



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ สมบัติที่เป็นจริงทั่วไปสำหรับปริภูมิอินเตอร์โพเลนซ์

โดย นางสาวศุภลักษณ์ โพธิ์

ธ.ค. 2560

สัญญาเลขที่ MRG5680118

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ ทฤษฎีที่เป็นจริงทั่วไปสำหรับปริภูมิอินเตอร์โพลีแซน

ผู้วิจัย

นางสาวศุภลักษณ์ โพธิ์

สังกัด

มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

สนับสนุนโดยสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
และมหาวิทยาลัยเชียงใหม่

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกอ. และ สกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

บทคัดย่อ

รหัสโครงการ : MRG5680118

ชื่อโครงการ : ทฤษฎีที่เป็นจริงทั่วไปสำหรับปริภูมิอินเตอร์โพลเซชัน

ชื่อนักวิจัย : นางสาวศุภลักษณ์ โพธิ

อีเมลล์ : sphothi@gmail.com

ระยะเวลาโครงการ : 2 ปี

บทคัดย่อ : เราประมาณค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซต $R(\cdot)$ สำหรับปริภูมิอินเตอร์โพลเซชัน $X_{\theta q; K}$ ของวงศ์จำกัดของปริภูมิบานาค $X_0, \dots, X_n$ จำนวน $n + 1$ ปริภูมิ เราพบว่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตเป็นสมบัติที่คงสภาพจากปริภูมิเดิม นั่นคือ $R(X_{\theta q; K}) < 2$ ก็ต่อเมื่อ $R(Y_i) < 2$ เมื่อ Y_i แทนปริภูมิของฟังก์ชันเมเชอร์ u ที่ส่งจาก $\mathbb{R}_+^n$ ไปยัง X_i , $i = 0, \dots, n$ และจากผลของการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตนี้ทำให้เราได้สมบัติที่เป็นจริงทั่วไปบนปริภูมิอินเตอร์โพลเซชัน $X_{\theta q; K}$ ตามมาบางสมบัติ

คำหลัก : สัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซต, ปริภูมิอินเตอร์โพลเซชัน, สมบัติที่เป็นจริงทั่วไป

Abstract

Project Code : MRG5680118

Project Title : Generic properties for interpolation spaces

Investigator : Miss Supaluk Phothi

Email Address: sphothi@gmail.com

Project Period : 2 years

Abstract : We estimate the García-Falset coefficient, $R(\cdot)$, for interpolation spaces, $X_{\theta q; K}$ of finite family of $n + 1$ Banach spaces $X_0, \dots, X_n$. This coefficient is preserved under the considered interpolation procedure, in particular, $R(X_{\theta q; K}) < 2$ if and only if $R(Y_i) < 2$ for all $i = 0, \dots, n$, where Y_i denote the space of all measurable functions u from $\mathbb{R}_+^n$ into X_i , $i = 0, \dots, n$. Some generic properties are also given for those interpolation spaces.

Keywords : García-Falset coefficient, interpolation space, generic properties

1. ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ทฤษฎีบทอินเตอร์โพลชัน (interpolation theory) ถูกใช้เป็นเครื่องมือสำคัญในการศึกษาการคงไว้ซึ่งสมบัติของปริภูมิเดิมหรือตัวดำเนินการเดิม ทฤษฎีบทอินเตอร์โพลชันเริ่มต้นจากการสร้างตัวดำเนินการอินเตอร์โพลชัน (interpolation operators) โดยมีหลักการคร่าวๆ คือ ถ้า T เป็นตัวดำเนินการระหว่างปริภูมิบานาคสองปริภูมิใดๆ ที่สอดคล้องสมบัติที่แตกต่างกันสองสมบัติ เราสามารถสร้างสมบัติใหม่บน T ที่ยังรักษาสมบัติเดิมทั้งสองของ T ไว้ด้วย ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการอินเตอร์โพลชันที่เป็นที่รู้จักกันดี ก็คือทฤษฎีบทของรีซ - ธอริน (Riesz-Thorin interpolation theorem [17], [21]) ทฤษฎีบทนี้ถูกนำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวาง การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของรีซ - ธอริน ที่เป็นที่รู้จักเป็นอย่างดีก็คือแสดงว่าผลการแปลงฮิลเบิร์ต (Hilbert transform) หรือตัวดำเนินการฟังก์ชันสังยุค (conjugate function operator) $H : L^p([0, 2\pi]) \rightarrow L^p([0, 2\pi])$ ที่นิยามโดย

$$Hf(x) = \tilde{f}(x) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \hat{f}_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e^{inx}$$

จะเป็นตัวดำเนินการที่มีขอบเขตทุกๆ $p \in [2, \infty)$

นอกเหนือจากทฤษฎีบทของรีซ - ธอริน แล้ว ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับตัวดำเนินการอินเตอร์โพลชันที่เป็นที่รู้จักกันดีอีกหนึ่งทฤษฎีบทก็คือทฤษฎีบทของมาร์คินคิวิช (Marcinkiewicz theorem [15]) ในช่วงตั้งแต่ทศวรรษ 1960 ได้มีการขยายทฤษฎีบทของรีซ - ธอรินและทฤษฎีบทของมาร์คินคิวิชออกไปสู่บริบทอื่นๆ มากขึ้น บริบทที่อาจกล่าวได้ว่าเป็นยุคสมัยใหม่ของทฤษฎีบทอินเตอร์โพลชันก็คือ *ปริภูมิอินเตอร์โพลชัน (interpolation spaces)*

ปริภูมิอินเตอร์โพลชันถูกให้นิยามไว้หลายรูปแบบ (เช่น [19], [6], [3], [13], [12]) หลักการนิยามปริภูมิอินเตอร์โพลชันเริ่มต้นจากแนวคิดต่อไปนี้

ให้ A และ B เป็นปริภูมิใดๆ ถ้า A_0 และ A_1 เป็นปริภูมีย่อยของ A ที่เข้ากันได้ และ B_0 และ B_1 เป็นปริภูมีย่อยของ B ที่เข้ากันได้ แล้วสำหรับแต่ละ $\theta \in (0, 1)$ จะมีปริภูมิ A_θ ที่อยู่ระหว่าง A_0 กับ A_1 และ ปริภูมิ B_θ ที่อยู่ระหว่าง B_0 กับ B_1 หรือไม่ที่สำหรับตัวดำเนินการ T ใดๆ ถ้า $T : A_0 \rightarrow B_0$ และ $T : A_1 \rightarrow B_1$ แล้ว $T : A_\theta \rightarrow B_\theta$ ด้วย

นักคณิตศาสตร์หลายท่านได้ให้คำตอบกับคำถามข้างต้นด้วยวิธีที่แตกต่างกันไป ไม่ว่าจะเป็นวิธีเชิงซ้อน (complex method) โดยคาลเดอร์อน [3] หรือวิธีเชิงจริง (real method) โดยปีแอร์และลิออน ผ่าน K -ฟังก์ชันนัล และ J -ฟังก์ชันนัล ในงานวิจัยนี้เราสนใจปริภูมิอินเตอร์โพลชันของวงค์จำกัดของปริภูมิบานาค ที่นิยามโดยสเปร์ [19] ดังต่อไปนี้

ให้ $X_0, \dots, X_n$ เป็นปริภูมิบานาค เราจะเรียก $X = (X_0, \dots, X_n)$ ว่า $n + 1$ -สิ่งอันดับอินเตอร์โพลชัน (interpolation $n + 1$ -tuple) ถ้ามีปริภูมิเวกเตอร์เชิงเฮาส์ดอร์ฟฟ์ทอพอโลยี (Hausdorff topological vector space) E ที่สามารถทำการฝังตรึงเชิงเส้นและต่อเนื่องปริภูมิ $X_0, \dots, X_n$ ลงไปได้ สำหรับ $n + 1$ -สิ่งอันดับอินเตอร์โพลชัน $X = (X_0, \dots, X_n)$ ใดๆ กำหนดให้

$$\begin{aligned} \Sigma(X) &= X_0 + X_1 + \dots + X_n, \\ \Delta(X) &= X_0 \cap X_1 \cap \dots \cap X_n. \end{aligned}$$

เรียก $\Sigma(X)$ ว่า *ปริภูมิผลบวก* ของ $X_0, \dots, X_n$ และเรียก $\Delta(X)$ ว่า *ปริภูมิอินเตอร์เซกชัน* ของ $X_0, \dots, X_n$ ต่อไปเราจะนิยามนอร์มบน $\Sigma(X)$ และ $\Delta(X)$ ดังนี้

- สำหรับแต่ละ $x \in \Sigma(X)$ กำหนดให้

$$\|x\|_{\Sigma(X)} = \inf \{ \|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1} + \dots + \|x_n\|_{X_n} \}$$

โดยที่ค่าอินทิกรัลจะพิจารณาแบบการแยก $x = x_0 + x_1 + \dots + x_n$, $x_i \in X_i$ ($i = 0, \dots, n$) ทั้งหมดที่เป็นไปได้

- สำหรับแต่ละ $x \in \Delta(X)$ จะได้ว่า $x \in X_i$ ทุกๆ $i = 0, \dots, n$ ดังนั้นกำหนดให้

$$\|x\|_{\Delta(X)} = \max\{\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}, \dots, \|x\|_{X_n}\}$$

ได้มีการพิสูจน์แล้วว่าปริภูมิ $(\sum(X), \|\cdot\|_{\sum(X)})$ และ $(\Delta(X), \|\cdot\|_{\Delta(X)})$ เป็นปริภูมิมานาค

สำหรับ $n+1$ -สิ่งอันดับอินเตอร์โพลีแซน $X = (X_0, \dots, X_n)$ ใดๆ ให้ $t = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ และ $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ โดยที่ $\sum_{i=0}^n \theta_i = 1$ และให้ $q \in [1, \infty)$ กำหนดสัญลักษณ์ $|t|^{-\theta} = t_1^{-\theta_1} \dots t_n^{-\theta_n}$ และให้ $t_0 = 1$

สำหรับแต่ละ $i = 0, \dots, n$ ให้ Y_i แทนปริภูมิของฟังก์ชันหาเมเชอร์ได้ u ที่ส่งจาก $\mathbb{R}_+^n$ ไปยัง X_i โดยที่นอร์ม

$$\|u\|_{Y_i} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} (|t|^{-\theta} \|u_i(t)\|_{X_i})^q \frac{dt_1}{t_1} \dots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{1/q}$$

มีค่าจำกัด สังเกตว่าแต่ละปริภูมิ Y_i จะสมมูลฐานเชิงสมมิติกับปริภูมิ $L_q(X_i)$

กำหนดให้ $X_{\theta q; K}$ แทนเซตของสมาชิก $x \in \sum(X)$ ทั้งหมดที่มีรูปแบบการแยก $x = u_0(t) + \dots, u_n(t)$ ทุกๆ $t \in \mathbb{R}_+^n$ เมื่อ $u_i \in Y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$

ให้ $p \in [1, \infty]$ เรานิยามนอร์ม $\|\cdot\|_p$ บน $X_{\theta q; K}$ ดังนี้

สำหรับแต่ละ $x \in X_{\theta q; K}$

$$\|x\|_p = \inf \left(\sum_{i=0}^n \|u_i\|_{Y_i}^p \right)^{1/p}$$

โดยที่ค่าอินทิกรัลจะพิจารณาแบบการแยก $x = u_0(t) + \dots, u_n(t)$ ทุกๆ $t \in \mathbb{R}_+^n$

ไม่เป็นการยากที่จะแสดงว่าเซต $X_{\theta q; K}$ กับนอร์ม $\|\cdot\|_p$ เป็นปริภูมิมานาค เราเรียกคู่ลำดับ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$ ว่า ปริภูมิอินเตอร์โพลีแซน (interpolation space) และเรียกวิธีการนิยามปริภูมิอินเตอร์โพลีแซนแบบนี้ว่า วิธีการ- K (K -method) (ดูรายละเอียดเพิ่มเติมได้จาก [20])

สังเกตว่า สำหรับแต่ละ $r, s \in [1, \infty)$ นอร์ม $\|\cdot\|_r$ และ $\|\cdot\|_s$ จะสมมูลกัน นอกจากนี้ทั้งนอร์มยังสมมูลกับนอร์มที่กำหนดโดย

$$\|x\|_\infty = \inf \max\{\|u_i\|_{Y_i} : i = 0, \dots, n\}$$

โดยที่ค่าอินทิกรัลจะพิจารณาแบบการแยก $x = u_0(t) + \dots, u_n(t)$

และสำหรับแต่ละรูปแบบการแยก $x = u_0(t) + \dots, u_n(t)$ เราจะได้ว่า

$$\|x\|_\infty \leq \prod_{i=0}^n \|u_i\|_{Y_i}^{\theta_i}$$

ดังนั้น

$$\|x\|_p \leq C_p \prod_{i=0}^n \|u_i\|_{Y_i}^{\theta_i}$$

ทุกๆ $p \in [1, \infty)$ เมื่อ $C_p = (n+1)^{1/p}$

ในปัจจุบันนี้การศึกษาเกี่ยวกับปริภูมิอินเตอร์โพลีได้นั้นได้ขยายไปสู่หลายแขนงของคณิตศาสตร์ในส่วนที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีบทบนปริภูมิบานาคนั้น ได้มีการศึกษาว่าสมบัติทางเรขาคณิตบางสมบัติของปริภูมิบานาค เช่น สมบัติคอนเวกซ์เอกรูป (uniform convexity) สมบัติเกือบจะเหมือนคอนเวกซ์เอกรูป (nearly uniform convexity) เป็นสมบัติที่สืบทอดภายใต้ปริภูมิอินเตอร์โพลีได้นั้นคือถ้า (A_0, A_1) เป็นคู่ลำดับอินเตอร์โพลีได้นั้นและ $(A_0, A_1)_{\theta p}$ เป็นปริภูมิอินเตอร์โพลีได้นั้นนิยามจาก (A_0, A_1) จะได้ว่า $(A_0, A_1)_{\theta p}$ จะมีสมบัติคอนเวกซ์เอกรูป (หรือสมบัติเกือบจะเหมือนคอนเวกซ์เอกรูป) ถ้าปริภูมิ A_0 และ A_1 มีสมบัติคอนเวกซ์เอกรูป (หรือสมบัติเกือบจะเหมือนคอนเวกซ์เอกรูป) ([16], [5], [11])

เมื่อไม่นานมานี้ในงานวิจัย [2] ได้มีการประมาณค่าคงที่เจมส์ (Jame's constant) บนปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$ เป็นที่รู้จักกันว่าค่าคงที่เจมส์เป็นค่าคงที่ที่เกี่ยวข้องกับสมบัติความไม่เป็นสี่เหลี่ยมเอกรูป (uniform non-squareness) ของปริภูมิบานาค นักคณิตศาสตร์เริ่มศึกษาสมบัตินี้บนปริภูมิอินเตอร์โพลีได้นั้นตั้งแต่ปี 1992 ([4])

นอกจากค่าคงที่เจมส์แล้ว ยังมีค่าคงที่อีกหนึ่งค่าที่น่าสนใจและเกี่ยวข้องกับสมบัติของปริภูมิบานาค นั่นคือ สัมประสิทธิ์การเชีย-ฟอลเซต (García-Falset coefficient) สัมประสิทธิ์การเชีย-ฟอลเซตถูกนิยามขึ้นในปี 1994 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวสเปน การเชีย-ฟอลเซต เพื่อใช้ศึกษาทฤษฎีจุดตรึงบนปริภูมิบานาคที่มีสมบัติโอเปียอย่างอ่อน (weak Opial property) [10]

สัมประสิทธิ์การเชีย-ฟอลเซตนิยามดังต่อไปนี้
ให้ X เป็นปริภูมิบานาค แทนบอลหนึ่งหน่วยของ X ด้วยสัญลักษณ์ B_X และกำหนดให้

$$R(X) = \sup \{ \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n + x\| \},$$

โดยค่าซุพรีมัมจะพิจารณาบนลำดับ $\{x_n\} \subseteq B_X$ ทั้งหมดที่ลู่เข้าสู่ศูนย์อย่างอ่อนและสอดคล้องสมบัติ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 1$ และบน $x \in B_X$ เรียก $R(X)$ ว่า สัมประสิทธิ์การเชีย-ฟอลเซต ของปริภูมิ X

การเชีย-ฟอลเซตได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการมีจุดตรึงโดยใช้ค่าสัมประสิทธิ์การเชีย-ฟอลเซตเป็นเครื่องมือสำคัญ เขาได้พิสูจน์ว่าถ้าปริภูมิบานาค X มีค่า $R(X) < 2$ แล้ว X จะมีสมบัติจุดตรึงอย่างอ่อน (weak fixed point property) นั่นคือถ้า K เป็นเซตย่อยคอนเวกซ์และกระชับอย่างอ่อน (weakly compact convex subset) ของ X แล้วทุกๆ การส่งแบบไม่ขยาย (non-expansive) $T : K \rightarrow K$ จะมีจุดตรึง

ในงานวิจัยนี้เราจึงสนใจที่จะประมาณค่าสัมประสิทธิ์การเชีย-ฟอลเซตบนปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$ และศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์ดังกล่าวระหว่างปริภูมิตั้งต้น $X_0, \dots, X_n$ และปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$ นอกเหนือจากนี้เรายังสนใจที่จะขยายผลการศึกษาที่ได้ไปสู่การมีสมบัติทั่วไปบนปริภูมิอินเตอร์โพลีได้นั้นอีกด้วย

เราจะเรียกสมบัติ P ว่า สมบัติทั่วไป (generic property) บนเซต A ถ้าเกือบทุกสมาชิกในเซต A สอดคล้องกับสมบัติ P ยกเว้นบางสมาชิกในสับเซตขนาดเล็กของ A ตัวอย่างของสมบัติทั่วไปที่เราคุ้นเคยก็อย่างเช่น ให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงทางเดียว จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆ จุดใน $[a, b]$ ยกเว้นบางจุดในเซต $E \subseteq [a, b]$ โดยที่ E เป็นเซตนับได้ หรือ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกๆ จุดใน $[a, b]$ ยกเว้นบางจุดในเซต $F \subseteq [a, b]$ โดยที่ F เป็นเซตที่มีเมเชอร์เลอเบกเป็นศูนย์ ทั้งเซตนับได้และเซตที่มีเมเชอร์เลอเบกเป็นศูนย์ต่างก็เป็นเซตที่มีขนาดเล็ก อย่างไรก็ตามขนาดของเซตนั้นขึ้นอยู่กับขอบเขตที่เราศึกษา ตัวอย่างของเซตขนาดเล็กก็อย่างเช่น เซตนับได้ เซตที่มีเมเชอร์เลอเบกเป็นศูนย์ เซตแคเทกอรีหนึ่ง (first category set) และเซต σ -พอร์ส (σ -porous set)

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับสมบัติทั่วไปถูกนำไปประยุกต์ในหลายสาขาของคณิตวิเคราะห์ (mathematical analysis) โดยเฉพาะ ทฤษฎีของระบบพลศาสตร์ (theory of dynamical system) ทอพอโลยีเชิงอนุพันธ์ (differential topology) การหาค่าเหมาะที่สุด (optimization) และการวิเคราะห์เชิงแปรผัน (variational analysis) ตัวอย่างเช่นในทอพอโลยีเชิงอนุพันธ์ มีการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของซาร์ด (Sard's theorem) ที่การันตีว่าเซตของค่าวิกฤตของฟังก์ชันที่ส่งจากมานิโฟลด์ M ที่มีมิติ m ไปยังมานิโฟลด์ N ที่มีมิติ n มีเมเชอร์เลอเบกเป็นศูนย์ ในการแสดง

ว่าฟังก์ชันของมอร์สและบทตั้งของตำแหน่งทั่วไป (Morse functions and the general position lemma) มีอยู่จริง [18]

ในงานวิจัย [8] ได้มีการพิสูจน์สมบัติทั่วไปที่เกี่ยวข้องกับสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซต ดังนี้ ให้ $(X, \|\cdot\|)$ เป็นปริภูมิบานาคและ $\mathcal{P}$ เป็นเซตของนอร์มทั้งหมดบน X ที่สมมูลกับ $\|\cdot\|$ นิยามเมตริกซ์ ρ บน $\mathcal{P}$ โดยกำหนดให้สำหรับแต่ละสมาชิก $p, q \in \mathcal{P}$ ให้ $\rho(p, q) := \sup\{|p(x) - q(x)| : \|x\| \leq 1\}$ จะได้ว่า (X, ρ) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง (metric space) ถ้า $R(X) < 2$ แล้วจะมีเซตย่อย $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ ที่เป็นเซต σ -พอร์ส และทุกๆ นอร์ม $p \in \mathcal{P}$ ค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซต $R(X, p) < 2$ ด้วย

จากผลการศึกษาข้างต้นที่กล่าวมา เรายังสรุปได้อีกว่า ทุกๆ นอร์ม $p \in \mathcal{P}$ ปริภูมิ (X, p) จะมีสมบัติจุดตรึงอย่างอ่อน

ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะศึกษา

1. การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตบนปริภูมิอินเตอร์โพลเซชัน $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$
2. ความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตระหว่างปริภูมิตั้งต้น $X_0, \dots, X_n$ และปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$
3. สมบัติทั่วไปบนปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$

เอกสารอ้างอิง

- [1] Benavides, T. D. n., and Phothi, S. Genericity of the fixed point property under renorming in some classes of Banach spaces. In *Fixed point theory and its applications*. Yokohama Publ., Yokohama, 2010, pp. 55--69.
- [2] Betiuk-Pilarska, A., Phothi, S., and Prus, S. James constant for interpolation spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 382, 1 (2011), 127 -- 131.
- [3] Calderón, A. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Mathematica* 24, 2 (1964), 113--190.
- [4] Casini, E., and Vignati, M. The uniform non-squareness for the complex interpolation spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 164, 2 (1992), 518 -- 523.
- [5] Cwikel, M., and Reisner, S. Interpolation of uniformly convex banach spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society* 84, 4 (1982), 555--559.
- [6] DeVore, R. Review: Hans triebel, interpolation theory, function spaces, differential operators. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 2, 2 (03 1980), 339--345.
- [7] Domínguez Benavides, T. A renorming of some nonseparable Banach spaces with the Fixed Point Property. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 350, 2 (2009), 525 -- 530. The Interplay Between Measure Theory, Topology and Functional Analysis.
- [8] Domínguez Benavides, T., and Phothi, S. Porosity of the fixed point property under renorming. In *Fixed point theory and its applications*. Yokohama Publ., Yokohama, 2008, pp. 29--41.

- [9] Domínguez Benavides, T., and Phothi, S. The fixed point property under renorming in some classes of Banach spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 72, 3-4 (2010), 1409 -- 1416.
- [10] García-Falset, J. The Fixed Point Property in Banach Spaces with the NUS-Property. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 215, 2 (1997), 532 -- 542.
- [11] Kutzarova, D., Nikolova, L., and Prus, S. Infinite dimensional geometric properties of real interpolation spaces. *Math. Nachr.* 191 (1998), 215--228.
- [12] Lions, Jacques-Louis, P. J. Propriétés d'espaces d'interpolation. *Comptes Rendus Mathématique* 253 (1961), 1747--1749.
- [13] Lions, Jacques-Louis, P. J. Sur une classe d'espaces d'interpolation. *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 19 (1964), 5--68.
- [14] Maligranda, L., Nikolova, L., and Persson, L. Interpolation of some geometrical properties of banach spaces. *preprint*.
- [15] Marcinkiewicz, J. Sur l'interpolation d'operations. *C. R. Acad. des Sciences, Paris* 208 (1939), 1272--1273.
- [16] Nikolova, L., and Zachariades, T. On edmunds--triebel spaces. *Banach J. Math. Anal.* 4, 1 (2010), 146--158.
- [17] Riesz, M. Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires. *Acta Math.* 49, 3-4 (1926), 465--497.
- [18] Sard, A. Hausdorff measure of critical images on Banach manifolds. *Amer. J. Math.* 87 (1965), 158--174.
- [19] Sparr, G. Interpolation of several banach spaces. *Annali di Matematica Pura ed Applicata* 99, 1 (1974), 247--316.
- [20] Pure and applied mathematics. In *Interpolation of Operators*, C. Bennett and R. Sharpley, Eds., vol. 129 of *Pure and Applied Mathematics*. Elsevier, 1988, pp. ibc1 -- ibc5.
- [21] Thorin, G. O. Convexity theorems generalizing those of M. Riesz and Hadamard with some applications. *Comm. Sem. Math. Univ. Lund [Medd. Lunds Univ. Mat. Sem.]* 9 (1948), 1--58.

2. วัตถุประสงค์งานวิจัย

- 2.1 ประมาณค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตบนปริภูมิอินเตอร์โพลีแซน $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$
- 2.2 หาความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตระหว่างปริภูมิตั้งต้น $X_0, \dots, X_n$ และปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$
- 2.3 ศึกษาสมบัติทั่วไปบนปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$ บางประการที่เกี่ยวข้องกับสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซต

3. ระเบียบวิธีวิจัย

ปีที่ 1

1. รวบรวมความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปริภูมิอินเตอร์โพลีและสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซต
2. ประมาณค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตสำหรับปริภูมิอินเตอร์โพลีที่นิยามโดยปีแอร์-ลืออน ก่อน โดยปริภูมิอินเตอร์โพลีชนิดนี้มีปริภูมิตั้งต้นสองปริภูมิ
3. จัดพิมพ์ผลงานที่ได้ในข้อ 2 และส่งตีพิมพ์ในวารสารวิจัยระดับชาติร่วมกับนักศึกษาปริญญาเอก

ปีที่ 2

1. ขยายงานวิจัยที่ได้จากปีที่ 1 ไปสู่การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตสำหรับปริภูมิอินเตอร์โพลีของวงจำกัดของปริภูมิบานาค
2. หาความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตระหว่างปริภูมิตั้งต้น $X_0, \dots, X_n$ และปริภูมิอินเตอร์โพลี $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$
3. หาสมบัติทั่วไปบนปริภูมิอินเตอร์โพลี $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$
4. จัดพิมพ์ผลงานและส่งตีพิมพ์ในวารสารวิจัยระดับนานาชาติ

4. ผลการศึกษา

4.1 การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตบนปริภูมิอินเตอร์โพลี $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$

เราพิสูจน์บทตั้งที่สำคัญบางบทตั้งเพื่อใช้ในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตบนปริภูมิอินเตอร์โพลี

บทตั้ง 4.1.1 ([14]) ให้ X เป็นปริภูมิบานาค และให้ $x, y \in X$ ที่ไม่เป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \|x + y\| + \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\} &\leq \|x\| + \|y\| \\ &\leq \|x + y\| + \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \max\{\|x\|, \|y\|\}. \end{aligned}$$

บทตั้ง 4.1.2 ให้ $X = (X_0, \dots, X_n)$ เป็น $n + 1$ -สิ่งอันดับอินเตอร์โพลีใดๆ กำหนด t, q, θ ดังเช่นที่กล่าวในหัวข้อ 1 จะได้ว่าลำดับ $\{x_j\}$ จะลู่เข้าอย่างอ่อนไปหา 0 ใน $X_{\theta q; K}$ ก็ต่อเมื่อ $\{x_{0j}\}, \dots, \{x_{nj}\}$ ลู่เข้าอย่างอ่อนไปหา 0 ใน $X_0, \dots, X_n$, ตามลำดับ เมื่อ $x_j = x_{0j} + \dots + x_{nj}$.

หลังจากนั้นเราได้ประมาณค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตบนปริภูมิอินเตอร์โพลี $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$ ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.1.3 ให้ $X = (X_0, \dots, X_n)$ เป็น $n + 1$ -สิ่งอันดับอินเตอร์โพลีใดๆ กำหนด t, q, θ ดังเช่นที่กล่าวในหัวข้อ 1 แล้วจะได้ว่า

$$R(Z_\infty) \leq \max\{R(Y_i) : i = 0, 1, \dots, n\}$$

เมื่อ Z_∞ แทนปริภูมิ $X_{\theta q; K}$ กับนอร์ม $\|\cdot\|_\infty$

พิสูจน์ ให้ $\epsilon > 0$, จะมีลำดับ $\{x_k\}$ ที่ลู่เข้าสู่ 0 อย่างอ่อนและมี x ในบอลหนึ่งหน่วยของ $X_{\theta q; K}$ ที่ซึ่ง

$$R(Z_\infty) - \epsilon \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k + x\|_\infty$$

เราจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $u_{0_k}, u_0 \in Y_0, \dots, u_{n_k}, u_n \in Y_n$, ที่

$$\begin{aligned} x_k &= u_{0_k}(t) + \dots + u_{n_k}(t) \\ x &= u_0(t) + \dots + u_n(t) \end{aligned}$$

ทุกๆ $t \in \mathbb{R}_+^n$ และ

$$\begin{aligned} \max\{\|u_{i_k}\|_{Y_i} : i = 0, 1, \dots, n\} &\leq 1 + \epsilon \\ \max\{\|u_i\|_{Y_i} : i = 0, 1, \dots, n\} &\leq 1 + \epsilon \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\|x_k + x\|_\infty \leq \max\{\|u_{i_k} + u_i\|_{Y_i} : i = 0, 1, \dots, n\}$$

โดยอสมการสามเหลี่ยม (บทตั้ง 4.1.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \|u_{i_k} + u_i\|_{Y_i} &\leq \|u_{i_k}\|_{Y_i} + \|u_i\|_{Y_i} - \left(2 - \left\|\frac{u_{i_k}}{\|u_{i_k}\|_{Y_i}} + \frac{u_i}{\|u_i\|_{Y_i}}\right\|\right) \min\{\|u_{i_k}\|_{Y_i}, \|u_i\|_{Y_i}\} \\ &\leq \max\{\|u_{i_k}\|_{Y_i} : i = 0, 1, \dots, n\} + \max\{\|u_i\|_{Y_i} : i = 0, 1, \dots, n\} \\ &\quad - \left(2 - \left\|\frac{u_{i_k}}{\|u_{i_k}\|_{Y_i}} + \frac{u_i}{\|u_i\|_{Y_i}}\right\|\right) \min\{\|u_{i_k}\|_{Y_i}, \|u_i\|_{Y_i}\} \\ &\leq 2(1 + \epsilon) - \left(2 - \left\|\frac{u_{i_k}}{\|u_{i_k}\|_{Y_i}} + \frac{u_i}{\|u_i\|_{Y_i}}\right\|\right) (1) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\max\{\|u_{i_k} + u_i\|_{Y_i} : i = 0, 1, \dots, n\} \leq 2(1 + \epsilon) + \max\left\{\left\|\frac{u_{i_k}}{\|u_{i_k}\|_{Y_i}} + \frac{u_i}{\|u_i\|_{Y_i}}\right\| : i = 0, 1, \dots, n\right\} - 2$$

เป็นผลให้

$$\begin{aligned} R(Z_\infty) - \epsilon &\leq 2(1 + \epsilon) + \max\left\{\liminf_{k \rightarrow \infty} \left\|\frac{u_{i_k}}{\|u_{i_k}\|_{Y_i}} + \frac{u_i}{\|u_i\|_{Y_i}}\right\| : i = 0, 1, \dots, n\right\} - 2 \\ &\leq 2(1 + \epsilon) + \max\left\{R(Y_i) : i = 0, 1, \dots, n\right\} - 2 \end{aligned}$$

ให้ $\epsilon \rightarrow 0$ จะได้ว่า

$$R(Z_\infty) \leq \max\left\{R(Y_i) : i = 0, 1, \dots, n\right\}$$

ตามต้องการ

ทฤษฎีบท 4.1.4 ให้ $X = (X_0, \dots, X_n)$ เป็น $n+1$ -ลำดับอินเตอร์โพลีเลชันใดๆ กำหนด t, q, θ ดังเช่นที่กล่าวในหัวข้อ 1 และให้ $p \in [1, \infty)$ แทนปริภูมิ $X_{\theta q; K}$ กับนอร์ม $\|\cdot\|_p$ ด้วยสัญลักษณ์ Z_p แล้วจะได้ว่า

$$R(Z_p) \leq \left[2^p - \sum_{i=0}^n \left(2 - R(Y_i) \right)^p \right]^{1/p}$$

พิสูจน์ ให้ $\epsilon > 0$ จะมีลำดับ $\{x_k\}$ ที่ลู่เข้าสู่ 0 อย่างอ่อนและมี x ในบอลหนึ่งหน่วยของ $X_{\theta q; K}$ ที่ซึ่ง

$$R(Z_p) - \epsilon \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k + x\|_p$$

เราจะได้ว่ามีฟังก์ชัน $u_{0_k}, u_0 \in Y_0, \dots, u_{n_k}, u_n \in Y_n$ ที่

$$\begin{aligned} x_k &= u_{0_k}(t) + \dots + u_{n_k}(t) \\ x &= u_0(t) + \dots + u_n(t) \end{aligned}$$

ทุกๆ $t \in \mathbb{R}_+^n$ และ

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^n \|u_{i_k}\|_{Y_i}^p \right)^{1/p} &\leq 1 + \epsilon \\ \left(\sum_{i=0}^n \|u_i\|_{Y_i}^p \right)^{1/p} &\leq 1 + \epsilon. \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\left(\|x_k + x\|_p \right)^p \leq \sum_{i=0}^n \|u_{i_k} + u_i\|_{Y_i}^p$$

สังเกตว่าฟังก์ชัน $y \rightarrow y^p$ เป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์บนช่วง $[0, \infty)$ ดังนั้นสำหรับแต่ละ $a, b > 0$ เราจะได้ว่า

$$(ta + (1-t)b)^p \leq ta^p + (1-t)b^p, t \in (0, 1)$$

และ

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a+b)^p$$

จากสมบัติของนอร์ม p เราทราบว่าสำหรับแต่ละจำนวนจริง a, b , $(a^p + b^p)^{1/p} \leq a + b$ จะได้ว่า $(a-b)^p \leq a^p - b^p$

โดยอสมการสามเหลี่ยม (บทตั้ง 4.1.1) สมบัติของนอร์ม p และความเป็นฟังก์ชันคอนเวกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \|u_{i_k} + u_i\|_{Y_i}^p &\leq \left[\|u_{i_k}\|_{Y_i} + \|u_i\|_{Y_i} - \left(2 - \left\| \frac{u_{i_k}}{\|u_{i_k}\|_{Y_i}} + \frac{u_i}{\|u_i\|_{Y_i}} \right\| \right) \min \{ \|u_{i_k}\|_{Y_i}, \|u_i\|_{Y_i} \} \right]^p \\ &\leq \left[\|u_{i_k}\|_{Y_i} + \|u_i\|_{Y_i} - \left(2 - \left\| \frac{u_{i_k}}{\|u_{i_k}\|_{Y_i}} + \frac{u_i}{\|u_i\|_{Y_i}} \right\| \right) (1) \right]^p \\ &\leq (\|u_{i_k}\|_{Y_i} + \|u_i\|_{Y_i})^p - \left(2 - \left\| \frac{u_{i_k}}{\|u_{i_k}\|_{Y_i}} + \frac{u_i}{\|u_i\|_{Y_i}} \right\| \right)^p \\ &\leq 2^{p-1}(\|u_{i_k}\|_{Y_i}^p + \|u_i\|_{Y_i}^p) - \left(2 - \left\| \frac{u_{i_k}}{\|u_{i_k}\|_{Y_i}} + \frac{u_i}{\|u_i\|_{Y_i}} \right\| \right)^p \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \|u_{i_k} + u_i\|_{Y_i}^p &\leq 2^{p-1} \left(\sum_{i=0}^n \|u_{i_k}\|_{Y_i}^p + \sum_{i=0}^n \|u_i\|_{Y_i}^p \right) - \sum_{i=0}^n \left(2 - \left\| \frac{u_{i_k}}{\|u_{i_k}\|_{Y_i}} + \frac{u_i}{\|u_i\|_{Y_i}} \right\| \right)^p \\ &\leq 2^p(1+\epsilon)^p - \sum_{i=0}^n \left(2 - \left\| \frac{u_{i_k}}{\|u_{i_k}\|_{Y_i}} + \frac{u_i}{\|u_i\|_{Y_i}} \right\| \right)^p \end{aligned}$$

เป็นผลให้

$$\|x_k + x\|_p \leq \left[2^p(1+\epsilon)^p - \sum_{i=0}^n \left(2 - \left\| \frac{u_{i_k}}{\|u_{i_k}\|_{Y_i}} + \frac{u_i}{\|u_i\|_{Y_i}} \right\| \right)^p \right]^{1/p}$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} R(Z_p) - \epsilon &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_k + x\|_p \\ &\leq \left[2^p(1+\epsilon)^p - \sum_{i=0}^n \left(2 - \liminf_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{u_{i_k}}{\|u_{i_k}\|_{Y_i}} + \frac{u_i}{\|u_i\|_{Y_i}} \right\| \right)^p \right]^{1/p} \\ &\leq \left[2^p(1+\epsilon)^p - \sum_{i=0}^n \left(2 - R(Y_i) \right)^p \right]^{1/p} \end{aligned}$$

ให้ $\epsilon \rightarrow 0$ เราจะได้ว่า

$$R(Z_p) \leq \left[2^p - \sum_{i=0}^n \left(2 - R(Y_i) \right)^p \right]^{1/p}$$

4.2 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตระหว่างปริภูมิตั้งต้น $X_0, \dots, X_n$ และปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$

จากผลลัพธ์ที่ได้ในหัวข้อ 4.1 (ทฤษฎีบท 4.1.3 และทฤษฎีบท 4.1.4) เราได้ผลลัพธ์ที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตระหว่างปริภูมิตั้งต้น $X_0, \dots, X_n$ และปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$ ดังต่อไปนี้ตามมา

บทแทรก 4.2.1 ให้ $X = (X_0, X_1, \dots, X_n)$ เป็น $n+1$ -สิ่งอันดับอินเตอร์โพลเซตใดๆ และให้ Z แทนปริภูมิ Z_∞ หรือ Z_p สำหรับบาง $p \in [1, \infty)$ แล้ว $R(Z) < 2$ ก็ต่อเมื่อ $R(X_i) < 2$ ทุกๆ $i = 0, \dots, n$

แต่ถ้าจะกล่าวถึงสมบัติการมีจุดตรึงระหว่างปริภูมิตั้งต้น $X_0, \dots, X_n$ และปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$ นั้นเราจะได้ผลลัพธ์เพียงอย่างเดียวดังต่อไปนี้

บทแทรก 4.2.2 ให้ $X = (X_0, X_1, \dots, X_n)$ เป็น $n+1$ -สิ่งอันดับอินเตอร์โพลเซตใดๆ และให้ Z แทนปริภูมิ Z_∞ หรือ Z_p สำหรับบาง $p \in [1, \infty)$ แล้ว Z จะมีสมบัติการมีจุดตรึงถ้า $R(X_i) < 2$ ทุกๆ $i = 0, \dots, n$

4.3 สมบัติทั่วไปบนปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$

จากผลลัพธ์ที่ได้ในหัวข้อ 4.2 ถ้าเราประยุกต์ผลลัพธ์จากงานวิจัย [8] เข้ากับผลลัพธ์ของเรา จะเป็นผลให้เราได้สมบัติทั่วไปบนปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.3.1 ให้ $X = (X_0, X_1, \dots, X_n)$ เป็น $n+1$ -สิ่งอันดับอินเตอร์โพลเซตใดๆ และให้ Z แทนปริภูมิ Z_∞ หรือ Z_p สำหรับบาง $p \in [1, \infty)$

ให้ J แทนเซตของนอร์มทั้งหมดบน Z ที่สมมูลกัน กำหนดให้ ρ เป็นเมตริกซ์บน Z ถ้า $R(X_i) < 2$ ทุกๆ $i = 0, \dots, n$ แล้วจะมีเซตย่อย $\mathcal{K}$ ของ (J, ρ) ที่เป็นเซต σ -พอร์ส และสำหรับแต่ละนอร์ม $q \in J \setminus \mathcal{K}$ เราจะได้ว่า $R(Z, q) < 2$

นอกเหนือไปกว่านี้ในงานวิจัย [7] ได้มีการพิสูจน์ว่า ทุกๆ ปริภูมิบานาคที่สามารถฝังจริงลงในปริภูมิ $c_0(\Gamma)$ จะมีนอร์มสมมูลที่มีสมบัติการมีจุดตรึง หลังจากนั้นได้มีการขยายงานวิจัยดังกล่าวไปสู่สมบัติทั่วไปของการมีจุดตรึงบนปริภูมิบานาค (ดูรายละเอียดได้จาก [9] และ [1]) ฉะนั้นเราจึงได้ประยุกต์สมบัติทั่วไปของการมีจุดตรึงดังกล่าวกับบทแทรก 4.2.1 และได้ผลลัพธ์ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.3.2 ให้ $X = (X_0, X_1, \dots, X_n)$ เป็น $n+1$ -สิ่งอันดับอินเตอร์โพลีเลชันใดๆ และให้ Z แทนปริภูมิ Z_∞ หรือ Z_p สำหรับบาง $p \in [1, \infty)$

สมมติว่า $R(X_i) < 2$ ทุกๆ $i = 0, \dots, n$ และให้ Y เป็นปริภูมิบานาคที่มีฟังก์ชัน $J : Y \rightarrow Z$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นหนึ่งต่อหนึ่งและต่อเนื่อง

ให้ $\mathcal{P}$ แทนเซตของนอร์มทั้งหมดบน Y ที่สมมูลกัน กำหนดให้ ρ เป็นเมตริกซ์บน $\mathcal{P}$ แล้วจะมีเซตย่อย $\mathcal{R}$ ของ $(\mathcal{P}, \rho)$ ที่เป็นเซต σ -พอร์ส และสำหรับแต่ละนอร์ม $q \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{R}$ จะได้ว่าปริภูมิ (Y, q) มีสมบัติการมีจุดตรึง

5. สรุปผลและอภิปรายผล

5.1 การประมาณค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตบนปริภูมิอินเตอร์โพลีเลชัน $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$

เราพบว่าค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตบนปริภูมิอินเตอร์โพลีเลชัน $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$ ถ้าพิจารณา กับนอร์ม $\|\cdot\|_\infty$ จะพบว่าค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตของปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$ จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตของปริภูมิตั้งต้นตัวที่มากที่สุด แต่ถ้าพิจารณากับนอร์ม $\|\cdot\|_p$ จะขึ้นอยู่กับผลรวมของค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตของปริภูมิตั้งต้นทั้งหมด

5.2 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตระหว่างปริภูมิตั้งต้น $X_0, \dots, X_n$ และปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$

ค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตที่น่าสนใจคือค่าที่น้อยกว่า 2 เราพบว่าค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตบนปริภูมิอินเตอร์โพลีเลชัน $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$ นั้นไม่ว่าจะพิจารณากับนอร์ม $\|\cdot\|_\infty$ หรือนอร์ม $\|\cdot\|_p$ ถ้าปริภูมิตั้งต้นทุกปริภูมิมีค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตน้อยกว่า 2 แล้วปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$ ก็จะมีค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตน้อยกว่า 2 ด้วย

5.3 สมบัติทั่วไปบนปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$

เราพบว่าถ้าปริภูมิตั้งต้นทุกปริภูมิมีค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตน้อยกว่า 2 แล้วปริภูมิ $(X_{\theta q; K}, \|\cdot\|_p)$ กับนอร์มใดๆ จะมีสมบัตินี้ด้วยยกเว้นบางนอร์มในเซตย่อยขนาดเล็ก (เซต σ -พอร์ส) นั่นคือภายใต้เงื่อนไขบนปริภูมิตั้งต้น ทำให้การมีค่าสัมประสิทธิ์การเสีย-พอลเซตน้อยกว่า 2 เป็นสมบัติทั่วไปบนปริภูมิอินเตอร์โพลีเลชัน นอกเหนือจากนี้สมบัติการมีจุดตรึงนั้นก็จะเป็นสมบัติทั่วไปบนปริภูมิอินเตอร์โพลีเลชันด้วย

6. Output ที่ได้จากโครงการ

6.1 ผลงานวิจัยชื่อ García-Falset coefficient for interpolation spaces and some generic properties

7. ภาคผนวก

7.1 García-Falset coefficient for interpolation spaces and some generic properties (อยู่ระหว่างการส่งไปตีพิมพ์ในวารสารงานวิจัยระดับนานาชาติ)