

Project Title: Algebraic, Order, Structure, and Analytic Properties of Tracy-Singh Product for Operators on a Hilbert Space

สมบัติเชิงพีชคณิต อันดับ โครงสร้างและการวิเคราะห์ของผลคูณเทรซี-ซิงห์ สำหรับตัวดำเนินการบนปริภูมิฮิลเบิร์ต

Investigator : ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ปัทราวุธ จันทร์เสียม ภาควิชาคณิตศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

E-mail Address : patrawut.ch@kmitl.ac.th

Project Period : 2 ปี ตั้งแต่ 3 เมษายน 2560 ถึง 2 เมษายน 2562

บทคัดย่อ

เราขยายแนวคิดของผลคูณเทนเซอร์สำหรับตัวดำเนินการและผลคูณเทรซี-ซิงห์สำหรับเมทริกซ์ไปสู่ผลคูณเทรซี-ซิงห์สำหรับตัวดำเนินการที่กระทำบนผลบวกตรงของปริภูมิฮิลเบิร์ต ผลคูณดังกล่าวของตัวดำเนินการเข้ากันได้กับการดำเนินการต่าง ๆ เชิงพีชคณิตและความสัมพันธ์เชิงอันดับ ผลคูณเทรซี-ซิงห์ของสองตัวดำเนินการซึ่งแต่ละบล็อกไม่เป็นตัวดำเนินการศูนย์จะเป็นตัวดำเนินการกระชับก็ต่อเมื่อแต่ละตัวประกอบเป็นตัวดำเนินการกระชับ เราให้ขอบเขตบนและล่างสำหรับนอร์มแบบแซทเทน-พีต่าง ๆ ของผลคูณเทรซี-ซิงห์ของตัวดำเนินการ เราได้ว่าผลคูณดังกล่าวต่อเนื่องเทียบกับทอพอโลยีต่าง ๆ บนไอดีลแบบนอร์มของตัวดำเนินการกระชับ ตัวดำเนินการคลาสรอย และตัวดำเนินการคลาสฮิลเบิร์ต-ชมิทต์ ดังนั้นผลคูณเทรซี-ซิงห์จะคงสภาพคลาสต่าง ๆ เหล่านี้ของตัวดำเนินการ เรายังพิจารณาตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างผลคูณเทรซี-ซิงห์กับคลาสอื่นๆ ของตัวดำเนินการ เราแสดงให้เห็นว่าความนอร์มอล ไฮโพนอร์มอล พارانอร์มอล และตัวดำเนินการคลาสเอจะถูกคงสภาพไว้โดยผลคูณเทรซี-ซิงห์ ยิ่งกว่านั้นเราได้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับผลคูณเทรซี-ซิงห์ของตัวดำเนินการที่จะมีสมบัติ นอร์มอล ควอไซนอร์มอล (โค)ไอโซเมทรี และยูนิแทรี

คำหลัก : ผลคูณเทนเซอร์ ผลคูณเทรซี-ซิงห์ ตัวดำเนินการบนปริภูมิฮิลเบิร์ต อสมการของตัวดำเนินการ ตัวดำเนินการกระชับ

Abstract

We generalize the notions of tensor product for operators and Tracy-Singh product for matrices to the Tracy-Singh product for operators acting on the direct sum of Hilbert spaces. This kind of operator product is compatible with algebraic operations and order relations. The Tracy-Singh product of two operators such that each its block is nonzero is compact if and only if both factors are compact. We provide upper and lower bounds for certain Schatten p -norms of the Tracy-Singh product of operators. It turns out that this product is continuous with respect to the topologies on norm ideals of compact operators, trace class operators, and Hilbert-Schmidt class operators. Thus this product preserves such classes of operators. We also investigate relationship between Tracy-Singh products and another classes of operators. We show that the normality, hyponormality, paranormality, and operators of class-A type are preserved by Tracy-Singh products. are also preserved under Tracy-Singh products. Moreover, we obtain necessary and sufficient conditions for the Tracy-Singh product of two operators to be normal, quasinormal, (co)isometry, and unitary.

Keywords : tensor product; Tracy-Singh product; Hilbert space operator; operator inequality; compact operator