รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ ทฤษฎีบทการลู่เข้าของขั้นตอนวิธีจุดใกล้เคียงแบบใหม่พร้อมการประยุกต์

Convergence Theorems of the New Proximal Point Algorithms with Applications

โดย ดร. สุวิชา อิ่มนาง

ธันวาคม 2559

สัญญาเลขที่ RG5680072

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ ทฤษฎีบทการลู่เข้าของขั้นตอนวิธีจุดใกล้เคียงแบบใหม่พร้อมการประยุกต์

Convergence Theorems of the New Proximal Point Algorithms with Applications

ผู้วิจัย ดร. สุวิชา อิ่มนาง
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยทักษิณ

สนับสนุนโดยสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
และมหาวิทยาลัยทักษิณ

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

รหัสโครงการ : MRG5680072

ชื่อโครงการ : ทฤษฎีบทการลู่เข้าของขั้นตอนวิธีจุดใกล้เคียงแบบใหม่พร้อมการประยุกต์

ชื่อนักวิจัย และสถาบัน : ดร. สุวิชา อิ่มนาง
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ

E-mail Address : suwicha.n@hotmail.com

ระยะเวลาโครงการ : 3 มิถุนายน 2556 ถึง 2 มิถุนายน 2558

บทคัดย่อ : โครงการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญคือ ศึกษาทฤษฎีการลู่เข้าของขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบใหม่เพื่อหาสมาชิกร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน และเซตจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายทั้งในปริภูมิฮิลเบิร์ต และปริภูมิบานาค รวมทั้งประยุกต์ทฤษฎีบทหลักสู่ปัญหาการประมาณค่าหาสมาชิกศูนย์ของตัวดำเนินการในปริภูมิบานาค

คำหลัก : อสมการการแปรผัน**,** ขั้นตอนวิธี, จุดตรึง, จุดศูนย์

Project Code : MRG5680072

Project Title : Convergence Theorems of the New Proximal Point Algorithms with Applications

Investigator : Dr. Suwicha Imnang
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science
Thaksin University

E-mail Address : suwicha.n@hotmail.com

Project Period : 3 June 2013- 2 June 2015

Abstract : The purpose of this research project, we study iterative algorithms for finding a common element of the new general system of variational inequalities and the set of fixed points of nonexpansive mappings in both Hilbert space and Banach space. We also apply our main results with the problem of approximating a zero point of operators in Banach spaces.

Keywords : Variational Inequality**,** Algorithms, Fixed Point, Zero Point

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยเรื่อง “ทฤษฎีบทการลู่เข้าของขั้นตอนวิธีจุดใกล้เคียงแบบใหม่พร้อมการประยุกต์” ได้รับทุนอุดหนุนการวิจัยจากสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา (สกอ.) สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) และมหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปี 2556 สัญญาเลขที่ RG5680072

ผู้เขียนยังระลึกถึงพระคุณของ ศาสตราจารย์ ดร. เวคิน นพนิตย์ ครูผู้ฝึกสอนการเขียนเอกสารทางวิชาการ รวมถึงการเขียนข้อเสนอโครงการวิจัย

ขอขอบคุณ ศาสตราจารย์ ดร. สุเทพ สวนใต้ นักวิจัยที่ปรึกษาที่ให้ข้อคิดเห็นและเสนอแนะทางวิชาการด้วยดีโดยตลอด และสำเร็จตามความมุ่งหมายทุกประการ

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	**i**
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	**ii**
กิตติกรรมประกาศ	**iii**
สารบัญ	**iv**
I. Introduction	**1**
- Introduction to the research problem and its significance	1
- Objectives	9
- Methodology	9
II. Research Outputs	**10**
III. Appendix	**11**

I. Introduction

1. Introduction to the research problem and its significance

1.1 Finding a zero of monotone operators

Numerous problems in mathematics and physical sciences can be recasted in terms of fixed point problem for nonexpansive mappings. For instance, if the nonexpansive mappings are projections into some closed and convex sets, then the fixed point problem becomes the famous convex feasibility problem. The problem of finding a fixed point of a nonexpansive is equivalent to the problem of finding a zero of monotone operator. In fact, theory of monotone operator is very important in nonlinear analysis and is connected with theory of differential equations. It is well know that many physically significant problems can be modeled by the initial-value problems. Typical examples where such evolution equations occur can be found in the heat and wave equations or Schrodinger equations. On the other hand, a variety of problems, including convex programming and variational inequalities, can be formulated as finding a zero of monotone operators.

Then the problem of finding a solution $x \in H$ with $0 \in Tx$, where H is a Hilbert space has been investigated by many researchers. One popular method of solving $0 \in Tx$ is "the proximal point algorithm" of Rockafellar [1] which is recognized as a powerful and successful algorithm in finding a zero of monotone operators.

Starting from any initial guess $x_0 \in H$, this proximal point algorithm generates a sequence $\{x_k\}$ given by

$$x_{k+1} = J_{c_k}^T (x_k + e_k), \tag{1}$$

where $J_r^T = (I + rT)^{-1}$ for all $r > 0$ is the resolvent of T on the space H. Rockafellar proved the weak convergence of his algorithm (1) provided that the regularization sequence $\{c_k\}$ remains bounded away from zero and the error sequence $\{e_k\}$ satisfies the condition $\sum_{k=0}^{+\infty} \|e_k\| < \infty$.

Guler [2] gave an example showing that Rockafellar algorithm (1) did not converges strongly in an infinite dimensional Hilbert space. An interesting topic is

"how to modify the proximal point algorithm (1) so that strong convergence is guaranteed". In 2006, Xu [3] proposed the following regularization for the proximal point algorithm

$$x_{k+1} = J^A_{c_k}(\lambda_k u + (1-\lambda_k)x_k + e_k),\ k \geq 0, \tag{2}$$

which essentially includes so called prox-Tikhonov algorithm introduced by Lehdili and Moudafi [4] as special cases. In 2010, Boikanyo and Morosanu [5] noted that the proximal point algorithm (2) is equivalent to

$$x_{k+1} = \lambda_k u + (1-\lambda_k)J^A_{c_k}(x_k) + e_k,\ k \geq 0, \tag{3}$$

they proved that $\{x_k\}$ is strongly convergent if $\lambda_k \to 0,\ \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k = \infty$ and $\sum_{k=0}^{\infty}\|e_k\| < \infty$ or $\|e_k\|/\lambda_k \to 0.$ Afterwards, they further put the following open question:

Open Questions: Can one design a proximal point algorithm by choosing appropriate parameter λ_k such that strong convergence of $\{x_k\}$ is preserved, for $\|\lambda_k\| \to 0$ and e_k bounded ?

Recently, in 2011, Yao and Shahzad [6] proposed the following regularization for the proximal point algorithm with general errors

$$x_{k+1} = \lambda_k x_k + \delta_k J^A_{c_k}(x_k) + \lambda_k e_k,\ k \geq 0, \tag{4}$$

they proved the strong convergence theorem for the problem of finding a zero of maximal monotone operator in Hilbert spaces which affirmatively answer the open question put forth by Boikanyo and Morosanu [5].

In this project, motivated and inspired by the works in literature, we construct the new iterative algorithm for finding a common element of the new general system of variational inequalities and the set of fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces. We also apply our main results with the problem of approximating a zero point of operators in Banach spaces.

References

[1.] R.T. Rockafellar, Monotone operator and aproximal point algorithm. SIAM Jounal on Control and Optimization, 1976. 14(5): p. 877-898.

[2.] O. Guler, On the convergence of the proximal point algorithm for convex optimization. SIAM J. Control Optim., 1991. 29: p. 403-419.

[3.] H.K. Xu, A regularization method for the proximal point algorithm. J. Glob. Optim., 2006. 36: p. 115-125.

[4.] N. Lehdili and Moudafi, Combining the proximal point for convex optimization. Optimization 1996. 37: p. 239-252.

[5.] O.A. Boikanyo and G. Morosanu, A proximal point algorithm converging strongly for general error. Optim. Lett., 2010. 4: p. 635-641.

[6.] Y. Yao and N. Shahzad, Strong convergence of a proximal point algorithm with general error. Opitm. Lett., 2011: p. 8 pages.

1.2 New general system of variational inequalities in Banach spaces

Let X be a real Banach space, and X^* be its dual space. Let C be a subset of X and T be a self-mapping of C. We use $F(T)$ to denote the set of fixed points of T. The duality mapping $J : X \to 2^{X^*}$ is defined by $J(x) = \{x^* \in X^* | \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2, \|x^*\| = \|x\|\}$, $\forall x \in X$. If X is a Hilbert space, then $J = I$, where I is the identity mapping. It is well-known that if X is smooth, then J is single -valued, which is denoted by j.

Recall that a mapping $f : C \to C$ is a *contraction* on C, if there exists a constant $\alpha \in (0, 1)$ such that $\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$. We use Π_C to denote the collection of all contractions on C. This is $\Pi_C = \{f | f : C \to C \text{ a contraction}\}$. A mapping $T : C \to C$ is said to be *nonexpansive*, if $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$. Let $A : C \to X$ be a nonlinear mapping. Then A is called

(i) *L-Lipschitz continuous* (or *Lipschitzian*), if there exists a constant $L \geq 0$ such that $\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C$;

(ii) *accretive* if there exists $j(x - y) \in J(x - y)$ such that $\langle Ax - Ay, j(x - y)\rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C$;

(iii) α- *inverse strongly accretive* if there exist $j(x - y) \in J(x - y)$ and $\alpha > 0$ such that $\langle Ax - Ay, j(x - y)\rangle \geq \alpha\|Ax - Ay\|^2, \quad \forall x, y \in C$;

(iv) *relaxed* (c, d)- *cocoercive* if there exist $j(x - y) \in J(x - y)$ and two constants $c, d \geq 0$ such that $\langle Ax - Ay, j(x - y)\rangle \geq (-c)\|Ax - Ay\|^2 + d\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C$.

Let C be a nonempty closed convex subset of a real Hilbert space H. Recall that the classical variational inequality is to find $x^* \in C$ such that

$$\langle Ax^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C,$$

where $A : C \to H$ is a nonlinear mapping. Variational inequality theory has emerged as an important tool in studying a wide class of obstacle, unilateral, free, moving, equilibrium problems arising in several branches of pure and applied sciences in a unified and general framework. The variational inequality problem has been extensively studied in the literature, see [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] and the references cited therein.

In 2006, Aoyama et al. [9] first considered the following generalized variational inequality problem in Banach spaces. Let $A : C \to X$ be an accretive operator. Find a point $x^* \in C$ such that

$$\langle Ax^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C. \tag{5}$$

The problem (5) is very interesting as it is connected with the fixed point problem for nonlinear mapping and the problem of finding a zero point of an accretive operator in Banach spaces, see [10, 11, 12, 13] and the references cited therein.

In 2010, Yao et al. [14] introduced the following system of general variational inequalities in Banach spaces. For given two operators $A, B : C \to X$, they considered the problem of finding $(x^*, y^*) \in C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle Ay^* + x^* - y^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle Bx^* + y^* - x^*, j(x - y^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{6}$$

which is called *the system of general variational inequalities in a real Banach space* and the set of solutions of the problem (6) denoted by Ω_1. Yao et al. proved the following strong convergence theorem.

Theorem YNNLY. *Let C be a nonempty closed convex subset of a uniformly convex and 2-uniformly smooth Banach space X which admits a weakly sequentially continuous duality mapping. Let Q_C be the sunny nonexpansive retraction from X onto C. Let the mappings $A, B : C \to X$ be α-inverse-strongly accretive with $\alpha \geq K^2$ and β-inverse-strongly accretive with $\beta \geq K^2$, respectively with $\Omega_1 \neq \emptyset$. For a given $x_0 \in C$, let the sequence $\{x_n\}$ be generated iterative by*

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - Bx_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n Q_C(y_n - Ay_n), & n \geq 0, \end{cases}$$

where $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ and $\{\gamma_n\}$ are three sequences in $(0, 1)$. Suppose the sequences $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ and $\{\gamma_n\}$ satisfy the following conditions

(i) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$, $\forall n \geq 0$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$;

(iii) $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq 1$.

Then $\{x_n\}$ converges strongly to $Q'u$ where Q' is the sunny nonexpansive retraction of C onto Ω_1.

In 2011, Katchang and Kumam [15] introduced the following system of general variational inequalities in Banach spaces. For given two operators $A, B : C \to X$, they considered the problem of finding $(x^*, y^*) \in C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda Ay^* + x^* - y^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \mu Bx^* + y^* - x^*, j(x - y^*)\rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{7}$$

which is called *the system of general variational inequalities* in a real Banach space and the set of solutions of the problem (7) denoted by Ω_2. Katchang and Kumam proved the following strong convergence theorem.

Theorem KK. *Let C be a nonempty closed convex subset of a uniformly convex and 2-uniformly smooth Banach space X which admits a weakly sequentially continuous duality mapping. Let $S : C \to C$ be a nonexpansive mapping and Q_C be a sunny nonexpansive retraction from X onto C. Let the mappings $A, B : C \to X$ be β-inverse-strongly accretive with $\beta \geq \lambda K^2$ and γ-inverse-strongly accretive with $\gamma \geq \mu K^2$, respectively and K be the 2-uniformly smooth constant of X. Let f be a contraction of C into itself with coefficient $\alpha \in [0, 1)$. Suppose $F := \Omega_2 \bigcap F(S) \neq \emptyset$. For a given $x_0 = x \in C$, let the sequence $\{x_n\}$ be generated iterative by*

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - \mu B x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n S Q_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

where $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ and $\{\gamma_n\}$ are three sequences in $(0, 1)$. Suppose the sequences $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ and $\{\gamma_n\}$ satisfy the following conditions

(i) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$, $\forall n \geq 0$;
(ii) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
(iii) $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$.

Then $\{x_n\}$ converges strongly to $\bar{x} = Q_F f(\bar{x})$ and $(\bar{x}, \bar{y})$ is a solution of the problem (7), where $\bar{y} = Q_C(\bar{x} - \mu B\bar{x})$ and Q_F is the sunny nonexpansive retraction of C onto F.

The problem of finding solutions of (7) by using iterative methods has been studied by many others, see [16, 17, 18, 19] and the references cited therein.

In this project, we focus on the problem of finding $(x^*, y^*, z^*) \in C \times C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda_1 A_1 y^* + x^* - y^*, j(x - x^*) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \\ \langle \lambda_2 A_2 z^* + y^* - z^*, j(x - y^*) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \\ \langle \lambda_3 A_3 x^* + z^* - x^*, j(x - z^*) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \end{cases} \tag{8}$$

which is called *a new general system of variational inequalities in Banach spaces*, where $A_i : C \to X$ are three mappings, $\lambda_i > 0$ for all $i = 1, 2, 3$. In particular, if $A_3 = 0$ and $z^* = x^*$, then problem (8) reduces to problem (7). If we add up the requirement that $\lambda_i = 1$ for $i = 1, 2$, then problem (8) reduces to problem (6).

In this project, motivated and inspired by the idea of Katchang and Kumam [15] and Yao et al. [14], we introduce a new iterative method for finding a common element of the set of solutions of a new general system of variational inequalities in Banach spaces for two different relaxed cocoercive mappings and the set of fixed points of a nonexpansive mapping in a real 2-uniformly smooth and uniformly convex Banach spaces. We prove the strong convergence of the proposed iterative algorithm without the condition of weakly sequentially

continuous duality mapping. Our result improves and extends the corresponding results announced by many others.

References

[1] Imnang, S: Iterative Method for a Finite Family of Nonexpansive Mappings in Hilbert Spaces with Applications, AMS. **7**, 103-126 (2013)

[2] Imnang, S, Suantai, S: A Hybrid Iterative Scheme for Mixed Equilibrium Problems, General System of Variational Inequality Problems, and Fixed Point Problems in Hilbert Spaces. ISRN Math. Anal. (2011). doi:10.5402/2011/837809

[3] Piri, H: A general iterative method for finding common solutions of system of equilibrium problems, system of variational inequalities and fixed point problems. Math. Comput. Modelling. **55**, 1622-1638 (2012)

[4] Qin, X, Shang, M, Su, Y: Strong convergence of a general iterative algorithm for equilibrium problems and variational inequality problems. Math. Comput. Modelling. **48**, 1033-1046 (2008)

[5] Shehu, Y: Iterative method for fixed point problem, variational inequality and generalized mixed equilibrium problems with applications. J. Glob. Optim. **52**, 57-77 (2012)

[6] Wangkeeree, R, Preechasilp, P: A new iterative scheme for solving the equilibrium problems, variational inequality problems, and fixed point problems in Hilbert spaces. J. Appl. Math. (2012). Doi:10.1155/2012/154968

[7] Yao, Y, Cho, YJ, Chen, R: An iterative algorithm for solving fixed point problems, variational inequalities problems and mixed equilibrium problems. Nonlinear Anal. **71**, 3363-3373 (2009)

[8] Yao, Y, Liou, YC, Wong, MM, Yao, JC: Strong convergence of a hybrid method for monotone variational inequalities and fixed point problems. Fixed Point Theory and Appl. (2011). doi: 101186/1687-1812-2011-53

[9] Aoyama, K, Iiduka, H, Takahashi, W: Weak convergence of an iterative sequence for accretive operators in Banach spaces. Fixed Point Theory Appl. **2006**, 1-13 (2006)

[10] Goebel, K, Reich, S: Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings. Marcel Dekcer, New York and Basel (1984)

[11] Hao, Y: Strong convergence of an iterative method for inverse strongly accretive operators. J. Inequal. Appl. (2008). doi:10.1155/2008/42098

[12] Reich, S: Extension problems for accretive sets in Banach spaces. J. Functional Anal. **26**, 378-395 (1977)

[13] Reich, S: Product formulas, nonlinear semigroups, and accretive operators. J. Functional Anal. **36**, 147-168 (1980)

[14] Yao, Y, Noor, MA, Noor, KI, Liou, YC, Yaqoob, H: Modified extragradient method for a system of variational inequalities in Banach spaces. Acta Appl. Math. **110**, 1211-1224 (2010)

[15] Katchang, P, Kumam, P: Convergence of iterative algorithm for finding common solution of fixed points and general system of variational inequalities for two accretive operators. Thai J. Math. **9**, 343-360 (2011)

[16] Cai, G, Bu, S: Convergence analysis for variational inequality problems and fixed point problems in 2-uniformly smooth and uniformly convex Banach spaces. Math. Comput. Modelling. **55**, 538-546 (2012)

[17] Cai, G, Bu, S: Strong convergence theorems based on a new modified extragradient method for variational inequality problems and fixed point problems in Banach spaces. Comput. Math. Appl. **62**, 2567-2579 (2011)

[18] Katchang, P, Kumam, P: An iterative algorithm for finding a common solution of fixed points and a general system of variational inequalities for two inverse strongly accretive operators. Positivity. **15**, 281-295 (2011)

[19] Qin, X, Cho, SY, Kang, SM: Convergence of an iterative algorithm for systems of variational inequalities and nonexpansive mappings with applications. J. Comput. Appl. Math. **233**, 231-240 (2009)

2. Objectives

2.1. To construct and study new iterative algorithms for finding a common element of the new general system of variational inequalities and the set of fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces.

2.2 To apply the main results in objective 2.1 with the problem of approximating a zero point of operators in Banach spaces.

2.3. To construct and study a new iterative algorithm for finding a common element of the new general system of variational inequalities and the set of fixed points of nonexpansive mapping in Hilbert spaces.

3. Methodology

3.1. Collect and study all research papers, books and articles in various journals related to the proximal point algorithms for finding a zero of maximal monotone operators and finding a common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings in both Hilbert spaces and Banach spaces.

3.2. Collect and study various knowledge concerning fixed point theory and applications by attending seminars, meeting, and conferences related to fixed point theory and applications

3.3. Apply the problem of finding common fixed point of nonexpansive mappings in Banach spaces with the problem of approximating a zero point of operators in Banach spaces.

3.4. Write research papers concerning our research problems and submit to the international journals.

3.5. Write research report for every sixth months and report to TRF.

II. Research Outputs

- **Papers published in the international journals the following 3 papers.**

1. **Suwicha Imnang**, Viscosity iterative method for a new general system of variational inequalities in Banach spaces, ***Journal of Inequalities and Applications***, (2013), DOI: 10.1186/1029-242X-2013-249.

2. **Suwicha Imnang** and Suthep Suantai, Strong convergence of a viscosity iterative algorithm in Banach spaces with applications, ***Applied Mathematical Sciences***, **10** (2016), 2589-2690.

3. **Suwicha Imnang**, Theeradet Kaewong and Suthep Suantai, Iterative algorithm for solving the new system of generalized variational inequalities in Hilbert spaces, ***International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 110** (2016), 193-209.

- **Papers published in the proceedings the following 2 papers.**

1. **Suwicha Imnang**, Applications of Fixed Point Theory to Solve Generalized Variational Inequality Problems, ***Proceeding of Research Adds Value Leading to Economy and Education Advancement and Sustainability of Thai Society***, Thaksin University, Thailand, 2014, 1503- 1510.
2. **Suwicha Imnang** and Theeradet Kaewong, Applications of Fixed Point Theory to Solve a New System of Generalized Variational Inequality, ***Proceeding of Thai Research: A Vision of Futurity***, Thaksin University, Thailand, 2015, 1354-1360.

III. Appendix

A1: **Suwicha Imnang**, Viscosity iterative method for a new general system of variational inequalities in Banach spaces, ***Journal of Inequalities and Applications***, (2013), DOI: 10.1186/1029-242X-2013-249.

A2: **Suwicha Imnang** and Suthep Suantai, Strong convergence of a viscosity iterative algorithm in Banach spaces with applications, ***Applied Mathematical Sciences***, **10** (2016), 2589-2690.

A3: **Suwicha Imnang**, Theeradet Kaewong and Suthep Suantai, Iterative algorithm for solving the new system of generalized variational inequalities in Hilbert spaces, ***International Journal of Pure and Applied Mathematics,*** **110** (2016), 193-209.

A4: **Suwicha Imnang**, Applications of Fixed Point Theory to Solve Generalized Variational Inequality Problems, ***Proceeding of Research Adds Value Leading to Economy and Education Advancement and Sustainability of Thai Society***, Thaksin University, Thailand, 2014, 1503- 1510.

A5: **Suwicha Imnang** and Theeradet Kaewong, Applications of Fixed Point Theory to Solve a New System of Generalized Variational Inequality, ***Proceeding of Thai Research: A Vision of Futurity***, Thaksin University, Thailand, 2015, 1354-1360.

A1: **Suwicha Imnang**, Viscosity iterative method for a new general system of variational inequalities in Banach spaces, ***Journal of Inequalities and Applications***, (2013), DOI: 10.1186/1029-242X-2013-249.

Journal of Inequalities and Applications
a SpringerOpen Journal

RESEARCH Open Access

Viscosity iterative method for a new general system of variational inequalities in Banach spaces

Suwicha Imnang*

*Correspondence:
suwicha.n@hotmail.com
Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, Thaksin University, Phatthalung Campus, Phatthalung, 93110, Thailand
Centre of Excellence in Mathematics, CHE, Si Ayutthaya Road, Bangkok, 10400, Thailand

Abstract

In this paper, we study a new iterative method for finding a common element of the set of solutions of a new general system of variational inequalities for two different relaxed cocoercive mappings and the set of fixed points of a nonexpansive mapping in real 2-uniformly smooth and uniformly convex Banach spaces. We prove the strong convergence of the proposed iterative method without the condition of weakly sequentially continuous duality mapping. Our result improves and extends the corresponding results announced by many others.

MSC: 46B10; 46B20; 47H10; 49J40

Keywords: a new general system of variational inequalities; relaxed cocoercive mapping; strong convergence

1 Introduction

Let X be a real Banach space and X^* be its dual space. Let C be a subset of X and let T be a self-mapping of C. We use $F(T)$ to denote the set of fixed points of T. The duality mapping $J : X \to 2^{X^*}$ is defined by $J(x) = \{x^* \in X^* | \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2, \|x^*\| = \|x\|\}$, $\forall x \in X$. If X is a Hilbert space, then $J = I$, where I is the identity mapping. It is well-known that if X is smooth, then J is single-valued, which is denoted by j.

Recall that a mapping $f : C \to C$ is a *contraction* on C, if there exists a constant $\alpha \in (0,1)$ such that $\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha\|x - y\|$, $\forall x, y \in C$. We use Π_C to denote the collection of all contractions on C. This is $\Pi_C = \{f | f : C \to C \text{ a contraction}\}$. A mapping $T : C \to C$ is said to be *nonexpansive* if $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|$, $\forall x, y \in C$. Let $A : C \to X$ be a nonlinear mapping. Then A is called

(i) *L-Lipschitz continuous* (or *Lipschitzian*) if there exists a constant $L \geq 0$ such that

$$\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in C;$$

(ii) *accretive* if there exists $j(x - y) \in J(x - y)$ such that

$$\langle Ax - Ay, j(x - y)\rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C;$$

(iii) *α-inverse strongly accretive* if there exist $j(x - y) \in J(x - y)$ and $\alpha > 0$ such that

$$\langle Ax - Ay, j(x - y)\rangle \geq \alpha\|Ax - Ay\|^2, \quad \forall x, y \in C;$$

Springer

© 2013 Imnang; licensee Springer. This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (http://creativecommons.org/licenses/by/2.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

(iv) *relaxed* (c,d)*-cocoercive* if there exist $j(x-y) \in J(x-y)$ and two constants $c,d \geq 0$ such that

$$\langle Ax - Ay, j(x-y)\rangle \geq (-c)\|Ax-Ay\|^2 + d\|x-y\|^2, \quad \forall x,y \in C.$$

Let C be a nonempty closed convex subset of a real Hilbert space H. Recall that the classical variational inequality is to find $x^* \in C$ such that

$$\langle Ax^*, x - x^*\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \tag{1.1}$$

where $A : C \to H$ is a nonlinear mapping. Variational inequality theory has emerged as an important tool in studying a wide class of obstacle, unilateral, free, moving, equilibrium problems arising in several branches of pure and applied sciences in a unified and general framework. The variational inequality problem has been extensively studied in the literature; see [1–8] and the references cited therein.

In 2006, Aoyama *et al.* [9] first considered the following generalized variational inequality problem in Banach spaces. Let $A : C \to X$ be an accretive operator. Find a point $x^* \in C$ such that

$$\langle Ax^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C. \tag{1.2}$$

Problem (1.2) is very interesting as it is connected with the fixed point problem for a nonlinear mapping and the problem of finding a zero point of an accretive operator in Banach spaces; see [10–13] and the references cited therein.

In 2010, Yao *et al.* [14] introduced the following system of general variational inequalities in Banach spaces. For given two operators $A, B : C \to X$, they considered the problem of finding $(x^*, y^*) \in C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle Ay^* + x^* - y^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \\ \langle Bx^* + y^* - x^*, j(x - y^*)\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \end{cases} \tag{1.3}$$

which is called *the system of general variational inequalities in a real Banach space* and the set of solutions of problem (1.3) denoted by Ω_1. Yao *et al.* proved the following strong convergence theorem.

Theorem YNNLY *Let C be a nonempty closed convex subset of a uniformly convex and 2-uniformly smooth Banach space X which admits a weakly sequentially continuous duality mapping. Let Q_C be the sunny nonexpansive retraction from X onto C. Let the mappings $A, B : C \to X$ be α-inverse-strongly accretive with $\alpha \geq K^2$ and β-inverse-strongly accretive with $\beta \geq K^2$, respectively, with $\Omega_1 \neq \emptyset$. For a given $x_0 \in C$, let the sequence $\{x_n\}$ be generated iteratively by*

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - Bx_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n Q_C(y_n - Ay_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

where $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ and $\{\gamma_n\}$ are three sequences in $(0,1)$. Suppose that the sequences $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ and $\{\gamma_n\}$ satisfy the following conditions:

(i) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$, $\forall n \geq 0$;
(ii) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
(iii) $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n \leq 1$.

Then $\{x_n\}$ *converges strongly to* $Q'u$ *where* Q' *is the sunny nonexpansive retraction of* C *onto* Ω_1.

In 2011, Katchang and Kumam [15] introduced the following system of general variational inequalities in Banach spaces. For given two operators $A, B : C \to X$, they considered the problem of finding $(x^*, y^*) \in C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda A y^* + x^* - y^*, j(x - x^*) \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \mu B x^* + y^* - x^*, j(x - y^*) \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{1.4}$$

which is called *the system of general variational inequalities* in a real Banach space and the set of solutions of problem (1.4) denoted by Ω_2. Katchang and Kumam proved the following strong convergence theorem.

Theorem KK *Let* C *be a nonempty closed convex subset of a uniformly convex and* 2*-uniformly smooth Banach space* X *which admits a weakly sequentially continuous duality mapping. Let* $S : C \to C$ *be a nonexpansive mapping and* Q_C *be a sunny nonexpansive retraction from* X *onto* C. *Let the mappings* $A, B : C \to X$ *be* β*-inverse-strongly accretive with* $\beta \geq \lambda K^2$ *and* γ*-inverse-strongly accretive with* $\gamma \geq \mu K^2$, *respectively, and let* K *be the* 2*-uniformly smooth constant of* X. *Let* f *be a contraction of* C *into itself with coefficient* $\alpha \in [0, 1)$. *Suppose that* $F := \Omega_2 \cap F(S) \neq \emptyset$. *For a given* $x_0 = x \in C$, *let the sequence* $\{x_n\}$ *be generated iteratively by*

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - \mu B x_n), \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n x_n + \gamma_n S Q_C(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 0, \end{cases}$$

where $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ *and* $\{\gamma_n\}$ *are three sequences in* $(0, 1)$. *Suppose that the sequences* $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ *and* $\{\gamma_n\}$ *satisfy the following conditions*:

(i) $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$, $\forall n \geq 0$;
(ii) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
(iii) $0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leq \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1$.

Then $\{x_n\}$ *converges strongly to* $\bar{x} = Q_F f(\bar{x})$ *and* $(\bar{x}, \bar{y})$ *is a solution of problem* (1.4), *where* $\bar{y} = Q_C(\bar{x} - \mu B \bar{x})$ *and* Q_F *is the sunny nonexpansive retraction of* C *onto* F.

The problem of finding solutions of (1.4) by using iterative methods has been studied by many others; see [16–19] and the references cited therein.

In this paper, we focus on the problem of finding $(x^*, y^*, z^*) \in C \times C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda_1 A_1 y^* + x^* - y^*, j(x - x^*) \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_2 A_2 z^* + y^* - z^*, j(x - y^*) \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_3 A_3 x^* + z^* - x^*, j(x - z^*) \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{1.5}$$

which is called *a new general system of variational inequalities in Banach spaces*, where $A_i : C \to X$ are three mappings, $\lambda_i > 0$ for all $i = 1, 2, 3$. In particular, if $A_3 = 0$ and $z^* = x^*$,

then problem (1.5) reduces to problem (1.4). If we add up the requirement that $\lambda_i = 1$ for $i = 1, 2$, then problem (1.5) reduces to problem (1.3).

In this paper, motivated and inspired by the idea of Katchang and Kumam [15] and Yao *et al.* [14], we introduce a new iterative method for finding a common element of the set of solutions of a new general system of variational inequalities in Banach spaces for two different relaxed cocoercive mappings and the set of fixed points of a nonexpansive mapping in real 2-uniformly smooth and uniformly convex Banach spaces. We prove the strong convergence of the proposed iterative algorithm without the condition of weakly sequentially continuous duality mapping. Our result improves and extends the corresponding results announced by many others.

2 Preliminaries

In this section, we recall the well-known results and give some useful lemmas that are used in the next section.

Let X be a Banach space and let $U = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ be a unit sphere of X. X is said to be *uniformly convex* if for each $\epsilon \in (0, 2]$, there exists a constant $\delta > 0$ such that for any $x, y \in U$,

$$\|x - y\| \geq \epsilon \quad \text{implies} \quad \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

The norm on X is said to be *Gâteaux differentiable* if the limit

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

exists for each $x, y \in U$ and in this case X is said to be *smooth*. X is said to have a *uniformly Frechet differentiable norm* if the limit (2.1) is attained uniformly for $x, y \in U$ and in this case X is said to be *uniformly smooth*. We define a function $\rho : [0, \infty) \to [0, \infty)$, called the *modulus of smoothness* of X, as follows:

$$\rho(\tau) = \sup\left\{ \frac{1}{2}\big(\|x + y\| + \|x - y\|\big) - 1 : x, y \in X, \|x\| = 1, \|y\| = \tau \right\}.$$

It is known that X is uniformly smooth if and only if $\lim_{\tau \to 0} \rho(\tau)/\tau = 0$. Let q be a fixed real number with $1 < q \leq 2$. Then a Banach space X is said to be *q-uniformly smooth* if there exists a constant $c > 0$ such that $\rho(\tau) \leq c\tau^q$ for all $\tau > 0$. For $q > 1$, the generalized duality mapping $J_q : X \to 2^{X^*}$ is defined by

$$J_q(x) = \left\{ f \in X^* : \langle x, f \rangle = \|x\|^q, \|f\| = \|x\|^{q-1} \right\}, \quad \forall x \in X.$$

In particular, if $q = 2$, the mapping J_2 is called the *normalized duality mapping* (or *duality mapping*), and usually we write $J_2 = J$. If X is a Hilbert space, then $J = I$. Further, we have the following properties of the generalized duality mapping J_q.

(1) $J_q(x) = \|x\|^{q-2} J_2(x)$ for all $x \in X$ with $x \neq 0$.
(2) $J_q(tx) = t^{q-1} J_q(x)$ for all $x \in X$ and $t \in [0, \infty)$.
(3) $J_q(-x) = -J_q(x)$ for all $x \in X$.

It is known that if X is smooth, then J is a single-valued function, which is denoted by j. Recall that the duality mapping j is said to be *weakly sequentially continuous* if for each $\{x_n\} \subset X$ with $x_n \to x$, we have $j(x_n) \to j(x)$ weakly-$*$. We know that if X admits a weakly sequentially continuous duality mapping, then X is smooth. For details, see [20].

Lemma 2.1 [21] *Let X be a q-uniformly smooth Banach space with $1 \leq q \leq 2$. Then*

$$\|x+y\|^q \leq \|x\|^q + q\langle y, J_q(x)\rangle + 2\|Ky\|^q$$

for all $x, y \in X$, where K is the q-uniformly smooth constant of X.

Lemma 2.2 [22] *In a Banach space X, the following inequality holds*:

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, j(x+y)\rangle, \quad \forall x, y \in X,$$

where $j(x+y) \in J(x+y)$.

Lemma 2.3 [23] *Assume that $\{a_n\}$ is a sequence of nonnegative real numbers such that*

$$a_{n+1} \leq (1-\gamma_n)a_n + \delta_n, \quad n \geq 1,$$

where $\{\gamma_n\}$ is a sequence in $(0,1)$ and $\{\delta_n\}$ is a sequence such that
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$;
(ii) $\limsup_{n\to\infty} \delta_n/\gamma_n \leq 0$ *or* $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| < \infty$.
Then $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Let C be a nonempty closed convex subset of a smooth Banach space X and let D be a nonempty subset of C. A mapping $Q : C \to D$ is said to be *sunny* if

$$Q\big(Qx + t(x - Qx)\big) = Qx,$$

whenever $Qx + t(x - Qx) \in C$ for $x \in C$ and $t \geq 0$. A mapping $Q : C \to D$ is called a *retraction* if $Qx = x$ for all $x \in D$. Furthermore, Q is a *sunny nonexpansive retraction* from C onto D if Q is a retraction from C onto D, which is also sunny and nonexpansive. A subset D of C is called a sunny nonexpansive retraction of C if there exists a sunny nonexpansive retraction from C onto D.

It is well known that if X is a Hilbert space, then a sunny nonexpansive retraction Q_C is coincident with the metric projection from X onto C.

Lemma 2.4 [24] *Let C be a closed convex subset of a smooth Banach space X. Let D be a nonempty subset of C and $Q : C \to D$ be a retraction. Then the following are equivalent*:
(a) *Q is sunny and nonexpansive.*
(b) $\|Qx - Qy\|^2 \leq \langle x - y, j(Qx - Qy)\rangle$, $\forall x, y \in C$.
(c) $\langle x - Qx, j(y - Qx)\rangle \leq 0$, $\forall x \in C$, $y \in D$.

Lemma 2.5 [25] *If X is strictly convex and uniformly smooth and if $T : C \to C$ is a nonexpansive mapping having a nonempty fixed point set $F(T)$, then the set $F(T)$ is a sunny nonexpansive retraction of C.*

Lemma 2.6 [26] *Let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be bounded sequences in a Banach space X and let $\{b_n\}$ be a sequence in $[0,1]$ with $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$. Suppose that $x_{n+1} = (1-b_n)y_n + b_n x_n$ for all integers $n \ge 1$ and $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \le 0$. Then $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$.*

Lemma 2.7 [27] *Let C be a closed convex subset of a strictly convex Banach space X. Let T_1 and T_2 be two nonexpansive mappings from C into itself with $F(T_1) \cap F(T_2) \neq \emptyset$. Define a mapping S by*

$$Sx = \lambda T_1 x + (1-\lambda) T_2 x, \quad \forall x \in C,$$

where λ is a constant in $(0,1)$. Then S is nonexpansive and $F(S) = F(T_1) \cap F(T_2)$.

Lemma 2.8 [28] *Let X be a real smooth and uniformly convex Banach space and let $r > 0$. Then there exists a strictly increasing, continuous and convex function $g : [0,2r] \to \mathbb{R}$ such that $g(0) = 0$ and $g(\|x-y\|) \le \|x\|^2 - 2\langle x, j(y)\rangle + \|y\|^2$ for all $x, y \in B_r$.*

Lemma 2.9 [23] *Let X be a uniformly smooth Banach space, let C be a closed convex subset of X, let $T : C \to C$ be a nonexpansive mapping with $F(T) \neq \emptyset$ and let $f \in \Pi_C$. Then the sequence $\{x_t\}$ defined by $x_t = tf(x_t) + (1-t)Tx_t$ converges strongly to a point in $F(T)$ as $t \to 0$. If we define a mapping $Q : \Pi_C \to F(T)$ by $Q(f) := \lim_{t\to 0} x_t$, $\forall f \in \Pi_C$, then $Q(f)$ solves the following variational inequality*:

$$\big\langle (I-f)Q(f), j\big(Q(f)-p\big)\big\rangle \le 0, \quad \forall f \in \Pi_C, p \in F(T).$$

Lemma 2.10 [17] *Let C be a nonempty closed convex subset of a real 2-uniformly smooth Banach space X. Let the mapping $A : C \to X$ be relaxed (c,d)-cocoercive and L_A-Lipschitzian. Then we have*

$$\big\|(I-\lambda A)x - (I-\lambda A)y\big\|^2 \le \|x-y\|^2 + 2\big(\lambda c L_A^2 - \lambda d + K^2\lambda^2 L_A^2\big)\|x-y\|^2,$$

where $\lambda > 0$ and K is the 2-uniformly smooth constant of X. In particular, if $0 < \lambda \le \frac{d - cL_A^2}{K^2 L_A^2}$, then $I - \lambda A$ is a nonexpansive mapping.

In order to prove our main result, the next lemma is crucial for proving the main theorem.

Lemma 2.11 *Let C be a nonempty closed convex subset of a real 2-uniformly smooth Banach space X with the 2-uniformly smooth constant K. Let Q_C be the sunny nonexpansive retraction from X onto C and let $A_i : C \to X$ be a relaxed (c_i, d_i)-cocoercive and L_i-Lipschitzian mapping for $i = 1,2,3$. Let $G : C \to C$ be a mapping defined by*

$$\begin{aligned} G(x) = Q_C\big[&Q_C\big(Q_C(x - \lambda_3 A_3 x) - \lambda_2 A_2 Q_C(x - \lambda_3 A_3 x)\big) \\ &- \lambda_1 A_1 Q_C\big(Q_C(x - \lambda_3 A_3 x) - \lambda_2 A_2 Q_C(x - \lambda_3 A_3 x)\big)\big], \quad \forall x \in C. \end{aligned}$$

If $0 < \lambda_i \le \frac{d_i - c_i L_i^2}{K^2 L_i^2}$ for all $i = 1,2,3$, then $G : C \to C$ is nonexpansive.

Proof For all $x, y \in C$, by Lemma 2.10, we have

$$\begin{aligned}
\|G(x) - G(y)\| &= \|Q_C[Q_C(Q_C(I-\lambda_3A_3)x - \lambda_2A_2Q_C(I-\lambda_3A_3)x) \\
&\quad - \lambda_1A_1Q_C(Q_C(I-\lambda_3A_3)x - \lambda_2A_2Q_C(I-\lambda_3A_3)x)] \\
&\quad - Q_C[Q_C(Q_C(I-\lambda_3A_3)y - \lambda_2A_2Q_C(I-\lambda_3A_3)y) \\
&\quad - \lambda_1A_1Q_C(Q_C(I-\lambda_3A_3)y - \lambda_2A_2Q_C(I-\lambda_3A_3)y)]\| \\
&\le \|Q_C(Q_C(I-\lambda_3A_3)x - \lambda_2A_2Q_C(I-\lambda_3A_3)x) \\
&\quad - \lambda_1A_1Q_C(Q_C(I-\lambda_3A_3)x - \lambda_2A_2Q_C(I-\lambda_3A_3)x) \\
&\quad - [Q_C(Q_C(I-\lambda_3A_3)y - \lambda_2A_2Q_C(I-\lambda_3A_3)y) \\
&\quad - \lambda_1A_1Q_C(Q_C(I-\lambda_3A_3)y - \lambda_2A_2Q_C(I-\lambda_3A_3)y)]\| \\
&= \|(I-\lambda_1A_1)Q_C(I-\lambda_2A_2)Q_C(I-\lambda_3A_3)x \\
&\quad - (I-\lambda_1A_1)Q_C(I-\lambda_2A_2)Q_C(I-\lambda_3A_3)y\| \\
&\le \|x-y\|,
\end{aligned}$$

which implies that G is nonexpansive. □

Lemma 2.12 [29] *Let C be a nonempty closed convex subset of a real smooth Banach space X. Let Q_C be the sunny nonexpansive retraction from X onto C. Let $A_i : C \to X$ be three possibly nonlinear mappings. For given $x^*, y^*, z^* \in C$, (x^*, y^*, z^*) is a solution of problem* (1.5) *if and only if $x^* \in F(G)$, $y^* = Q_C(z^* - \lambda_2A_2z^*)$ and $z^* = Q_C(x^* - \lambda_3A_3x^*)$, where G is the mapping defined as in Lemma* 2.11.

3 Main results

We are now in a position to state and prove our main result.

Theorem 3.1 *Let X be a uniformly convex and* 2*-uniformly smooth Banach space with the* 2*-uniformly smooth constant K, let C be a nonempty closed convex subset of X and Q_C be a sunny nonexpansive retraction from X onto C. Let the mappings $A_i : C \to X$ be relaxed (c_i, d_i)-cocoercive and L_i-Lipschitzian with $0 < \lambda_i < \frac{d_i - c_iL_i^2}{K^2L_i^2}$ for all $i = 1, 2, 3$. Let f be a contractive mapping with the constant $\alpha \in (0,1)$ and let $S : C \to C$ be a nonexpansive mapping such that $\Omega = F(S) \cap F(G) \neq \emptyset$, where G is the mapping defined as in Lemma* 2.11. *For a given $x_1 \in C$, let $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ and $\{z_n\}$ be the sequences generated by*

$$\begin{cases} z_n = Q_C(x_n - \lambda_3A_3x_n), \\ y_n = Q_C(z_n - \lambda_2A_2z_n), \\ x_{n+1} = a_nf(x_n) + b_nx_n + (1-a_n-b_n)SQ_C(y_n - \lambda_1A_1y_n), \quad n \ge 1, \end{cases} \tag{3.1}$$

where $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ are two sequences in $(0,1)$ *such that*

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$.

Then $\{x_n\}$ converges strongly to $q \in \Omega$, which solves the following variational inequality:

$$\langle q - f(q), j(q-p)\rangle \le 0, \quad \forall f \in \Pi_C, p \in \Omega.$$

Proof Step 1. We show that $\{x_n\}$ is bounded.

Let $x^* \in \Omega$ and $t_n = Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n)$. It follows from Lemma 2.12 that

$$\begin{aligned} x^* = Q_C\big[&Q_C\big(Q_C\big(x^* - \lambda_3 A_3 x^*\big) - \lambda_2 A_2 Q_C\big(x^* - \lambda_3 A_3 x^*\big)\big) \\ &- \lambda_1 A_1 Q_C\big(Q_C\big(x^* - \lambda_3 A_3 x^*\big) - \lambda_2 A_2 Q_C\big(x^* - \lambda_3 A_3 x^*\big)\big)\big]. \end{aligned}$$

Put $y^* = Q_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)$ and $z^* = Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)$. Then $x^* = Q_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)$ and

$$x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S t_n.$$

From Lemma 2.10, we have $I - \lambda_i A_i$ $(i = 1, 2, 3)$ is nonexpansive. Therefore

$$\begin{aligned} \|t_n - x^*\| &= \big\|Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - Q_C\big(y^* - \lambda_1 A_1 y^*\big)\big\| \le \|y_n - y^*\| \\ &= \big\|Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - Q_C\big(z^* - \lambda_2 A_2 z^*\big)\big\| \le \|z_n - z^*\| \\ &= \big\|Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n) - Q_C\big(x^* - \lambda_3 A_3 x^*\big)\big\| \le \|x_n - x^*\| \end{aligned} \tag{3.2}$$

and $\|St_n - x^*\| \le \|t_n - x^*\|$. It follows from (3.2) that

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \big\|a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S t_n - x^*\big\| \\ &\le a_n \big\|f(x_n) - x^*\big\| + b_n \|x_n - x^*\| + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\| \\ &\le a_n \big\|f(x_n) - x^*\big\| + (1 - a_n)\|x_n - x^*\| \\ &\le a_n \alpha \|x_n - x^*\| + a_n \big\|f\big(x^*\big) - x^*\big\| + (1 - a_n)\|x_n - x^*\| \\ &= a_n \big\|f\big(x^*\big) - x^*\big\| + \big(1 - a_n(1 - \alpha)\big)\|x_n - x^*\|. \end{aligned}$$

By induction, we have

$$\|x_{n+1} - x^*\| \le \max\left\{\frac{\|f(x^*) - x^*\|}{1 - \alpha}, \|x_1 - x^*\|\right\}.$$

Therefore, $\{x_n\}$ is bounded. Hence $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{t_n\}$, $\{A_1 y_n\}$, $\{A_2 z_n\}$, $\{St_n\}$, $\{f(x_n)\}$ and $\{A_3 x_n\}$ are also bounded.

Step 2. We show that $\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$.

By nonexpansiveness of Q_C and $I - \lambda_i A_i$ $(i = 1, 2, 3)$, we have

$$\begin{aligned} \|t_{n+1} - t_n\| &= \big\|Q_C(y_{n+1} - \lambda_1 A_1 y_{n+1}) - Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n)\big\| \\ &\le \|y_{n+1} - y_n\| \\ &= \big\|Q_C(z_{n+1} - \lambda_2 A_2 z_{n+1}) - Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n)\big\| \\ &\le \|z_{n+1} - z_n\| \\ &= \big\|Q_C(x_{n+1} - \lambda_3 A_3 x_{n+1}) - Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n)\big\| \\ &\le \|x_{n+1} - x_n\|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Let $w_n = \frac{x_{n+1}-b_n x_n}{1-b_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Then $x_{n+1} = b_n x_n + (1-b_n)w_n$ for all $n \in \mathbb{N}$ and

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{x_{n+2} - b_{n+1}x_{n+1}}{1-b_{n+1}} - \frac{x_{n+1} - b_n x_n}{1-b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}f(x_{n+1}) + (1-a_{n+1}-b_{n+1})St_{n+1}}{1-b_{n+1}} - \frac{a_n f(x_n) + (1-a_n-b_n)St_n}{1-b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}\big(f(x_{n+1}) - St_{n+1}\big) + \frac{a_n}{1-b_n}\big(St_n - f(x_n)\big) + St_{n+1} - St_n. \end{aligned} \tag{3.4}$$

By (3.3), (3.4) and nonexpansiveness of S, we have

$$\|w_{n+1} - w_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \le \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}\big\|f(x_{n+1}) - St_{n+1}\big\| + \frac{a_n}{1-b_n}\big\|St_n - f(x_n)\big\|.$$

By this together with (C1) and (C2), we obtain that

$$\limsup_{n\to\infty} \|w_{n+1} - w_n\| - \|x_{n+1} - x_n\| \le 0.$$

Hence, by Lemma 2.6, we get $\|x_n - w_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. Consequently,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty} (1-b_n)\|w_n - x_n\| = 0. \tag{3.5}$$

Step 3. We show that $\lim_{n\to\infty} \|Sx_n - x_n\| = 0$.
Since

$$x_{n+1} - x_n = a_n\big(f(x_n) - x_n\big) + (1-a_n-b_n)(St_n - x_n),$$

therefore

$$\|St_n - x_n\| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \tag{3.6}$$

Next, we prove that $\lim_{n\to\infty} \|x_n - t_n\| = 0$. From Lemma 2.1 and nonexpansiveness of Q_C, we have

$$\begin{aligned} \big\|z_n - z^*\big\|^2 &= \big\|Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n) - Q_C\big(x^* - \lambda_3 A_3 x^*\big)\big\|^2 \\ &\le \big\|x_n - x^* - \lambda_3\big(A_3 x_n - A_3 x^*\big)\big\|^2 \\ &\le \big\|x_n - x^*\big\|^2 - 2\lambda_3\big\langle A_3 x_n - A_3 x^*, j\big(x_n - x^*\big)\big\rangle \\ &\quad + 2K^2\lambda_3^2\big\|A_3 x_n - A_3 x^*\big\|^2 \\ &\le \big\|x_n - x^*\big\|^2 - 2\lambda_3\big(-c_3\big\|A_3 x_n - A_3 x^*\big\|^2 + d_3\big\|x_n - x^*\big\|^2\big) \\ &\quad + 2K^2\lambda_3^2\big\|A_3 x_n - A_3 x^*\big\|^2 \\ &\le \big\|x_n - x^*\big\|^2 + 2\lambda_3 c_3\big\|A_3 x_n - A_3 x^*\big\|^2 - \frac{2\lambda_3 d_3}{L_3^2}\big\|A_3 x_n - A_3 x^*\big\|^2 \\ &\quad + 2K^2\lambda_3^2\big\|A_3 x_n - A_3 x^*\big\|^2 \\ &= \big\|x_n - x^*\big\|^2 - 2\lambda_3\left(\frac{d_3}{L_3^2} - c_3 - K^2\lambda_3\right)\big\|A_3 x_n - A_3 x^*\big\|^2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

and

$$\begin{aligned}
\|y_n - y^*\|^2 &= \|Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - Q_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)\|^2 \\
&\le \|z_n - z^* - \lambda_2(A_2 z_n - A_2 z^*)\|^2 \\
&\le \|z_n - z^*\|^2 - 2\lambda_2\langle A_2 z_n - A_2 z^*, j(z_n - z^*)\rangle \\
&\quad + 2K^2\lambda_2^2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \\
&\le \|z_n - z^*\|^2 - 2\lambda_2(-c_2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 + d_2\|z_n - z^*\|^2) \\
&\quad + 2K^2\lambda_2^2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \\
&\le \|z_n - z^*\|^2 + 2\lambda_2 c_2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 - \frac{2\lambda_2 d_2}{L_2^2}\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \\
&\quad + 2K^2\lambda_2^2\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \\
&= \|z_n - z^*\|^2 - 2\lambda_2\left(\frac{d_2}{L_2^2} - c_2 - K^2\lambda_2\right)\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Similarly, we have

$$\begin{aligned}
\|t_n - x^*\|^2 &= \|Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - Q_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 \\
&\le \|y_n - y^* - \lambda_1(A_1 y_n - A_1 y^*)\|^2 \\
&\le \|y_n - y^*\|^2 - 2\lambda_1\langle A_1 y_n - A_1 y^*, j(y_n - y^*)\rangle \\
&\quad + 2K^2\lambda_1^2\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 \\
&\le \|y_n - y^*\|^2 - 2\lambda_1(-c_1\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 + d_1\|y_n - y^*\|^2) \\
&\quad + 2K^2\lambda_1^2\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 \\
&\le \|y_n - y^*\|^2 + 2\lambda_1 c_1\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 - \frac{2\lambda_1 d_1}{L_1^2}\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 \\
&\quad + 2K^2\lambda_1^2\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2 \\
&= \|y_n - y^*\|^2 - 2\lambda_1\left(\frac{d_1}{L_1^2} - c_1 - K^2\lambda_1\right)\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Substituting (3.7) and (3.8) into (3.9), we have

$$\begin{aligned}
\|t_n - x^*\|^2 \le{}& \|x_n - x^*\|^2 - 2\lambda_3\left(\frac{d_3}{L_3^2} - c_3 - K^2\lambda_3\right)\|A_3 x_n - A_3 x^*\|^2 \\
&- 2\lambda_2\left(\frac{d_2}{L_2^2} - c_2 - K^2\lambda_2\right)\|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2 \\
&- 2\lambda_1\left(\frac{d_1}{L_1^2} - c_1 - K^2\lambda_1\right)\|A_1 y_n - A_1 y^*\|^2. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

By the convexity of $\|\cdot\|^2$, we obtain

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 &= \|a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n)St_n - x^*\|^2 \\
&\le a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|St_n - x^*\|^2 \\
&\le a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\|^2. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Substituting (3.10) into (3.11), we have

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad + (1-a_n-b_n)\Big(\|x_n-x^*\|^2 - 2\lambda_3\Big(\frac{d_3}{L_3^2}-c_3-K^2\lambda_3\Big)\|A_3x_n-A_3x^*\|^2 \\
&\quad - 2\lambda_2\Big(\frac{d_2}{L_2^2}-c_2-K^2\lambda_2\Big)\|A_2z_n-A_2z^*\|^2 \\
&\quad - 2\lambda_1\Big(\frac{d_1}{L_1^2}-c_1-K^2\lambda_1\Big)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2\Big) \\
&= a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + (1-a_n)\|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad - (1-a_n-b_n)2\lambda_3\Big(\frac{d_3}{L_3^2}-c_3-K^2\lambda_3\Big)\|A_3x_n-A_3x^*\|^2 \\
&\quad - (1-a_n-b_n)2\lambda_2\Big(\frac{d_2}{L_2^2}-c_2-K^2\lambda_2\Big)\|A_2z_n-A_2z^*\|^2 \\
&\quad - (1-a_n-b_n)2\lambda_1\Big(\frac{d_1}{L_1^2}-c_1-K^2\lambda_1\Big)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2,
\end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}
&(1-a_n-b_n)2\lambda_3\Big(\frac{d_3}{L_3^2}-c_3-K^2\lambda_3\Big)\|A_3x_n-A_3x^*\|^2 \\
&\quad + (1-a_n-b_n)2\lambda_2\Big(\frac{d_2}{L_2^2}-c_2-K^2\lambda_2\Big)\|A_2z_n-A_2z^*\|^2 \\
&\quad + (1-a_n-b_n)2\lambda_1\Big(\frac{d_1}{L_1^2}-c_1-K^2\lambda_1\Big)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2 \\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + \|x_n-x^*\|^2 - \|x_{n+1}-x^*\|^2 \\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + \|x_n-x_{n+1}\|\big(\|x_n-x^*\| + \|x_{n+1}-x^*\|\big).
\end{aligned}$$

By the conditions (C1), (C2), (3.5) and $0 < \lambda_i < \frac{d_i - c_i L_i^2}{K^2 L_i^2}$ for each $i = 1,2,3$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\|A_3x_n-A_3x^*\| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\|A_2z_n-A_2z^*\| = 0 \quad \text{and} \\
&\lim_{n\to\infty}\|A_1y_n-A_1y^*\| = 0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Let $r = \sup_{n\ge1}\{\|x_n-x^*\|, \|z_n-z^*\|, \|y_n-y^*\|, \|t_n-x^*\|\}$. By Lemma 2.4(b) and Lemma 2.8, we obtain

$$\begin{aligned}
\|t_n-x^*\|^2 &= \|Q_C(y_n-\lambda_1A_1y_n) - Q_C(y^*-\lambda_1A_1y^*)\|^2 \\
&\le \langle y_n-\lambda_1A_1y_n-(y^*-\lambda_1A_1y^*), j(t_n-x^*)\rangle \\
&= \langle y_n-y^*, j(t_n-x^*)\rangle - \lambda_1\langle A_1y_n-A_1y^*, j(t_n-x^*)\rangle \\
&\le \frac{1}{2}\big[\|y_n-y^*\|^2 + \|t_n-x^*\|^2 - g\big(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|\big)\big] \\
&\quad + \lambda_1\langle A_1y^*-A_1y_n, j(t_n-x^*)\rangle,
\end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}\|t_n - x^*\|^2 &\le \|y_n - y^*\|^2 - g(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_1\langle A_1 y^* - A_1 y_n, j(t_n - x^*)\rangle \\ &\le \|y_n - y^*\|^2 - g(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_1\|A_1 y^* - A_1 y_n\|\,\|t_n - x^*\|. \end{aligned} \tag{3.13}$$

And

$$\begin{aligned}\|y_n - y^*\|^2 &= \|Q_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - Q_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)\|^2 \\ &\le \langle z_n - \lambda_2 A_2 z_n - (z^* - \lambda_2 A_2 z^*), j(y_n - y^*)\rangle \\ &= \langle z_n - z^*, j(y_n - y^*)\rangle - \lambda_2\langle A_2 z_n - A_2 z^*, j(y_n - y^*)\rangle \\ &\le \frac{1}{2}[\|z_n - z^*\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 - g(\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\|)] \\ &\quad + \lambda_2\langle A_2 z^* - A_2 z_n, j(y_n - y^*)\rangle, \end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}\|y_n - y^*\|^2 &\le \|z_n - z^*\|^2 - g(\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_2\langle A_2 z^* - A_2 z_n, j(y_n - y^*)\rangle \\ &\le \|z_n - z^*\|^2 - g(\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_2\|A_2 z^* - A_2 z_n\|\,\|y_n - y^*\|. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Similarly, we have

$$\begin{aligned}\|z_n - z^*\|^2 &= \|Q_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n) - Q_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)\|^2 \\ &\le \langle x_n - \lambda_3 A_3 x_n - (x^* - \lambda_3 A_3 x^*), j(z_n - z^*)\rangle \\ &= \langle x_n - x^*, j(z_n - z^*)\rangle - \lambda_3\langle A_3 x_n - A_3 x^*, j(z_n - z^*)\rangle \\ &\le \frac{1}{2}[\|x_n - x^*\|^2 + \|z_n - z^*\|^2 - g(\|x_n - x^* - (z_n - z^*)\|)] \\ &\quad + \lambda_3\langle A_3 x^* - A_3 x_n, j(z_n - z^*)\rangle, \end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}\|z_n - z^*\|^2 &\le \|x_n - x^*\|^2 - g(\|x_n - x^* - (z_n - z^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_3\langle A_3 x^* - A_3 x_n, j(z_n - z^*)\rangle \\ &\le \|x_n - x^*\|^2 - g(\|x_n - x^* - (z_n - z^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_3\|A_3 x^* - A_3 x_n\|\,\|z_n - z^*\|. \end{aligned} \tag{3.15}$$

From (3.11), (3.13), (3.14) and (3.15), we have

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2 + (1-a_n-b_n)\|t_n-x^*\|^2 \\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad + (1-a_n-b_n)\big[\|y_n-y^*\|^2 - g\big(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|\big) \\
&\quad + 2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\,\|t_n-x^*\|\big] \\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad + (1-a_n-b_n)\big[\|z_n-z^*\|^2 - g\big(\|z_n-z^*-(y_n-y^*)\|\big) \\
&\quad + 2\lambda_2\|A_2z^*-A_2z_n\|\,\|y_n-y^*\| - g\big(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|\big) \\
&\quad + 2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\,\|t_n-x^*\|\big] \\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad + (1-a_n-b_n)\big[\|x_n-x^*\|^2 - g\big(\|x_n-x^*-(z_n-z^*)\|\big) \\
&\quad + 2\lambda_3\|A_3x^*-A_3x_n\|\,\|z_n-z^*\| - g\big(\|z_n-z^*-(y_n-y^*)\|\big) \\
&\quad + 2\lambda_2\|A_2z^*-A_2z_n\|\,\|y_n-y^*\| - g\big(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|\big) \\
&\quad + 2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\,\|t_n-x^*\|\big] \\
&= a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + (1-a_n)\|x_n-x^*\|^2 \\
&\quad + (1-a_n-b_n)\big(2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\,\|t_n-x^*\|\big) \\
&\quad + (1-a_n-b_n)\big(2\lambda_2\|A_2z^*-A_2z_n\|\,\|y_n-y^*\|\big) \\
&\quad + (1-a_n-b_n)\big(2\lambda_3\|A_3x^*-A_3x_n\|\,\|z_n-z^*\|\big) \\
&\quad - (1-a_n-b_n)g\big(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|\big) \\
&\quad - (1-a_n-b_n)g\big(\|z_n-z^*-(y_n-y^*)\|\big) \\
&\quad - (1-a_n-b_n)g\big(\|x_n-x^*-(z_n-z^*)\|\big),
\end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}
&(1-a_n-b_n)g\big(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|\big) + (1-a_n-b_n)g\big(\|z_n-z^*-(y_n-y^*)\|\big) \\
&\quad + (1-a_n-b_n)g\big(\|x_n-x^*-(z_n-z^*)\|\big) \\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + \|x_n-x^*\|^2 - \|x_{n+1}-x^*\|^2 \\
&\quad + (1-a_n-b_n)\big(2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\,\|t_n-x^*\|\big) \\
&\quad + (1-a_n-b_n)\big(2\lambda_2\|A_2z^*-A_2z_n\|\,\|y_n-y^*\|\big) \\
&\quad + (1-a_n-b_n)\big(2\lambda_3\|A_3x^*-A_3x_n\|\,\|z_n-z^*\|\big) \\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + \|x_n-x_{n+1}\|\big(\|x_n-x^*\| + \|x_{n+1}-x^*\|\big) \\
&\quad + (1-a_n-b_n)\big(2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\,\|t_n-x^*\|\big) \\
&\quad + (1-a_n-b_n)\big(2\lambda_2\|A_2z^*-A_2z_n\|\,\|y_n-y^*\|\big) \\
&\quad + (1-a_n-b_n)\big(2\lambda_3\|A_3x^*-A_3x_n\|\,\|z_n-z^*\|\big).
\end{aligned}$$

By the conditions (C1), (C2), (3.5) and (3.12), we obtain

$$\lim_{n\to\infty} g\big(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|\big) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} g\big(\|z_n - z^* - (y_n - y^*)\|\big) = 0 \quad \text{and}$$
$$\lim_{n\to\infty} g\big(\|x_n - x^* - (z_n - z^*)\|\big) = 0.$$

It follows from the properties of g that

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - y^* - (t_n - x^*)\| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|z_n - z^* - (y_n - y^*)\| = 0 \quad \text{and}$$
$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x^* - (z_n - z^*)\| = 0.$$

Therefore

$$\begin{aligned}\|x_n - t_n\| &\le \|x_n - z_n - (x^* - z^*)\| + \|z_n - y_n - (z^* - y^*)\| \\ &\quad + \|y_n - t_n - (y^* - x^*)\| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.16}$$

By (3.6) and (3.16), we have

$$\begin{aligned}\|Sx_n - x_n\| &\le \|Sx_n - St_n\| + \|St_n - x_n\| \\ &\le \|x_n - t_n\| + \|St_n - x_n\| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Define a mapping $W : C \to C$ as

$$Wx = \eta Sx + (1-\eta)Gx, \quad \forall x \in C,$$

where η is a constant in $(0,1)$. Then it follows from Lemma 2.7 that $F(W) = F(G) \cap F(S)$ and W is nonexpansive. From (3.16) and (3.17), we have

$$\begin{aligned}\|x_n - Wx_n\| &= \|x_n - (\eta Sx_n + (1-\eta)Gx_n)\| \\ &= \|\eta(x_n - Sx_n) + (1-\eta)(x_n - Gx_n)\| \\ &\le \eta\|x_n - Sx_n\| + (1-\eta)\|x_n - Gx_n\| \\ &= \eta\|x_n - Sx_n\| + (1-\eta)\|x_n - t_n\| \to 0 \quad \text{as } n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Step 4. We claim that

$$\limsup_{n\to\infty} \langle f(q) - q, j(x_n - q)\rangle \le 0, \tag{3.19}$$

where $q = \lim_{t\to 0} x_t$ with x_t being the fixed point of the contraction

$$x \mapsto tf(x) + (1-t)Wx.$$

From Lemma 2.9, we have $q \in F(W) = F(G) \cap F(S) = \Omega$ and

$$\langle (I - f)q, j(q - p)\rangle \le 0, \quad \forall f \in \Pi_C, p \in \Omega.$$

Since $x_t = tf(x_t) + (1-t)Wx_t$, we have

$$\begin{aligned}\|x_t - x_n\| &= \|tf(x_t) + (1-t)Wx_t - x_n\| \\ &= \|(1-t)(Wx_t - x_n) + t\big(f(x_t) - x_n\big)\|.\end{aligned}$$

It follows from (3.18) and Lemma 2.2 that

$$\begin{aligned}\|x_t - x_n\|^2 &= \|(1-t)(Wx_t - x_n) + t\big(f(x_t) - x_n\big)\|^2 \\ &\le (1-t)^2\|Wx_t - x_n\|^2 + 2t\big\langle f(x_t) - x_n, j(x_t - x_n)\big\rangle \\ &\le (1-t)^2\big(\|Wx_t - Wx_n\| + \|Wx_n - x_n\|\big)^2 \\ &\quad + 2t\big\langle f(x_t) - x_n, j(x_t - x_n)\big\rangle \\ &= (1-t)^2\big(\|Wx_t - Wx_n\|^2 + 2\|Wx_t - Wx_n\|\|Wx_n - x_n\| + \|Wx_n - x_n\|^2\big) \\ &\quad + 2t\big\langle f(x_t) - x_t, j(x_t - x_n)\big\rangle + 2t\big\langle x_t - x_n, j(x_t - x_n)\big\rangle \\ &\le \big(1 - 2t + t^2\big)\|x_t - x_n\|^2 + (1-t)^2\big(2\|x_t - x_n\|\|Wx_n - x_n\| + \|Wx_n - x_n\|^2\big) \\ &\quad + 2t\big\langle f(x_t) - x_t, j(x_t - x_n)\big\rangle + 2t\|x_t - x_n\|^2 \\ &= \big(1 + t^2\big)\|x_t - x_n\|^2 + f_n(t) + 2t\big\langle f(x_t) - x_t, j(x_t - x_n)\big\rangle, \end{aligned} \tag{3.20}$$

where $f_n(t) = (1-t)^2(2\|x_t - x_n\| + \|Wx_n - x_n\|)\|Wx_n - x_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. It follows from (3.20) that

$$\big\langle x_t - f(x_t), j(x_t - x_n)\big\rangle \le \frac{t}{2}\|x_t - x_n\|^2 + \frac{f_n(t)}{2t}. \tag{3.21}$$

Let $n \to \infty$ in (3.21), we obtain that

$$\limsup_{n\to\infty}\big\langle x_t - f(x_t), j(x_t - x_n)\big\rangle \le \frac{t}{2}M, \tag{3.22}$$

where $M > 0$ is a constant such that $M \ge \|x_t - x_n\|^2$ for all $t \in (0,1)$ and $n \ge 1$. Let $t \to 0$ in (3.22), we obtain

$$\limsup_{t\to 0}\limsup_{n\to\infty}\big\langle x_t - f(x_t), j(x_t - x_n)\big\rangle \le 0. \tag{3.23}$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned}\big\langle f(q) - q, j(x_n - q)\big\rangle &= \big\langle f(q) - q, j(x_n - q)\big\rangle - \big\langle f(q) - q, j(x_n - x_t)\big\rangle \\ &\quad + \big\langle f(q) - q, j(x_n - x_t)\big\rangle - \big\langle f(q) - x_t, j(x_n - x_t)\big\rangle \\ &\quad + \big\langle f(q) - x_t, j(x_n - x_t)\big\rangle - \big\langle f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t)\big\rangle \\ &\quad + \big\langle f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t)\big\rangle \\ &= \big\langle f(q) - q, j(x_n - q) - j(x_n - x_t)\big\rangle + \big\langle x_t - q, j(x_n - x_t)\big\rangle \\ &\quad + \big\langle f(q) - f(x_t), j(x_n - x_t)\big\rangle + \big\langle f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t)\big\rangle.\end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}\langle f(q)-q, j(x_n-q)\rangle \le{}& \limsup_{n\to\infty}\langle f(q)-q, j(x_n-q)-j(x_n-x_t)\rangle \\ &+ \|x_t-q\|\limsup_{n\to\infty}\|x_n-x_t\| + \alpha\|x_t-q\|\limsup_{n\to\infty}\|x_n-x_t\| \\ &+ \limsup_{n\to\infty}\langle f(x_t)-x_t, j(x_n-x_t)\rangle.\end{aligned}$$

Noticing that j is norm-to-norm uniformly continuous on a bounded subset of C, it follows from (3.23) and $\lim_{t\to 0} x_t = q$ that

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(q)-q, j(x_n-q)\rangle = \limsup_{t\to 0}\limsup_{n\to\infty}\langle f(q)-q, j(x_n-q)\rangle \le 0.$$

Hence (3.19) holds.

Step 5. Finally, we show that $x_n \to q$ as $n\to\infty$.

From (3.2), we have

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2 &= \langle x_{n+1}-q, j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &= \langle a_n(f(x_n)-q) + b_n(x_n-q) + (1-a_n-b_n)(St_n-q), j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &= a_n\langle f(x_n)-f(q), j(x_{n+1}-q)\rangle + b_n\langle x_n-q, j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &\quad + (1-a_n-b_n)\langle St_n-q, j(x_{n+1}-q)\rangle + a_n\langle f(q)-q, j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &\le a_n\alpha\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| + b_n\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| \\ &\quad + (1-a_n-b_n)\|St_n-q\|\|x_{n+1}-q\| + a_n\langle f(q)-q, j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &\le a_n\alpha\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| + b_n\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| \\ &\quad + (1-a_n-b_n)\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| + a_n\langle f(q)-q, j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &= \big(1-a_n(1-\alpha)\big)\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\| + a_n\langle f(q)-q, j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &\le \frac{1-a_n(1-\alpha)}{2}\big(\|x_n-q\|^2 + \|x_{n+1}-q\|^2\big) + a_n\langle f(q)-q, j(x_{n+1}-q)\rangle \\ &\le \frac{1-a_n(1-\alpha)}{2}\|x_n-q\|^2 + \frac{1}{2}\|x_{n+1}-q\|^2 + a_n\langle f(q)-q, j(x_{n+1}-q)\rangle,\end{aligned}$$

which implies

$$\|x_{n+1}-q\|^2 \le \big(1-a_n(1-\alpha)\big)\|x_n-q\|^2 + a_n(1-\alpha)\frac{2\langle f(q)-q, j(x_{n+1}-q)\rangle}{1-\alpha}.$$

It follows from Lemma 2.3, (3.19) and condition (C1) that $\{x_n\}$ converges strongly to q. This completes the proof. □

Example 3.2 Let $X=\mathbb{R}$ and $C=[0,1]$. Define the mappings $S,f: C\to C$ and $A_1, A_2, A_3: C\to X$ as follows:

$$S(x)=\frac{x}{3},\qquad f(x)=\frac{x}{2}+3,\qquad A_1(x)=x,\qquad A_2(x)=2x \quad\text{and}\quad A_3(x)=3x.$$

Then it is obvious that S is nonexpansive, f is contractive with a constant $\alpha = \frac{1}{2}$, A_1 is relaxed $(\frac{1}{2},1)$-cocoercive and 1-Lipschitzian, A_2 is relaxed $(\frac{1}{4},2)$-cocoercive and 2-Lipschitzian and A_3 is relaxed $(\frac{1}{9},3)$-cocoercive and 3-Lipschitzian. In this case, we have $\Omega = F(S) \cap F(G) = \{0\}$. In the terms of Theorem 3.1, we choose the parameters λ_1, λ_2, λ_3. Then the sequence $\{x_n\}$ generated by (3.1) converges to $q = 0 \in \Omega$, which solves the following variational inequality:

$$\langle q - f(q), j(q-p)\rangle \leq 0, \quad \forall p \in \Omega.$$

Let $A_3 = 0$ in Theorem 3.1, we obtain the following result.

Corollary 3.3 *Let X be a uniformly convex and 2-uniformly smooth Banach space with the 2-uniformly smooth constant K, let C be a nonempty closed convex subset of X and Q_C a sunny nonexpansive retraction from X onto C. Let the mappings $A_i : C \to X$ be relaxed (c_i, d_i)-cocoercive and L_i-Lipschitzian with $0 < \lambda_i < \frac{d_i - c_i L_i^2}{K^2 L_i^2}$, for all $i = 1,2$. Let f be a contractive mapping with the constant $\alpha \in (0,1)$ and let $S : C \to C$ be a nonexpansive mapping such that $F = F(S) \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, where Ω_2 is the set of solutions of problem* (1.4). *For a given $x_1 \in C$, let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be the sequences generated by*

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

where $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ are two sequences in $(0,1)$ such that

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$.

Then $\{x_n\}$ converges strongly to $q \in F$, which solves the following variational inequality:

$$\langle q - f(q), j(q-p)\rangle \leq 0, \quad \forall f \in \Pi_C, p \in F.$$

Remark 3.4 (i) Since L^p for all $p \geq 2$ is uniformly convex and 2-uniformly smooth, we see that Theorem 3.1 is applicable to L^p for all $p \geq 2$.

(ii) The problem of finding solutions for a finite number of variational inequalities can use the same idea of a new general system of variational inequalities in Banach spaces.

Competing interests
The author declares that they have no competing interests.

Acknowledgements
The author would like to thank Professor Dr. Suthep Suantai and the reviewer for careful reading, valuable comment and suggestions on this paper. This research is partially supported by the Center of Excellence in Mathematics, the Commission on Higher Education, Thailand. The author also thanks the Thailand Research Fund and Thaksin university for their financial support.

Received: 19 November 2012 Accepted: 2 May 2013 Published: 17 May 2013

References

1. Imnang, S: Iterative method for a finite family of nonexpansive mappings in Hilbert spaces with applications. Appl. Math. Sci. **7**, 103-126 (2013)
2. Imnang, S, Suantai, S: A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems, general system of variational inequality problems, and fixed point problems in Hilbert spaces. ISRN Math. Anal. (2011). doi:10.5402/2011/837809

3. Piri, H: A general iterative method for finding common solutions of system of equilibrium problems, system of variational inequalities and fixed point problems. Math. Comput. Model. **55**, 1622-1638 (2012)
4. Qin, X, Shang, M, Su, Y: Strong convergence of a general iterative algorithm for equilibrium problems and variational inequality problems. Math. Comput. Model. **48**, 1033-1046 (2008)
5. Shehu, Y: Iterative method for fixed point problem, variational inequality and generalized mixed equilibrium problems with applications. J. Glob. Optim. **52**, 57-77 (2012)
6. Wangkeeree, R, Preechasilp, P: A new iterative scheme for solving the equilibrium problems, variational inequality problems, and fixed point problems in Hilbert spaces. J. Appl. Math. (2012). doi:10.1155/2012/154968
7. Yao, Y, Cho, YJ, Chen, R: An iterative algorithm for solving fixed point problems, variational inequalities problems and mixed equilibrium problems. Nonlinear Anal. **71**, 3363-3373 (2009)
8. Yao, Y, Liou, YC, Wong, MM, Yao, JC: Strong convergence of a hybrid method for monotone variational inequalities and fixed point problems. Fixed Point Theory Appl. (2011). doi:10.1186/1687-1812-2011-53
9. Aoyama, K, Iiduka, H, Takahashi, W: Weak convergence of an iterative sequence for accretive operators in Banach spaces. Fixed Point Theory Appl. **2006**, Article ID 35390 (2006)
10. Goebel, K, Reich, S: Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry, and Nonexpansive Mappings. Dekker, New York (1984)
11. Hao, Y: Strong convergence of an iterative method for inverse strongly accretive operators. J. Inequal. Appl. (2008). doi:10.1155/2008/420989
12. Reich, S: Extension problems for accretive sets in Banach spaces. J. Funct. Anal. **26**, 378-395 (1977)
13. Reich, S: Product formulas, nonlinear semigroups, and accretive operators. J. Funct. Anal. **36**, 147-168 (1980)
14. Yao, Y, Noor, MA, Noor, KI, Liou, YC, Yaqoob, H: Modified extragradient method for a system of variational inequalities in Banach spaces. Acta Appl. Math. **110**, 1211-1224 (2010)
15. Katchang, P, Kumam, P: Convergence of iterative algorithm for finding common solution of fixed points and general system of variational inequalities for two accretive operators. Thai J. Math. **9**, 343-360 (2011)
16. Cai, G, Bu, S: Convergence analysis for variational inequality problems and fixed point problems in 2-uniformly smooth and uniformly convex Banach spaces. Math. Comput. Model. **55**, 538-546 (2012)
17. Cai, G, Bu, S: Strong convergence theorems based on a new modified extragradient method for variational inequality problems and fixed point problems in Banach spaces. Comput. Math. Appl. **62**, 2567-2579 (2011)
18. Katchang, P, Kumam, P: An iterative algorithm for finding a common solution of fixed points and a general system of variational inequalities for two inverse strongly accretive operators. Positivity **15**, 281-295 (2011)
19. Qin, X, Cho, SY, Kang, SM: Convergence of an iterative algorithm for systems of variational inequalities and nonexpansive mappings with applications. J. Comput. Appl. Math. **233**, 231-240 (2009)
20. Gossez, JP, Lami Dozo, E: Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings. Pac. J. Math. **40**, 565-573 (1972)
21. Xu, HK: Inequalities in Banach spaces with applications. Nonlinear Anal. **16**, 1127-1138 (1991)
22. Chang, SS: On Chidumes open questions and approximate solutions of multivalued strongly accretive mapping equations in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. **216**, 94-111 (1997)
23. Xu, HK: Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl. **298**, 279-291 (2004)
24. Reich, S: Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. **44**, 57-70 (1973)
25. Kitahara, S, Takahashi, W: Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions. Topol. Methods Nonlinear Anal. **2**, 333-342 (1993)
26. Suzuki, T: Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals. J. Math. Anal. Appl. **305**, 227-239 (2005)
27. Bruck, RE: Properties of fixed point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces. Trans. Am. Math. Soc. **179**, 251-262 (1973)
28. Kamimura, S, Takahashi, W: Strong convergence of a proximal-type algorithm in Banach space. SIAM J. Optim. **12**, 938-945 (2002)
29. Imnang, S, Suantai, S: Strong convergence theorem for a new general system of variational inequalities in Banach spaces. Fixed Point Theory Appl. (2010). doi:10.1155/2010/246808

doi:10.1186/1029-242X-2013-249
Cite this article as: Imnang: **Viscosity iterative method for a new general system of variational inequalities in Banach spaces.** *Journal of Inequalities and Applications* 2013 **2013**:249.

Submit your manuscript to a SpringerOpen journal and benefit from:

- ► Convenient online submission
- ► Rigorous peer review
- ► Immediate publication on acceptance
- ► Open access: articles freely available online
- ► High visibility within the field
- ► Retaining the copyright to your article

Submit your next manuscript at ► springeropen.com

A2: **Suwicha Imnang** and Suthep Suantai, Strong convergence of a viscosity iterative algorithm in Banach spaces with applications, ***Applied Mathematical Sciences***, **10** (2016), 2589-2690.

Applied Mathematical Sciences, Vol. 10, 2016, no. 52, 2589 - 2609
HIKARI Ltd, www.m-hikari.com
http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.66198

Strong Convergence of a Viscosity Iterative Algorithm in Banach Spaces with Applications

Suwicha Imnang[1]

Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science
Thaksin University, Phatthalung, 93210, Thailand
&
Centre of Excellence in Mathematics, CHE, Si Ayutthaya Road
Bangkok 10400, Thailand

Suthep Suantai

Department of Mathematics, Faculty of Science, Chiang Mai University
Chiang Mai, 50200, Thailand
&
Centre of Excellence in Mathematics, CHE, Si Ayutthaya Road
Bangkok 10400, Thailand

Copyright © 2016 Suwicha Imnang and Suthep Suantai. This article is distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract

We present the strong convergence theorems for the viscosity iterative scheme for finding a common element of the solution set of the system of general variational inequalities for two arbitrary nonlinear mappings and the fixed point set of a nonexpansive mapping in real 2-uniformly smooth and uniformly convex Banach spaces. Furthermore, we apply our main result with the problem of approximating a zero point of accretive operators and a fixed point of strictly pseudocontractive mappings in Banach spaces. The main results presented in this paper improve and extend some results in the literature.

Keywords: Strong convergence; General variational inequality; Zero point; Nonexpansive mapping

[1]Corresponding author

1 Introduction

Let X be a real Banach space and X^* be its dual space. Let C be a subset of X and let T be a self-mapping of C. We use $F(T)$ to denote the set of fixed points of T. Let $U = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ be a unit sphere of X. X is said to be *uniformly convex* if for each $\epsilon \in (0, 2]$, there exists a constant $\delta > 0$ such that for any $x, y \in U$,

$$\|x - y\| \geq \epsilon \text{ implies } \|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta.$$

The norm on X is said to be *Gâteaux differentiable* if the limit

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{1.1}$$

exists for each $x, y \in U$ and in this case X is said to be *smooth*. X is said to have a *uniformly Frechet differentiable norm* if the limit (1.1) is attained uniformly for $x, y \in U$ and in this case X is said to be *uniformly smooth*. We define a function $\rho : [0, \infty) \to [0, \infty)$, called the *modulus of smoothness* of X, as follows:

$$\rho(\tau) = \sup\{\frac{1}{2}(\|x + y\| + \|x - y\|) - 1 : x, y \in X, \|x\| = 1, \|y\| = \tau\}.$$

It is known that X is uniformly smooth if and only if $\lim_{\tau\to 0} \rho(\tau)/\tau = 0$. Let q be a fixed real number with $1 < q \leq 2$. Then a Banach space X is said to be *q-uniformly smooth* if there exists a constant $c > 0$ such that $\rho(\tau) \leq c\tau^q$ for all $\tau > 0$. For $q > 1$, the generalized duality mapping $J_q : X \to 2^{X^*}$ is defined by

$$J_q(x) = \{f \in X^* : \langle x, f\rangle = \|x\|^q, \|f\| = \|x\|^{q-1}\}, \quad \forall x \in X.$$

In particular, if $q = 2$, the mapping J_2 is called the *normalized duality mapping* (or *duality mapping*), and usually we write $J_2 = J$. If X is a Hilbert space, then $J = I$. Further, we have the following properties of the generalized duality mapping J_q:
(1) $J_q(x) = \|x\|^{q-2}J_2(x)$ for all $x \in X$ with $x \neq 0$.
(2) $J_q(tx) = t^{q-1}J_q(x)$ for all $x \in X$ and $t \in [0, \infty)$.
(3) $J_q(-x) = -J_q(x)$ for all $x \in X$.

It is known that if X is smooth, then J is a single-valued function, which is denoted by j. Recall that the duality mapping j is said to be *weakly sequentially continuous* if for each $\{x_n\} \subset X$ with $x_n \to x$ weakly, we have $j(x_n) \to j(x)$ weakly-$*$. We know that if X admits a weakly sequentially continuous duality mapping, then X is smooth. Recall that a mapping $f : C \to C$ is a *contraction* on C, if there exists a constant $\alpha \in (0, 1)$ such that $\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha\|x - y\|$, $\forall x, y \in C$. We use Π_C to denote the collection of

all contractions on C. This is $\Pi_C = \{f | f : C \to C \text{ a contraction}\}$. A mapping $T : C \to C$ is said to be *nonexpansive*, if $\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\|, \ \ \forall x, y \in C$. Let $A : C \to X$ be a nonlinear mapping. Then A is called

(i) *L-Lipschitz continuous* (or *Lipschitzian*) if there exists a constant $L \geq 0$ such that
$\|Ax - Ay\| \leq L\|x - y\|, \ \ \forall x, y \in C$;

(ii) *accretive* if there exists $j(x - y) \in J(x - y)$ such that
$\langle Ax - Ay, j(x - y)\rangle \geq 0, \ \ \forall x, y \in C$;

(iii) α- *inverse strongly accretive* if there exist $j(x-y) \in J(x-y)$ and $\alpha > 0$ such that
$\langle Ax - Ay, j(x - y)\rangle \geq \alpha\|Ax - Ay\|^2, \ \ \forall x, y \in C$;

(iv) *relaxed* (c, d)- *cocoercive* if there exist $j(x - y) \in J(x - y)$ and two constants $c, d \geq 0$ such that
$\langle Ax - Ay, j(x - y)\rangle \geq (-c)\|Ax - Ay\|^2 + d\|x - y\|^2, \ \ \forall x, y \in C$.

Let C be a nonempty closed convex subset of a real Hilbert space H. Recall that the classical variational inequality is to find $x^* \in C$ such that

$$\langle Ax^*, x - x^*\rangle \geq 0, \ \ \forall x \in C,$$

where $A : C \to H$ is a nonlinear mapping. Variational inequality theory has emerged as an important tool in studying a wide class of obstacle, unilateral, free, moving, equilibrium problems arising in several branches of pure and applied sciences in a unified and general framework. The variational inequality problem has been extensively studied in the literature (see [1, 2, 3]).

In 2006, Aoyama et al. [4] first considered the following generalized variational inequality problem in Banach spaces. Let $A : C \to X$ be an accretive operator. Find a point $x^* \in C$ such that

$$\langle Ax^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, \ \ \forall x \in C. \tag{1.2}$$

The set of solutions of problem (1.2) denoted by $S(C, A)$. The problem (1.2) is very interesting as it is connected with the fixed point problem for nonlinear mapping and the problem of finding a zero point of an accretive operator in Banach spaces (see [4]). For the problem of finding a zero point of a nonlinear mapping (see [5, 6, 7]).

In 2010, Yao et al. [8] introduced the following system of general variational inequalities in Banach spaces. For given two operators $A_1, A_2 : C \to X$, they considered the problem of finding $(x^*, y^*) \in C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle A_1 y^* + x^* - y^*, j(x - x^*)\rangle \geq 0, \ \ \forall x \in C, \\ \langle A_2 x^* + y^* - x^*, j(x - y^*)\rangle \geq 0, \ \ \forall x \in C, \end{cases} \tag{1.3}$$

which is called *the system of general variational inequalities in a real Banach space*. Recently, Katchang and Kumam [9] introduced the following system of general variational inequalities in Banach spaces. For given two operators $A_1, A_2 : C \to X$, they considered the problem of finding $(x^*, y^*) \in C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda_1 A_1 y^* + x^* - y^*, j(x - x^*) \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_2 A_2 x^* + y^* - x^*, j(x - y^*) \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{1.4}$$

which is called *the system of general variational inequalities* in a real Banach space. The problem of finding solutions of (1.4) by using iterative methods has been studied by many others (see [10, 11, 12, 13]).

In this paper, motivated and inspired by the idea of Yao et al. [8] and Katchang and Kumam [9], we introduce a new iterative method for finding a common element of the set of solutions of the system of general variational inequalities in Banach spaces for two arbitrary nonlinear mappings and the set of fixed points of a nonexpansive mapping in real 2- uniformly smooth and uniformly convex Banach spaces. We prove the strong convergence of the proposed iterative algorithm without the condition of weakly sequentially continuous duality mapping. Our result improves and extends the recent results of Yao et al. [8] and Katchang and Kumam [9].

2 Preliminaries

In this section, we recall the well-known results and give some useful lemmas that are used in the next section.

Lemma 2.1. (see [14]). *Let X be a q-uniformly smooth Banach space with $1 \leq q \leq 2$. Then*

$$\|x + y\|^q \leq \|x\|^q + q\langle y, J_q(x) \rangle + 2\|Ky\|^q$$

for all $x, y \in X$, where K is the q-uniformly smooth constant of X.

Lemma 2.2. (see [15]). *In a Banach space X, the following inequality holds:*

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y) \rangle, \quad \forall x, y \in X,$$

where $j(x + y) \in J(x + y)$.

Lemma 2.3. (see [16]). Assume that $\{a_n\}$ is a sequence of nonnegative real numbers such that

$a_{n+1} \leq (1 - \gamma_n)a_n + \delta_n, \quad n \geq 1,$

where $\{\gamma_n\}$ is a sequence in $(0,1)$ and $\{\delta_n\}$ is a sequence such that
(i) $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n=\infty$;
(ii) $\limsup_{n\to\infty}\delta_n/\gamma_n\le 0$ or $\sum_{n=1}^{\infty}|\delta_n|<\infty$.
Then $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

Let C be a nonempty closed convex subset of a smooth Banach space X and let D be a nonempty subset of C. A mapping $Q:C\to D$ is said to be *sunny* if

$$Q\big(Qx+t(x-Qx)\big)=Qx,$$

whenever $Qx+t(x-Qx)\in C$ for $x\in C$ and $t\ge 0$. A mapping $Q:C\to D$ is called a *retraction* if $Qx=x$ for all $x\in D$. Furthermore, Q is a *sunny nonexpansive retraction* from C onto D if Q is a retraction from C onto D, which is also sunny and nonexpansive. A subset D of C is called a sunny nonexpansive retraction of C if there exists a sunny nonexpansive retraction from C onto D.

It is well known that if X is a Hilbert space, then a sunny nonexpansive retraction Q_C is coincident with the metric projection from X onto C.

Lemma 2.4. (see [17]). Let C be a closed convex subset of a smooth Banach space X. Let D be a nonempty subset of C and $Q:C\to D$ be a retraction. Then the following are equivalent:
(a) Q is sunny and nonexpansive.
(b) $\|Qx-Qy\|^2\le\langle x-y,j(Qx-Qy)\rangle\ \forall x,y\in C$.
(c) $\langle x-Qx,j(y-Qx)\rangle\le 0,\ \forall x\in C,y\in D$.

Lemma 2.5. (see [18]). If X is strictly convex and uniformly smooth and if $T:C\to C$ is a nonexpansive mapping having a nonempty fixed point set $F(T)$, then the set $F(T)$ is a sunny nonexpansive retraction of C.

Lemma 2.6. (see [19]). *Let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be bounded sequences in a Banach space X and let $\{b_n\}$ be a sequence in $[0,1]$ with $0<\liminf_{n\to\infty}b_n\le\limsup_{n\to\infty}b_n<1$. Suppose that $x_{n+1}=(1-b_n)y_n+b_nx_n$ for all integers $n\ge 1$ and $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1}-y_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|)\le 0$. Then, $\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=0$.*

Lemma 2.7. (see [20]). *Let C be a closed convex subset of a strictly convex Banach space X. Let T_1 and T_2 be two nonexpansive mappings from C into itself with $F(T_1)\bigcap F(T_2)\ne\emptyset$. Define a mapping S by*

$$Sx=\lambda T_1x+(1-\lambda)T_2x,\quad\forall x\in C,$$

where λ is a constant in $(0,1)$. Then S is nonexpansive and $F(S)=F(T_1)\bigcap F(T_2)$.

Lemma 2.8. (see [21]). *Let X be a real smooth and uniformly convex Banach space and let $r>0$. Then there exists a strictly increasing, continuous and convex function $g:[0,2r]\to\mathbb{R}$ such that $g(0)=0$ and $g(\|x-y\|)\le\|x\|^2-2\langle x,j(y)\rangle+\|y\|^2$ for all $x,y\in B_r$.*

Lemma 2.9. (see [16]). *Let X be a uniformly smooth Banach space, C be a closed convex subset of X, $T : C \to C$ be a nonexpansive mapping with $F(T) \neq \emptyset$ and let $f \in \Pi_C$. Then the sequence $\{x_t\}$ defined by $x_t = tf(x_t) + (1-t)Tx_t$ converges strongly to a point in $F(T)$ as $t \to 0$. If we define a mapping $Q : \Pi_C \to F(T)$ by $Q(f) := \lim_{t\to 0} x_t, \quad \forall f \in \Pi_C$, then $Q(f)$ solves the following variational inequality:*

$$\langle (I-f)Q(f), j(Q(f)-p)\rangle \leq 0, \quad \forall f \in \Pi_C,\ p \in F(T).$$

Next, we prove a lemma which is very useful for our consideration.

Lemma 2.10. *Let C be a nonempty closed convex subset of a real Banach space X and let $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ and $A_1, A_2 : C \to X$ be two mappings. Let $G : C \to C$ be defined by*

$$G(x) = Q_C[Q_C(x - \lambda_2 A_2 x) - \lambda_1 A_1 Q_C(x - \lambda_2 A_2 x)], \quad \forall x \in C.$$

If $I - \lambda_1 A_1$ and $I - \lambda_2 A_2$ are nonexpansive mappings, then G is nonexpansive.

Proof. For any $x, y \in C$, we have

$$\begin{aligned}
\|G(x) - G(y)\| &= \|Q_C[Q_C(x - \lambda_2 A_2 x) - \lambda_1 A_1 Q_C(x - \lambda_2 A_2 x)] \\
&\quad - Q_C[Q_C(y - \lambda_2 A_2 y) - \lambda_1 A_1 Q_C(y - \lambda_2 A_2 y)]\| \\
&\leq \|Q_C(x - \lambda_2 A_2 x) - \lambda_1 A_1 Q_C(x - \lambda_2 A_2 x) \\
&\quad - (Q_C(y - \lambda_2 A_2 y) - \lambda_1 A_1 Q_C(y - \lambda_2 A_2 y)\| \\
&= \|(I - \lambda A_1)Q_C(I - \lambda_2 A_2)x - (I - \lambda_1 A_1)Q_C(I - \lambda_2 A_2)y\| \\
&\leq \|x - y\|.
\end{aligned}$$

This show that G is a nonexpansive mapping. □

Lemma 2.11. (see [9]). *Let C be a nonempty closed convex subset of a real smooth Banach space X. Let Q_C be the sunny nonexpansive retraction from X onto C. Let $A_1, A_2 : C \to X$ be two possibly nonlinear mappings. For given $x^*, y^* \in C$, (x^*, y^*) is a solution of problem (1.4) if and only if $x^* = Q_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)$ where $y^* = Q_C(x^* - \lambda_2 A_2 x^*)$.*

Remark 2.1. From Lemma 2.11, we note that

$$x^* = Q_C[Q_C(x^* - \lambda_2 A_2 x^*) - \lambda_1 A_1 Q_C(x^* - \lambda_2 A_2 x^*)],$$

which implies that x^* is a fixed point of the mapping G, which defined as in Lemma 2.10.

3 Main results

We are now in a position to state and prove our main result.

Theorem 3.1. *Let X be a uniformly convex and 2-uniformly smooth Banach space with the 2-uniformly smooth constant K, let C be a nonempty closed convex subset of X and Q_C be a sunny nonexpansive retraction from X onto C. Let $A_1, A_2 : C \to X$ be two mappings. Let f be a contractive mapping with the constant $\alpha \in (0,1)$ and let $S : C \to C$ be a nonexpansive mapping such that $\Omega = F(S) \bigcap F(G) \neq \emptyset$, where G is the mapping defined as in Lemma 2.10. For a given $x_1 \in C$, let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be the sequences generated by*

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + c_n S Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

where $\{a_n\}, \{b_n\}$ and $\{c_n\}$ are three sequences in $(0,1)$ such that

(i) $a_n + b_n + c_n = 1, \quad \forall n \geq 1$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(iii) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$.

If $I - \lambda_1 A_1$, $I - \lambda_2 A_2$ are nonexpansive and $\lim_{n\to\infty} \|A_1 y_n - A_1 y^*\| = \lim_{n\to\infty} \|A_2 x_n - A_2 x^*\| = 0$ for all $x^* \in \Omega$ and $y^* = Q_C(x^* - \lambda_2 A_2 x^*)$. Then $\{x_n\}$ converges strongly to $q \in \Omega$, which solves the following variational inequality:

$$\langle q - f(q), j(q - p) \rangle \leq 0, \quad \forall f \in \Pi_C, \ p \in \Omega.$$

Proof. Step 1. We show that $\{x_n\}$ is bounded.
Let $x^* \in \Omega$ and $t_n = Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n)$. It follows from Lemma 2.11 that

$$x^* = Q_C[Q_C(x^* - \lambda_2 A_2 x^*) - \lambda_1 A_1 Q_C(x^* - \lambda_2 A_2 x^*)].$$

Put $y^* = Q_C(x^* - \lambda_2 A_2 x^*)$, then $x^* = Q_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)$ and

$$x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + c_n S t_n.$$

Since $I - \lambda_i A_i$ $(i = 1, 2)$ and Q_C are nonexpansive. Therefore

$$\begin{aligned} \|t_n - x^*\| &= \|Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - Q_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\| \leq \|y_n - y^*\| \\ &= \|Q_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n) - Q_C(x^* - \lambda_2 A_2 x^*)\| \leq \|x_n - x^*\| \end{aligned} \tag{3.1}$$

and $\|St_n - x^*\| \leq \|t_n - x^*\|$. It follows that

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|a_n f(x_n) + b_n x_n + c_n S t_n - x^*\| \\ &\leq a_n \|f(x_n) - x^*\| + b_n \|x_n - x^*\| + c_n \|t_n - x^*\| \\ &\leq a_n \|f(x_n) - x^*\| + (1 - a_n)\|x_n - x^*\| \\ &\leq a_n \alpha \|x_n - x^*\| + a_n \|f(x^*) - x^*\| + (1 - a_n)\|x_n - x^*\| \\ &= a_n \|f(x^*) - x^*\| + (1 - a_n(1 - \alpha))\|x_n - x^*\|. \end{aligned}$$

By induction, we have

$$\|x_{n+1}-x^*\| \leq \max\{\frac{\|f(x^*)-x^*\|}{1-\alpha}, \|x_1-x^*\|\}.$$

Therefore, $\{x_n\}$ is bounded. Hence $\{y_n\}$, $\{t_n\}$, $\{A_1y_n\}$, $\{A_2x_n\}$, $\{St_n\}$ and $\{f(x_n)\}$ are also bounded.

Step 2. We show that $\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0$.
By nonexpansiveness of Q_C and $I-\lambda_iA_i$ $(i=1,2)$, we have

$$\begin{aligned}\|t_{n+1}-t_n\| &= \|Q_C(y_{n+1}-\lambda_1A_1y_{n+1})-Q_C(y_n-\lambda_1A_1y_n)\| \\ &\leq \|y_{n+1}-y_n\| = \|Q_C(x_{n+1}-\lambda_2A_2x_{n+1})-Q_C(x_n-\lambda_2A_2x_n)\| \\ &\leq \|x_{n+1}-x_n\|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Let $w_n=\frac{x_{n+1}-b_nx_n}{1-b_n}$, $n\in\mathbb{N}$. Then $x_{n+1}=b_nx_n+(1-b_n)w_n$ for all $n\in\mathbb{N}$ and

$$\begin{aligned}w_{n+1}-w_n &= \frac{x_{n+2}-b_{n+1}x_{n+1}}{1-b_{n+1}}-\frac{x_{n+1}-b_nx_n}{1-b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}f(x_{n+1})+c_{n+1}St_{n+1}}{1-b_{n+1}}-\frac{a_nf(x_n)+c_nSt_n}{1-b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}(f(x_{n+1})-St_{n+1})+\frac{a_n}{1-b_n}(St_n-f(x_n))+St_{n+1}-St_n.\end{aligned} \tag{3.3}$$

By (3.2), (3.3) and nonexpansiveness of S, we have

$$\|w_{n+1}-w_n\|-\|x_{n+1}-x_n\| \leq \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}\|f(x_{n+1})-St_{n+1}\|+\frac{a_n}{1-b_n}\|St_n-f(x_n)\|.$$

By this together with the conditions (ii) and (iii), we obtain that

$$\limsup_{n\to\infty}\|w_{n+1}-w_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|\leq 0.$$

Hence, by Lemma 2.6, we get $\|x_n-w_n\|\to 0$ as $n\to\infty$. Consequently,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\| = \lim_{n\to\infty}(1-b_n)\|w_n-x_n\| = 0. \tag{3.4}$$

Step 3. We show that $\lim_{n\to\infty}\|Sx_n-x_n\|=0$.
Since

$$x_{n+1}-x_n = a_n(f(x_n)-x_n)+c_n(St_n-x_n),$$

it follows from (3.4) and the conditions (i)-(iii) that

$$\|St_n-x_n\|\to 0$$

as $n \to \infty$.(3.5)Let $r = \sup_{n\geq 1}\{\|x_n - x^*\|, \|y_n - y^*\|, \|t_n - x^*\|\}$. By Lemma 2.4 (b) and Lemma 2.8, we obtain

$$\begin{aligned}\|t_n - x^*\|^2 &= \|Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - Q_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 \\ &\leq \langle y_n - \lambda_1 A_1 y_n - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*), j(t_n - x^*)\rangle \\ &= \langle y_n - y^*, j(t_n - x^*)\rangle - \lambda_1\langle A_1 y_n - A_1 y^*, j(t_n - x^*)\rangle \\ &\leq \frac{1}{2}[\|y_n - y^*\|^2 + \|t_n - x^*\|^2 - g(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|)] \\ &\quad + \lambda_1\langle A_1 y^* - A_1 y_n, j(t_n - x^*)\rangle,\end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}\|t_n - x^*\|^2 &\leq \|y_n - y^*\|^2 - g(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_1\langle A_1 y^* - A_1 y_n, j(t_n - x^*)\rangle \\ &\leq \|y_n - y^*\|^2 - g(\|y_n - y^* - (t_n - x^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_1\|A_1 y^* - A_1 y_n\|\|t_n - x^*\|. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

Similarly, we have

$$\begin{aligned}\|y_n - y^*\|^2 &= \|Q_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n) - Q_C(x^* - \lambda_2 A_2 x^*)\|^2 \\ &\leq \langle x_n - \lambda_2 A_2 x_n - (x^* - \lambda_2 A_2 x^*), j(y_n - y^*)\rangle \\ &= \langle x_n - x^*, j(y_n - y^*)\rangle - \lambda_2\langle A_2 x_n - A_2 x^*, j(y_n - y^*)\rangle \\ &\leq \frac{1}{2}[\|x_n - x^*\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 - g(\|x_n - x^* - (y_n - y^*)\|)] \\ &\quad + \lambda_2\langle A_2 x^* - A_2 x_n, j(y_n - y^*)\rangle,\end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}\|y_n - y^*\|^2 &\leq \|x_n - x^*\|^2 - g(\|x_n - x^* - (y_n - y^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_2\langle A_2 x^* - A_2 x_n, j(y_n - y^*)\rangle \\ &\leq \|x_n - x^*\|^2 - g(\|x_n - x^* - (y_n - y^*)\|) \\ &\quad + 2\lambda_2\|A_2 x^* - A_2 x_n\|\|y_n - y^*\|. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

From (3.6), (3.7) and the convexity of $\|.\|^2$, we have

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\leq a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+c_n\|t_n-x^*\|^2\\ &\leq a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\ &\quad+c_n[\|y_n-y^*\|^2-g(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|)\\ &\quad+2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\|t_n-x^*\|]\\ &\leq a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\ &\quad+c_n[\|x_n-x^*\|^2-g(\|x_n-x^*-(y_n-y^*)\|)\\ &\quad+2\lambda_2\|A_2x^*-A_2x_n\|\|y_n-y^*\|-g(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|)\\ &\quad+2\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\|t_n-x^*\|]\\ &= a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+(1-a_n)\|x_n-x^*\|^2\\ &\quad+2c_n\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\|t_n-x^*\|+2c_n\lambda_2\|A_2x^*-A_2x_n\|\|y_n-y^*\|\\ &\quad-c_ng(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|)-c_ng(\|x_n-x^*-(y_n-y^*)\|),\end{aligned}$$

which implies

$$\begin{aligned}&c_ng(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|)+c_ng(\|x_n-x^*-(y_n-y^*)\|)\\ &\leq a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2-\|x_{n+1}-x^*\|^2\\ &\quad+2c_n\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\|t_n-x^*\|+2c_n\lambda_2\|A_2x^*-A_2x_n\|\|y_n-y^*\|\\ &\leq a_n\|f(x_n)-x^*\|^2+\|x_n-x_{n+1}\|(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\\ &\quad+2c_n\lambda_1\|A_1y^*-A_1y_n\|\|t_n-x^*\|+2c_n\lambda_2\|A_2x^*-A_2x_n\|\|y_n-y^*\|.\end{aligned}$$

By the conditions (ii)-(iii), (3.4) and $\lim_{n\to\infty}\|A_1y_n-A_1y^*\|=\lim_{n\to\infty}\|A_2x_n-A_2x^*\|=0$, we obtain

$$\lim_{n\to\infty}g(\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|)=0 \text{ and } \lim_{n\to\infty}g(\|x_n-x^*-(y_n-y^*)\|)=0.$$

It follows from the properties of g that

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-y^*-(t_n-x^*)\|=0 \text{ and } \lim_{n\to\infty}\|x_n-x^*-(y_n-y^*)\|=0.$$

Hence

$$\|x_n-t_n\|\leq\|x_n-y_n-(x^*-y^*)\|+\|y_n-t_n-(y^*-x^*)\|\to 0 \text{ as } n\to\infty. \tag{3.8}$$

By (3.5) and (3.8), we have

$$\begin{aligned}\|Sx_n-x_n\|&\leq\|Sx_n-St_n\|+\|St_n-x_n\|\\ &\leq\|x_n-t_n\|+\|St_n-x_n\|\to 0 \text{ as } n\to\infty.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Define a mapping $W : C \to C$ as

$$Wx = \eta Sx + (1-\eta)Gx, \quad \forall x \in C,$$

where η is a constant in $(0,1)$. Then, it follows from Lemma 2.7 that $F(W) = F(G)\bigcap F(S)$ and W is nonexpansive. From (3.8) and (3.9), we have

$$\begin{aligned}\|x_n - Wx_n\| &= \|x_n - (\eta Sx_n + (1-\eta)Gx_n)\| \\ &= \|\eta(x_n - Sx_n) + (1-\eta)(x_n - Gx_n)\| \\ &\le \eta\|x_n - Sx_n\| + (1-\eta)\|x_n - Gx_n\| \\ &= \eta\|x_n - Sx_n\| + (1-\eta)\|x_n - t_n\| \to 0 \ \text{ as } n \to \infty. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Step 4. We claim that

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(q) - q, j(x_n - q)\rangle \le 0, \tag{3.11}$$

where $q = \lim_{t\to 0} x_t$ with x_t being the fixed point of the contraction

$$x \mapsto tf(x) + (1-t)Wx.$$

From Lemma 2.9, we have $q \in F(W) = F(G)\bigcap F(S) = \Omega$ and

$$\langle (I-f)q, j(q-p)\rangle \le 0, \quad \forall f \in \Pi_C, \ p \in \Omega.$$

Since $x_t = tf(x_t) + (1-t)Wx_t$, we have

$$\begin{aligned}\|x_t - x_n\| &= \|tf(x_t) + (1-t)Wx_t - x_n\| \\ &= \|(1-t)(Wx_t - x_n) + t(f(x_t) - x_n)\|.\end{aligned}$$

It follows from (3.10) and Lemma 2.2 that

$$\begin{aligned}&\|x_t - x_n\|^2 = \|(1-t)(Wx_t - x_n) + t(f(x_t) - x_n)\|^2 \\ &\le (1-t)^2\|Wx_t - x_n\|^2 + 2t\langle f(x_t) - x_n, j(x_t - x_n)\rangle \\ &\le (1-t)^2(\|Wx_t - Wx_n\| + \|Wx_n - x_n\|)^2 + 2t\langle f(x_t) - x_n, j(x_t - x_n)\rangle \\ &= (1-t)^2(\|Wx_t - Wx_n\|^2 + 2\|Wx_t - Wx_n\|\|Wx_n - x_n\| + \|Wx_n - x_n\|^2) \\ &\quad + 2t\langle f(x_t) - x_t, j(x_t - x_n)\rangle + 2t\langle x_t - x_n, j(x_t - x_n)\rangle \\ &\le (1 - 2t + t^2)\|x_t - x_n\|^2 + (1-t)^2(2\|x_t - x_n\|\|Wx_n - x_n\| + \|Wx_n - x_n\|^2) \\ &\quad + 2t\langle f(x_t) - x_t, j(x_t - x_n)\rangle + 2t\|x_t - x_n\|^2 \\ &= (1+t^2)\|x_t - x_n\|^2 + f_n(t) + 2t\langle f(x_t) - x_t, j(x_t - x_n)\rangle, \end{aligned} \tag{3.12}$$

where $f_n(t) = (1-t)^2(2\|x_t - x_n\| + \|Wx_n - x_n\|)\|Wx_n - x_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. It follows from (3.12) that

$$\langle x_t - f(x_t), j(x_t - x_n)\rangle \le \frac{t}{2}\|x_t - x_n\|^2 + \frac{f_n(t)}{2t}. \tag{3.13}$$

Let $n \to \infty$ in (3.13), we obtain that

$$\limsup_{n\to\infty}\langle x_t - f(x_t), j(x_t - x_n)\rangle \leq \frac{t}{2}M, \tag{3.14}$$

where $M > 0$ is a constant such that $M \geq \|x_t - x_n\|^2$ for all $t \in (0,1)$ and $n \geq 1$. Let $t \to 0$ in (3.14), we obtain

$$\limsup_{t\to 0}\limsup_{n\to\infty}\langle x_t - f(x_t), j(x_t - x_n)\rangle \leq 0. \tag{3.15}$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned}\langle f(q) - q, j(x_n - q)\rangle &= \langle f(q) - q, j(x_n - q)\rangle - \langle f(q) - q, j(x_n - x_t)\rangle \\ &\quad + \langle f(q) - q, j(x_n - x_t)\rangle - \langle f(q) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle \\ &\quad + \langle f(q) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle - \langle f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle \\ &\quad + \langle f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle \\ &= \langle f(q) - q, j(x_n - q) - j(x_n - x_t)\rangle + \langle x_t - q, j(x_n - x_t)\rangle \\ &\quad + \langle f(q) - f(x_t), j(x_n - x_t)\rangle + \langle f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle.\end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}\langle f(q) - q, j(x_n - q)\rangle \\ &\leq \limsup_{n\to\infty}\langle f(q) - q, j(x_n - q) - j(x_n - x_t)\rangle + \|x_t - q\|\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x_t\| \\ &\quad + \alpha\|x_t - q\|\limsup_{n\to\infty}\|x_n - x_t\| + \limsup_{n\to\infty}\langle f(x_t) - x_t, j(x_n - x_t)\rangle.\end{aligned}$$

Noticing that j is norm-to-norm uniformly continuous on a bounded subset of C, it follows from (3.15) and $\lim_{t\to 0} x_t = q$ that

$$\limsup_{n\to\infty}\langle f(q) - q, j(x_n - q)\rangle = \limsup_{t\to 0}\limsup_{n\to\infty}\langle f(q) - q, j(x_n - q)\rangle \leq 0.$$

Hence (3.11) holds.

Step 5. Finally, we show that $x_n \to q$ as $n \to \infty$.
From (3.1), we have

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - q\|^2 &= \langle x_{n+1} - q, j(x_{n+1} - q)\rangle \\ &= \langle a_n(f(x_n) - q) + b_n(x_n - q) + c_n(St_n - q), j(x_{n+1} - q)\rangle \\ &= a_n\langle f(x_n) - f(q), j(x_{n+1} - q)\rangle + b_n\langle x_n - q, j(x_{n+1} - q)\rangle \\ &\quad + c_n\langle St_n - q, j(x_{n+1} - q)\rangle + a_n\langle f(q) - q, j(x_{n+1} - q)\rangle\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq a_n\alpha\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\|+b_n\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\|\\
&\quad+c_n\|St_n-q\|\|x_{n+1}-q\|+a_n\langle f(q)-q,j(x_{n+1}-q)\rangle\\
&\leq a_n\alpha\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\|+b_n\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\|\\
&\quad+c_n\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\|+a_n\langle f(q)-q,j(x_{n+1}-q)\rangle\\
&=(1-a_n(1-\alpha))\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\|+a_n\langle f(q)-q,j(x_{n+1}-q)\rangle\\
&\leq\frac{1-a_n(1-\alpha)}{2}(\|x_n-q\|^2+\|x_{n+1}-q\|^2)+a_n\langle f(q)-q,j(x_{n+1}-q)\rangle\\
&\leq\frac{1-a_n(1-\alpha)}{2}\|x_n-q\|^2+\frac{1}{2}\|x_{n+1}-q\|^2+a_n\langle f(q)-q,j(x_{n+1}-q)\rangle,
\end{aligned}
$$

which implies

$$
\|x_{n+1}-q\|^2\leq(1-a_n(1-\alpha))\|x_n-q\|^2+a_n(1-\alpha)\frac{2\langle f(q)-q,j(x_{n+1}-q)\rangle}{1-\alpha}.
$$

It follows from Lemma 2.3, (3.11) and the condition (ii) that $\{x_n\}$ converges strongly to q. This completes the proof. □

The following examples show that there are mappings A_1 and A_2 which satisfy those conditions in Theorem 3.1.

Let X be a uniformly convex and 2-uniformly smooth Banach space with the 2-uniformly smooth constant K, let C be a nonempty closed convex subset of X. Let $A_1, A_2 : C \to X$ be α_1-inverse strongly accretive and α_2-inverse strongly accretive, respectively. If $0 < \lambda_1 < \frac{\alpha_1}{K^2}$ and $0 < \lambda_2 < \frac{\alpha_2}{K^2}$, then we have

(1) $I-\lambda_1A_1$ and $I-\lambda_2A_2$ are nonexpansive and

(2) $\|A_1y_n-A_1y^*\|\to 0$ and $\|A_2x_n-A_2x^*\|\to 0$ as $n\to\infty$ for all $x^*\in\Omega$ and $y^*=Q_C(x^*-\lambda_2A_2x^*)$ where $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ are two sequences defined as in Theorem 3.1.

Proof. (1) For any $x, y\in C$, it follows from Lemma 2.1 that

$$
\begin{aligned}
&\|(I-\lambda_1A_1)x-(I-\lambda_1A_1)y\|^2=\|x-y-\lambda_1(A_1x-A_1y)\|^2\\
&\leq\|x-y\|^2-2\lambda_1\langle A_1x-A_1y,j(x-y)\rangle+2{\lambda_1}^2K^2\|A_1x-A_1y\|^2\\
&\leq\|x-y\|^2-2\lambda_1\alpha_1\|A_1x-A_1y\|^2+2{\lambda_1}^2K^2\|A_1x-A_1y\|^2\\
&=\|x-y\|^2+2\lambda_1(\lambda_1K^2-\alpha_1)\|A_1x-A_1y\|^2.
\end{aligned}
$$

It clear that if $0<\lambda_1<\frac{\alpha_1}{K^2}$, then $I-\lambda_1A_1$ is nonexpansive. Similarly, we can show that $I-\lambda_2A_2$ is nonexpansive.

(2) Let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be the sequences defined as in Theorem 3.1. From

Lemma 2.1, nonexpansiveness of S, Q_C and the convexity of $\|.\|^2$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-x^*\|^2 \le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2 + c_n\|t_n-x^*\|^2\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2 + c_n[\|y_n-y^*-\lambda_1(A_1y_n-A_1y^*)\|^2]\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad + c_n[\|y_n-y^*\|^2 - 2\lambda_1\langle A_1y_n-A_1y^*, j(y_n-y^*)\rangle + 2K^2{\lambda_1}^2\|A_1y_n-A_1y^*\|^2]\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad + c_n[\|y_n-y^*\|^2 - 2\lambda_1\alpha_1\|A_1y_n-A_1y^*\|^2 + 2{\lambda_1}^2K^2\|A_1y_n-A_1y^*\|^2]\\
&= a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2 + c_n\|y_n-y^*\|^2\\
&\quad - 2c_n\lambda_1(\alpha_1-\lambda_1K^2)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2 + c_n\|x_n-x^*-\lambda_2(A_2x_n-A_2x^*)\|^2\\
&\quad - 2c_n\lambda_1(\alpha_1-\lambda_1K^2)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad + c_n[\|x_n-x^*\|^2 - 2\lambda_2\langle A_2x_n-A_2x^*j(x_n-x^*)\rangle + 2{\lambda_2}^2K^2\|A_2x_n-A_2x^*\|^2]\\
&\quad - 2c_n\lambda_1(\alpha_1-\lambda_1K^2)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad + c_n[\|x_n-x^*\|^2 - 2\lambda_2\alpha_2\|A_2x_n-A_2x^*\|^2 + 2{\lambda_2}^2K^2\|A_2x_n-A_2x^*\|^2]\\
&\quad - 2c_n\lambda_1(\alpha_1-\lambda_1K^2)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2\\
&= a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + (1-a_n)\|x_n-x^*\|^2 - 2c_n\lambda_1(\alpha_1-\lambda_1K^2)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2\\
&\quad - 2c_n\lambda_2(\alpha_2-\lambda_2K^2)\|A_2x_n-A_2x^*\|^2.
\end{aligned}$$

Which implies that

$$\begin{aligned}
&2c_n\lambda_1(\alpha_1-\lambda_1K^2)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2 + 2c_n\lambda_2(\alpha_2-\lambda_2K^2)\|A_2x_n-A_2x^*\|^2\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + \|x_n-x^*\|^2 - \|x_{n+1}-x^*\|^2\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + \|x_n-x_{n+1}\|(\|x_n-x^*\| + \|x_{n+1}-x^*\|).
\end{aligned}$$

From (i)-(iii) and (3.4), we obtain $\|A_1y_n-A_1y^*\| \to 0$ and $\|A_2x_n-A_2x^*\| \to 0$ as $n \to \infty$. □

Let X be a uniformly convex and 2-uniformly smooth Banach space with the 2-uniformly smooth constant K, let C be a nonempty closed convex subset of X. Let $A_1 : C \to X$ be relaxed (c_1^*, d_1^*)-cocoercive and L_1-Lipschitzian and $A_2 : C \to X$ be relaxed (c_2^*, d_2^*)-cocoercive and L_2-Lipschitzian. If $0 < \lambda_1 < \frac{d_1^*-c_1^*{L_1}^2}{K^2{L_1}^2}$ and $0 < \lambda_2 < \frac{d_2^*-c_2^*{L_2}^2}{K^2{L_2}^2}$, then we have

(1) $I-\lambda_1A_1$ and $I-\lambda_2A_2$ are nonexpansive and

(2) $\|A_1y_n-A_1y^*\| \to 0$ and $\|A_2x_n-A_2x^*\| \to 0$ as $n \to \infty$ for all $x^* \in \Omega$ and $y^* = Q_C(x^*-\lambda_2A_2x^*)$ where $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ are two sequences defined as in Theorem 3.1.

Proof. (1) For any $x, y \in C$, it follows from Lemma 2.1 that

$$\begin{aligned}
&\|(I-\lambda_1 A_1)x-(I-\lambda_1 A_1)y\|^2 = \|x-y-\lambda_1(A_1x-A_1y)\|^2\\
&\le \|x-y\|^2 - 2\lambda_1\langle A_1x-A_1y, j(x-y)\rangle + 2{\lambda_1}^2K^2\|A_1x-A_1y\|^2\\
&\le \|x-y\|^2 - 2\lambda_1(-c_1^*\|A_1x-A_1y\|^2 + d_1^*\|x-y\|^2) + 2{\lambda_1}^2K^2\|A_1x-A_1y\|^2\\
&\le \|x-y\|^2 + 2(\lambda_1 c_1^* {L_1}^2 - \lambda_1 d_1^* + K^2{\lambda_1}^2{L_1}^2)\|x-y\|^2.
\end{aligned}$$

It clear that if $0 < \lambda_1 < \frac{d_1^* - c_1^*{L_1}^2}{K^2{L_1}^2}$, then $I-\lambda_1 A_1$ is nonexpansive. Similarly, we can show that $I-\lambda_2 A_2$ is nonexpansive.
(2) Let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be the sequences defined as in Theorem 3.1. From Lemma 2.1, nonexpansiveness of S, Q_C and the convexity of $\|.\|^2$, we obtain

$$\begin{aligned}
&\|x_{n+1}-x^*\|^2 \le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2 + c_n\|t_n-x^*\|^2\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2 + c_n[\|y_n-y^*-\lambda_1(A_1y_n-A_1y^*)\|^2]\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad + c_n[\|y_n-y^*\|^2 - 2\lambda_1\langle A_1y_n-A_1y^*, j(y_n-y^*)\rangle + 2K^2{\lambda_1}^2\|A_1y_n-A_1y^*\|^2]\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad + c_n[\|y_n-y^*\|^2 - 2\lambda_1(-c_1^*\|A_1y_n-A_1y^*\|^2 + d_1^*\|y_n-y^*\|^2)\\
&\quad + 2{\lambda_1}^2K^2\|A_1y_n-A_1y^*\|^2]\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad + c_n[\|y_n-y^*\|^2 + 2\lambda_1 c_1^*\|A_1y_n-A_1y^*\|^2 - \frac{2\lambda_1 d_1^*}{{L_1}^2}\|A_1y_n-A_1y^*\|^2\\
&\quad + 2{\lambda_1}^2K^2\|A_1y_n-A_1y^*\|^2]\\
&= a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2 + c_n\|y_n-y^*\|^2\\
&\quad - 2c_n\lambda_1(\frac{d_1^*}{{L_1}^2} - c_1^* - \lambda_1K^2)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2 + c_n\|x_n-x^*-\lambda_2(A_2x_n-A_2x^*)\|^2\\
&\quad - 2c_n\lambda_1(\frac{d_1^*}{{L_1}^2} - c_1^* - \lambda_1K^2)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2\\
&\le a_n\|f(x_n)-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad + c_n[\|x_n-x^*\|^2 - 2\lambda_2\langle A_2x_n-A_2x^*, j(x_n-x^*)\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2K^2{\lambda_2}^2\|A_2x_n - A_2x^*\|^2] \\
&- 2c_n\lambda_1(\frac{d_1^*}{{L_1}^2} - c_1^* - \lambda_1K^2)\|A_1y_n - A_1y^*\|^2 \\
&\leq a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\
&+ c_n[\|x_n - x^*\|^2 - 2\lambda_2(-c_2^*\|A_2x_n - A_2x^*\|^2 + d_2^*\|x_n - x^*\|^2) \\
&+ 2K^2{\lambda_2}^2\|A_2x_n - A_2x^*\|^2] \\
&- 2c_n\lambda_1(\frac{d_1^*}{{L_1}^2} - c_1^* - \lambda_1K^2)\|A_1y_n - A_1y^*\|^2 \\
&\leq a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\
&+ c_n[\|x_n - x^*\|^2 + 2\lambda_2c_2^*\|A_2x_n - A_2x^*\|^2 - \frac{2\lambda_2d_2^*}{{L_2}^2}\|A_2x_n - A_2x^*\|^2 \\
&+ 2K^2{\lambda_2}^2\|A_2x_n - A_2x^*\|^2] \\
&- 2c_n\lambda_1(\frac{d_1^*}{{L_1}^2} - c_1^* - \lambda_1K^2)\|A_1y_n - A_1y^*\|^2 \\
&= a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + (1 - a_n)\|x_n - x^*\|^2 \\
&- 2c_n\lambda_1(\frac{d_1^*}{{L_1}^2} - c_1^* - \lambda_1K^2)\|A_1y_n - A_1y^*\|^2 \\
&- 2c_n\lambda_2(\frac{d_2^*}{{L_2}^2} - c_2^* - \lambda_2K^2)\|A_2x_n - A_2x^*\|^2.
\end{aligned}
$$

Which implies that

$$
\begin{aligned}
&2c_n\lambda_1(\frac{d_1^*}{{L_1}^2} - c_1^* - \lambda_1K^2)\|A_1y_n - A_1y^*\|^2 \\
&+ 2c_n\lambda_2(\frac{d_2^*}{{L_2}^2} - c_2^* - \lambda_2K^2)\|A_2x_n - A_2x^*\|^2 \\
&\leq a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2 \\
&\leq a_n\|f(x_n) - x^*\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|(\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|).
\end{aligned}
$$

From (i)-(iii) and (3.4), we obtain $\|A_1y_n - A_1y^*\| \to 0$ and $\|A_2x_n - A_2x^*\| \to 0$ as $n \to \infty$. □

By using the same proof as in Example 3 and Example 3, we obtain the following example.

Let X be a uniformly convex and 2-uniformly smooth Banach space with the 2-uniformly smooth constant K, let C be a nonempty closed convex subset of X. Let $A_1 : C \to X$ be $\alpha-$inverse strongly accretive and $A_2 : C \to X$ be relaxed (c, d)-cocoercive and $L-$Lipschitzian. If $0 < \lambda_1 < \frac{\alpha}{K^2}$ and $0 < \lambda_2 < \frac{d-cL^2}{K^2L^2}$, then we have

(1) $I - \lambda_1A_1$ and $I - \lambda_2A_2$ are nonexpansive and

(2) $\|A_1y_n - A_1y^*\| \to 0$ and $\|A_2x_n - A_2x^*\| \to 0$ as $n \to \infty$ for all $x^* \in \Omega$

and $y^* = Q_C(x^* - \lambda_2 A_2 x^*)$ where $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ are two sequences defined as in Theorem 3.1.

Let $\mathcal{A}$ be the class of all α_1-inverse-strongly accretive mappings from C into X, $\mathcal{B}$ the class of all α_2-inverse-strongly accretive mappings from C into X, $\mathcal{C}$ the class of all L-Lipschitzian and relaxed (c, d)-cocoercive mappings from C into X and $\mathcal{D}$ the class of all L_1-Lipschitzian and relaxed (c^*, d^*)-cocoercive mappings from C into X.

From Theorem 3.1, Example 3 - 3, we obtain the following result.

Corollary 3.2. *Let X be a uniformly convex and 2-uniformly smooth Banach space with the 2-uniformly smooth constant K, let C be a nonempty closed convex subset of X and Q_C a sunny nonexpansive retraction from X onto C. Let $A_1, A_2 : C \to X$ be two mappings satisfying one of the following conditions:*

(1) *$A_1 \in \mathcal{A}$, $A_2 \in \mathcal{B}$, $0 < \lambda_1 < \frac{\alpha_1}{K^2}$ and $0 < \lambda_2 < \frac{\alpha_2}{K^2}$;*

(2) *$A_1 \in \mathcal{C}$, $A_2 \in \mathcal{D}$, $0 < \lambda_1 < \frac{d - cL^2}{K^2 L^2}$ and $0 < \lambda_2 < \frac{d^* - c^* {L_1}^2}{K^2 {L_1}^2}$;*

(3) *$A_1 \in \mathcal{A}$, $A_2 \in \mathcal{C}$, $0 < \lambda_1 < \frac{\alpha_1}{K^2}$ and $0 < \lambda_1 < \frac{d - cL^2}{K^2 L^2}$.*

Let f be a contractive mapping with the constant $\alpha \in (0, 1)$ and $S : C \to C$ a nonexpansive mapping such that $\Omega = F(S) \bigcap F(G) \neq \emptyset$, where G is the mapping defined as in Lemma 2.10. For a given $x_1 \in C$, let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be the sequences generated by

$$\begin{cases} y_n = Q_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n), \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + c_n S Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

where $\{a_n\}, \{b_n\}$ and $\{c_n\}$ are three sequences in $(0, 1)$. If the conditions (i)-(iii) in Theorem 3.1 hold, then $\{x_n\}$ converges strongly to $q \in \Omega$, which solves the following variational inequality:

$$\langle q - f(q), j(q - p) \rangle \leq 0, \quad \forall f \in \Pi_C, \ p \in \Omega.$$

Remark 3.1. Corollary 3.2 improves and extends Theorem 3.4 of Katchang and Kumam [9] and Theorem 3.1 of Yao et al. [8].

4 Applications

Using Corollary 3.2, we prove two theorems in a real Banach space.

In a real Banach space X, we recall that an accretive operator T is m-accretive if $R(I + rT) = X$ for all $r > 0$, where I is the identity operator. The set of zero of T is denoted by $T^{-1}(0)$, that $T^{-1}(0) = \{z \in D(T) : 0 \in T(z)\}$. We denote the resolvent of T by $J_r^T = (I + rT)^{-1}$ for each $r > 0$, it is known that if T is m-accretive then $J_r^T : X \to X$ is nonexpansive and $F(J_r^T) = T^{-1}(0)$ for each $r > 0$.

Theorem 4.1. *Let X be a uniformly convex and 2-uniformly smooth Banach space with the 2-uniformly smooth constant K. Let $A : X \to X$ be an β-inverse-strongly accretive mapping with $0 < \lambda < \frac{\beta}{K^2}$ and f be a contraction of E into itself with the constant $\alpha \in (0,1)$. Let T be an m-accretive mapping such that $\Omega = A^{-1}(0) \bigcap T^{-1}(0) \neq \emptyset$. For a given $x_1 \in C$, let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be the sequences generated by*

$$\begin{cases} y_n = x_n - \lambda A x_n, \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + c_n J_r^T(y_n - \lambda A y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

where $\{a_n\}, \{b_n\}$ and $\{c_n\}$ are three sequences in $(0,1)$. If the conditions (i)-(iii) in Theorem 3.1 hold, then $\{x_n\}$ converges strongly to $q \in \Omega$, which solves the following variational inequality:

$$\langle q - f(q), j(q-p) \rangle \leq 0, \quad \forall f \in \Pi_C, \ p \in \Omega.$$

Proof. We have $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$,$A = A_1 = A_2$, $C = X$ and $Q_X = I$. In this case, we have $A^{-1}(0) = F(I - \lambda A) = S(X, A)$ (see [4]). We want to show that $S(X, A) = F(G)$. Indeed, it is sufficient to show that $F(G) \subseteq S(X, A)$. Let $x^* \in F(G)$, then $x^* = y^* - \lambda A y^*$, where $y^* = x^* - \lambda A x^*$. We claim that $x^* = y^*$. Assume that $x^* \neq y^*$, therefore $Ax^* \neq 0$, $Ay^* \neq 0$ and $Ay^* - Ax^* \neq 0$. It follows from Example 3(1) that

$$\begin{aligned} \|x^* - y^*\|^2 &= \|(I - \lambda A)y^* - (I - \lambda A)x^*\|^2 \\ &\leq \|y^* - x^*\|^2 + 2\lambda(\lambda K^2 - \beta)\|Ay^* - Ax^*\|^2 < \|y^* - x^*\|^2, \end{aligned}$$

which hence leads to a contradiction. This show that $x^* = y^*$, therefore $x^* \in F(I - \lambda A) = S(X, A) = A^{-1}(0)$. Thus, by Corollary 3.2, we obtain the desired result. □

Let C be a nonempty closed convex subset of X. A mapping $T : C \to C$ k-strictly pseudocontractive (see [22]) if for each $x, y \in C$, there exists a constant $k > 0$ and $j(x, y) \in J(x, y)$ such that

$$\langle Tx - Ty, j(x-y) \rangle \leq \|x - y\|^2 - k\|(I - T)x - (I - T)y\|^2. \tag{4.1}$$

It is clear that (4.1) is equivalent to the following:

$$\langle (I - T)x - (I - T)y, j(x-y) \rangle \geq k\|(I - T)x - (I - T)y\|^2.$$

Hence, if T is k-strictly pseudocontractive then $(I - T)$ is k-inverse-strongly accretive mapping.

Theorem 4.2. *Let X be a uniformly convex and 2-uniformly smooth Banach space with the 2-uniformly smooth constant K, let C be a nonempty closed*

convex subset and a sunny nonexpansive retraction of X. Let the mappings $T_1, T_2 : C \to C$ be k_1-strictly pseudocontractive and k_2-strictly pseudocontractive with $0 < \lambda_1 < \frac{k_1}{K^2}$ and $0 < \lambda_2 < \frac{k_2}{K^2}$, respectively. Let f be a contractive mapping with the constant $\alpha \in (0,1)$ and $S : C \to C$ a nonexpansive mapping such that $\Omega = F(S) \bigcap F(G) \neq \emptyset$, where G is the mapping defined as in Lemma 2.10. For a given $x_1 \in C$, let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be the sequences generated by

$$\begin{cases} y_n = (1-\lambda_2)x_n + \lambda_2 T_2 x_n, \\ x_{n+1} = a_n f(x_n) + b_n x_n + c_n S((1-\lambda_1)y_n + \lambda_1 T_1 y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

where $\{a_n\}, \{b_n\}$ and $\{c_n\}$ are three sequences in $(0,1)$. If the conditions (i)-(iii) in Theorem 3.1 hold, then $\{x_n\}$ converges strongly to $q \in \Omega$, which solves the following variational inequality:

$$\langle q - f(q), j(q-p) \rangle \leq 0, \quad \forall f \in \Pi_C, \ p \in \Omega.$$

Proof. Let $A_1 = I - T_1$ and $A_2 = I - T_2$, then A_1 is k_1-strictly pseudocontractive and A_2 is k_2-strictly pseudocontractive, respectively. Since C is a sunny nonexpansive retraction of X, there exists a sunny nonexpansive retraction Q_C such that

$$Q_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n) = x_n - \lambda_2 A_2 x_n = (1-\lambda_2)x_n + \lambda_2 T_2 x_n$$

and

$$Q_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) = y_n - \lambda_1 A_1 y_n = (1-\lambda_1)y_n + \lambda_1 T_1 y_n.$$

Therefore, the conclusion follows immediately from Corollary 3.2. □

Acknowledgement. The first author was supported by the Commission on Higher Education, the Thailand Research Fund and Thaksin University under grant MRG5680072.

References

[1] X. Qin, M. Shang and Y. Su, Strong convergence of a general iterative algorithm for equilibrium problems and variational inequality problems, *Math. Comput. Modelling*, **48** (2008), 1033-1046. http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2007.12.008

[2] Y. Shehu, Iterative method for fixed point problem, variational inequality and generalized mixed equilibrium problems with applications, *J. Glob. Optim.*, **52** (2012), 57-77. http://dx.doi.org/10.1007/s10898-011-9679-0

[3] R. Wangkeeree and P. Preechasilp, A new iterative scheme for solving the equilibrium problems, variational inequality problems, and fixed point problems in Hilbert spaces, *J. Appl. Math.*, **2012** (2012), 1-21. http://dx.doi.org/10.1155/2012/154968

[4] K. Aoyama, H. Iiduka and W. Takahashi, Weak convergence of an iterative sequence for accretive operators in Banach spaces, *Fixed Point Theory Appl.*, **2006** (2006), 1-13. http://dx.doi.org/10.1155/fpta/2006/35390

[5] A. Moudafi and Z. Huang, About the relaxed cocoercivity and the convergence of the proximal point algorithm, *J. Egypt. Math. Soc.*, **21** (2013), 281-284. http://dx.doi.org/10.1016/j.joems.2013.03.014

[6] Y. Qing and S. Y. Cho, Proximal point algorithms for zero points of nonlinear operators, *Fixed Point Theory and Appl.*, **2014** (2014), 42. http://dx.doi.org/10.1186/1687-1812-2014-42

[7] Y. Tang, Z. Bao and D. Wen, An algorithm with general errors for the zero point of monotone mappings in Banach spaces, *J. Inequal. Appl.*, **2014** (2014), 484. http://dx.doi.org/10.1186/1029-242x-2014-484

[8] Y. Yao, M. A. Noor, K. I. Noor, Y. C. Liou and H. Yaqoob, Modified extragradient method for a system of variational inequalities in Banach spaces, *Acta Appl. Math.*, **110** (2010), 1211-1224. http://dx.doi.org/10.1007/s10440-009-9502-9

[9] P. Katchang and P. Kumam, Convergence of iterative algorithm for finding common solution of fixed points and general system of variational inequalities for two accretive operators, *Thai J. Math.*, **9** (2011), 343-360.

[10] G. Cai and S. Bu, Strong convergence theorems based on a new modified extragradient method for variational inequality problems and fixed point problems in Banach spaces, *Comput. Math. Appl.*, **62** (2011), 2567-2579. http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2011.07.056

[11] G. Cai and S. Bu, Convergence analysis for variational inequality problems and fixed point problems in 2-uniformly smooth and uniformly convex Banach spaces, *Math. Comput. Modelling*, **55** (2012), 538-546. http://dx.doi.org/10.1016/j.mcm.2011.08.031

[12] P. Katchang and P. Kumam, An iterative algorithm for finding a common solution of fixed points and a general system of variational inequalities for two inverse strongly accretive operators, *Positivity*, **15** (2011), 281-295. http://dx.doi.org/10.1007/s11117-010-0074-8

[13] X. Qin, S. Y. Cho and S. M. Kang, Convergence of an iterative algorithm for systems of variational inequalities and nonexpansive mappings with applications, *J. Comput. Appl. Math.*, **233** (2009), 231-240. http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2009.07.018

[14] H. K. Xu, Inequalities in Banach spaces with applications, *Nonlinear Anal.*, **16** (1991), 1127-1138. http://dx.doi.org/10.1016/0362-546x(91)90200-k

[15] S. S. Chang, On Chidumes open questions and approximate solutions of multivalued strongly accretive mapping equations in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **216** (1997), 94-111. http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.1997.5661

[16] H. K. Xu, Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.*, **298** (2004), 279-291. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.04.059

[17] S. Reich, Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, **44** (1973), 57-70. http://dx.doi.org/10.1016/0022-247x(73)90024-3

[18] S. Kitahara and W. Takahashi, Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **2** (1993), 333-342.

[19] T. Suzuki, Strong convergence of Krasnoselskii and Manns type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals, *J. Math. Anal. Appl.*, **305** (2005), 227-239. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.11.017

[20] R. E. Bruck, Properties of fixed point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **179** (1973), 251-262. http://dx.doi.org/10.1090/s0002-9947-1973-0324491-8

[21] S. Kamimura and W. Takahashi, Strong convergence of a proximal-type algorithm in Banach space, *SIAM J. Optim.*, **12** (2002), 938-945. http://dx.doi.org/10.1137/s105262340139611x

[22] F. E. Browder and W. V. Petryshyn, Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space, *J. Math. Anal. Appl.*, **20** (1967), 197-228. http://dx.doi.org/10.1016/0022-247x(67)90085-6

Received: July 7, 2016; Published: August 28, 2016

A3: **Suwicha Imnang**, Theeradet Kaewong and Suthep Suantai, Iterative algorithm for solving the new system of generalized variational inequalities in Hilbert spaces, ***International Journal of Pure and Applied Mathematics*****,** **110** (2016), 193-209.

International Journal of Pure and Applied Mathematics
Volume 110 No. 1 2016, 193-209
ISSN: 1311-8080 (printed version); ISSN: 1314-3395 (on-line version)
url: http://www.ijpam.eu
doi: 10.12732/ijpam.v110i1.18

ITERATIVE ALGORITHM FOR SOLVING THE NEW SYSTEM OF GENERALIZED VARIATIONAL INEQUALITIES IN HILBERT SPACES

Suwicha Imnang[1] §, Theeradet Kaewong[2] and Suthep Suantai[3]

[1,2]Department of Mathematics and Statistics
Faculty of Science
Thaksin University
Phatthalung, 93210, THAILAND

[1,2]Centre of Excellence in Mathematics, CHE
Si Ayutthaya Road, Bangkok 10400, THAILAND

[3]Department of Mathematics
Faculty of Science
Chiang Mai University
Chiang Mai, 50200, THAILAND

Abstract: In this paper, we introduce an iterative method to approximate a common solution of a new general system of variational inequalities, a mixed equilibrium problem and a fixed point problem for a nonexpansive mapping in real Hilbert spaces. We prove that the iterative sequence converges strongly to a common solution of the three problems in the framework of Hilbert spaces. Our main results extend and improve some results in the literature.

AMS Subject Classification: 47H10, 49J40, 47H05 47H09, 46B20
Key Words: variational inequality problem, fixed point problem, strong convergence, non-expansive mapping

Received: February 1, 2016
Revised: September 6, 2016
Published: October 21, 2016

§Correspondence author

© 2016 Academic Publications, Ltd.
url: www.acadpubl.eu

1. Introduction

The study of variational inequality problem is an interesting and fascinating branch of applicable mathematics with a wide range of applications industry, finance, economics, optimization, social, regional, pure and applied science. A closely related subject of current interest is the problem of finding common elements in the fixed point set of nonlinear operators and in the solution set of monotone variational inequalities; see [1, 2, 3] and the references therein. For the past years, many existence results and iterative algorithms for various variational inequality and variational inclusion problems have been extended and generalized in various directions using and innovative techniques; see [4, 5, 6, 7] and the references therein.

Motivated by recent work going in this direction. In this paper, we introduce a new iterative scheme for finding a common element of the set of solutions of a new general system of variational inequalities, the set of solutions of a mixed equilibrium problem and the set of fixed points of a nonexpansive mapping in a real Hilbert space. Furthermore, we prove that the sequence generated by the iterative scheme converges strongly to a common element of those three sets under some control conditions. The results presented in this paper extend and improve the corresponding results of [6] and many others.

2. Preliminaries

Let H be a real Hilbert space with inner product $\langle ., . \rangle$ and let C be a nonempty closed convex subset of H. A mapping $T : C \to C$ is said to be *nonexpansive mapping* if $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ for all $x, y \in C$. The fixed point set of T is denoted by $F(T) := \{x \in C : Tx = x\}$. A mapping $A : C \to H$ is called *α-inverse-strongly monotone*, if there exists a positive real number $\alpha > 0$ such that

$$\langle Ax - Ay, x - y \rangle \geq \alpha \|Ax - Ay\|^2, \quad \forall x, y \in C.$$

Let $A_i : C \to H$ for all $i = 1, 2, 3$ be three mappings, then we consider the *new general system of variational inequalities* of finding $(x^*, y^*, z^*) \in C \times C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda_1 A_1 y^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_2 A_2 z^* + y^* - z^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_3 A_3 x^* + z^* - x^*, x - z^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{2.1}$$

where $\lambda_i > 0$ for all $i = 1, 2, 3$.

Some special cases:

(I) If $A_3 = 0$ and $z^* = x^*$, then problem (2.1) reduces to find $(x^*, y^*) \in C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda_1 A_1 y^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_2 A_2 x^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{2.2}$$

which is called *a general system of variational inequalities* and defined by the authors in [6]. The set of solutions of problem (2.2) denoted by $GVI(C, A_1, A_2)$.

(II) If $A_3 = 0$, $z^* = x^*$ and $A_1 = A_2 := A$, then problem (2.2) reduces to find $(x^*, y^*) \in C \times C$ such that

$$\begin{cases} \langle \lambda_1 A y^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \\ \langle \lambda_2 A x^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in C, \end{cases} \tag{2.3}$$

which is called *the new system of variational inequalities*, and defined by the author in [7].

(III) If $A_3 = A_2 = 0$, $z^* = y^* = x^*$, $A_1 := A$ and $\lambda_1 = 1$, then problem (2.3) reduces to find $x^* \in C$ such that

$$\langle Ax^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C,$$

which is called *the variational inequality problem.*

Let $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ be a proper extended real-valued function and F be a bifunction from $C \times C$ to $\mathbb{R}$, where $\mathbb{R}$ is the set of real numbers. In 2008, Ceng and Yao [8], introduced *the mixed equilibrium problem* which is to find $x \in C$ such that

$$F(x, y) + \varphi(y) \geq \varphi(x), \quad \forall y \in C. \tag{2.4}$$

The set of solution of problem (2.4) is denoted by $MEP(F, \varphi)$. It is easy to see that x is a solution of problem (2.4) implies that $x \in \text{dom}\varphi = \{x \in C \mid \varphi(x) < +\infty\}$. If $\varphi = 0$, then the problem (2.4) reduces to find $x \in C$ such that

$$F(x, y) \geq 0, \quad \forall y \in C, \tag{2.5}$$

which is called *the equilibrium problem.* The set of solution of (2.5) is denoted by $EP(F)$. In recent yeas, the equilibrium problem has been intensively studied by many authors (see, for example [1, 9, 10] and references therein).

We recall the well-known results and give some useful lemmas that are used in the next section.

For every point $x \in H$, there exists a unique nearest point in C, denoted by $P_C x$, such that $\|x - P_C x\| \leq \|x - y\|, \quad \forall y \in C$. P_C is called the *metric*

projection of H onto C. It is well known that P_C is a nonexpansive mapping of H onto C and satisfies

$$\langle x-y, P_Cx-P_Cy\rangle \geq \|P_Cx-P_Cy\|^2, \quad \forall x,y \in H. \tag{2.6}$$

Obviously, this immediately implies that

$$\|(x-y)-(P_Cx-P_Cy)\|^2 \leq \|x-y\|^2 - \|P_Cx-P_Cy\|^2, \quad \forall x,y \in H. \tag{2.7}$$

Recall that, P_Cx is characterized by the following properties: $P_Cx \in C$,

$$\langle x-P_Cx, y-P_Cx\rangle \leq 0 \text{ and } \|x-y\|^2 \geq \|x-P_Cx\|^2 + \|P_Cx-y\|^2, \tag{2.8}$$

for all $x \in H$ and $y \in C$.

For solving the mixed equilibrium problem, let us assume the following assumptions for the bifunction F, φ and the set C:
(A1) $F(x,x) = 0$ for all $x \in C$;
(A2) F is monotone, i.e. $F(x,y) + F(y,x) \leq 0$ for all $x, y \in C$;
(A3) For each $y \in C$, $x \mapsto F(x,y)$ is weakly upper semicontinuous;
(A4) For each $x \in C$, $y \mapsto F(x,y)$ is convex;
(A5) For each $x \in C$, $y \mapsto F(x,y)$ is lower semicontinuous;
(B1) For each $x \in H$ and $r > 0$, there exist a bounded subset $D_x \subseteq C$ and $y_x \in C$ such that for any $z \in C \setminus D_x$,

$$F(z,y_x) + \varphi(y_x) + \frac{1}{r}\langle y_x - z, z - x\rangle < \varphi(z).$$

(B2) C is a bounded set.
In the sequel we shall need to use the following lemma.

Lemma 2.1. ([11]) *Let C be a nonempty closed convex subset of H. Let F be a bifunction from $C \times C$ to $\mathbb{R}$ satisfying (A1)-(A5) and let $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ be a proper lower semicontinuous and convex function. Assume that either (B1) or (B2) holds. For $r > 0$ and $x \in H$, define a mapping $T_r : H \to C$ as follows.*

$$T_r(x) = \left\{ z \in C : F(z,y) + \varphi(y) + \frac{1}{r}\langle y - z, z - x\rangle \geq \varphi(z), \quad \forall y \in C \right\}$$

for all $x \in H$. Then the following conclusions hold:
(1) *For each $x \in H$, $T_r(x) \neq \emptyset$;*
(2) *T_r is single-valued;*
(3) *T_r is firmly nonexpansive, i.e. for any $x, y \in H$,*

$$\|T_r(x) - T_r(y)\|^2 \leq \langle T_rx - T_ry, x - y\rangle;$$

(4) *$F(T_r) = MEP(F, \varphi)$;*
(5) *$MEP(F, \varphi)$ is closed and convex.*

Lemma 2.2. ([12]) *Let H be an inner product space. Then, for all $x, y, z \in H$ and $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$ with $\alpha+\beta+\gamma = 1$, we have*

$$\begin{aligned}\|\alpha x + \beta y + \gamma z\|^2 = \alpha\|x\|^2 + \beta\|y\|^2 + \gamma\|z\|^2 - \alpha\beta\|x-y\|^2 \\ - \alpha\gamma\|x-z\|^2 - \beta\gamma\|y-z\|^2.\end{aligned}$$

Lemma 2.3. *In a real Hilbert space H, there holds the inequality*

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\langle y, x+y\rangle, \quad \forall x, y \in H.$$

Lemma 2.4. ([13]) *Assume $\{a_n\}$ is a sequence of nonnegative real numbers such that $a_{n+1} \le (1-\gamma_n)a_n + \delta_n$, where $\{\gamma_n\}$ is a sequence in $(0,1)$ and $\{\delta_n\}$ is a sequence such that*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$; (ii) $\limsup_{n\to\infty} \delta_n/\gamma_n \le 0$ *or* $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| < \infty$.

Then $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Lemma 2.5. ([14]) *Let $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be bounded sequences in a Banach space X and let $\{b_n\}$ be a sequence in $[0,1]$ with $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$. Suppose $x_{n+1} = (1-b_n)y_n + b_n x_n$ for all integers $n \ge 1$ and $\limsup_{n\to\infty}(\|y_{n+1} - y_n\| - \|x_{n+1} - x_n\|) \le 0$. Then, $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$.*

Lemma 2.6. ([15]) *Demi-closedness principle. Assume that T is a nonexpansive self-mapping of a nonempty closed convex subset C of a real Hilbert space H. If T has a fixed point, then $I - T$ is demi-closed: that is, whenever $\{x_n\}$ is a sequence in C converging weakly to some $x \in C$ (for short, $x_n \rightharpoonup x \in C$), and the sequence $\{(I-T)x_n\}$ converges strongly to some y (for short, $(I-T)x_n \to y$), it follows that $(I-T)x = y$. Here I is the identity operator of H.*

Lemma 2.7. ([16]) *Let C be a nonempty closed and convex subset of a real Hilbert space H and $A_i : C \to H$ be three possibly nonlinear mappings, for $i = 1, 2, 3$. Define a mapping $G : C \to C$ as follows:*

$$\begin{aligned}G(x) = P_C\big[P_C\big(P_C(x - \lambda_3 A_3 x) - \lambda_2 A_2 P_C(x - \lambda_3 A_3 x)\big) \\ - \lambda_1 A_1 P_C\big(P_C(x - \lambda_3 A_3 x) - \lambda_2 A_2 P_C(x - \lambda_3 A_3 x)\big)\big], \quad \forall x \in C.\end{aligned}$$

For given $x^*, y^*, z^* \in C$, (x^*, y^*, z^*) is a solution of problem (2.1) if and only if $x^* \in F(G)$, $y^* = P_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)$ and $z^* = P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)$.

Throughout this paper, the set of fixed points of the mapping G is denoted by $GVI(C, A_1, A_2, A_3)$.

3. Main Results

In this section, we prove our strong convergence theorem. The next lemma is crucial for proving the main theorem.

Lemma 3.1. *Let C be a nonempty closed and convex subset of a real Hilbert space H and let $A_i : C \to H$ be α_i -inverse-strongly monotone mappings, for $i = 1, 2, 3$. If $\lambda_i \in (0, 2\alpha_i]$, for all $i = 1, 2, 3$, then $G : C \to C$ is nonexpansive , where G is the mapping defined as in Lemma 2.7.*

Proof. For all $x, y \in C$, we have

$$\begin{aligned}
\|G(x) - G(y)\| &= \|P_C\big[P_C\big(P_C(I - \lambda_3 A_3)x - \lambda_2 A_2 P_C(I - \lambda_3 A_3)x\big) \\
&\quad - \lambda_1 A_1 P_C\big(P_C(I - \lambda_3 A_3)x - \lambda_2 A_2 P_C(I - \lambda_3 A_3)x\big)\big] \\
&\quad - P_C\big[P_C\big(P_C(I - \lambda_3 A_3)y - \lambda_2 A_2 P_C(I - \lambda_3 A_3)y\big) \\
&\quad - \lambda_1 A_1 P_C\big(P_C(I - \lambda_3 A_3)y - \lambda_2 A_2 P_C(I - \lambda_3 A_3)y\big)\big]\| \\
&\leq \|P_C\big(P_C(I - \lambda_3 A_3)x - \lambda_2 A_2 P_C(I - \lambda_3 A_3)x\big) \\
&\quad - \lambda_1 A_1 P_C\big(P_C(I - \lambda_3 A_3)x - \lambda_2 A_2 P_C(I - \lambda_3 A_3)x\big) \\
&\quad - \big[P_C\big(P_C(I - \lambda_3 A_3)y - \lambda_2 A_2 P_C(I - \lambda_3 A_3)y\big) \\
&\quad - \lambda_1 A_1 P_C\big(P_C(I - \lambda_3 A_3)y - \lambda_2 A_2 P_C(I - \lambda_3 A_3)y\big)\big]\| \\
&= \|(I - \lambda_1 A_1)P_C(I - \lambda_2 A_2)P_C(I - \lambda_3 A_3)x \\
&\quad - (I - \lambda_1 A_1)P_C(I - \lambda_2 A_2)P_C(I - \lambda_3 A_3)y\|. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

It is well known that if $A : C \to H$ be α-inverse-strongly monotone, then $I - \lambda A$ is nonexpansive for all $\lambda \in (0, 2\alpha]$. By our assumption, we obtain $I - \lambda_i A_i$ is nonexpansive for all $i = 1, 2, 3$. It follows that $(I - \lambda_1 A_1)P_C(I - \lambda_2 A_2)P_C(I - \lambda_3 A_3)$ is nonexpansive. Therefore, from (3.1), we obtain immediately that the mapping G is nonexpansive. □

Theorem 3.2. *Let C be a nonempty closed and convex subset of a real Hilbert space H. Let F be a function from $C \times C$ to $\mathbb{R}$ satisfying (A1)-(A5) and $\varphi : C \to \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$ be a proper lower semicontinuous and convex function. Let the mappings $A_i : C \to H$ be α_i-inverse-strongly monotone, for all $i = 1, 2, 3$ and T be a nonexpansive self-mapping of C such that $\Omega = F(T) \bigcap GVI(C, A_1, A_2, A_3) \bigcap MEP(F, \varphi) \neq \emptyset$. Assume that either (B1) or (B2) holds and that v is an arbitrary point in C. Let $x_1 \in C$ and*

$\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}, \{u_n\}$ *be the sequences generated by*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ z_n = P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n), \\ y_n = P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

where $\lambda_i \in (0, 2\alpha_i)$, *for all* $i = 1, 2, 3$ *and* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *are two sequences in* $[0, 1]$ *and* $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ *satisfying*

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *and* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *and* $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$.

Then $\{x_n\}$ *converges strongly to* $\overline{x} = P_\Omega v$ *and* $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ *is a solution of problem* (2.1), *where* $\overline{y} = P_C(\overline{z} - \lambda_2 A_2 \overline{z})$ *and* $\overline{z} = P_C(\overline{x} - \lambda_3 A_3 \overline{x})$.

Proof. Step 1. We claim that $\{x_n\}$ is bounded.
Let $x^* \in \Omega$ and $\{T_{r_n}\}$ be a sequence of mappings defined as in Lemma 2.1. It follows from Lemma 2.7 that

$$\begin{aligned} x^* = P_C\big[P_C\big(P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*) - \lambda_2 A_2 P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)\big) \\ - \lambda_1 A_1 P_C\big(P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*) - \lambda_2 A_2 P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)\big)\big]. \end{aligned}$$

Put $y^* = P_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)$, $z^* = P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)$ and $t_n = P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n)$. Then $x^* = P_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)$ and

$$x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T t_n.$$

By nonexpansiveness of $I - \lambda_i$ $(i = 1, 2, 3)$, we have

$$\begin{aligned} \|t_n - x^*\| &= \|P_C(I - \lambda_1 A_1) y_n - P_C(I - \lambda_1 A_1) y^*\| \\ &\leq \|y_n - y^*\| = \|P_C(I - \lambda_2 A_2) z_n - P_C(I - \lambda_2 A_2) z^*\| \\ &\leq \|z_n - z^*\| = \|P_C(I - \lambda_3 A_3) u_n - P_C(I - \lambda_3 A_3) x^*\| \\ &\leq \|u_n - x^*\| = \|T_{r_n} x_n - T_{r_n} x^*\| \leq \|x_n - x^*\|, \end{aligned} \tag{3.2}$$

which implies that

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &= \|a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T t_n - x^*\| \\ &\leq a_n \|v - x^*\| + b_n \|x_n - x^*\| + (1 - a_n - b_n) \|t_n - x^*\| \\ &\leq a_n \|v - x^*\| + b_n \|x_n - x^*\| + (1 - a_n - b_n) \|x_n - x^*\| \end{aligned}$$

$$\leq \max\{\|v - x^*\|, \|x_1 - x^*\|\}.$$

Thus, $\{x_n\}$ is bounded. Consequently, the sequences $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{t_n\}$, $\{A_1y_n\}$, $\{A_2z_n\}$, $\{A_3u_n\}$ and $\{Tt_n\}$ are also bounded.

Step 2. We claim that $\|x_{n+1} - x_n\| \to 0$ as $n \to \infty$.

By nonexpansiveness of P_C and $I - \lambda_i A_i$ $(i = 1, 2, 3)$, we have

$$\begin{aligned}\|t_{n+1} - t_n\| &= \|P_C(y_{n+1} - \lambda_1 A_1 y_{n+1}) - P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n)\| \leq \|y_{n+1} - y_n\| \\ &= \|P_C(z_{n+1} - \lambda_2 A_2 z_{n+1}) - P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n)\| \leq \|z_{n+1} - z_n\| \\ &= \|P_C(u_{n+1} - \lambda_3 A_3 u_{n+1}) - P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n)\| \\ &\leq \|u_{n+1} - u_n\|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

On the other hand, from $u_n = T_{r_n} x_n \in \mathrm{dom}\varphi$ and $u_{n+1} = T_{r_{n+1}} x_{n+1} \in \mathrm{dom}\varphi$, we have

$$F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \tag{3.4}$$

and

$$F(u_{n+1}, y) + \varphi(y) - \varphi(u_{n+1}) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle y - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C. \tag{3.5}$$

Putting $y = u_{n+1}$ in (3.4) and $y = u_n$ in (3.5), we have

$$F(u_n, u_{n+1}) + \varphi(u_{n+1}) - \varphi(u_n) + \frac{1}{r_n}\langle u_{n+1} - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0,$$

and

$$F(u_{n+1}, u_n) + \varphi(u_n) - \varphi(u_{n+1}) + \frac{1}{r_{n+1}}\langle u_n - u_{n+1}, u_{n+1} - x_{n+1}\rangle \geq 0.$$

From the monotonicity of F, we obtain that

$$\left\langle u_{n+1} - u_n, \frac{u_n - x_n}{r_n} - \frac{u_{n+1} - x_{n+1}}{r_{n+1}} \right\rangle \geq 0,$$

and hence

$$\left\langle u_{n+1} - u_n, u_n - u_{n+1} + u_{n+1} - x_n - \frac{r_n}{r_{n+1}}(u_{n+1} - x_{n+1}) \right\rangle \geq 0.$$

Then, we have

$$\|u_{n+1} - u_n\|^2 \leq \left\langle u_{n+1} - u_n, x_{n+1} - x_n + (1 - \frac{r_n}{r_{n+1}})(u_{n+1} - x_{n+1}) \right\rangle$$

$$\leq \|u_{n+1}-u_n\|\bigg\{\|x_{n+1}-x_n\|+|1-\frac{r_n}{r_{n+1}}|\|u_{n+1}-x_{n+1}\|\bigg\},$$

and hence

$$\|u_{n+1}-u_n\| \leq \|x_{n+1}-x_n\|+\frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1}-r_n|\|u_{n+1}-x_{n+1}\|. \tag{3.6}$$

It follows from (3.3) and (3.6) that

$$\|t_{n+1}-t_n\| \leq \|x_{n+1}-x_n\|+\frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1}-r_n|\|u_{n+1}-x_{n+1}\|. \tag{3.7}$$

Let $x_{n+1}=b_nx_n+(1-b_n)w_n$ for all $n\geq 1$. Then, we obtain

$$\begin{aligned} w_{n+1}-w_n &= \frac{x_{n+2}-b_{n+1}x_{n+1}}{1-b_{n+1}}-\frac{x_{n+1}-b_nx_n}{1-b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}v+(1-a_{n+1}-b_{n+1})Tt_{n+1}}{1-b_{n+1}}-\frac{a_nv+(1-a_n-b_n)Tt_n}{1-b_n} \\ &= \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}(v-Tt_{n+1})+\frac{a_n}{1-b_n}(Tt_n-v)+Tt_{n+1}-Tt_n. \end{aligned} \tag{3.8}$$

By (3.7) and (3.8), we have

$$\begin{aligned} \|w_{n+1}-w_n\|-\|x_{n+1}-x_n\| &\leq \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}\|v-Tt_{n+1}\|+\frac{a_n}{1-b_n}\|Tt_n-v\| \\ &\quad +\|t_{n+1}-t_n\|-\|x_{n+1}-x_n\| \\ &\leq \frac{a_{n+1}}{1-b_{n+1}}\|v-Tt_{n+1}\|+\frac{a_n}{1-b_n}\|Tt_n-v\| \\ &\quad +\frac{1}{r_{n+1}}|r_{n+1}-r_n|\|u_{n+1}-x_{n+1}\|. \end{aligned}$$

This together with (C1)–(C3), we obtain that

$$\limsup_{n\to\infty}\|w_{n+1}-w_n\|-\|x_{n+1}-x_n\|\leq 0.$$

Hence, by Lemma 2.5, we get $\|x_n-w_n\|\to 0$ as $n\to\infty$. Consequently,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=\lim_{n\to\infty}(1-b_n)\|w_n-x_n\|=0. \tag{3.9}$$

Step 3. We claim that $\|Tt_n-t_n\|\to 0$ as $n\to 0$.
Since

$$x_{n+1}-x_n=a_n(v-x_n)+(1-a_n-b_n)(Tt_n-x_n),$$

therefore

$$\|Tt_n - x_n\| \to 0 \ \text{ as } \ n \to \infty. \tag{3.10}$$

Next, we prove that $\lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0$. From Lemma 2.1(3), we have

$$\begin{aligned}\|u_n - x^*\|^2 &= \|T_{r_n}x_n - T_{r_n}x^*\|^2 \le \langle T_{r_n}x_n - T_{r_n}x^*, x_n - x^*\rangle \\ &= \langle u_n - x^*, x_n - x^*\rangle = \frac{1}{2}\big\{\|u_n - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2\big\}.\end{aligned}$$

Hence

$$\|u_n - x^*\|^2 \le \|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2. \tag{3.11}$$

From Lemma 2.2, (3.2) and (3.11), we have

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\le a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\|^2 \\ &\le a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|u_n - x^*\|^2 \\ &\le a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\ &\quad + (1 - a_n - b_n)\big[\|x_n - x^*\|^2 - \|x_n - u_n\|^2\big] \\ &\le a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - (1 - a_n - b_n)\|x_n - u_n\|^2.\end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned}&(1 - a_n - b_n)\|x_n - u_n\|^2 \le a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2 \\ &\le a_n\|v - x^*\|^2 + (\|x_n - x^*\| + \|x_{n+1} - x^*\|)\|x_{n+1} - x_n\|.\end{aligned}$$

From the conditions (C1), (C2) and (3.9), we obtain

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0. \tag{3.12}$$

By (3.10) and (3.12), we have

$$\|Tt_n - u_n\| \le \|Tt_n - x_n\| + \|x_n - u_n\| \to 0, \ \text{ as } \ n \to \infty. \tag{3.13}$$

Next, we show that $\|A_1y_n - A_1y^*\| \to 0$, $\|A_2z_n - A_2z^*\| \to 0$ and $\|A_3u_n - A_3x^*\| \to 0$, as $n \to \infty$.

From (3.2) and A_1 is α_1-inverse-strongly monotone mapping, we have

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\le a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|t_n - x^*\|^2 \\ &= a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\ &\quad + (1 - a_n - b_n)\|P_C(y_n - \lambda_1A_1y_n) - P_C(y^* - \lambda_1A_1y^*)\|^2 \\ &\le a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ (1-a_n-b_n)\|(y_n-\lambda_1 A_1 y_n)-(y^*-\lambda_1 A_1 y^*)\|^2\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2 + b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad + (1-a_n-b_n)\big[\|y_n-y^*\|^2+\lambda_1(\lambda_1-2\alpha_1)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2\big]\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2 + \|x_n-x^*\|^2\\
&\quad + (1-a_n-b_n)\lambda_1(\lambda_1-2\alpha_1)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Similarly, since A_i are α_i-inverse-strongly monotone mappings for $i=2,3$, $\|t_n-x^*\|\le\|y_n-y^*\|$ and $\|y_n-y^*\|\le\|z_n-z^*\|$, we can show that

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\le a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad + (1-a_n-b_n)\lambda_2(\lambda_2-2\alpha_2)\|A_2z_n-A_2z^*\|^2 \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\le a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad + (1-a_n-b_n)\lambda_3(\lambda_3-2\alpha_3)\|A_3u_n-A_3x^*\|^2. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

From (3.14), (3.15) and (3.16), we have

$$\begin{aligned}
-(1-a_n-b_n)\lambda_1(\lambda_1-2\alpha_1)\|A_1y_n-A_1y^*\|^2 &\le a_n\|v-x^*\|^2\\
&\quad + (\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|,\\
-(1-a_n-b_n)\lambda_2(\lambda_2-2\alpha_2)\|A_2z_n-A_2z^*\|^2 &\le a_n\|v-x^*\|^2\\
&\quad + (\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
-(1-a_n-b_n)\lambda_3(\lambda_3-2\alpha_3)\|A_3u_n-A_3x^*\|^2 &\le a_n\|v-x^*\|^2\\
&\quad + (\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|.
\end{aligned}$$

This together with (C1), (C2) and (3.9), we obtain that

$$\lim_{n\to\infty}\|A_1y_n-A_1y^*\| = \lim_{n\to\infty}\|A_2z_n-A_2z^*\| = \lim_{n\to\infty}\|A_3u_n-A_3x^*\| = 0. \qquad (3.17)$$

Next, we prove that $\|Tt_n-t_n\|\to 0$ as $n\to\infty$. From (2.6), (3.2) and nonexpansiveness of $I-\lambda_2A_2$ and $I-\lambda_3A_3$, we get

$$\begin{aligned}
\|y_n-y^*\|^2 &= \|P_C(z_n-\lambda_2A_2z_n)-P_C(z^*-\lambda_2A_2z^*)\|^2\\
&\le \langle (z_n-\lambda_2A_2z_n)-(z^*-\lambda_2A_2z^*), y_n-y^*\rangle\\
&= \frac{1}{2}\big[\|(z_n-\lambda_2A_2z_n)-(z^*-\lambda_2A_2z^*)\|^2+\|y_n-y^*\|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \|(z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - (z^* - \lambda_2 A_2 z^*) - (y_n - y^*)\|^2\big] \\
&\le \frac{1}{2}\big[\|z_n - z^*\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 \\
&\quad - \|(z_n - y_n) - (z^* - y^*) - \lambda_2(A_2 z_n - A_2 z^*)\|^2\big] \\
&\le \frac{1}{2}\big[\|x_n - x^*\|^2 + \|y_n - y^*\|^2 - \|(z_n - y_n) - (z^* - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_2\langle (z_n - y_n) - (z^* - y^*), A_2 z_n - A_2 z^*\rangle - \lambda_2^2 \|A_2 z_n - A_2 z^*\|^2\big],
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\|z_n - z^*\|^2 &= \|P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n) - P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)\|^2 \\
&\le \langle (u_n - \lambda_3 A_3 u_n) - (x^* - \lambda_3 A_3 x^*), z_n - z^*\rangle \\
&= \frac{1}{2}\big[\|(u_n - \lambda_3 A_3 u_n) - (x^* - \lambda_3 A_3 x^*)\|^2 + \|z_n - z^*\|^2 \\
&\quad - \|(u_n - \lambda_3 A_3 u_n) - (x^* - \lambda_3 A_3 x^*) - (z_n - z^*)\|^2\big] \\
&\le \frac{1}{2}\big[\|u_n - x^*\|^2 + \|z_n - z^*\|^2 \\
&\quad - \|(u_n - z_n) - (x^* - z^*) - \lambda_3(A_3 u_n - A_3 x^*)\|^2\big] \\
&\le \frac{1}{2}\big[\|x_n - x^*\|^2 + \|z_n - z^*\|^2 - \|(u_n - z_n) - (x^* - z^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_3\langle (u_n - z_n) - (x^* - z^*), A_3 u_n - A_3 x^*\rangle - \lambda_3^2 \|A_3 u_n - A_3 x^*\|^2\big].
\end{aligned}
$$

Therefore

$$
\begin{aligned}
\|y_n - y^*\|^2 &\le \|x_n - x^*\|^2 - \|(z_n - y_n) - (z^* - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_2\langle (z_n - y_n) - (z^* - y^*), A_2 z_n - A_2 z^*\rangle
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\|z_n - z^*\|^2 &\le \|x_n - x^*\|^2 - \|(u_n - z_n) - (x^* - z^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_3\langle (u_n - z_n) - (x^* - z^*), A_3 u_n - A_3 x^*\rangle.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

From (3.18) and (3.19), we have

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|^2 &\le a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 + (1 - a_n - b_n)\|y_n - y^*\|^2 \\
&\le a_n\|v - x^*\|^2 + b_n\|x_n - x^*\|^2 \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\big[\|x_n - x^*\|^2 - \|(z_n - y_n) - (z^* - y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_2\langle (z_n - y_n) - (z^* - y^*), A_2 z_n - A_2 z^*\rangle\big] \\
&\le a_n\|v - x^*\|^2 + \|x_n - x^*\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (1-a_n-b_n)\|(z_n-y_n)-(z^*-y^*)\|^2\\
&+ (1-a_n-b_n)2\lambda_2\|(z_n-y_n)-(z^*-y^*)\|\|A_2z_n-A_2z^*\|
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-x^*\|^2 &\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)\|z_n-z^*\|^2\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+b_n\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)\big[\|x_n-x^*\|^2-\|(u_n-z_n)-(x^*-z^*)\|^2\\
&\quad+2\lambda_3\langle(u_n-z_n)-(x^*-z^*),A_3u_n-A_3x^*\rangle\big]\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+\|x_n-x^*\|^2\\
&\quad-(1-a_n-b_n)\|(u_n-z_n)-(x^*-z^*)\|^2\\
&\quad+(1-a_n-b_n)2\lambda_3\|(u_n-z_n)-(x^*-z^*)\|\|A_3u_n-A_3x^*\|.
\end{aligned}
$$

Hence

$$
\begin{aligned}
&(1-a_n-b_n)\|(z_n-y_n)-(z^*-y^*)\|^2\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)2\lambda_2\|(z_n-y_n)-(z^*-y^*)\|\|A_2z_n-A_2z^*\|\\
&\quad+(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
&(1-a_n-b_n)\|(u_n-z_n)-(x^*-z^*)\|^2\\
&\le a_n\|v-x^*\|^2+(1-a_n-b_n)2\lambda_3\|(u_n-z_n)-(x^*-z^*)\|\|A_3u_n-A_3x^*\|\\
&\quad+(\|x_n-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x_n\|.
\end{aligned}
$$

This together with (C1), (C2), (3.9) and (3.17), we obtain

$$
\lim_{n\to\infty}\|(z_n-y_n)-(z^*-y^*)\|=\lim_{n\to\infty}\|(u_n-z_n)-(x^*-z^*)\|=0. \tag{3.20}
$$

Therefore

$$
\begin{aligned}
\|(u_n-y_n)-(x^*-y^*)\| &\le \|(z_n-y_n)-(z^*-y^*)\|\\
&\quad+\|(u_n-z_n)-(x^*-z^*)\|\to 0 \ \text{ as } \ n\to\infty. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

From Lemma 2.3 and (2.7), it follows that

$$
\begin{aligned}
&\|(y_n-t_n)+(x^*-y^*)\|^2=\|(y_n-\lambda_1A_1y_n)-(y^*-\lambda_1A_1y^*)\\
&\quad-\big[P_C(y_n-\lambda_1A_1y_n)-P_C(y^*-\lambda_1A_1y^*)\big]+\lambda_1(A_1y_n-A_1y^*)\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*) - \big[P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - P_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\big]\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_1 \langle A_1 y_n - A_1 y^*, (y_n - t_n) + (x^* - y^*)\rangle \\
&\leq \|(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 - \|P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - P_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_1 \|A_1 y_n - A_1 y^*\| \|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&\leq \|(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 - \|TP_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) \\
&\quad - TP_C(y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_1 \|A_1 y_n - A_1 y^*\| \|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&\leq \|(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*) \\
&\quad - (Tt_n - x^*)\|\big[\|(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\| + \|Tt_n - x^*\|\big] \\
&\quad + 2\lambda_1 \|A_1 y_n - A_1 y^*\| \|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \\
&= \|u_n - Tt_n + x^* - y^* - (u_n - y_n) \\
&\quad - \lambda_1 (A_1 y_n - A_1 y^*)\|\big[\|(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - (y^* - \lambda_1 A_1 y^*)\| + \|Tt_n - x^*\|\big] \\
&\quad + 2\lambda_1 \|A_1 y_n - A_1 y^*\| \|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\|.
\end{aligned}
$$

This together with (3.13),(3.17) and (3.21), we obtain $\|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \to 0$ as $n \to \infty$. This together with (3.13) and (3.20), we obtain that

$$
\begin{aligned}
\|Tt_n - t_n\| &\leq \|Tt_n - u_n\| + \|(u_n - z_n) - (x^* - z^*)\| + \|(z_n - y_n) - (z^* - y^*)\| \\
&\quad + \|(y_n - t_n) + (x^* - y^*)\| \to 0, \quad \text{as} \quad n \to \infty. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Step4. We claim that $\limsup_{n\to\infty} \langle v - \overline{x}, x_n - \overline{x}\rangle \leq 0$, where $\overline{x} = P_\Omega v$. Indeed, since $\{t_n\}$ and $\{Tt_n\}$ are two bounded sequences in C, we can choose a subsequence $\{t_{n_i}\}$ of $\{t_n\}$ such that $t_{n_i} \rightharpoonup z \in C$ and

$$
\limsup_{n\to\infty} \langle v - \overline{x}, Tt_n - \overline{x}\rangle = \lim_{i\to\infty} \langle v - \overline{x}, Tt_{n_i} - \overline{x}\rangle.
$$

Since $\lim_{n\to\infty} \|Tt_n - t_n\| = 0$, we obtain that $Tt_{n_i} \rightharpoonup z$ as $i \to \infty$.

Next, we show that $z \in \Omega$.

Since $t_{n_i} \rightharpoonup z$ and $\|Tt_n - t_n\| \to 0$, we obtain by Lemma 2.6 that $z \in F(T)$.

From (3.22) and (3.10), we obtain

$$
\|t_n - x_n\| \leq \|Tt_n - t_n\| + \|Tt_n - x_n\| \to 0, \quad \text{as} \quad n \to \infty.
$$

Furthermore, by Lemma 3.1, we have $G : C \to C$ is nonexpansive. Then, we have

$$
\begin{aligned}
&\|t_n - G(t_n)\| = \|P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n) - G(t_n)\| \\
&= \|P_C\big[P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n) - \lambda_1 A_1 P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n)\big] - G(t_n)\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \|P_C\big[P_C(P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n) - \lambda_2 A_2 P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n)) \\
&\quad - \lambda_1 A_1 P_C(P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n) - \lambda_2 A_2 P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n))\big] - G(t_n)\| \\
&= \|G(u_n) - G(t_n)\| \leq \|u_n - t_n\| \\
&\leq \|u_n - x_n\| + \|x_n - t_n\|,
\end{aligned}
$$

hence $\lim_{n\to\infty} \|t_n - G(t_n)\| = 0$. Again by Lemma 2.6, we have $z \in GVI(C, A_1, A_2, A_3)$.

Since $t_{n_i} \rightharpoonup z$ and $\|x_n - t_n\| \to 0$, we obtain that $x_{n_i} \rightharpoonup z$. From $\|u_n - x_n\| \to 0$, we also obtain that $u_{n_i} \rightharpoonup z$. By using the same argument as that in the proof of [11, Theorem 3.1, pp. 1825], we can show that $z \in MEP(F, \varphi)$. Therefore $z \in \Omega$.

On the other hand, it follows from (2.8), (3.10) and $Tt_{n_i} \rightharpoonup z$ as $i \to \infty$ that

$$
\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \langle v - \overline{x}, x_n - \overline{x}\rangle &= \limsup_{n\to\infty} \langle v - \overline{x}, Tt_n - \overline{x}\rangle = \lim_{i\to\infty} \langle v - \overline{x}, Tt_{n_i} - \overline{x}\rangle \\
&= \langle v - \overline{x}, z - \overline{x}\rangle \leq 0. \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Step 5. We claim that $x_n \to \overline{x}$ as $n \to \infty$.
Since

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - \overline{x}\|^2 &= \langle a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n)Tt_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle \\
&= a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + b_n\langle x_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle \\
&\quad + (1 - a_n - b_n)\langle Tt_n - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle \\
&\leq a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + \frac{1}{2}b_n(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}(1 - a_n - b_n)(\|t_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&\leq a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + \frac{1}{2}b_n(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&\quad + \frac{1}{2}(1 - a_n - b_n)(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2) \\
&= a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle + \frac{1}{2}(1 - a_n)(\|x_n - \overline{x}\|^2 + \|x_{n+1} - \overline{x}\|^2),
\end{aligned}
$$

which implies that

$$
\|x_{n+1} - \overline{x}\|^2 \leq (1 - a_n)\|x_n - \overline{x}\|^2 + 2a_n\langle v - \overline{x}, x_{n+1} - \overline{x}\rangle.
$$

This together with (C1) and (3.23), we have by Lemma 2.4 that $\{x_n\}$ converges strongly to $\overline{x}$. This completes the proof. □

If $\varphi = 0$ in Theorem 3.2, then, we obtain the following result.

Corollary 3.3. *Let C be a nonempty closed and convex subset of a real Hilbert space H and F be a function from $C \times C$ to $\mathbb{R}$ satisfying (A1)-(A5). Let the mappings $A_i : C \to H$ be α_i-inverse-strongly monotone, for all $i = 1, 2, 3$ and T be a nonexpansive self-mapping of C such that $\Omega = F(T) \bigcap GVI(C, A_1, A_2, A_3) \bigcap EP(F) \neq \emptyset$. Let $v, x_1 \in C$ and $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ be the sequences generated by*

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - u_n, u_n - x_n\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ z_n = P_C(x_n - \lambda_3 A_3 x_n), \\ y_n = P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

If $\lambda_i \in (0, 2\alpha_i)$, for all $i = 1, 2, 3$ and the sequences $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ and $\{r_n\}$ are as in Theorem 3.2, then $\{x_n\}$ converges strongly to $\overline{x} = P_\Omega v$ and $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ is a solution of problem (2.1), where $\overline{y} = P_C(\overline{z} - \lambda_2 A_2 \overline{z})$ and $\overline{z} = P_C(\overline{x} - \lambda_3 A_3 \overline{x})$.

If $A_3 = 0$, $\varphi = 0$, $F(x, y) = 0$ and $r_n = 1$ for all $x, y \in C$ and all $n \in \mathbb{N}$ in Theorem 3.2, then $z_n = x_n$. By Theorem 3.2, we obtain the following result.

Corollary 3.4. [6, Theorem 3.1] *Let C be a nonempty closed and convex subset of a real Hilbert space H. Let the mappings $A_1, A_2 : C \to H$ be α_1-inverse-strongly monotone and α_2-inverse-strongly monotone, respectively. Let T be a nonexpansive self-mapping of C such that $\Omega = F(T) \bigcap GVI(C, A_1, A_2) \neq \emptyset$. Assume that v is an arbitrary point in C. Let $x_1 \in C$ and $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ be the sequences generated by*

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \lambda_2 A_2 x_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \quad n \geq 1. \end{cases}$$

If $\lambda_1 \in (0, 2\alpha_1)$, $\lambda_2 \in (0, 2\alpha_2)$ and the sequences $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ are as in Theorem 3.2, then $\{x_n\}$ converges strongly to $\overline{x} = P_\Omega v$ and $(\overline{x}, \overline{y})$ is a solution of problem (2.2), where $\overline{y} = P_C(\overline{x} - \lambda_2 A_2 \overline{x})$.

4. Acknowledgement

The authors wish to thank the referees and the editor for valuable comments. The first author was supported by the Thailand Research Fund, the Commission on Higher Education and Thaksin University under Grant MRG5680072. The second author was supported by The Thaksin University Research Fund.

References

[1] Y. Wang, C. Zhang, Wiener-Hopf equation technique for solving equilibrium problems and variational inequalities and fixed points of a nonexpansive mapping, *J. Inequal. Appl.* **2014** (2014), Article ID 286.

[2] Q. Yuan, Y. Zhang, Convergence of a regularization algorithm for nonexpansive and monotone operators in Hilbert spaces, *Fixed Point Theory Appl.* **2014** (2014), Article ID 180.

[3] Z. Yinying, C. Jiantao, W. Yali, Convergence theorem for equilibrium and variational inequality problems and a family of infinitely nonexpansive mappings in Hilbert spaces, *J. Appl. Math.* **2014** (2014), Article ID 232541.

[4] A. Abdou, B. A. Alamri, Y. J. Cho, Y. Yao, L. J. Zhu, Parallel algoithms for variational inclusions and fixed points with applications, *Fixed Point Theory Appl.* **2014** (2014), Article ID 174.

[5] M. A. Noor, K. I. Noor, A. G. Khan, Parallel schemes for solving a system of extended general quasi variational inequalities, *Appl. Math. Comput.* **245** (2014) 566–574.

[6] L. C. Ceng, C. Y. Wang, J. C. Yao, Strong convergence theorems by a relaxed extragradient method for a general system of variational inequalities, *Math. Meth. Oper. Res.* **67** (2008) 375–390.

[7] R. U. Verma, On a new system of nonlinear variational inequalities and associated iterative algorithms, *Math Sci Res Hot-Line* **3** (1999) 65–68.

[8] L. C. Ceng, J. C. Yao, A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems and fixed point problems, *J. Comput. App. Math.* **214** (2008) 186-201.

[9] Q. Zhang, Strong convergence of a Halpern-type algorithm for common solutions of fixed point and equilibrium problems, *J. Inequal. Appl.* **2014** (2014), Article ID 313.

[10] S. Suwannaut, A. Kangtunyakarn, Convergence analysis for the equilibrium problems with numerical results, *Fixed Point Theory Appl.* **2014** (2014), Article ID 167.

[11] J. W. Peng, J. C. Yao, Strong convergence theorems of iterative schemes based on extragradient method for mixed equilibrium problems and fixed point problems, *Math. Comput. Model.* **49** (2009) 1816–1828.

[12] M. O. Osilike, D. I. Igbokwe, Weak and strong convergence theorems for fixed points of pseudocontractions and solutions of monotone type operator equations, *Comput. Math. Appl.* **40** (2000) 559-239.

[13] H. K. Xu, Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings, *J. Math. Anal. Appl.* **298** (2004) 279-291.

[14] T. Suzuki, Strong convergence of Krasnoselskii and Manns type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals, *J. Math. Anal. Appl.* **305** (2005) 227-239.

[15] K. Goebel, W. A. Kirk, *Topics on metric fixed-point theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[16] S. Imnang, Hybrid projection algorithm for a new general system of variational inequalities in Hilbert spaces, *ISRN Appl. Math.* **2012** (2012), Article ID 482869.

A4: **Suwicha Imnang**, Applications of Fixed Point Theory to Solve Generalized Variational Inequality Problems, ***Proceeding of Research Adds Value Leading to Economy and Education Advancement and Sustainability of Thai Society***, Thaksin University, Thailand, 2014, 1503- 1510.

การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไป

Applications of Fixed Point Theory to Solve Generalized Variational Inequality Problems

สุวิชา อิ่มนาง[1*]

Suwicha Imnang[1*]

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอปัญหาการหาสมาชิกร่วมสำหรับผลเฉลยของระบบทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผันสำหรับฟังก์ชัน α − inverse-strongly monotone ผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพผสม และเซตของจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต นอกจากนี้ ในงานวิจัยนี้ได้ประยุกต์ทฤษฎีบทหลักสู่ปัญหาการประมาณค่าหาสมาชิกศูนย์ของวงศ์จำกัดสำหรับฟังก์ชัน maximal monotone ในปริภูมิฮิลเบิร์ต ผลงานที่ได้จากการวิจัยนี้ได้ขยายและพัฒนาองค์ความรู้ผลงานของ Ceng Wang และ Yao

คำสำคัญ: ฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ระบบทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม หลักการกึ่งปิด

Abstract

The purpose of this research is to investigate the problem of finding a common element of the set of solutions of a general system of variational inequality problems for α − inverse-strongly monotone mappings, the set of solutions of mixed equilibrium problems and the set of common fixed points of a finite family of nonexpansive mappings in a real Hilbert space. Furthermore, we apply our main result with the problem of approximating a zero of a finite family of maximal monotone mappings in Hilbert spaces. Our main result extends and improves the recent results of Ceng, Wang and Yao.

Keywords: Nonexpansive mapping, General system of variational inequality problem,
Mixed equilibrium problem, Demi-closedness principle

---

[1]อ.ดร., สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ พัทลุง 93110

[*]Corresponding author: email: suwicha.n@hotmail.com

1 บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

ปัจจุบันความก้าวหน้าทางวิชาการด้านคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการพัฒนาทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆนั้น นับว่ามีบทบาทและสำคัญมากต่อการพัฒนาเทคโนโลยีสมัยใหม่ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นและสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาประเทศ โดยเฉพาะทฤษฎีบทที่ได้จากการวิจัยในปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้น ได้นำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวาง อาทิ เช่น นักเศรษฐศาสตร์ได้นำทฤษฎีบทของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด (optimization problem) ประยุกต์ใช้กับปัญหาการหาจุดที่ทำให้ได้กำไรสูงสุด หรือเพื่อหาจุดคุ้มทุน รวมถึงการใช้ทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุด นักบัญชีได้นำทฤษฎีบทของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดมาคำนวณทิศทางการขนส่งเพื่อให้เสียค่าใช้จ่ายในการขนส่งน้อยที่สุด ซึ่งปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุดนั้น ในความเป็นจริงแล้วถูกรวมอยู่ในปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า **"ปัญหาอสมการการแปรผัน** (variational inequality problem)" จากการศึกษาพบว่าปัญหาอสมการการแปรผันสามารถประยุกต์ใช้ในการแก้ไขปัญหาอีกหลายปัญหา อาทิเช่น ปัญหาดุลยภาพการจราจรทางเครือข่าย (traffic network equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพราคาเชิงพื้นที่ (spatial price equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพตลาดผู้ขายน้อยราย (oligopolistic market equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพทางการเงิน (financial equilibrium problem) ปัญหาดุลยภาพการอพยพ (migration equilibrium problem) ปัญหาเครือข่ายเกี่ยวกับสิ่งแวดล้อม (environmental network problem) และปัญหาเครือข่ายความรู้ (knowledge network problem) ทำให้ในช่วง 10 ปีที่ผ่านมามีนักวิจัยจำนวนมาก ได้ศึกษาปัญหาอสมการการแปรผัน และสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อศึกษาการประมาณค่า (approximation) หาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผันทั้งในปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space) และปริภูมิบานาค (Banach space)

ปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต เป็นปัญหาการหาสมาชิก $u \in C$ ที่ทำให้

$$\langle Au, v-u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathrm{C} \tag{1}$$

เมื่อ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และ A เป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นที่ส่งจาก C ไปยัง H เซตของผลเฉลยทั้งหมดของปัญหา (1) เขียนแทนด้วย $VI(C,A)$ นักวิจัยจำนวนมากได้ศึกษาการหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน โดยเริ่มต้นจากการศึกษาการหาผลเฉลยในปริภูมิยูคลิด (Euclidean space) ที่มีมิติจำกัด ($H = \mathbb{R}^n$) และได้พัฒนามาสู่การศึกษาการหาผลเฉลยในปริภูมิฮิลเบิร์ต

ในปี ค.ศ. 2008 Ceng Wang และ Yao ได้ศึกษาระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน (general system of variational inequalities) ซึ่งเป็นปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda A y^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathrm{C} \\ \langle \mu B x^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathrm{C} \end{cases} \tag{2}$$

ในการประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบปัญหา (2) ในกรณีที่ $A, B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α-inverse strongly monotone และ β-inverse strongly monotone ตามลำดับ

โดยที่ Ceng Wang และ Yao ได้ศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำของลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ ดังนี้

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n - \mu B x_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) S P_C(y_n - \lambda A y_n) \end{cases}$$

เมื่อ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับในช่วงปิด $[0,1]$ และ $\lambda \in (0, 2\alpha),\ \mu \in (0, 2\beta)$ ภายใต้การวางเงื่อนไขของลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ นั้น Ceng Wang และ Yao ได้พิสูจน์ว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน (2) และปัญหาจุดตรึงของ S ในปีเดียวกัน Ceng และ Yao ได้แนะนำปัญหาทางคณิตศาสตร์ใหม่ที่สำคัญอีกหนึ่งปัญหา และเรียกปัญหานั้นว่า “ปัญหาดุลยภาพผสม (mixed equilibrium problem)” ซึ่งเป็นปัญหาที่ครอบคลุมปัญหาดุลยภาพ (equilibrium problem) และเป็นปัญหาที่ศึกษามาก่อนหน้านั้นโดย พิจารณาปัญหาการหาสมาชิก $x \in C$ ที่ทำให้

$$F(x, y) + \varphi(y) \geq \varphi(x), \quad \forall y \in C \tag{3}$$

โดยที่ $\varphi : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชันขยายเชิงจริงแท้ และ $F : C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันเชิงจริง

จากแนวคิดดังกล่าว ผู้วิจัยต้องการศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นใหม่เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งสามปัญหาคือ ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต รวมทั้งประยุกต์ทฤษฎีบทที่ได้สู่ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน maximal monotone ในปริภูมิฮิลเบิร์ต

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญ 4 ประการ ดังต่อไปนี้ ประการแรกต้องการสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่เพื่อหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ประการที่สองเพื่อหาเงื่อนไขการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ประการที่สาม เพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต และประการสุดท้าย เพื่อประยุกต์ทฤษฎีบทการลู่เข้าสู่ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน maximal monotone ในปริภูมิฮิลเบิร์ต

1.3 ขอบเขตของการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ศึกษาทฤษฎีบทการลู่เข้าของขั้นตอนวิธีทำซ้ำแบบใหม่ เพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยที่ระบบทั่วไปของอสมการการแปรผันที่ศึกษาคือ ระบบปัญหา (2)

ปัญหาดุลยภาพผสม (3) และระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาในงานวิจัยนี้ คือ

$$\begin{cases} \mathrm{F}(\mathrm{u}_n,\mathrm{y})+\varphi(y)-\varphi(u_n)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-\mathrm{u}_n,\mathrm{u}_n-x_n\rangle\geq 0 \quad \forall \mathrm{y}\in \mathrm{C}, \\ \mathrm{y}_n = P_C(u_n-\mu B\mathrm{u}_n), \\ x_{n+1}=a_n v+b_n x_n+(1-a_n-b_n)S_n P_C(y_n-\lambda A y_n), \quad \mathrm{n}\geq 1 \end{cases}$$

โดย A และ B เป็นฟังก์ชันประเภท α - inverse strongly monotone และ β - inverse strongly monotone ตามลำดับ

1.4 นิยามศัพท์

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตที่มีผลคูณภายใน (inner produce) และนอร์ม (norm) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\langle\ ,\ \rangle$ และ $\|\ \|$ ตามลำดับ ให้ C เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ H จะเรียกฟังก์ชัน $T:C\to C$ ว่าฟังก์ชันแบบไม่ขยาย (nonexpansive mapping) ถ้า $\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|, \quad \forall x,y\in C$

กำหนดให้ $A:C\to H$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียกฟังก์ชัน A ว่า

(i) $\alpha-$inverse strongly monotone ถ้ามีจำนวนจริง $\alpha>0$ ที่ทำให้

$\langle Ax-Ay\ ,x-y\ \rangle\geq\alpha\|Ax-Ay\|^2, \quad \forall x,y\in \mathrm{C}$

(ii) monotone ถ้า $\langle Ax-Ay,x-y\rangle\geq 0, \quad \forall x,y\in C$

ให้ $B:H\to 2^H$ เป็นฟังก์ชัน maximal mmonotone สำหรับแต่ละ $r>0$ จะเรียกฟังก์ชัน $J_r^B=(I+rB)^{-1}$ ว่าตัวแก้ปัญหา (resolvent) ของ B เมื่อ I เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

2 วิธีการวิจัย

ในการดำเนินงานวิจัยนี้ มีขั้นตอนวิธีในการดำเนินงานวิจัยที่สำคัญดังต่อไปนี้

2.1 รวบรวม และศึกษางานวิจัย หนังสือ และบทความที่สำคัญที่เกี่ยวข้องกับระบบทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงทั้งในปริภูมิฮิลเบิร์ต และปริภูมิบานาค

2.2 ศึกษาสมบัติของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน (2) และความสัมพันธ์ระหว่างปัญหาดังกล่าวกับปัญหาจุดตรึง

2.3 ร่วมเสวนาและอภิปรายปัญหาวิจัยกับผู้เชี่ยวชาญทางด้านทฤษฎีจุดตรึงและการประยุกต์ รวมทั้งปรึกษาปัญหาวิจัยกับที่ปรึกษางานวิจัย

2.4 ใช้ความรู้จากข้อ 2.1 – 2.3 เพื่อศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสำหรับประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ของฟังก์ชันประเภท α - inverse strongly monotone และ β - inverse strongly monotone

2.5 หาเงื่อนไขการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้น และพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของขั้นตอนวิธีทำซ้ำดังกล่าว พร้อมทั้งประยุกต์ทฤษฎีบทการลู่เข้าสู่ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน maximal monotone ในปริภูมิฮิลเบิร์ต

2.6 เขียนบทความวิจัย และส่งไปตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติที่มีมาตรฐานสากล

2.7 นำเสนอผลงานวิจัยในที่ประชุมวิชาการในหัวข้อที่เกี่ยวข้องกับปัญหาจุดตรึงและการประยุกต์

3 ผลการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัย

3.1 ผลการวิจัย

จากการศึกษาทฤษฎีการลู่เข้าของขั้นตอนวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิวเบิร์ต ได้พบองค์ความรู้ใหม่และทฤษฎีบทที่สำคัญของการประมาณค่า รวมทั้งประยุกต์ทฤษฎีบทดังกล่าวสู่ปัญหาการหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน maximal monotone ในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยมีเนื้อหาสาระสำคัญดังต่อไปนี้

<u>ทฤษฎีบทที่ 1</u> *ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิวเบิร์ติ H กำหนดให้ $F: C\times C\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไข $(A1)-(A5)$ และ $\varphi: C\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ กำหนด $\lambda,\mu>0$ และ $A: C\to H$ เป็นฟังก์ชัน $\alpha-$inverse strongly monotone และ $B: C\to H$ เป็นฟังก์ชัน $\beta-$inverse strongly monotone ให้ $\{T_i\}_{i=1}^{N}$ เป็นวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายโดยที่ $\Omega=\bigcap_{i=1}^{N}F(T_i)\cap GVI(C,A,B)\cap MEP(F,\varphi)\neq\phi$ สำหรับแต่ละ $j\in\{1,2,...,N\}$ กำหนดให้ $\alpha_j^{(n)}=(\alpha_1^{n,j},\alpha_2^{n,j},\alpha_3^{n,j})$ โดยที่ $\alpha_1^{n,j},\alpha_2^{n,j},\alpha_3^{n,j}\in[0,1]$, $\alpha_1^{n,j}+\alpha_2^{n,j}+\alpha_3^{n,j}=1$, $\{\alpha_1^{n,j}\}_{j=1}^{N-1}\subset[\eta_1,\theta_1]$ ซึ่ง $0<\eta_1\le\theta_1$ และ $\{\alpha_1^{n,N}\}_{j=1}^{N-1}\subset[\eta_N,1]$ โดยที่ $0<\eta_N\le1$ และ $\{\alpha_2^{n,j}\}_{j=1}^{N}\subset[0,\theta_2]$ ซึ่ง $0\le\theta_2<1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชันที่ก่อกำเนิดโดยฟังก์ชัน $T_1,T_2,...,T_N$ และ $\alpha_1^{(n)},\alpha_2^{(n)},...,\alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข $(B1)$ หรือ $(B2)$ เป็นจริง และ $v\in C$ กำหนดลำดับ $\{x_n\},\{y_n\}$ และ $\{u_n\}$ ดังนี้*

$$\begin{cases} F(u_n,y)+\varphi(y)-\varphi(u_n)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-u_n,u_n-x_n\rangle\ge0 \quad \forall y\in C,\\ y_n=P_C(u_n-\mu Bu_n),\\ x_{n+1}=a_nv+b_nx_n+(1-a_n-b_n)S_nP_C(y_n-\lambda Ay_n),\quad n\ge1 \end{cases}$$

เมื่อ $\{a_n\},\{b_n\}\subset[0,1]$, $\lambda\in(0,2\alpha)$ และ $\mu\in(0,2\beta)$ ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

(C1) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ *และ* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\infty$;

(C2) $0<\liminf_{n\to\infty}b_n\le\limsup_{n\to\infty}b_n<1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ *และ* $\lim_{n\to\infty}|r_{n+1}-r_n|=0;$

(C4) $\lim_{n\to\infty}\left|\alpha_1^{n+1,i}-\alpha_1^{n,i}\right|=0;\ \ \forall i\in\{1,2,...,N\}$ *และ* $\lim_{n\to\infty}\left|\alpha_3^{n+1,j}-\alpha_3^{n,j}\right|=0;\ \ \forall j\in\{2,3,...,N\}$

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ *ลู่เข้าแบบเข้มสู่* $\bar{x}=P_\Omega v$ *และ* $(\bar{x},\bar{y})$ *เป็นผลเฉลยของระบบปัญหา (2) เมื่อ* $\bar{y}=P_\Omega(\bar{x}-\mu B\bar{x})$

ถ้า $N=1, T_1=S, \alpha_2^{n,1}=\alpha_3^{n,1}=0, \varphi=0, F(x,y)=0$ สำหรับ $x,y\in C$ และ $r_n=1$ สำหรับ $n\in\mathbb{N}$ ในทฤษฎีบทที่ 1 แล้ว $u_n=P_C x_n=x_n$ โดยทฤษฎีบทที่ 1 จะได้บทแทรกที่สำคัญตามมาซึ่งเป็นผลงานของ Ceng Wang และ Yao ดังนี้

<u>บทแทรก 2</u> *ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิวเบิร์ต H, $A:C\to H$ เป็นฟังก์ชัน $\alpha-inverse-strongly\ monotone$ และ $B:C\to H$ เป็นฟังก์ชัน $\beta-inverse-strongly\ monotone$ กำหนดให้ S เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายโดยที่ $\Omega=F(S)\cap GSVI(C,A,B)\neq\phi$ สมมุติให้ $v\in C$ กำหนดลำดับ $\{x_n\},\{y_n\}$ และ $\{u_n\}$ ดังนี้*

$$\begin{cases} y_n = P_C(x_n-\mu Bx_n), \\ x_{n+1}=a_n v+b_n x_n+(1-a_n-b_n)SP_C(y_n-\lambda Ay_n), & n\geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ $\lambda\in(0,2\alpha)$ และ $\mu\in(0,2\beta)$ โดยที่ลำดับ $\{a_n\},\{b_n\}$ สอดคล้องเงื่อนไขในทฤษฎีบทที่ 1 แล้ว $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x}=P_\Omega v$

การประยุกต์ทฤษฎีบทที่ 1 สู่การประมาณค่าหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน maximal monotone ในปริภูมิฮิลเบิร์ต มีสาระสำคัญดังนี้

<u>ทฤษฎีบทที่ 3</u> *ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต กำหนดให้ $F:H\times H\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไข $(A1)-(A5)$ และ $\varphi:H\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ เป็น proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ ให้ $A:H\to H$ เป็นฟังก์ชัน $\alpha-inverse-strongly\ monotone$ และ $B_1,B_2,...,B_N:H\to 2^H$ เป็นฟังก์ชัน $\max imal\ monotone$ ที่ทำให้ $\Omega=\bigcap_{i=1}^{N}B_i^{-1}(0)\cap A^{-1}(0)\cap MEP(F,\varphi)\neq\phi$ สำหรับแต่ละ $i\in\{1,2,...,N\}$ และ $r_i>0$ สมมุติให้ $J_{r_i}^{B_i}$ เป็นตัวแก้ปัญหาของ B_i สำหรับแต่ละ $j\in\{1,2,...,N\}$ กำหนดให้ $\alpha_j^{(n)}=(\alpha_1^{n,j},\alpha_2^{n,j},\alpha_3^{n,j})$ โดยที่ $\alpha_1^{n,j},\alpha_2^{n,j},\alpha_3^{n,j}\in[0,1],\ \alpha_1^{n,j}+\alpha_2^{n,j}+\alpha_3^{n,j}=1,\ \left\{\alpha_1^{n,j}\right\}_{j=1}^{N-1}\subset[\eta_1,\theta_1]$ ซึ่ง $0<\eta_1\leq\theta_1$ และ $\left\{\alpha_1^{n,N}\right\}_{j=1}^{N-1}\subset[\eta_N,1]$ โดยที่ $0<\eta_N\leq 1$ และ $\left\{\alpha_2^{n,j}\right\}_{j=1}^{N}\subset[0,\theta_2]$ ซึ่ง $0\leq\theta_2<1$ กำหนดให้ S_n เป็น S-ฟังก์ชันที่ก่อกำเนิดโดยฟังก์ชัน $J_{r_1}^{B_1},J_{r_2}^{B_2},...,J_{r_N}^{B_N}$ และ $\alpha_1^{(n)},\alpha_2^{(n)},...,\alpha_N^{(n)}$ สมมุติเงื่อนไข $(B1)$ หรือ $(B2)$ เป็นจริง และกำหนดให้ $v,x_1\in H$ กำหนดลำดับ $\{x_n\},\{y_n\}$ และ $\{u_n\}$ โดย*

$$\begin{cases} \mathrm{F}(\mathrm{u}_n,\mathrm{y})+\varphi(y)-\varphi(u_n)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-\mathrm{u}_n,\mathrm{u}_n-x_n\rangle\geq 0 \quad \forall \mathrm{y}\in \mathrm{C}, \\ \mathrm{y}_n=u_n-\lambda A\mathrm{u}_n, \\ x_{n+1}=a_n v+b_n x_n+(1-a_n-b_n)S_n(y_n-\lambda A y_n), \quad \mathrm{n}\geq 1 \end{cases}$$

เมื่อ, $\lambda\in(0,2\alpha)$ *ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง*

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ *และ* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\infty$;

(C2) $0<\liminf_{n\to\infty} b_n\leq \limsup_{n\to\infty} b_n<1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n>0$ *และ* $\lim_{n\to\infty}|r_{n+1}-r_n|=0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty}|\alpha_1^{n+1,i}-\alpha_1^{n,i}|=0; \quad \forall i\in\{1,2,...,N\}$ *และ* $\lim_{n\to\infty}|\alpha_3^{n+1,j}-\alpha_3^{n,j}|=0; \quad \forall j\in\{2,3,...,N\}$

แล้วลำดับ $\{\mathrm{x}_n\}$ *ลู่เข้าแบบเข้มสู่* $\bar{x}=P_\Omega v$

3.2 อภิปรายผล

งานวิจัยนี้ผู้วิจัยต้องการศึกษา การประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยระบบทั่วไปของปัญหาอสมการการแปรผันที่ทำการศึกษาคือ

$$\begin{cases} \langle \lambda A y^*+x^*-y^*, x-x^*\rangle\geq 0, \quad \forall x\in \mathrm{C} \\ \langle \mu B x^*+y^*-x^*, x-y^*\rangle\geq 0, \quad \forall x\in \mathrm{C} \end{cases}$$

เมื่อ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และระเบียบวิธีทำซ้ำที่ทำการศึกษาคือ

$$\begin{cases} \mathrm{F}(\mathrm{u}_n,\mathrm{y})+\varphi(y)-\varphi(u_n)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-\mathrm{u}_n,\mathrm{u}_n-x_n\rangle\geq 0 \quad \forall \mathrm{y}\in \mathrm{C}, \\ \mathrm{y}_n=P_C(u_n-\mu B\mathrm{u}_n), \\ x_{n+1}=a_n v+b_n x_n+(1-a_n-b_n)S_n P_C(y_n-\lambda A y_n), \quad \mathrm{n}\geq 1 \end{cases}$$

จากการวิจัยพบว่าภายใต้การวางเงื่อนไขของฟังก์ชัน F φ S_n และลำดับ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ ระเบียบวิธีทำซ้ำที่ทำการศึกษานี้ ลู่เข้าสู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย นอกจากนี้ ยังพบว่าระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษานี้ ลู่เข้าสู่ผลเฉลยของปัญหาทางคณิตศาสตร์อีกหนึ่งปัญหาซึ่งเรียกว่า"ปัญหาดุลยภาพ" และจะเห็นว่า ถ้ากำหนดให้ ฟังก์ชัน $F=\varphi=0$, $S_n=T$ และ $r_n=1$ จะได้ว่า $u_n=x_n$ ดังนั้นระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษานี้จะลดรูปเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาโดย Ceng Wang และ Yao ดังนี้

$$\begin{cases} \mathrm{y_n} = P_C(x_n - \mu B x_\mathrm{n}), \\ x_{n+1} = a_n v + (1-a_n) T P_C(y_n - \lambda A y_\mathrm{n}), \quad \mathrm{n} \geq 1 \end{cases}$$

นอกจากนี้จะเห็นว่าระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ถ้า $A = B$ แล้วระบบปัญหาดังกล่าวจะลดรูปเป็นระบบปัญหาที่เรียกว่า “ระบบใหม่ของอสมการการแปรผัน (new system of variational inequality)” ศึกษาโดย Verma ในปี ค.ศ. 1999 ดังนี้

$$\begin{cases} \left\langle \lambda A y^* + x^* - y^*, x - x^* \right\rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathrm{C} \\ \left\langle \mu A x^* + y^* - x^*, x - y^* \right\rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathrm{C} \end{cases}$$

และเพิ่มเงื่อนไขให้ $x^* = y^*$ จะเห็นว่าระบบปัญหาดังกล่าวจะลดรูปเป็นปัญหาอสมการการแปรผัน

4 สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญคือ ต้องการสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำแบบใหม่เพื่อหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต พร้อมทั้งหาเงื่อนไขการลู่เข้าและพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้น และประยุกต์ทฤษฎีบทที่ได้สู่การประมาณค่าหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน maximal monotone ในปริภูมิฮิลเบิร์ต จากการวิจัยพบว่าระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นนั้น ได้ลู่เข้าสู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงร่วมของวงศ์จำกัดของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ภายใต้การวางเงื่อนไขบางอย่างบนฟังก์ชันและสเกลาร์ที่ทำการศึกษา นอกจากนี้ ในงานวิจัยนี้ยังได้ประยุกต์ทฤษฎีบทสู่ปัญหาการประมาณค่าหาสมาชิกศูนย์ของฟังก์ชัน maximal monotone ในปริภูมิฮิลเบิร์ต

5 คำขอบคุณ

งานวิจัยนี้ได้รับเงินสนับสนุนจากงบประมาณเงินรายได้ กองทุนวิจัยมหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. ๒๕๕๖ นอกจากนี้ ผู้วิจัยขอขอบคุณ ศาสตราจารย์ ดร. สุเทพ สวนใต้ ที่ให้คำปรึกษาปัญหาวิจัยและเสนอแนะให้งานวิจัยนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

6 เอกสารอ้างอิง

Ceng, L. C., Wang, C. Y. and Yao, J. C. (2008). “Strong convergence theorems by a relaxed extragradient method for a general system of variational inequalities”, **Math. Meth. Oper. Res.** 67, 375-390.

Ceng, L. C. and Yao, J. C. (2008). “A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems and fixed point problems”, **J. Comput. App.** 214, 186-201.

Verma, R. U. (1999). “On a new system of nonlinear variational inequalities and associated iterative algorithms”, **Math. Sci. Res Hot-Line**, 3, 65-68.

*** หมายเหตุ** งานวิจัยนี้ได้รับการตีพิมพ์ในวารสาร International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 82 No. 2 2013, 189-211 ในชื่อเรื่อง Hybrid iterative method for a genaral system of variational inequalities in Hilbert spaces with applications

A5: Suwicha Imnang and Theeradet Kaewong, Applications of Fixed Point Theory to Solve a New System of Generalized Variational Inequality, ***Proceeding of Thai Research: A Vision of Futurity***, Thaksin University, Thailand, 2015, 1354- 1360.

การประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อแก้ปัญหาระบบใหม่ของอสมการการแปรผันที่ถูกวางนัยทั่วไป

Applications of Fixed Point Theory to Solve a New System of Generalized Variational Inequality

สุวิชา อิ่มนาง[1*] และธีรเดช เกื้อวงศ์[2]

Suwicha Imnang[1*] and Theeradet Kaewong[2]

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ได้นำเสนอขั้นตอนวิธีทำซ้ำเพื่อใช้ในการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต จากการศึกษาพบว่าระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นลู่เข้าแบบเข้มสู่ผลเฉลยร่วมของสามปัญหาดังกล่าว นอกจากนี้ทฤษฎีบทหลักจากการศึกษาได้คลอบคลุมผลงานวิจัยของ Ceng, Wang and Yao [Strong convergence theorems by a relaxed extragradient method for a general system of variational inequalities, Math Meth Oper Res 67 (2008) 375-390] และคนอื่นๆ

คำสำคัญ: ปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม ฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ปริภูมิฮิลเบิร์ต

Abstract

In this research, we introduce an iterative method to approximate a common solution of a new general system of variational inequalities, a mixed equilibrium problem and a fixed point problem for a nonexpansive mapping in real Hilbert spaces. We prove that the iterative sequence converges strongly to a common solution of the three problems in the framework of Hilbert spaces. Our main results extend and improve the recent results of Ceng, Wang and Yao [Strong convergence theorems by a relaxed extragradient method for a general system of variational inequalities, Math Meth Oper Res 67 (2008) 375--390] and many others.

Keywords: Variational Inequality Problem, Mixed Equilibrium Problem, Nonexpansive Mapping, Hilbert Space

[1] อ.ดร., สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ พัทลุง 93210

[2] อ., สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยทักษิณ พัทลุง 93210

[*] Corresponding author: email: suwicha.n@hotmail.com

บทนำ

ความสำคัญและที่มาของปัญหาวิจัย

ปัจจุบันความก้าวหน้าทางวิชาการด้านคณิตศาสตร์โดยเฉพาะอย่างยิ่งการพัฒนาทฤษฎีและองค์ความรู้ใหม่ๆ นั้น นับว่ามีบทบาทและสำคัญมากต่อการพัฒนาเทคโนโลยีสมัยใหม่ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นและสำคัญอย่างยิ่งต่อการพัฒนาประเทศ โดยเฉพาะทฤษฎีบทที่ได้จากการศึกษาปัญหาในทางคณิตศาสตร์นั้น สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อย่างกว้างขวาง อาทิ เช่น นักเศรษฐศาสตร์นำทฤษฎีบทของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด (optimization problem) ประยุกต์ใช้กับการหาจุดที่ทำให้ได้กำไรสูงสุดหรือเพื่อหาจุดคุ้มทุน รวมถึงการใช้ทรัพยากรให้เกิดประโยชน์สูงสุด นักบัญชีนำทฤษฎีบทของปัญหาการหาค่าเหมาะสมที่สุด มาคำนวณทิศทางการขนส่งเพื่อให้เสียค่าใช้จ่ายในการขนส่งน้อยที่สุด เป็นที่ทราบกันดีว่าปัญหาดังกล่าวนั้น รวมอยู่ในปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่า "ปัญหาอสมการการแปรผัน (variational inequality problem)" ทำให้ในช่วง 10 ปีที่ผ่านมามีนักวิจัยจำนวนมาก ได้ศึกษาปัญหาอสมการการแปรผันและสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อศึกษาการประมาณค่า (approximation) หาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผันทั้งในปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert space) และปริภูมิบานาค (Banach space)

ปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต คือการหาสมาชิก $u \in C$ ที่ทำให้

$$\langle Au, v-u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathrm{C} \tag{1}$$

เมื่อ C เป็นเซตย่อยของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และ A เป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นที่ส่งจาก C ไปยัง H นักวิจัยจำนวนมากได้ศึกษาการหาผลเฉลยของปัญหาอสมการการแปรผัน โดยเริ่มต้นจากการศึกษาการหาผลเฉลยในปริภูมิยูคลิด (Euclidean space) ที่มีมิติจำกัด และได้พัฒนามาสู่การศึกษาการหาผลเฉลยในปริภูมิฮิลเบิร์ต รวมทั้งสร้างระบบใหม่ของปัญหาอสมการการแปรผันที่ให้คำตอบมากกว่าปัญหาอสมการการแปรผัน (1)

ในปี ค.ศ. 2010 Yao Liou และ Kang [1] ได้ศึกษาระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน (general system of variational inequalities) ซึ่งเป็นปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*) \in C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda A y^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in \mathrm{C} \\ \langle \mu B x^* + y^* - x^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in \mathrm{C} \end{cases} \tag{2}$$

ในการประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบปัญหา (2) ในกรณีที่ $A, B : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน α-inverse strongly monotone และ β-inverse strongly monotone ตามลำดับ จากปัญหาอสมการที่ (2) จะเห็นว่า ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $B = 0$ $\lambda = 1$ และ $x^* = y^*$ แล้วระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน (2) จะลดรูปเป็นปัญหาอสมการการแปรผัน (1) ต่อมาปี ค.ศ. 2011 Yu และ Liang [2] ได้สร้างและศึกษา "ปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไป" ซึ่งเป็นระบบปัญหาที่ครอบคลุมปัญหา (1) โดยกำหนดให้ $A : C \to H$ และ $B : C \to H$ เป็นสองฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นใดๆ ปัญหาอสมการที่ศึกษา คือ การหาสมาชิก $u \in C$ ที่ทำให้

$$\langle u - \tau B u + \lambda A u, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathrm{C} \tag{3}$$

เมื่อ τ และ λ เป็นสองจำนวนจริงบวกใดๆ เซตของผลเฉลยทั้งหมดของปัญหา (3) เขียนแทนด้วย $GVI(C, B, A)$ จากปัญหาอสมการที่ (3) จะเห็นว่า ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน B เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ และ $\tau = \lambda = 1$ แล้วปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไป (3) จะลดรูปเป็นปัญหาอสมการการแปรผัน (1) นอกจากนี้ Yu และ Liang ได้ประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไป (3) โดยศึกษากรณีที่ฟังก์ชัน $A_m : C \to H$ และ $B_m : C \to H$ $(m = 1, 2, ...r)$ เป็นฟังก์ชันประเภท relaxed (c,d)-cocoercive และ L-Lipschitz continuous พร้อมทั้งศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำ $\{x_n\}$ ดังนี้

$$x_{n+1} = \alpha_n u + \beta_n x_n + \gamma_n \sum_{m=1}^{r} \delta_{(m,n)} P_C(\tau_m B_m x_n - \lambda_m A_m x_n), \quad n \geq 1 \tag{4}$$

ภายใต้การวางเงื่อนไขของลำดับ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}$ และ $\{\delta_{(m,n)}\}$ Yu และ Liang ได้พิสูจน์ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ที่กำหนดโดยสมการ (4) ลู่เข้าแบบเข้มสู่สมาชิก $\bar{x} \in \bigcap_{m=1}^{r} GVI(C, B_m, A_m)$ นอกจากนี้ ปัญหาทางคณิตศาสตร์อีกหนึ่งปัญหาที่ครอบคลุมปัญหาอสมการการแปรผัน คือ ปัญหาดุลยภาพผสม (mixed equilibrium problem) ซึ่งเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญมากโดยเฉพาะทางเศรษฐศาสตร์ได้นำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวาง โดยกำหนดนิยามดังนี้ ให้ $\varphi : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ และ $F : C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นสองฟังก์ชัน ปัญหาดุลยภาพผสม คือ ปัญหาการหาสมาชิก $x \in C$ ที่ทำให้ $F(x,y) + \varphi(y) \geq \varphi(x), \ \forall y \in C$ เซตคำตอบทั้งหมดของปัญหาดุลยภาพ เขียนแทนด้วย $MEP(F, \varphi)$

จากแนวคิดดังกล่าว ผู้วิจัยได้ศึกษาระบบใหม่ของปัญหาอสมการการแปรผันในปริภูมิฮิลเบิร์ต โดยที่ระบบใหม่นั้นครอบคลุมทั้งระบบปัญหาอสมการการแปรผันทั่วไป (2) และปัญหาอสมการการแปรผัน (1) โดยที่ระบบปัญหาที่ศึกษาคือ ปัญหาการหาสมาชิก $(x^*, y^*, z^*) \in C \times C \times C$ ที่ทำให้

$$\begin{cases} \langle \lambda_1 A_1 y^* + x^* - y^*, x - x^* \rangle \geq 0, & \forall x \in \mathrm{C} \\ \langle \lambda_2 A_2 z^* + y^* - z^*, x - y^* \rangle \geq 0, & \forall x \in \mathrm{C} \\ \langle \lambda_3 A_3 x^* + z^* - x^*, x - z^* \rangle \geq 0, & \forall x \in \mathrm{C} \end{cases} \tag{5}$$

โดยที่ $A_i : C \to H \ (i = 1,2,3)$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นใดๆ และ λ_i เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ และเรียกระบบนี้ว่า "**ระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน**" จากปัญหาอสมการที่ (5) จะเห็นว่า ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $A_3 = 0$ และ $x^* = z^*$ แล้วระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน (5) จะลดรูปเป็นระบบปัญหา (2) นอกจากนี้ถ้าเพิ่มเงื่อนไขให้ฟังก์ชัน $A_2 = 0 \ \lambda_1 = 1$ และ $z^* = y^*$ แล้ว ระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน (5) จะลดรูปเป็นปัญหาอสมการการแปรผัน (1) ดังนั้นการศึกษาการหาผลเฉลยของระบบปัญหา (5) จะให้คำตอบมากกว่าการศึกษาการหาผลเฉลยของปัญหา (2) และระบบปัญหา (1) ตามลำดับ

นอกจากนี้ ผู้วิจัยได้ประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน (5) โดยศึกษาระเบียบวิธีทำซ้ำดังนี้ ให้ $x_1 \in C$ และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่กำหนดโดย

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \dfrac{1}{r_n} \langle y - u_n - x_n \rangle \geq 0, & \forall \mathrm{y} \in \mathrm{C}, \\ z_n = P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n), \\ y_n = P_C(z_n - \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), & \forall n \geq 1, \end{cases} \tag{6}$$

เมื่อ $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ เป็นลำดับใน $[0,1]$ และ λ_1, λ_2 และ λ_3 เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ในการประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน (5) นั้น ผู้วิจัยจะศึกษากรณีที่ $A_i : C \to H \ \ (i = 1,2,3)$ เป็นฟังก์ชัน α_i - *inverse strongly monotone* ตามลำดับ

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญ 3 ประการ ดังต่อไปนี้

ประการแรก เพื่อสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำสำหรับศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่สำหรับปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงในปริภูมิฮิลเบิร์ต **ประการที่สอง** เพื่อหาเงื่อนไขการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่สำหรับปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงในปริภูมิฮิลเบิร์ต และ**ประการสุดท้าย** เพื่อพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นสู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่สำหรับปัญหาอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงในปริภูมิฮิลเบิร์ต

นิยามศัพท์

ให้ H เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ตที่มีผลคูณภายใน (inner produce) และนอร์ม (norm) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\langle\ ,\ \rangle$ และ $\|\ \|$ ตามลำดับ ให้ C เป็นเซตย่อยที่ไม่เป็นเซตว่างของ H จะเรียกฟังก์ชัน $T:C\to C$ ว่าฟังก์ชันแบบไม่ขยาย (nonexpansive mapping) ถ้า $\|Tx-Ty\|\le\|x-y\|,\ \ \forall x,y\in C$

กำหนดให้ $A:C\to H$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียกฟังก์ชัน A ว่า

(i) $\alpha-$inverse strongly monotone ถ้ามีจำนวนจริง $\alpha>0$ ที่ทำให้

$$\langle Ax-Ay\ ,x-y\ \rangle\ge\alpha\|Ax-Ay\|^2,\ \ \forall x,y\in \mathrm{C}$$

(ii) monotone ถ้า $\langle Ax-Ay,x-y\rangle\ge 0,\ \ \forall x,y\in C$

การประมาณค่าหาผลเฉลยของปัญหาดุลยภาพผสม เงื่อนไขและสมมุติฐานที่จำเป็นอย่างยิ่งของฟังก์ชัน F,φ และเซตย่อย C คือเงื่อนไขต่อไปนี้

(A1) $F(x,x)=0$ สำหรับทุก $x\in \mathrm{C}$;

(A2) F เป็นฟังก์ชัน monotone กล่าวคือ $F(x,y)+F(y,x)\le 0$ สำหรับทุก $x,y\in \mathrm{C}$;

(A3) สำหรับแต่ละ $y\in \mathrm{C}$ ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $x\mapsto F(x,y)$ เป็น weakly upper semicontinuous;

(A4) สำหรับแต่ละ $x\in \mathrm{C}$ ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $y\mapsto F(x,y)$ เป็น convex;

(A5) สำหรับแต่ละ $x\in \mathrm{C}$ ฟังก์ชันที่กำหนดโดย $y\mapsto F(x,y)$ เป็น lower semicontinuous;

(B1) สำหรับแต่ละ $x\in H$ และ $r>0$ จะมีเซตย่อยที่มีขอบเขต $D_x\subseteq C$ และ $y_x\in C$ ที่ทำให้ สำหรับแต่ละ

$$z\in C/D_x,\ \ F(z,y_x)+\varphi(y_x)+\frac{1}{r}\langle y_x-z,z-x\rangle<\varphi(z);$$

(B2) C เป็นเซตที่มีขอบเขต

วิธีการวิจัย

การดำเนินงานวิจัยนี้ มีขั้นตอนวิธีการที่สำคัญดังต่อไปนี้

1.1 รวบรวม และศึกษางานวิจัย หนังสือ และบทความที่สำคัญที่เกี่ยวข้องกับปัญหาอสมการการแปรผัน และปัญหาจุดตรึงทั้งในปริภูมิฮิลเบิร์ต และปริภูมิบานาค

1.2 ศึกษาสมบัติของระบบทั่วไปแบบใหม่ของปัญหาอสมการการแปรผัน (5) และความสัมพันธ์ระหว่างปัญหาดังกล่าวกับปัญหาจุดตรึง

1.3 ร่วมเสวนาและอภิปรายปัญหาวิจัยกับผู้เชี่ยวชาญทางด้านทฤษฎีจุดตรึงและการประยุกต์ รวมทั้งปรึกษาปัญหาวิจัยกับที่ปรึกษาโครงการวิจัย

1.4 ใช้ความรู้จาก 2.1 - 2.3 สร้างระเบียบวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน (5) สำหรับฟังก์ชันประเภท α - *inverse strongly monotone*

1.5 หาเงื่อนไขการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นในข้อ 2.4 พร้อมทั้งพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าในปริภูมิฮิลเบิร์ต

1.6 เขียนบทความวิจัย และส่งไปตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติที่มีมาตรฐานสากล

1.7 นำเสนอผลงานวิจัยในที่ประชุมวิชาการในหัวข้อที่เกี่ยวข้องกับปัญหาจุดตรึงและการประยุกต์

1.8 เขียนรายงานวิจัยทุก 6 เดือนรายงานต่อมหาวิทยาลัย

ผลการวิจัยและอภิปรายผลการวิจัย

ผลการวิจัย

จากการศึกษาทฤษฎีการลู่เข้าของขั้นตอนวิธีทำซ้ำเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต ได้พบองค์ความรู้ใหม่และทฤษฎีบทที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

<u>บทตั้ง 1</u> ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H สำหรับแต่ละ $i=1,2,3$ กำหนดให้ $A_i : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน $\alpha_i -$ inverse strongly monotone ตามลำดับ และ นิยามฟังก์ชัน $G : C \to C$ โดย

$$G(x) = P_C[P_C(P_C(x-\lambda_3 A_3 x) - \lambda_2 A_2 P_C(x-\lambda_3 A_3 x)) \\ - \lambda_1 A_1 P_C(P_C(x-\lambda_3 A_3 x) - \lambda_2 A_2 P_C(x-\lambda_3 A_3 x))], \quad \forall x \in C$$

ถ้า $\lambda_i \in \left(0, 2\alpha_i\right]$ สำหรับ $i=1,2,3$ แล้ว $G : C \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย

<u>บทตั้ง 2</u> ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H สำหรับแต่ละ $i=1,2,3$ กำหนดให้ $A_i : C \to H$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นใดๆ กำหนดให้ $x^*, y^*, z^* \in C$ จะได้ว่า (x^*, y^*, z^*) เป็นผลเฉลยของปัญหา (1) ก็ต่อเมื่อ $x^* \in F(G), y^* = P_C(z^* - \lambda_2 A_2 z^*)$ และ $z^* = P_C(x^* - \lambda_3 A_3 x^*)$ เมื่อ G เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยบทตั้ง 1

หมายเหตุ: งานวิจัยนี้กำหนดให้เซตของจุดตรึงของ G เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $GVI(C, A_1, A_2, A_3)$

<u>ทฤษฎีบท 3</u> ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ $F : C \times C \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของ $(A1)-(A5)$ และ $\varphi : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ เป็นฟังก์ชัน proper lower semicontinuous และฟังก์ชันคอนเวกซ์ สำหรับแต่ละ $i=1,2,3$ ให้ $A_i : C \to H$ เป็นฟังก์ชัน $\alpha_i -$ inverse strongly monotone และ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ที่ทำให้ $\Omega = F(T) \cap GVI(C, A_1, A_2, A_3) \cap MEP(F, \varphi) \neq \phi$ สมมุติเงื่อนไข $(B1)$ หรือ $(B2)$ เป็นจริง และ $v \in C$ กำหนดลำดับ $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ และ $\{u_n\}$ โดยสมการ (6) ถ้า $\lambda_i \in (0, 2\alpha_i)$ สำหรับ $i=1,2,3$ $\{a_n\}, \{b_n\} \subset [0,1]$ และ $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(C1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$;

(C2) $0 < \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n < 1$;

(C3) $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} |r_{n+1} - r_n| = 0$;

(C4) $\lim_{n\to\infty}\left|\alpha_1^{n+1,i}-\alpha_1^{n,i}\right|=0;\ \ \forall i\in\{1,2,...,N\}$ และ $\lim_{n\to\infty}\left|\alpha_3^{n+1,j}-\alpha_3^{n,j}\right|=0;\ \ \forall j\in\{2,3,...,N\}$

แล้วลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x}=P_\Omega v$ และ $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (1) เมื่อ $\bar{y}=P_C(\bar{z}-\lambda_2 A_2\bar{z})$ และ $\bar{z}=P_C(\bar{x}-\lambda_3 A_3\bar{x})$

จากทฤษฎีบทที่ 3 ถ้าฟังก์ชัน $\varphi=0$ แล้วจะได้บทแทรกที่สำคัญตามมาดังนี้

<u>บทแทรก 4</u> ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H และ $F:C\times C\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไข $(A1)-(A5)$ สำหรับ $i=1,2,3$ กำหนดให้ $A_i:C\to H$ เป็นฟังก์ชัน α_i- inverse strongly monotone และ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยาย ที่ทำให้ $\Omega=F(T)\cap GVI(C,A_1,A_2,A_3)\cap EP(F)\neq\phi$ ให้ $v,x_1\in C$ กำหนดลำดับ $\{x_n\},\{y_n\}$ และ $\{z_n\}$ โดย

$$\begin{cases} F(u_n,y)+\dfrac{1}{r_n}\langle y-u_n-x_n\rangle\geq 0, & \forall y\in C,\\ z_n=P_C(u_n-\lambda_3 A_3u_n),\\ y_n=P_C(z_n-\lambda_2 A_2z_n),\\ x_{n+1}=a_nv+b_nx_n+(1-a_n-b_n)TP_C(y_n-\lambda_1A_1y_n),\ \forall n\geq 1 \end{cases}$$

ถ้า $\lambda_i\in(0,2\alpha_i)$ สำหรับ $i=1,2,3$ และลำดับ $\{a_n\},\{b_n\},\{r_n\}$ สอดคล้องเงื่อนไขในทฤษฎีบท 3 แล้วลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x}=P_\Omega v$ และ $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ เป็นผลเฉลยของปัญหา (1) เมื่อ $\bar{y}=P_C(\bar{z}-\lambda_2 A_2\bar{z})$ และ $\bar{z}=P_C(\bar{x}-\lambda_3 A_3\bar{x})$

จากทฤษฎีบทที่ 3 สำหรับแต่ละสมาชิก $x,y\in C$ และ $n\in\mathbb{N}$ ถ้าฟังก์ชัน $A_3=0,\ \varphi=0,\ F(x,y)=0$ และ $r_n=1$ จะได้ว่า $z_n=x_n$ ทำให้ได้บทแทรกที่สำคัญซึ่งเป็นผลงานของ Ceng Wang และ Yao [3] ดังนี้

<u>บทแทรก 5</u> ให้ C เป็นเซตย่อย ปิด คอนเวกซ์และไม่เป็นเซตว่างของปริภูมิฮิลเบิร์ต H กำหนดให้ $F:C\times C\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไข $(A1)-(A5)$ สำหรับ $i=1,2$ ให้ $A_i:C\to H$ เป็นฟังก์ชัน α_i- inverse strongly monotone และ T เป็นฟังก์ชันแบบไม่ขยายที่ทำให้ $\Omega=F(T)\cap GVI(C,A_1,A_2)\neq\phi$ ให้ $v,x_1\in C$ กำหนดลำดับ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ โดย

$$\begin{cases} y_n=P_C(x_n-\lambda_2A_2x_n),\\ x_{n+1}=a_nv+b_nx_n+(1-a_n-b_n)TP_C(y_n-\lambda_1A_1y_n),\ \forall n\geq 1 \end{cases}$$

ถ้า $\lambda_i\in(0,2\alpha_i)$ สำหรับ $i=1,2$ และ $\{a_n\},\{b_n\}$ สอดคล้องเงื่อนไขในทฤษฎีบท 3 แล้วลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าแบบเข้มสู่ $\bar{x}=P_\Omega v$ และ $(\bar{x},\bar{y})$ เป็นผลเฉลยของระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน เมื่อ $\bar{y}=P_C(\bar{x}-\lambda_2A_2\bar{x})$

อภิปรายผลการวิจัย

งานวิจัยนี้ผู้วิจัยต้องการศึกษา การประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของสามปัญหา คือ ระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ติ โดยระบบทั่วไปแบบใหม่ของปัญหาอสมการการแปรผันที่ทำการศึกษา คือ

$$\begin{cases} \langle\lambda_1A_1y^*+x^*-y^*,x-x^*\rangle\geq 0, & \forall x\in C\\ \langle\lambda_2A_2z^*+y^*-z^*,x-y^*\rangle\geq 0, & \forall x\in C\\ \langle\lambda_3A_3x^*+z^*-x^*,x-z^*\rangle\geq 0, & \forall x\in C \end{cases}$$

โดยที่ $A_i : C \to H \ \ (i = 1,2,3)$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่เชิงเส้นใดๆ และ λ_i เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ จะเห็นว่าระบบปัญหานี้ครอบคลุมระบบทั่วไปของอสมการการแปรผัน (2) ซึ่งศึกษาโดย Yao Liou และ Kang [1] รวมทั้งระบบปัญหาอสมการการแปรัน (1) และระเบียบวิธีทำซ้ำที่ใช้ในการศึกษาการประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยาย คือ

$$\begin{cases} F(u_n, y) + \varphi(y) - \varphi(u_n) + \dfrac{1}{r_n}\langle y - u_n - x_n \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C, \\ z_n = P_C(u_n - \lambda_3 A_3 u_n), \\ y_n = P_C(z_n \quad \lambda_2 A_2 z_n), \\ x_{n+1} = a_n v + b_n x_n + (1 - a_n - b_n) T P_C(y_n - \lambda_1 A_1 y_n), \ \forall n \geq 1, \end{cases}$$

ซึ่งจะเห็นว่า ถ้ากำหนดให้ฟังก์ชัน $A_3 = 0, \ \varphi = 0, \ F(x, y) = 0$ และ $r_n = 1$ จะได้ว่า $z_n = x_n$ ดังนั้นระเบียบวิธีทำซ้ำนี้จะลดรูปเป็นระเบียบวิธีทำซ้ำที่ศึกษาโดย Ceng Wang และ Yao [3] รวมทั้งทฤษฎีการลู่เข้าได้ครอบคลุมทฤษฎีบทการของ Ceng Wang และ Yao [3] ด้วย

สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่สำคัญคือ เพื่อสร้างระเบียบวิธีทำซ้ำ และประยุกต์ทฤษฎีจุดตรึงเพื่อประมาณค่าหาผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายในปริภูมิฮิลเบิร์ต พร้อมทั้งหาเงื่อนไขการลู่เข้าและพิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นในปริภูมิฮิลเบิร์ต จากการวิจัยพบว่าระเบียบวิธีทำซ้ำที่สร้างขึ้นนั้น ได้ลู่เข้าแบบเข้มสู่ผลเฉลยร่วมของระบบทั่วไปแบบใหม่ของอสมการการแปรผัน ปัญหาดุลยภาพผสม และปัญหาจุดตรึงของฟังก์ชันแบบไม่ขยายใน.ปริภูมิฮิลเบิร์ต

คำขอบคุณ

งานวิจัยนี้ได้รับเงินสนับสนุนจากงบประมาณเงินรายได้ กองทุนวิจัยมหาวิทยาลัยทักษิณ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. ๒๕๕๗ นอกจากนี้ ผู้วิจัยขอขอบคุณ ศาสตราจารย์ ดร. สุเทพ สวนใต้ ที่ให้คำปรึกษาปัญหาวิจัยและเสนอแนะให้งานวิจัยนี้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น

เอกสารอ้างอิง

[1] Yao, Y., Liou, Y. C. and Kang, S. M. (2010). "Approach to common elements of variational inequality problems and fixed point problems via a relaxed extragradient method", **Computers and Mathematics with Applications.** 59, 3472-3480.

[2] Yu, L., Liang, M. (2011). "Convergence theorems of solutions of a generalized variational inequality", **Fixed Point Theory and Applications**. 2011, Article ID 19.

[3] Ceng, L. C., Wang, C. Y. and Yao, J. C. (2008). "Strong convergence theorems by a relaxed extragradient method for a general system of variational inequalities", **Math Meth Oper Res**. 67, 375-390.