

บทคัดย่อ

Stakhov ได้ให้บทนิยามของจำนวนฟีโบนัชชีอันดับ p (Fibonacci p -numbers) $F_p(n)$ และจำนวนลูคัสอันดับ p (Lucasi p -numbers) $L_p(n)$ สำหรับ p เป็นจำนวนเต็มบวก

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1) \quad (n \geq p+1)$$

เมื่อ $F_p(0) = 0$ และ $F_p(1) = F_p(2) = \dots = F_p(p+1) = 1$

$$L_p(n) = L_p(n-1) + L_p(n-p-1) \quad (n \geq p)$$

เมื่อ $L_p(0) = p+1$ และ $L_p(1) = L_p(2) = \dots = L_p(p) = 1$

กรณี $p = 1$ จะเห็นได้ว่า จำนวนฟีโบนัชชีอันดับ p และจำนวนลูคัสอันดับ p คือ จำนวนฟีโบนัชชีและจำนวนลูคัสนั่นเอง กล่าวคือ $F_p(n) = F_n$ และ $L_p(n) = L_n$

Stakhov ได้สร้างเมทริกซ์ Q_p เป็นเมทริกซ์ก่อกำเนิดสำหรับจำนวนฟีโบนัชชีอันดับ p ซึ่งเป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $(p+1) \times (p+1)$ เรียกว่า generalized Fibonacci p -matrix

$$Q_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

แล้วยกกำลัง n ทั้งสองข้างจะได้ว่า

$$Q_p^n = \begin{bmatrix} F_p(n+1) & F_p(n-p+1) & \cdots & F_p(n-1) & F_p(n) \\ F_p(n) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2) & F_p(n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-p+2) & F_p(n-2p+2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-2p+1) & \cdots & F_p(n-p-1) & F_p(n-p) \end{bmatrix}$$

Stakhov ได้ให้เอกลักษณ์ของจำนวนฟีโบนัชชีอันดับ p ไว้ส่วนหนึ่ง

ผู้วิจัยจะสร้างเมทริกซ์ก่อกำเนิดของจำนวนลูคัสอันดับ p (Lucas p -matrix) ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่สมนัยกับเมทริกซ์ Q_p เพื่อค้นหาเอกลักษณ์พื้นฐานและความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนฟีโบนัชชีอันดับ p กับจำนวนลูคัสอันดับ p อีกทั้งสร้างสามเหลี่ยมลูคัสอันดับ p (Lucas p -triangle) เป็นสามเหลี่ยมที่ขยายมาจากสามเหลี่ยมลูคัส ซึ่งสร้างโดย Feinberg เพื่อหาสูตรทั่วไปของจำนวนลูคัสอันดับ p

ABSTRACT

Stakhov defined the generalized Fibonacci $F_p(n)$ and Lucas p -numbers $L_p(n)$ for $p \in \mathbb{N}$ by

$$F_p(n) = F_p(n-1) + F_p(n-p-1) \quad (n \geq p+1)$$

with initial conditions $F_p(0) = 0$ and $F_p(1) = F_p(2) = \dots = F_p(p+1) = 1$,

$$L_p(n) = L_p(n-1) + L_p(n-p-1) \quad (n \geq p),$$

where $L_p(0) = p+1$ and $L_p(1) = L_p(2) = \dots = L_p(p) = 1$.

If we take $p = 1$, then the sequences of Fibonacci and Lucas p -numbers reduce to the sequences of the classical Fibonacci and Lucas numbers, respectively.

The generating matrix of the Fibonacci p -numbers was given by Stakhov. Let Q_p be the following $(p+1) \times (p+1)$ companion matrix

$$Q_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

and the n -th power of the matrix Q_p is

$$Q_p^n = \begin{bmatrix} F_p(n+1) & F_p(n-p+1) & \dots & F_p(n-1) & F_p(n) \\ F_p(n) & F_p(n-p) & \dots & F_p(n-2) & F_p(n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_p(n-p+2) & F_p(n-2p+2) & \dots & F_p(n-p) & F_p(n-p+1) \\ F_p(n-p+1) & F_p(n-2p+1) & \dots & F_p(n-p-1) & F_p(n-p) \end{bmatrix}$$

The matrix Q_p is said to be a generalized Fibonacci p -matrix. The properties of the Fibonacci and Lucas p -numbers have been studied by a member of authors.

In this work we construct the generating matrix of the Lucas p -numbers, which corresponds to the Q_p -matrix, and derive some identities of the Fibonacci and Lucas p -numbers. Further, we construct the Lucas p -triangle, which generalize the Lucas triangle is defined by Feinberg, to derive an explicit formula for the Lucas p -numbers.