 2013 : 0.656

5.2) ผลงานที่ได้รับการตีพิมพ์ในปี 2012

1. ชื่อเรื่อง : On the Nonlinear Wave equation
ชื่อวารสาร : International Pure and Applied Mathematics..
Impact factor ปี 2012 : 0.2254
2. ชื่อเรื่อง : On the Solution n-dimensional of the composite function of the $\diamond$ operator and $\diamond_B$ Operator.
ชื่อวารสาร : ISRN Applied Mathematics.
Impact factor ปี 2013 : None.
3. ชื่อเรื่อง : On the Distribution related Laplacian Equationl
ชื่อวารสาร : Journal of Advanced Research Applied Mathematics
Impact factor ปี 2011 : None

เนื้อหางานวิจัย

‘งานวิจัยฉบับนี้เป็นการศึกษาตัวดำเนินการลาปลาซที่นิยามโดย

$$\Delta^k = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right)^k \quad (1.1)$$

ตัวดำเนินการฮัยเพอร์โบลิกที่นิยามโดย

$$\square^k = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+2}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \right)^k \quad (1.2)$$

และตัวดำเนินการไดมอนด์นิยามโดย

$$\diamond^k = \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_{p+2}^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{p+q}^2} \right)^2 \right)^k. \quad (1.3)$$

โดยที่ตัวดำเนินการ $\diamond^k$ เขียนในรูป

$$\diamond^k = \Delta^k \square^k = \square^k \Delta^k, \quad (1.4)$$

ในงานวิจัยชิ้นแรกเรื่อง On the Biultrahyperbolic Heat Kernel เป็นการศึกษาสมการความร้อนในมิติ n

$$\frac{\partial}{\partial t} \square u(x, t) = c^2 \square^2 u(x, t) \quad (1.5)$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\square u(x, 0) = f(x)$$

ในงานวิจัยแสดงการหาผลเฉลยโดยใช้การแปลงฟูเรียร์ในทฤษฎีดิสทริบิวชันที่นิยามโดย

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\xi, x)} \hat{f}(\xi) d\xi$$

และนำคำตอบพื้นฐาน(Elementary solution) ของตัวดำเนินการฮัยเพอร์โบลิกมาประยุกต์ใช้พบว่าผลเฉลยของ

สมการอยู่ในรูป

$$u(x, t) = R_2^H(x) * (E(x, t) * f(x))$$

$$\text{โดยที่} \quad E(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\Omega} \exp \left(c^2 t \left(\left(\sum_{i=1}^p \xi_i^2 \right) - \left(\sum_{i=p+1}^{p+q} \xi_i^2 \right) \right) + i(\xi, x) \right) d\xi \quad (1.6)$$

และ $R_2^H(x)$ นิยามโดย

$$, \quad R_\alpha(v) = \begin{cases} \frac{v^{(\alpha-n)/2}}{K_n(\alpha)}, & x \in \Gamma_+, \\ 0, & x \notin \Gamma_+, \end{cases} \quad (1.7)$$

และค่าคงตัว $K_n(\alpha)$ นิยามโดย

$$K_n(\alpha) = \frac{\pi^{(n-1)/2} \Gamma\left(\frac{2+\alpha-n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) \Gamma(\alpha)}{\Gamma\left(\frac{2+\alpha-p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p-\alpha}{2}\right)}. \quad (1.8)$$

ในงานวิจัยชิ้นที่ สองเรื่อง On the Diamond Bessel Heat Kernel ศึกษาสมการความร้อนโดยใช้ตัวดำเนินการไดอนด์บัสเชิล

$$\frac{\partial}{\partial t} \square_B u(x, t) = c^2 \diamond_B u(x, t) \quad (1.9)$$

$$\text{โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น } \square_B u(x, 0) = f(x)$$

$$\text{โดยที่ } \square_B^k = \left(\sum_{i=1}^p B_{x_i} - \sum_{j=p+1}^{p+q} B_{x_j} \right)^k \quad (1.10)$$

$$\text{และ } \diamond_B^k = \left(\left(\sum_{i=1}^p B_{x_i} \right)^2 - \left(\sum_{j=p+1}^{p+q} B_{x_j} \right)^2 \right)^k \quad (1.11)$$

ในงานวิจัยแสดงการหาผลเฉลยโดยใช้การแปลงฟูเรียร์ในทฤษฎีดิสตรีวิชันที่นิยามโดย

$$(F_B f)(x) = C_\nu \int_{\mathbb{H}^n} f(y) \prod_{i=1}^n J_{\nu_{i-1/2}}(x_i, y_i) y_i^{2\nu_i} dy \quad (1.12)$$

$$(F_B^{-1} f)(x) = (F_B f)(-x) \quad , \quad C_\nu = \left(\prod_{i=1}^n 2^{\nu_{i-1/2}} \Gamma\left(\nu_i + \frac{1}{2}\right) \right)^{-1} \quad (1.13)$$

และพบว่าผลเฉลยของสมการอยู่ในรูปคอนวอลูชัน

$$u(x, t) = R_2^H(x) * (E(x, t) * f(x)) \quad (1.14)$$

$$\text{โดยที่ } E(x, t) = C_\nu \int_{\Omega} e^{-c^2 t (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_n^2)} \prod_{i=1}^n J_{\nu_{i-1/2}}(x_i, y_i) y_i^{2\nu_i} dy_i \quad (1.15)$$

จากงานวิจัยชิ้นที่หนึ่งและชิ้นที่สองสามารถนำหลักการไปประยุกต์โดยใช้ตัวดำเนินการตัวใหม่หาผลเฉลยของสมการความร้อนหรือสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในรูปแบบที่คล้ายๆกันโดยใช้หลักการเดียวกับงานวิจัยข้างต้น

งานวิจัยชิ้นที่ สามเรื่อง On the Nonlinear Wave equation เป็นการศึกษาสมการคลื่นแบบไม่เชิงเส้นในมิติ n อยู่ในรูปแบบ

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) = f(x, t, u(x, t)), \quad (1.16)$$

$$\text{สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น } u(x, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \delta(x)$$

โดยที่ Δ คือตัวดำเนินการลาปลาเซียน และ f สอดคล้องกับเงื่อนไขลิปชิตซ์ (Lipschitz condition)

$$|f(x, t, u) - f(x, t, w)| \leq A|u - w|, \quad A \text{ เป็นค่าคงตัวและ } 0 < A < 1.$$

โดยใช้การแปลงฟูเรียร์ในทฤษฎีฟังก์ชันวางนัยทั่วไปหาผลเฉลย และ ใช้ทฤษฎีจุดตรึง (Fixed point theorem) ตรวจสอบความเป็นหนึ่งเดียวของผลเฉลยและพบว่าผลเฉลยอยู่ในรูปคอนวอลูชัน

$$u(x, t) = E(x, t) * f(x, t, u(x, t)) \quad (1.17)$$

$$\text{โดยที่ } E(x, t) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)(-1)^{\frac{n-1}{2}} P_{-}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{2ci(n-1)^{\frac{n+1}{2}}}, & n = 2, 4, 6, \dots, \\ 0, & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

งานวิจัยชิ้นที่ สี่ เรื่อง On the Solution n-dimensional of the composite function of the $\diamond$ operator and $\diamond_B$ Operator

เป็นงานวิจัยที่ศึกษาฟังก์ชันกรีน(Green' s function) ของตัวดำเนินการไดมอนต์และตัวดำเนินการไดมอนต์เบสเซลหลังจากนั้นนำฟังก์ชันกรีนมาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่อยู่ในรูป

$$\diamond^k \diamond_B^k u(x) = f(x) \quad (1.18)$$

โดยที่ $\diamond^k$ นิยามโดย (1.3) และ $\diamond_B^k$ นิยามโดย (1.11) จากงานวิจัยพบว่าผลเฉลยของสมการ(1.18)มีความสัมพันธ์กับผลเฉลยของสมการคลื่นในอีกรูปแบบหนึ่ง

จากงานวิจัยที่กล่าวมาทั้งหมดสามารถเกิดองค์ความรู้ใหม่โดยใช้ทฤษฎีดิสทริบิวชันมาประยุกต์ใช้ซึ่งสามารถนำไปใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยหรือสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้