



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ

โลคัลโทโมกราฟีอัลกอริทึมสำหรับ
การสร้างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นในเพลวไฟเตอร์บีวเลนซ์

โดย

นาย ปุมยศ วัลลิกุล

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

กรกฎาคม 2542

รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ
โลคัลโทโมกราฟฟีอัลกอริทึมสำหรับ
การสร้างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นในเปลวไฟเทอร์โมนิวเคลียร์

ผู้วิจัย

นายปุมยศ วัลลิกุล
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณ รศ.ดร.บัณฑิต พึ่งธรรมสาร ที่ให้คำปรึกษาแนะนำที่ดีมาโดยตลอด การดำเนินงานวิจัย และขอขอบคุณผู้ช่วยวิจัย นางสาวจิระวรรณ เกตุนุ้ย และนายพงศาด มีคุณสมบัติ ที่ได้ทำงานหนักเพื่อให้ผลงานวิจัยนี้มีผลออกมาเป็นที่น่าสนใจยิ่ง งานวิจัยนี้จะสำเร็จมิได้ถ้าไม่มีหน่วยงานสนับสนุนการวิจัย ผู้วิจัยขอขอบคุณสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย(สกว.) ที่ให้ความสะดวกในการดำเนินงาน และงานส่งเสริมวิจัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือที่สนับสนุนทุนบางส่วนไว้ ณ โอกาสนี้ด้วย

บทคัดย่อ

สัญญาเลขที่ : PDF/53/2540

ชื่อโครงการ : โลคัลโทโมกราฟฟีอัลกอริธึมสำหรับการสร้างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นในเพลวไฟเทอร์บิวเลนซ์

ผู้วิจัย : นายปุมยศ วัลลิกุล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

E-mail Address : pyy@kmitnb.ac.th

ระยะเวลาโครงการ : สิงหาคม 2540 – กรกฎาคม 2542

วัตถุประสงค์ของโครงการ : งานวิจัยนี้นำเสนออัลกอริธึมสำหรับการสร้างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบโลคัล (local-PDF) ของค่าการส่งผ่านในเพลวไฟเทอร์บิวเลนซ์จากข้อมูลการวัดสร้างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบวิถีรวม (path-PDFs)

วิธีการวิจัย : อัลกอริธึมนี้พัฒนาขึ้นบนพื้นฐานของความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ระหว่างฟังก์ชันโมเมนต์วิถีรวม และฟังก์ชันโมเมนต์เฉพาะที่ ซึ่งเกี่ยวข้องกับฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแต่ละประเภทตามลำดับ และทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้กับวิธีการ Discrete Probability Function (DPF) ซึ่งเป็นวิธีแบบดั้งเดิม

ผลการวิจัย : การประเมินอัลกอริธึมที่พัฒนาขึ้นโดยพิจารณาผลการคำนวณเป็นเกณฑ์ แสดงให้เห็นว่าอัลกอริธึมนี้สามารถสร้างภาพเสมือนได้ดีทั้งในกรณีเพลวไฟแบบสมมาตร และเพลวไฟแบบไม่สมมาตร

วิเคราะห์ และสรุป : มีข้อด้อยสำหรับอัลกอริธึมนี้สองประการ คือ เนื่องจากวิธีการเป็นการแปลงทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นวิธี explicit จึงจำเป็นต้องใช้ข้อมูลในการสร้างภาพเสมือนจำนวนมากเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับความเป็นจริง อีกประการหนึ่งคือสมมุติฐานความเป็นอิสระต่อกันของ local-PDFs ยังคงเป็นข้อสงสัยของนักวิจัยทางด้านการเผาไหม้อยู่ อย่างไรก็ตามได้มีการนำวิธีโทโมกราฟฟีแบบไม่ต่อเนื่องมาใช้ในงานวิจัยนี้และพบว่าด้วยวิธีการนี้มีความเป็นไปได้ที่จะผ่อนปรนเงื่อนไขความเป็นอิสระต่อกันของ local-PDFs ได้ใช้เทคนิคการ optimization ด้วยวิธี Natural Pixel Decomposition และ ART สำหรับปัญหาโทโมกราฟฟีสำหรับเพลวไฟเทอร์บิวเลนซ์ที่มีความเป็น underdetermine มากและได้ผลเป็นที่น่าพอใจ

งานวิจัยที่จะทำในอนาคต : การพัฒนาโมเดลทางคณิตศาสตร์เพื่อผ่อนปรนเงื่อนไขความเป็นอิสระต่อกันของ local-PDFs เป็นหัวข้อวิจัยสำคัญที่ต้องทำต่อจากโครงการวิจัยนี้

Key word :

Abstract

Project Code : PDF/53/2540

Project Title : Local Tomographic Algorithms for Reconstructing Probability Density Functions in Turbulent Flames

Investigator : Pumyos Vallikul, Department of Mechanical Engineering,
King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok.

E-mail Address : pyy@kmitnb.ac.th

Project Period : August 1997 – July 1999

Objectives : The aim of this research is to develop a reconstruction algorithm to retrieve local probability density functions (local-PDFs) of transmittance within turbulent flames from the synthetic and measurement data of path-integrated probability density functions (path-PDFs).

Methodology : A mathematical relationship between the local- and path-PDFs is derived under the assumption that the local-PDFs have to be statistically independent and verified by comparing the results with that from the conventional Discrete Probability Function (DPF) method.

Results : Evaluations of the algorithm through the reconstruction results show that the algorithm handles well the tomographic data from both symmetrical and asymmetrical flame profiles.

Discussion Conclusion : There are two main disadvantages: Excessive data for the explicit reconstruction algorithm are needed and an underlying assumption—that the local-PDFs have to be statistically independent—remains questionable. However, it is found that with the discrete tomographic approach, the statistically independent assumption imposed in the previous continuous technique can possibly be relaxed. Optimization techniques for the dramatic underdetermine tomographic problems such as Natural Pixel Decomposition and ART techniques have been used, and the results are justified.

Future Directions for Research : To develop appropriate mathematical models for the local-PDFs of turbulent flames is important future research topic. The maximum entropy and wavelet techniques used in the field of image recognition and data compression fields come to mind.

Keywords : Combustion measurement, Tomography, Turbulent flames

หน้าสรุปโครงการ (Executive Summary)

ทุนวิจัยหลังปริญญาเอก

1. ชื่อโครงการ

โลคัลโทโมกราฟีอัลกอริทึมสำหรับการสร้างฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นใน
เปลวไฟเทอร์บิวเลนซ์

Local Tomographic Algorithms for Reconstructing Probability Density Functions in
Turbulent Flames

2. ชื่อหัวหน้าโครงการ หน่วยงานที่สังกัด ที่อยู่ หมายเลขโทรศัพท์ โทรสาร และ E-mail

ชื่อ-สกุล นายปุมยศ วัลลิกุล

Mr. Pumyos Vallikul

หน่วยงาน ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ที่อยู่ 1518 ถ.พิบูลสงคราม บางซื่อ กทม. 10800

โทรศัพท์ 9132500 ต่อ 8321 หรือ 8315

โทรสาร 5856149

E-mail pyy@kmitnb.ac.th

3. สาขาที่ทำการวิจัย สาขาวิศวกรรมการสันดาปเกี่ยวกับขั้นตอนวิธีการวิเคราะห์การสันดาป จากข้อมูลการวัดการดูดกลืนของรังสีเลเซอร์

4. งบประมาณทั้งโครงการ 400,000- บาท

5. ระยะเวลาดำเนินงาน 2 ปี

6. ได้เสนอโครงการนี้ หรือโครงการที่มีส่วนเหมือนกับเรื่องนี้บางส่วน เพื่อขอทุนต่อแหล่งทุน อื่นที่ใดบ้าง

☐ ไม่ได้เสนอต่อแหล่งทุนอื่น

☒ เสนอต่อ สำนักงานประมาณ

หมวดเงินสนับสนุนวิจัย

งบประมาณประจำปีงบประมาณ 2541

ชื่อโครงการที่เสนอ การศึกษาการไหลหลายองค์ประกอบแบบมีปฏิกิริยาด้วยวิธีโทโมกราฟี

7. ปัญหาที่ทำการวิจัย และความสำคัญของปัญหา

การเข้าใจปรากฏการณ์ภายในเปลวไฟแบบเทอร์บิวเลนซ์ถือเป็นองค์ความรู้พื้นฐานที่สำคัญยิ่งต่อการศึกษาสาขาวิศวกรรมการสันดาป ทั้งนี้เพื่อควบคุมกลไกการ

สันดาปให้มีประสิทธิภาพสูง โดยข้อมูลเบื้องต้นที่สำคัญต่อการศึกษาคือคุณสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์ เช่น ความเข้มข้นและอุณหภูมิของแก๊สองค์ประกอบ

เนื่องจากบริเวณที่เกิดการสันดาปภายในเปลวไฟเทอร์โมวเลนซ์มักจะอ่อนไหว (sensitive) ต่อการรบกวน ดังนั้นการวัดค่าคุณสมบัติดังกล่าวข้างต้นจำเป็นต้องเป็นการวัดที่อาศัยการรับสัญญาณทางไกล (remote sensing) เงื่อนไขสำคัญนอกเหนือจากนี้คือวิธีการวัดค่าที่ใช้จะต้องมีความสามารถวัดค่าคุณสมบัติของแก๊สองค์ประกอบที่มีความเข้มข้นต่ำได้ด้วย

วิธีโทโมกราฟีเป็นวิธีการวัดที่ใช้การรับสัญญาณทางไกล ซึ่งเป็นวิธีที่เหมาะสมอย่างยิ่งต่อการวิเคราะห์การสันดาป ทั้งนี้เพราะระหว่างการวัดจะไม่มีอุปกรณ์ใด ๆ สัมผัสกับบริเวณการสันดาปโดยตรง นอกจากนี้ยังสามารถใช้วัดค่าคุณสมบัติของแก๊สองค์ประกอบที่มีความเข้มข้นต่ำ ๆ ได้เนื่องจากการวัดเป็นแบบ path-integrated ซึ่งต่างจากการวัดแบบเฉพาะจุด (point measurement) ที่ใช้กันในปัจจุบัน

โครงการวิจัยนี้จะพัฒนาขั้นตอนวิธีโทโมกราฟีแบบโลคัล ซึ่งขั้นตอนวิธีใหม่นี้จะใช้เวลาการคำนวณน้อยกว่าและให้คำตอบที่มีเสถียรภาพมากกว่าขั้นตอนวิธีแบบที่ใช้อยู่ในปัจจุบัน ภาพเสมือนที่สร้างขึ้น (Reconstructed Image) จะสามารถแสดงข้อมูลรายละเอียดคุณสมบัติต่าง ๆ ของแก๊สองค์ประกอบได้ชัดเจนขึ้น และจะนำไปสู่การวิเคราะห์กลไกการสันดาปที่มีประสิทธิภาพสูง

8. วัตถุประสงค์ของโครงการ

1. เพื่อศึกษาขั้นตอนวิธี และสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการคำนวณค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ในเปลวไฟแบบเทอร์โมวเลนซ์ด้วยวิธีโลคัลโทโมกราฟี โดยใช้ข้อมูลจากการวัดแบบดูดกลืน (absorption measurement) ของรังสีเลเซอร์
2. เป็นงานวิจัยพื้นฐานเพื่อรองรับนักศึกษาระดับปริญญาโท, ปริญญาเอกสาขาวิศวกรรมเครื่องกล

9. ระเบียบวิธีวิจัย

การพัฒนา/สร้างอัลกอริทึม (Algorithm Development)

นำทฤษฎี Wavelet transform มาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางโทโมกราฟี ทั้งนี้จะทำการศึกษาและพัฒนาอัลกอริทึม สำหรับ 2-D Wavelet transform รวมทั้งเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อรับและประมวลผลข้อมูลโทโมกราฟีจากการวัดแบบดูดกลืนของเปลวไฟเทอร์โมวเลนซ์

การตรวจสอบ/ยืนยันอัลกอริทึมด้วยข้อมูลจำลอง

สร้างข้อมูลจำลอง (Simulated data) ของเปลวไฟ ซึ่งเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น (PDFs) ของคุณสมบัติต่าง ๆ ในเปลวไฟเทอร์โมวเลนซ์ด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์โดยโมเดลต่าง ๆ ของเทอร์โมวเลนซ์จะจำลองขึ้นด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป เช่น Fluidyn-NS

หรือ PHOENICS เป็นต้น แต่ถ้าไม่สามารถใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเหล่านี้ได้ จะทำการจำลองรูปร่างเปลวไฟต่าง ๆ ด้วยสมการทางคณิตศาสตร์แทน

จากนั้นจะเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อคำนวณหาฟังก์ชันภาพฉาย (projection functions) ทั้งนี้เพื่อใช้เป็นข้อมูลตั้งต้น(input)สำหรับอัลกอริทึมที่สร้างขึ้น หลังจากทำการคำนวณสร้างภาพเสมือน(reconstructed image)ด้วยอัลกอริทึมที่สร้างขึ้นแล้ว จึงตรวจสอบผลการคำนวณกับข้อมูลจำลองที่สร้างขึ้นเพื่อยืนยันความถูกต้องของอัลกอริทึมและโปรแกรมคอมพิวเตอร์

การทดสอบอัลกอริทึม/โปรแกรมด้วยข้อมูลจากการวัดจริง

ข้อมูลที่ใช้ในการคำนวณคือข้อมูลที่ได้จากการวัดแบบจุดกลืนของรังสีเลเซอร์จากเปลวไฟจริง ทั้งนี้ข้อมูลดังกล่าวผู้เสนอโครงการจะใช้ข้อมูลชุดเดียวกับข้อมูลที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ระดับปริญญาเอก และเปรียบเทียบผลกับการคำนวณที่ได้จากวิธีการแบบเก่าเพื่อทดสอบ เปรียบเทียบ และประเมินผลการคำนวณด้วย อัลกอริทึม/โปรแกรม ใหม่ที่เสนอในโครงการวิจัยนี้

10. สรุปผลการวิจัย

รายงานวิจัยได้แสดงวิธีการประยุกต์วิธีโทโมกราฟฟีกับการวินิจฉัยการไหลหลายองค์ประกอบแบบมีปฏิกริยาโดยเฉพาะการวินิจฉัยเปลวไฟแบบเทอร์บิวเลนซ์ โดยได้เริ่มศึกษาความเชื่อมโยงของวิธีโทโมกราฟฟีที่ใช้ในวงการแพทย์กับโทโมกราฟฟีที่ใช้ศึกษาการไหลหลายองค์ประกอบในเปลวเพลิง

ในระยะแรกของการวิจัยใช้วิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชันคำนวณหาลักษณะโปรไฟล์ของค่าเฉลี่ยคุณสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์ของเปลวไฟจำลองจากข้อมูลภาพฉาย โดยศึกษาผลกระทบของตัวแปรต่าง ๆ เช่น จำนวนมุม จำนวนเส้นวิถีรวมจากข้อมูลภาพฉายตลอดจนฟิลเตอร์ฟังก์ชันที่ใช้ในกระบวนการสร้างภาพที่มีต่อคุณภาพของภาพเสมือนที่สร้างขึ้น จากการศึกษาพบว่าจำนวนมุมตัวอย่างต้องมีมากพอที่จะเทียบเคียงกับความถี่ในการเก็บตัวอย่างของเส้นวิถีรวม หากจำนวนมุมน้อยเกินไปจะเกิดความคลาดเคลื่อนของภาพเสมือนไปจากภาพจริง ปรากฏเป็นลักษณะที่คล้ายกับสัญญาณรบกวน งานวิจัยยังได้แสดงผลของสัญญาณรบกวนต่อการสร้างภาพด้วยวิธีดังกล่าวนี้ด้วย

เนื่องจากปรากฏการณ์ในเปลวไฟมักเป็นการไหลในลักษณะที่เป็นเทอร์บิวเลนซ์ จึงได้ดำเนินการวิจัยการสร้างภาพเสมือนของความหนาแน่นความน่าจะเป็นของคุณสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์โดยวิธีโทโมกราฟฟีด้วย ทั้งนี้ได้แสดงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของโมเมนต์ของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของผลรวมแนววิถีและโลคัลโมเมนต์ ผลการสร้างภาพเสมือนยืนยันให้เห็นว่าค่าที่คำนวณได้มีค่าสอดคล้องกับค่า PDF ของฟังก์ชันทดสอบ(Sivathanu, 1993) สังเกตได้จากค่าผลรวมความหนาแน่นความน่าจะเป็นมีค่าต่างจาก 1 ไม่เกิน 0.01%

การศึกษาครั้งนี้ได้ดำเนินการพัฒนาขั้นตอนวิธีการสร้างภาพเสมือนของ Local-PDF จากข้อมูล Path-PDF ด้วยวิธีการแปลงโมเมนต์ ซึ่งแบ่งออกเป็น 4 ขั้นตอน คือ

1. ทำการวัดค่า PDF วิถีรวม
2. แปลงข้อมูล PDF วิถีรวมจากการวัดเป็นโมเมนต์วิถีรวม ด้วยความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์
3. นำโมเมนต์วิถีรวมมาคำนวณสร้างภาพเสมือนของโลคัลโมเมนต์ (ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้ใช้ขั้นตอนวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชันหรือ FBP) ที่ลำดับต่างๆ เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาโมเมนต์
4. ใช้โลคัลโมเมนต์ที่ได้จากการสร้างภาพเสมือนเป็น Local-PDF โดยการแก้ปัญหาโมเมนต์ (ในที่นี้ใช้วิธีการแยกค่าเอกฐานหรือ SVD)

แต่ขั้นตอนวิธีนี้มีข้อจำกัดสำคัญสองข้อคือ

1. ข้อมูลโมเมนต์วิถีรวมต้องมีจำนวนมาก (เพราะกระบวนการอยู่บนพื้นฐานการแปลง ฟูริเยร์แบบต่อเนื่อง)
2. Local-PDF แต่ละจุดต้องเป็นอิสระต่อกัน (Statistically independent)

เพื่อผ่อนปรนเงื่อนไขเหล่านี้จึงได้นำวิธีโทโมกราฟีแบบไม่ต่อเนื่องมาประยุกต์ใช้กับงานวิจัยนี้

การพัฒนาขั้นตอนวิธีการสร้างภาพเสมือนด้วยวิธีโทโมกราฟีแบบไม่ต่อเนื่อง เลือกฟังก์ชันเกาส์แบบเยื้องศูนย์เป็นฟังก์ชันทดสอบ และใช้วิธีพีชคณิต (Algebraic reconstruction techniques, ART) และวิธีการแยกพิกเซลธรรมชาติ (Natural pixel decomposition, NP) สำหรับวิธี NP นั้น ใช้เทคนิคเวฟเลทช่วยในการหาผลเฉลย และได้ใช้วิธี Maximum Entropy แก้ปัญหาโมเมนต์

ผลการสร้าง Local-PDF จากข้อมูลโทโมกราฟีที่มีปริมาณจำกัดโดยใช้วิธี FBP และ NP นั้นแสดงให้เห็นว่า วิธี NP ให้ผลที่ดีกว่า จึงสรุปได้ในเบื้องต้นว่า วิธีโทโมกราฟีแบบไม่ต่อเนื่องสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาทางการแพทย์ได้ นอกจากนี้การสร้าง PDF จากโมเมนต์ด้วยวิธี Maximum Entropy แสดงให้เห็นชัดเจนว่าฟังก์ชัน PDF ในกรณีของการสแกนของเปลวเพลิงขึ้นอยู่กับโมเมนต์อันดับต้น ๆ เท่านั้น

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	ข
บทคัดย่อภาษาไทย	ค
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ง
หน้าสรุปโครงการ	จ
สารบัญตาราง	ฉ
สารบัญภาพ	ซ
บทที่	
1 บทนำ	1
โทโมกราฟีกับการวินิจฉัยการไหลแบบมีปฏิริยาการเผาไหม้	1
วัตถุประสงค์ของโครงการ	5
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	5
ขอบเขตการวิจัย	5
2 วิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน	6
เปลวไฟจำลอง	6
ฟังก์ชันภาพฉาย	7
พิกเจอร์ดิสแทนซ์	10
ขั้นตอนวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน	10
ผลการสร้างภาพเสมือน	14
ข้อวิจารณ์ผลการสร้างภาพเสมือน	15
3 การสร้าง Local-PDF ด้วยวิธีโทโมกราฟี	21
การวัดความแปรปรวนของค่าการส่งผ่าน	21
ความถูกต้องของความสัมพันธ์โลคัลโมเมนต์ - โมเมนต์วิถีสรวม	22
ปัญหาโมเมนต์	23
การสร้าง Local-PDF ด้วยวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน	24
ผลการสร้าง Local-PDF ของเปลว Propylene	25
ผลการสร้างภาพเสมือนจากข้อมูลวิถีสรวมจริง	27
ผลการสร้าง Local-PDF ของฟังก์ชันทดสอบแบบไม่สมมาตร	29

สารบัญ (ต่อ)

บทที่	หน้า
4	วิธีโทโมกราฟฟีแบบไม่ต่อเนื่อง
	ฟังก์ชันภาพฉายแบบแถบ
	การสร้างภาพเสมือนด้วยวิธีพีชคณิต
	การสร้างภาพเสมือนด้วยวิธีการแยกพิกเซลธรรมชาติ
	การประยุกต์การแปลงเวฟเลทกับวิธีการแยกพิกเซลธรรมชาติ
5	ผลการสร้างภาพเสมือนค่าเฉลี่ยด้วยโทโมกราฟฟีแบบไม่ต่อเนื่อง
	ฟังก์ชันทดสอบ
	การสร้างเมทริกซ์พื้นที่
	การตรวจสอบความถูกต้องของเมทริกซ์พื้นที่, ϕ
	ศักยภาพในการประยุกต์วิธีโทโมกราฟฟีแบบไม่ต่อเนื่อง
	ผลของจำนวนพิกเซล (x, y) ที่มีต่อเมทริกซ์ ϕ
	การตรวจสอบความถูกต้องของเมทริกซ์ ϕ ด้วยฟังก์ชันทดสอบ
	ผลการสร้างภาพเสมือน
	การสร้างโลคัลโมเมนต์ด้วยจำนวนข้อมูลจำกัด
	การแก้ปัญหาระบบสมการที่มีตัวแปรมากกว่าสมการด้วยวิธีเอนโทรปีสูงสุด
	Bevensee's Iterative Algorithm
	ผลการสร้าง Local-PDF ของเปลว Propylene ด้วยข้อมูลจำกัด
6	บทสรุป
	แนวทางการวิจัยในอนาคต
บรรณานุกรม	
ผลงานจากการวิจัย	
ภาคผนวก	
	ผลการสร้างภาพเสมือนด้วยวิธี FBP ด้วยข้อมูลจากการทดลอง
	บทความ "การประเมินอัลกอริทึมสำหรับการสร้างรูปร่างของคุณสมบัติ
	เปลวเพลิงโดยวิธีโทโมกราฟฟี"
	บทความ "การสร้างภาพเหมือนฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น
	ในเปลวไฟเทอร์บิวเลนซ์จากข้อมูลโทโมกราฟฟีด้วยแนวทางใหม่"
	บทความ "การประเมินขั้นตอนวิธีสำหรับการสร้างรูปร่างของคุณสมบัติ
	เปลวเพลิงเทอร์บิวเลนซ์โดยวิธีโทโมกราฟฟีแบบไม่ต่อเนื่องด้วยข้อมูลจำกัด"

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
ภาคผนวก(ต่อ)	
บทความ "A Tomographic Algorithm for Reconstructing Local Probability Density Function in Turbulent Flames"	102
บทความ"Tomographic Algorithm for Reconstructing Local Probability Density Function in Turbulent Flames"	112

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1	ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ สำหรับฟังก์ชันภาพฉายที่มีวัตถุขีดขวาง
2	ผลการสร้างภาพเสมือนของ Local-PDF เทียบเป็นตัวเลขกับค่าที่ได้จากการวัด ณ ตำแหน่งศูนย์กลางแปลว

สารบัญภาพ

ภาพที่	หน้า
1 แสดงการวัดคุณสมบัติภายในเปลวเพลิงของการเผาไหม้ด้วยวิธีโทโมกราฟี	2
2 พารามิเตอร์ต่าง ๆ ในการคำนวณฟังก์ชันภาพฉายของรูปร่างวงรี	9
3 แสดงลักษณะการฉายลำแสงเพื่อส่งฟังก์ชัน 2 มิติในระนาบ (x,y) เป็นฟังก์ชันภาพฉาย 1 มิติ, $p_\theta(r)$	11
4 แสดงฟิลเตอร์ฟังก์ชันรามาชานเดรียน (a) ในสเปซโดเมน (b) ในโดเมนความถี่ แสดงฟิลเตอร์ฟังก์ชันเชพฟ์และโลแกน (c) ในสเปซโดเมน (d) ในโดเมนความถี่	16
5 ฟังก์ชันจริงและภาพฉายของ Gaussian	17
6 ฟังก์ชันจริงและภาพฉายของ multi-layer top hat	17
7 ภาพเสมือน Gaussian profile จากวิธี FBP ด้วยจำนวนมุมการเก็บข้อมูลต่างกัน (a) 64 แถบ, 6 มุม (b) 64 แถบ, 18 มุม	18
8 ภาพเสมือน multi-layer top hat profile จากวิธี FBP ด้วยจำนวนมุมการเก็บข้อมูลต่างกัน (a) 64 แถบ, 18 มุม (b) 64 แถบ, 180 มุม	18
9 เปรียบเทียบค่าพิกเจอร์ดิสแทนซ์ของภาพเสมือนที่สร้างด้วยจำนวนมุมต่าง ๆ กัน (a) Gaussian profile (b) multi-layer top hat profile	19
10 ภาพฉายของ Gaussian profile ที่มีสัญญาณรบกวน 1%	19
11 ผลกระทบของสัญญาณรบกวนและชนิดของฟิลเตอร์ฟังก์ชันที่มีต่อพิกเจอร์ดิสแทนซ์เมื่อจำนวนมุมเท่ากัน (90 มุม)	19
12 ภาพเสมือน Gaussian profile ที่มีสัญญาณรบกวน เมื่อใช้ฟิลเตอร์ฟังก์ชันต่างกัน (a) รามาชานเดรียน (64มุม, 90 แถบ) (b) เชพฟ์และโลแกน (64 แถบ, 90 มุม)	20
13 Off-center Gaussian profile ที่มีวัดถูกต้องขวาง (a) ฟังก์ชันจริง (b) ภาพเสมือนเมื่อใช้เชพฟ์และโลแกน (64 แถบ, 90 มุม)	20
14 แสดงค่าโมเมนต์วิถึรวมที่คำนวณจากสมการ(3.5) เปรียบเทียบกับวิธีDPF	23
15 แสดงค่า Local-PDF ของเปลวทดสอบจากการวัด (Sivathanu, 1993)	25
16 ค่าโลคัลโมเมนต์ลำดับที่ 1 ของเปลวจำลองแบบสมมาตร	26
17 ค่า $\log_{10} \Sigma$ และ $\log_{10} U^T m $ สำหรับแก้ปัญหามอเมนต์ด้วยวิธี SVD ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลวของเปลวจำลองแบบสมมาตร	26

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
18 เปรียบเทียบผลการสร้างภาพเสมือน Local-PDF กับค่าที่ได้จากการวัด ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลวของเปลวจำลองแบบสมมาตร	27
19 แสดง Path-PDF จากการวัดของเปลวเพลิงเอททิลีน/อากาศ	28
20 ค่า $\log_{10} \Sigma$ และ $\log_{10} U^T m $ สำหรับแก้ปัญหาโมเมนต์ด้วยวิธี SVD ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลวของเปลวเพลิงเอททิลีน/อากาศ	28
21 เปรียบเทียบผลการสร้างภาพเสมือน Local-PDF กับค่าที่ได้จากการวัด ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลวของเปลวเพลิงเอททิลีน/อากาศ	29
22 แสดงภาพมุมมองด้านบนและส่วนประกอบของเปลวจำลองแบบไม่สมมาตร	30
23 ค่าโลคัลโมเมนต์ลำดับที่ 1 ของเปลวจำลองแบบไม่สมมาตร	31
24 ค่าฟังก์ชันภาพฉายของเปลวจำลองแบบไม่สมมาตรที่มุมต่างๆ	31
25 ภาพเสมือนโลคัลโมเมนต์ลำดับที่ 1 ของเปลวจำลองแบบไม่สมมาตร	32
26 ค่า $\log_{10} \Sigma$ และ $\log_{10} U^T m $ สำหรับแก้ปัญหาโมเมนต์ด้วยวิธี SVD ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลวของเปลวจำลองแบบไม่สมมาตร	32
27 เปรียบเทียบผลการสร้างภาพเสมือน Local-PDF กับค่าที่ได้จากการวัด ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลวของเปลวจำลองแบบไม่สมมาตร	33
28 แสดงลักษณะการเก็บข้อมูลวิถีรวมแบบแถบ และการหาค่าเมทริกซ์พื้นที่, ϕ	36
29 ฟังก์ชันทดสอบ	43
30 ตัวอย่างการแยกฟังก์ชันเพื่อพิจารณาเมทริกซ์พื้นที่	46
31 แผนภาพแสดงความแตกต่างของพื้นที่ที่แถบพาดผ่านฟังก์ชันจากแนววิถี ในมุมต่าง ๆ	47
32 ผลเฉลยจากข้อมูลวิถีรวม 8 มุม ๆ ละ 64 แถบที่ความละเอียดใน การแยกฟังก์ชันต่างกัน (a) 32 x 32 พิกเซล (b) 64 x 64 พิกเซล (c) 128 x 128 พิกเซล	50
33 ฟังก์ชันภาพฉายแบบแถบของฟังก์ชันทดสอบจากการฉาย ด้วยจำนวนแถบต่าง ๆ	51
34 ภาพเสมือนคุณภาพสูงสุดของวิธีการแยกพิกเซลธรรมชาติจากจำนวนมุม การเก็บข้อมูลต่าง ๆ กัน (a) 64 แถบ, 4 มุม (b) 64 แถบ, 8 มุม (c) 64 แถบ, 16 มุม	52

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่	หน้า
35 เปรียบเทียบค่าพิกเซอร์ดิสเทนซ์ของภาพเสมือนที่สร้างโดยวิธีโทโมกราฟีแบบไม่ต่อเนื่องแบบต่าง ๆ	53
36 ภาพเสมือนจากวิธี FBP ด้วยจำนวนมุมการเก็บข้อมูลต่าง ๆ กัน (a) 64 แฉบ, 4 มุม (b) 64 แฉบ, 8 มุม (c) 64 แฉบ, 16 มุม	54
37 ภาพเสมือนจากวิธี ART ด้วยจำนวนมุมการเก็บข้อมูลต่าง ๆ กัน (a) 64 แฉบ, 4 มุม (b) 64 แฉบ, 8 มุม (c) 64 แฉบ, 16 มุม	55
38 ภาพเสมือนจากการประยุกต์การแปลงเวฟเลทกับวิธี NP ด้วยจำนวนมุมการเก็บข้อมูลต่าง ๆ กัน (a) 64 แฉบ, 4 มุม (b) 64 แฉบ, 8 มุม (c) 64 แฉบ, 16 มุม	56
39 เปรียบเทียบผลการสร้างภาพเสมือนโลคัลโมเมนต์ด้วยวิธี FBP และ NP	57
40 เปรียบเทียบผลการสร้างภาพเสมือน Local-PDF ของเปลว Propylene กับค่าที่ได้จากการวัด ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลว	61

บทที่ 1

บทนำ

โทโมกราฟฟีกับการวินิจฉัยการเผาไหม้

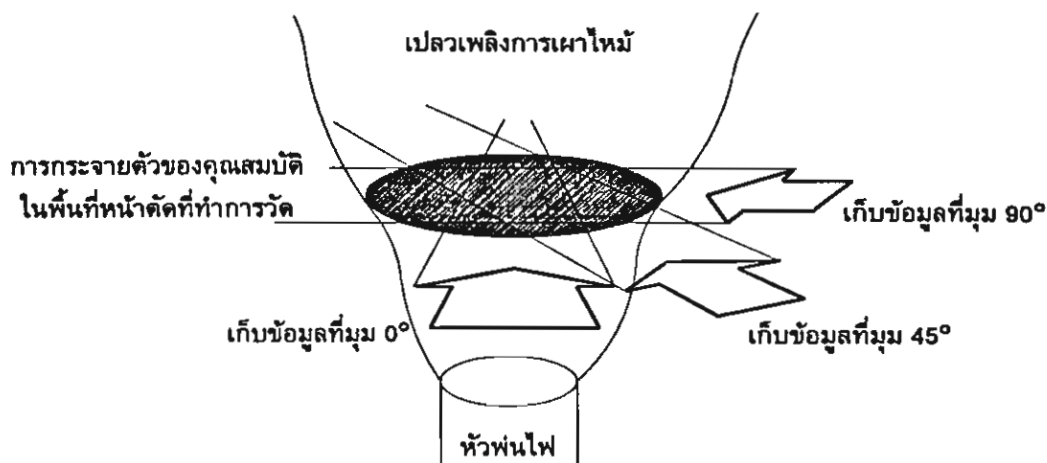
การวัดค่าคุณสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์ (เช่น อุณหภูมิ, ความเข้มข้นของก๊าซของค์ประกอบ ฯลฯ) ภายในเปลวเพลิงสามารถทำได้หลายวิธี การวัดด้วยแสงเป็นวิธีหนึ่งที่สามารถวัดค่าได้อย่างมีประสิทธิภาพ เนื่องจากไม่จำเป็นต้องใช้อุปกรณ์เข้าไปสัมผัสกับเปลวเพลิงโดยตรง อันจะเป็นการรบกวนระบบและทำให้ค่าคุณสมบัติที่ต้องการวัดเปลี่ยนไป การวัดด้วยแสงสามารถทำได้ 2 แบบ คือ การวัดแบบจุด (Point measurements) และการวัดแบบแนววิถี (Path measurements) โดยทั่วไปการวัดแบบจุดจะเป็นการวัดค่าการกระเจิงของแสงจากตำแหน่งที่ต้องการทราบค่า วิธีนี้มักจะสามารวัดค่าได้ที่ละจุดเท่านั้น และไม่สามารถวัดค่าได้แน่นอนหากจุดนั้นมีความเข้มข้นของก๊าซของค์ประกอบ ส่วนการวัดแบบแนววิถีสามารถทำได้โดยการยิงลำแสงจากแหล่งกำเนิดผ่านเข้าไปในเปลวเพลิงบริเวณที่ต้องการวัดค่าคุณสมบัติและมีอุปกรณ์รับความเข้มของลำแสงที่ผ่านออกมา ค่าที่วัดได้จึงเป็นค่าการดูดกลืนเฉลี่ยตลอดแนววิถีนั้น

วิธีโทโมกราฟฟีที่ใช้แสง เป็นวิธีการวัดแสงแบบแนววิถีโดยการนำข้อมูลการวัดวิถีรวม (Projection data) จากหลาย ๆ มุม มาคำนวณกลับเพื่อสร้างภาพเสมือน (Reconstruction Image) แบบ 2 มิติ (ในบางครั้งเรียกว่าภาพตัดขวาง) ของสนามคุณสมบัติ (Property field) ตลอดพื้นที่หน้าตัดที่สนใจ (ดูภาพที่ 1) ด้วยวิธีนี้ทำให้สามารถวัดค่าคุณสมบัติในทุก ๆ จุดได้พร้อมกัน แม้ว่าค่าคุณสมบัติที่จุดนั้นจะมีค่าต่ำมากก็ตาม

ในการวัดการดูดกลืนภายในตัวกลางเนื้อเดียว (Homogeneous media) เมื่อยิงลำแสงที่มีความเข้ม I_0 ผ่านเข้าไปยังตัวกลาง ความเข้มของลำแสงเมื่อผ่านตัวกลางจะเปลี่ยนแปลงไปตามกฎของเบียร์ (Beer's Law)

$$I = I_0 e^{-KS} \quad (1.1)$$

โดยที่ K เป็นค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนของตัวกลาง และ I เป็นความเข้มของลำแสงหลังจากผ่านตัวกลางความยาว S



ภาพที่ 1 แสดงการวัดคุณสมบัติภายในเปลวเพลิงของการเผาไหม้ด้วยวิธีโทโมกราฟฟี

สำหรับตัวกลางที่เป็นของผสม ค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน K ตามแบบจำลองความร้อน (Thermal model) จะขึ้นอยู่กับทั้งอุณหภูมิและความไม่เป็นเอกพันธ์ (Nonhomogeneous) ของตัวกลางนั้น ฮิวห์อี (Hughey, 1982) และซานทาวิกกา (Santavicca) ประยุกต์กฎของเบียร์โดย

$$I = I_0 e^{(-\int p P_\omega ds)} \quad (1.2)$$

ให้ $K = p P_\omega$ เป็นฟังก์ชันของระยะทาง, p เป็นความดันย่อยของตัวกลาง, P_ω ($\text{cm}^{-1} \text{atm}^{-1}$) เป็นค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืนเชิงปริมาตรของตัวกลางที่ตอบสนองต่อลำแสงความถี่ ω

ในทางปฏิบัติอัตราส่วนความเข้มแสง, I/I_0 , เป็นค่าที่สามารถวัดได้จากการทดลอง จัดรูปสมการ (1.2) เสียใหม่

$$p_\theta(r) = \int_{\text{source}}^{\text{detector}} p P_\omega ds = -\ln \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (1.3)$$

แก้สมการ (1.3) ด้วยวิธีโทโมกราฟฟี เพื่อหาค่า $p P_\omega$ โดยค่าผลลัพธ์นี้ (ทำการวัดที่ความถี่สองความถี่ เพราะ $p=p(s,T)$ และ $P_\omega=P_\omega(T)$) สามารถนำไปคำนวณเป็นค่าคุณสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์ของตัวกลาง ดังนั้นกฎเกณฑ์สำคัญของการวัดคุณสมบัติของการเผาไหม้ด้วยวิธีโทโมกราฟฟี อยู่ที่ความถูกต้องของการสร้างภาพเสมือน 2 มิติ ของค่าสัมประสิทธิ์การดูดกลืน

ในปี ค.ศ. 1976, เซน (Chen, 1976) และ โกลาร์ด (Goulard) นำการแปลงกลับด้วยวิธีการปอกเปลือกหัวหอม (Onion Peeling Inversion method) เพื่อวัดปริมาณสารมลพิษที่ปล่อย

ออกมาจากเครื่องยอนด์เจ็ท วิธีนี้สามารถหาค่าสนามคุณสมบัติแบบ 2 มิติได้ โดยเริ่มคำนวณจากชั้นนอกสุดของฟังก์ชันเข้าไปชั้นในเรื่อย ๆ คล้ายกับการปอกเปลือกหัวหอม วิธีนี้เป็นวิธีโทโมกราฟฟีวิธีแรกที่สามารถหาอุณหภูมิและความเข้มข้นของก๊าซองค์ประกอบในทุก ๆ จุดของพื้นที่หน้าตัดที่สนใจได้พร้อมกัน อย่างไรก็ตามผลเฉลยที่ได้มีความอ่อนไหวต่อสัญญาณรบกวนมาก ซึ่งทำให้ผลเฉลยไม่เสถียร ในปี ค.ศ. 1980, เอ็มเมอร์แมน (Emmerman, 1980) และคณะ สามารถแก้ไขปัญหาค่าความผิดพลาดโดยการนำวิธีการแปลงทางคณิตศาสตร์ที่เรียกว่าวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน (Filter-back projection, FBP) มาแทนวิธีเดิม วิธีนี้จะแปลงข้อมูลการวัดวิถีรวมไปอยู่ในโดเมนความถี่ (Frequency domain) ซึ่งทำให้สามารถขจัดสัญญาณรบกวนความถี่สูงออกไปได้ และวิธี FBP นี้มีข้อดีกว่าวิธีการแปลงเอเบล (Abel transform) (Bracewell, 1986) คือสามารถสร้างภาพเสมือนที่เป็นฟังก์ชันที่ไม่สมมาตรได้ (Dasch, 1992) อย่างไรก็ตามการสร้างภาพเสมือนด้วยวิธี FBP จำเป็นต้องใช้ข้อมูลการวัดวิถีรวมเป็นจำนวนมากเพื่อให้ได้ภาพที่สมบูรณ์ (Buonocore, 1981) ซึ่งในการวัดทางการเผาไหม้บางครั้งไม่สามารถเก็บข้อมูลวิถีรวมเป็นจำนวนมาก ๆ ได้ การพัฒนากระบวนการวิธีที่สามารถสร้างภาพเสมือนที่ถูกต้องจากข้อมูลวิถีรวมที่มีจำนวนจำกัดจึงเป็นสิ่งจำเป็น

วิธีโทโมกราฟฟีแบบดั้งเดิม สามารถสร้างภาพเสมือนของฟังก์ชันการกระจายตัวของคุณสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์ของเปลวเพลิงที่เป็นค่าเฉลี่ยต่อเวลาได้ดี แต่เป็นที่ทราบกันดีว่าความแปรปรวนของคุณสมบัติในเปลวเพลิงเทอร์บิวเลนซ์ ทำให้ค่าการแผ่รังสีความร้อนที่วัดได้สูงกว่าค่าที่ประมาณจากค่าคุณสมบัติที่เป็นค่าเฉลี่ย 2-3 เท่าตัว (Gore, 1986 ; Hamins, 1994) ดังนั้นการวัดความแปรปรวนของคุณสมบัติด้วยวิธีโทโมกราฟฟีจึงเป็นความท้าทายสำหรับการวิจัยในสาขาการเผาไหม้

ซินเดอร์ (Synder, 1988) และ บีทิงก์ (Beiting, 1991) พยายามบันทึกโครงสร้างเทอร์บิวเลนซ์ของเปลวเพลิง ด้วยวิธีการอ่านค่าการฉายอย่างรวดเร็ว (Fast scanning) แต่เนื่องจากความแปรปรวนแบบสุ่มของสนามการไหลอันเนื่องมาจากการเป็นเทอร์บิวเลนซ์ ทำให้ภาพเสมือนที่คำนวณได้เป็นภาพลวง และมีความละเอียดของภาพที่จำกัด ในปี ค.ศ. 1995, ทอร์เนียเนน (Torniainen, 1995) และคณะ แนะนำวิธีเชิงตัวเลขในการแก้ปัญหาข้อมูลการวัดที่จำกัด โดยการใช้วิธีคาร์ฮูเนน-โลว์ (Karhunen-Loeve procedure) พบว่าข้อมูลจำนวนเล็กน้อยจากการอ่านค่าในแต่ละครั้ง สามารถนำมาใช้ในการสร้างภาพเสมือนของสนามการไหลแบบไม่เสถียรได้ แต่วิธีนี้ยังจำกัดอยู่ด้วยการใช้ข้อมูลจำลอง (Torniainen, 1998)

อีกแนวทางหนึ่งในการศึกษาเปลวเพลิงเทอร์บิวเลนซ์ คือการสร้างภาพเสมือนของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น (Probability density function, PDF) ของค่าคุณสมบัติแทนค่าชั่วขณะ สีเวธานุ (Sivathanu, 1993) และ กอร์ (Gore) ใช้แนะนำวิธีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete probability density function, DPF) คำนวณร่วมกับวิธีโทโมกราฟฟีแบบปอกเปลือกหัวหอมในการหาค่า PDF เฉพาะที่ (Local-PDF) ของค่า

คุณสมบัติในเปลวเพลิงเทอร์บิวเลนซ์จากข้อมูลการวัด PDF วิถีรวม (Path-PDF) และเนื่องจาก PDF ไม่เปลี่ยนแปลงกับเวลา จึงไม่จำเป็นต้องอ่านค่าการฉายอย่างรวดเร็วพร้อมกันหลาย ๆ จุด แม้ว่าผลการสร้างภาพเสมือนจะดูสมเหตุสมผล แต่พวกเขาก็ประสบกับปัญหาการสะสมค่าความผิดพลาด เนื่องมาจากกระบวนการปอกเปลือกหัวหอม (Vallikul, 1996 : 1)

ในปี ค.ศ. 1996, ปุมยศ (Vallikul, 1996 : 2) ได้พัฒนากระบวนการสร้างภาพเสมือนของ PDF โดยใช้วิธีการแปลงทางคณิตศาสตร์ เพื่อปรับปรุงผลเฉลยให้ดีขึ้นและสามารถคำนวณค่า Local-PDF ในเปลวเพลิงได้โดยตรงจากการสร้างภาพเสมือนของโมเมนต์ของสนามคุณสมบัติ กระบวนการดังกล่าวต้องใช้ความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของฟังก์ชันโมเมนต์ของ Local-PDF และฟังก์ชันโมเมนต์ของ Path-PDF โดยตั้งอยู่บนสมมุติฐานว่าค่า Local-PDF ในแต่ละจุดจะต้องไม่ขึ้นต่อกัน (Statistically independent) และวิธีนี้สามารถขจัดปัญหาการสะสมค่าความผิดพลาดได้ดี และได้ผลเฉลยที่เสถียร (Nyden, 1996)

เนื่องจากวิธีการหา Local-PDF ใช้กระบวนการโทโมกราฟีแบบ FBP จึงจำเป็นต้องใช้ข้อมูลการดูดกลืนของค่าการส่งผ่านวิถีรวมจำนวนมากเพื่อให้ได้ภาพเสมือนที่ถูกต้องและจำเป็นต้องมีสมมุติฐานของความไม่ขึ้นต่อกันของ Local-PDF เงื่อนไขสำคัญสองข้อนี้อาจจะทำให้ผลเฉลยคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริงถ้าปริมาณข้อมูลมีจำกัด และ PDF ขึ้นต่อกัน

ในปี ค.ศ. 1978, เฮร์แมน (Herman, 1978) ได้พิสูจน์ให้เห็นว่าวิธีโทโมกราฟีแบบไม่ต่อเนื่อง เหมาะสมสำหรับการสร้างภาพเสมือนจากข้อมูลวิถีรวมที่จำกัด เนื่องจากใช้ข้อมูลวิถีรวมแบบแถบ (Strip integral) เป็นการอินทิเกรตตลอดพื้นที่ของลำแสง ทำให้สามารถเก็บข้อมูลคุณสมบัติของฟังก์ชันได้ครบถ้วนกว่าข้อมูลวิถีรวมแบบเส้น (Line integral) จึงมีแนวโน้มที่จะสามารถสร้างภาพเสมือนได้ดีกว่าแม้จะมีข้อมูลการวัดที่จำกัด และในปี ค.ศ. 1981, บูโอโนคอร์ (Buonocore, 1981) และคณะ ได้แนะนำวิธีการแยกแบบพิกเซลธรรมชาติ (Natural pixel decomposition) แทนการแยกแบบคาร์ทีเซียน (Cartesian decomposition) โดยพิสูจน์ให้เห็นว่าการแยกแบบพิกเซลธรรมชาติโดยใช้ฟังก์ชันภาพฉายเป็นฟังก์ชันประมาณ มีความเหมาะสมกับขั้นตอนวิธีโทโมกราฟีแบบไม่ต่อเนื่องมากกว่าการแยกแบบคาร์ทีเซียน

จากผลการวิจัยที่ผ่านมา (Meekunnasombat, 1997, 1998, 1999) ทำให้เห็นได้ว่าวิธีโทโมกราฟีแบบไม่ต่อเนื่อง มีความเหมาะสมกับการสร้างภาพเสมือนจากข้อมูลวิถีรวมที่จำกัด และยังให้แนวทางที่จะผ่อนปรนเงื่อนไขความไม่ขึ้นต่อกันของค่า Local-PDF ได้ โดยวิธีนี้ให้แนวทางที่จะใส่สมการความสัมพันธ์ระหว่างค่า PDF ในแต่ละจุด เพิ่มเติมลงไปได้ทำให้สามารถผ่อนปรนข้อจำกัดเรื่องความไม่ขึ้นต่อกันของ Local-PDF

วัตถุประสงค์ของโครงการ

1.1 เพื่อศึกษาขั้นตอนวิธี และสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการคำนวณค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ในเปลวไฟแบบเทอร์บิวเลนซ์ด้วยวิธีโลคัลโทโมกราฟี โดยใช้ข้อมูลจากการวัดแบบดูดกลืน (absorption measurement) ของรังสีเลเซอร์

1.2 เป็นงานวิจัยพื้นฐานเพื่อรองรับนักศึกษาระดับปริญญาโท, เอกสาขาวิศวกรรมเครื่องกล

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สร้างขึ้นจะเป็นเครื่องมือวิเคราะห์สำหรับนักวิจัยทางสาขาวิศวกรรมการสันดาป, สาขากระบวนการทางเคมีและการควบคุม และยังรวมไปถึงงานวิจัยทางการแพทย์ ทั้งนี้เพราะพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่ใช้คล้ายคลึงกับการคำนวณภาพเสมือนจากเครื่อง Computer Aided Tomography (CAT-Scanner)

ผลงานที่ได้จากโครงการวิจัยนี้ยังเป็นพื้นฐานเพื่อการออกแบบระบบเครื่องมือวัดการไหลประสิทธิภาพสูงแบบใหม่ที่จะใช้ในอุตสาหกรรมของประเทศต่อไปในอนาคต

ขอบเขตการวิจัย

การวิจัยจะใช้ข้อมูลจาก การวัด Absorption ของเปลวไฟเทอร์บิวเลนซ์ (Turbulent Diffusion Flame) จาก Burner ขนาดเล็ก และข้อมูลที่จำลองขึ้นโดยวิธีทางคณิตศาสตร์

บทที่ 2

วิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจคชัน

ในหัวข้อต่อไปนี้จะนิยามเปลวไฟจำลอง, ฟังก์ชันภาพฉาย, และฟังก์ชันแทนที่ที่ใช้ประเมินความถูกต้องของภาพเสมือนเทียบกับฟังก์ชันจริง

เปลวไฟจำลอง

ในที่นี้จะกล่าวถึงเปลวไฟจำลอง 3 แบบด้วยกัน คือ Gaussian, multi-layer top hat, และ combination of an off-center Gaussian profiles and three ellipsoidal สมการของฟังก์ชันเกาส์เซียน คือ

$$f(x, y) = e^{-c(x^2+y^2)} \quad (2.1)$$

เมื่อกำหนดให้ c เท่ากับ 20 (ภาพที่ 5)

รูปร่าง multi-layer top hat (ภาพที่ 6) เป็นการรวม top hat ขนาดต่าง ๆ ที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน สามารถเขียนสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$f(x, y) = \begin{cases} \rho_i & \text{for } x^2 + y^2 \leq A_i^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.2)$$

เมื่อกำหนดให้ ρ_i มีค่าเท่ากับ 0.2, 0.5, 0.7, และ 1.0 และ A_i เท่ากับ 0.65, 0.50, 0.35, และ 0.20 ตามลำดับ

เปลวไฟจำลองแบบสุดท้าย เป็นการรวมกันระหว่าง เกาส์เซียน, วงรี, ทรงกระบอก กลวง ล้อมรอบด้วยผนังทรงกลม ดังภาพที่ 13 ดังนี้

$$f(x, y) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 \quad (2.3)$$

โดย
$$f_1 = e^{-c[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2]} \quad (2.4)$$

ค่าคงที่ c , x และ y มีค่าเท่ากับ 20, 0.24 และ 0.24 ตามลำดับ

$$f_2 = \begin{cases} \rho & \text{for } \frac{p^2}{A^2} + \frac{q^2}{B^2} \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.5)$$

กำหนดค่า ρ , A และ B เท่ากับ 0.3, 0.35 และ 0.15 ตามลำดับ นิยามให้ฟังก์ชัน p และ q คือ

$$p = (x - x_1) \cos \theta + (y - y_1) \sin \theta$$

$$q = (y - y_1) \cos \theta - (x - x_1) \sin \theta$$

เมื่อ x_1 , y_1 และ θ เท่ากับ 0.2, -0.4 และ 20 องศา ตามลำดับ

$$f_3 = \begin{cases} \rho & \text{for } r_{in} \leq (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leq r_{out} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.6)$$

เมื่อ ρ , r_{in} , r_{out} , x_1 และ y_1 เท่ากับ 0.2, 0.1, 0.24, -0.4 และ 0.1 ตามลำดับ

และ

$$f_4 = \begin{cases} \rho & \text{for } r_{in} \leq x^2 + y^2 \leq r_{out} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.7)$$

กำหนด ρ , r_{in} , r_{out} เท่ากับ 0.2, 0.8 และ 0.9 ตามลำดับ

ฟังก์ชันภาพฉาย (Projection Function)

ฟังก์ชันภาพฉายคือผลของการส่ง(Mapping) ฟังก์ชัน 2 มิติเป็นฟังก์ชัน 1 มิติ โดยการอินทิเกรตฟังก์ชันตามแนววิถี ฟังก์ชันภาพฉายของ $f(x,y)$ ตามแนวตั้งฉากกับมุม θ คือ

$$p_\theta(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - r) dx dy \quad (2.8)$$

เมื่อ δ คือ โคลเนคเคอร์เดลตา (Kronecker delta)

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

สมการ (2.8) สามารถเขียนให้อยู่ในระบบพิกัด (r,s) ซึ่งหมุนจากระบบพิกัด (x,y) ไปเป็นมุม θ ได้ดังนี้ (ดูภาพที่ 3)

$$p_\theta(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\theta(r,s) ds \quad (2.9)$$

ฟังก์ชันภาพฉายของเกาส์เซียนเท่ากับ

$$p(r) = \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-cr^2} \quad (2.10)$$

ฟังก์ชันภาพฉายของ multi-layer top hat เท่ากับ

$$p(r) = \begin{cases} 2\rho_i \sqrt{A_i^2 - r^2} & \text{for } |r| < A_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.11)$$

เมื่อ ρ_i มีค่าเท่ากับ 0.2, 0.5, 0.7, และ 1.0 และ A_i เท่ากับ 0.65, 0.50, 0.35, และ 0.20 ตามลำดับ ตัวห้อย θ ไม่ปรากฏในสมการเนื่องจากทั้งเกาส์เซียนและ multi-layer top hat มีลักษณะสมมาตร

ฟังก์ชันภาพฉายของเปลวเพลิงจำลองแบบที่สาม สามารถเขียนได้เป็น

$$p_\theta(r) = p_\theta^1(r) + p_\theta^2(r) + p_\theta^3(r) + p_\theta^4(r) \quad (2.12)$$

ฟังก์ชัน $p_\theta^1(r)$ คำนวณได้จาก

$$p_\theta^1(r) = \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-c(r-R)^2} \quad (2.13)$$

เมื่อ
$$R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cos \left\{ \left[\tan^{-1} \left(\frac{y_1}{x_1} \right) \right] - \theta \right\}$$

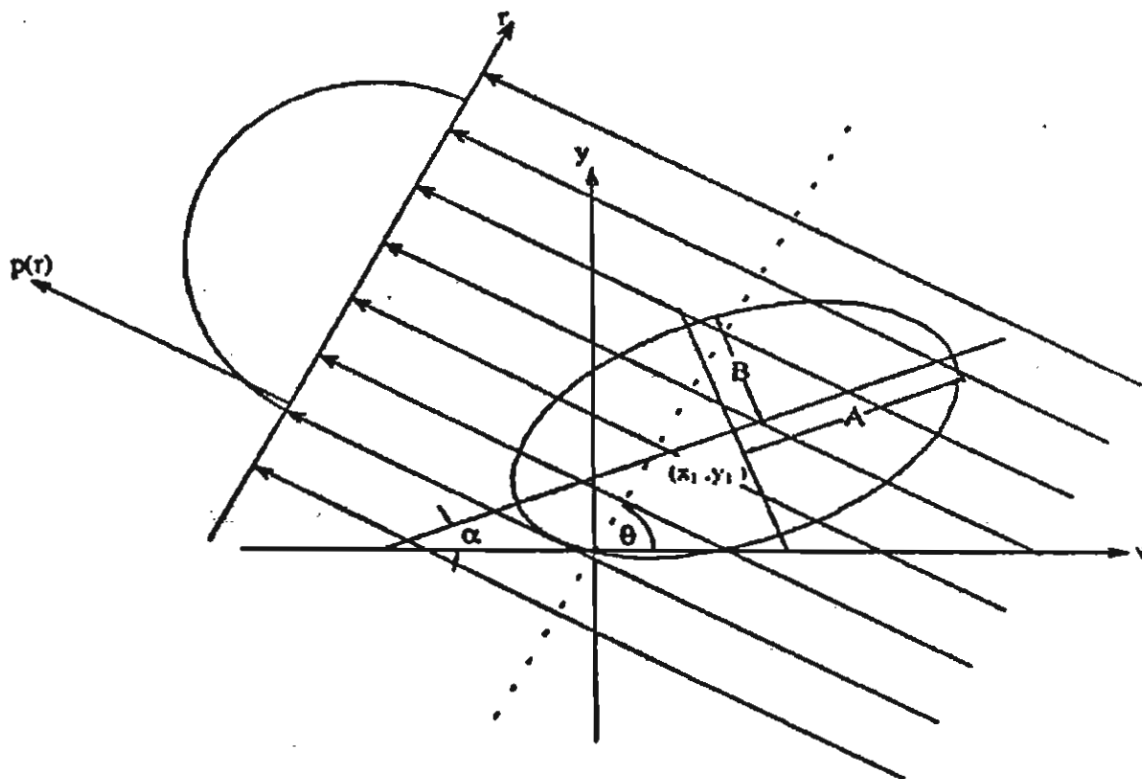
ฟังก์ชัน $p_\theta^2(r)$, $p_\theta^3(r)$ และ $p_\theta^4(r)$ คำนวณได้จาก

$$p(r) = \begin{cases} \frac{2\rho AB}{a^2(\theta - \alpha)} \sqrt{a^2(\theta - \alpha) - (r - R)^2} & \text{for } |r| \leq a(\theta - \alpha) \\ 0 & \text{for } |r| > a(\theta - \alpha) \end{cases} \quad (2.14)$$

เมื่อ
$$a^2(\theta - \alpha) = A^2 \cos^2(\theta - \alpha) + B^2 \sin^2(\theta - \alpha)$$

และ
$$R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cos \left\{ \left[\tan^{-1} \left(\frac{y_1}{x_1} \right) \right] - \theta \right\}$$

ค่าคงที่ x_1 , y_1 , A , B , α และ ρ สำหรับแต่ละฟังก์ชันภาพฉายแสดงดังภาพที่ 2 และตารางที่ 1



ภาพที่ 2 พารามิเตอร์ต่าง ๆ ในการคำนวณฟังก์ชันภาพฉายของรูปร่างวงรี

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ สำหรับฟังก์ชันภาพฉายที่มีวัตถุเกิดขวาง

Obstacle	x_l	y_l	A	B	α	ρ
$p_{\theta}^1(r)$	0.2	-0.4	0.35	0.15	20°	0.3
$p_{\theta}^{1,1}(r)$	-0.4	0.1	0.24	0.24	0°	0.2
$p_{\theta}^{1,2}(r)$	-0.4	0.1	0.1	0.1	0°	0.2
$p_{\theta}^{2,1}(r)$	0.0	0.0	0.9	0.9	0°	0.2
$p_{\theta}^{2,2}(r)$	0.0	0.0	0.8	0.8	0°	0.2
$p_{\theta}^1(r) = p_{\theta}^{1,1}(r) - p_{\theta}^{1,2}(r)$			$p_{\theta}^2(r) = p_{\theta}^{2,1}(r) - p_{\theta}^{2,2}(r)$			

พิกเจอร์ดิสแทนซ์ (Picture distance)

การประเมินความถูกต้องของภาพเสมือนเทียบกับฟังก์ชันจริง ในการศึกษครั้งนี้ใช้แนวคิดของชิเกฮิโตะ (Shigehito, 1983) ที่นำเสนอค่า "พิกเจอร์ดิสแทนซ์" , d , นิยามโดย

$$d = \sqrt{\frac{\sum_{i=k}^M \sum_{j=n}^N (T_{i,j} - R_{i,j})^2}{\sum_{i=k}^M \sum_{j=n}^N (T_{i,j} - T_{mean})^2}} \quad (2.15)$$

เมื่อ T_{ij} คือค่าจริงของฟังก์ชัน, R_{ij} คือค่าที่ได้จากการสร้างภาพเสมือนและ T_{mean} คือค่าเฉลี่ยของ T_{ij} ตลอดบริเวณที่พิจารณา จากนิยามของพิกเจอร์ดิสแทนซ์จะเห็นว่าเมื่อภาพเสมือนที่สร้างขึ้นมีรูปร่างใกล้เคียงกับฟังก์ชันจริงค่าพิกเจอร์ดิสแทนซ์จะมีค่าเข้าใกล้ศูนย์มากขึ้น

ขั้นตอนวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน

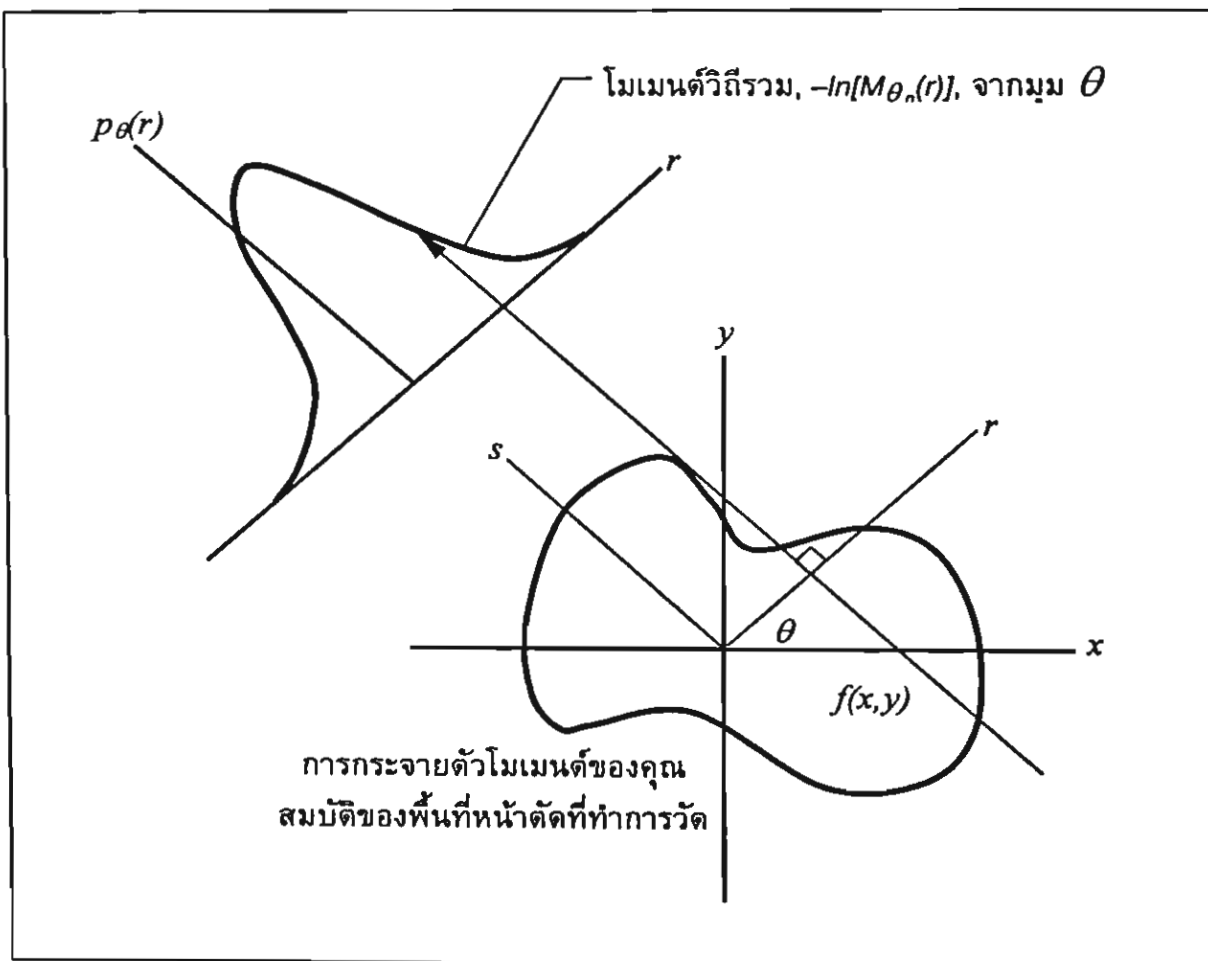
วิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน (FBP) เป็นวิธีโทโมกราฟีวิธีหนึ่งที่ใช้เทคนิคการแปลงฟูริเยร์ (Fourier transform) เป็นพื้นฐาน พิจารณาฟังก์ชันการแปลงฟูริเยร์ 2 มิติ, $F(X,Y)$, ของฟังก์ชัน $f(x,y)$

$$F(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-i(Xx+Yy)} dx dy \quad (2.16)$$

เขียนฟังก์ชัน $f(x,y)$ ไปอยู่ในระบบพิกัด (r,s) โดยที่แกน r ทำมุม θ กับแกน x (ดูภาพที่ 3) จะได้ฟังก์ชันการแปลงฟูริเยร์, $F(X,Y)$, เป็น

$$\begin{aligned} F(X,Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(r,s) e^{-i[X(r \cos \theta - s \sin \theta) + Y(r \sin \theta + s \cos \theta)]} dr ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(r,s) e^{-i[rR + sS]} dr ds \\ &= F_{\theta}(R,S) \end{aligned} \quad (2.17)$$

เมื่อ R และ S คือ $X \cos \theta + Y \sin \theta$ และ $Y \cos \theta - X \sin \theta$ ตามลำดับ สมการ (2.17) สืบให้ทราบว่าถ้า $f_{\theta}(r,s)$ หมุนจาก $f(x,y)$ ไปเป็นมุม θ ฟังก์ชันการแปลงฟูริเยร์ $F_{\theta}(R,S)$ ก็หมุนจาก $F(X,Y)$ เป็นมุม θ ด้วย



ภาพที่ 3 แสดงลักษณะการฉายลำแสงเพื่อส่งฟังก์ชัน 2 มิติในระนาบ (x,y) เป็นฟังก์ชันภาพฉาย 1 มิติ, $p_{\theta}(r)$

พิจารณาฟังก์ชันภาพฉาย, $p_\theta(r)$.

$$p_\theta(r) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\theta(r, s) ds \quad (2.18)$$

และฟังก์ชันการแปลงฟูริเยร์ $P_\theta(R)$ ของ $p_\theta(r)$ คือ

$$P_\theta(R) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_\theta(r, s) e^{-iRr} ds dr \quad (2.19)$$

หากเปรียบเทียบสมการ (2.17) และ (2.19) จะได้ว่า $P_\theta(R)$ มีค่าเทียบเคียงได้กับ $F_\theta(R, S)$ ตามแนวแกน R หรือ

$$P_\theta(R) = F_\theta(R, S) \Big|_{S=0} \quad (2.20)$$

สมการ (2.20) คือ ทฤษฎีโปรเจกชัน-สไลซ์ (Projection-slice theorem) ซึ่งกล่าวว่าฟังก์ชันการแปลงฟูริเยร์ 1 มิติของฟังก์ชันภาพฉาย คือฟังก์ชันการแปลงฟูริเยร์ 2 มิติของฟังก์ชันเดิมตามแนวภาพฉายที่ตัดผ่านจุดกำเนิด

ดังนั้นหากมีข้อมูลฟังก์ชันการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันภาพฉายจำนวนอนันต์มุ่มแล้วเราจะทราบค่าทุก ๆ จุดของ $F(X, Y)$ บนระนาบ (X, Y) และเมื่อทราบ $F(X, Y)$ สามารถคำนวณกลับเป็น $f(x, y)$ ด้วยการแปลงฟูริเยร์ผกผันดังนี้

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(X, Y) e^{i(Xx+Yy)} dXdY \quad (2.21)$$

สมการ (2.21) สามารถเขียนให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงมุมได้เป็น

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(R, \theta) e^{iR(x \cos \theta + y \sin \theta)} R dR d\theta \quad (2.22)$$

โดยที่ $F(R, \theta)$ เทียบเคียงได้กับฟังก์ชัน $F_\theta(R, S)|_\theta$ ซึ่งจากทฤษฎีโปรเจกชัน-สไลซ์ก็คือ $P_\theta(R)$ และด้วยคุณสมบัติการหมุนแบบสมมาตร เราทราบว่า $F(-R, \theta)$ มีค่าเท่ากับ $F(R, \theta + \pi)$ ดังนั้น

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty P_\theta(R) e^{iRr} |R| dR d\theta \quad (2.23)$$

สมการ (2.23) เป็นสมการที่ไม่มีขอบเขตจำกัด (Unbounded function) เนื่องจาก $|R|$ มีค่าลู่ออก ดังนั้นค่า R จึงควรถูกจำกัดด้วยค่า ๆ หนึ่ง $|R| \leq \Omega$ กำหนดให้ฟังก์ชันการกรองหรือฟิลเตอร์ฟังก์ชัน, $H(R) = b(R)|R|$ โดยที่

$$b(R) = \begin{cases} 1 & \text{where } |R| \leq \Omega \\ 0 & \text{where } |R| > \Omega \end{cases} \quad (2.24)$$

กำหนดให้ช่วงห่างของการเก็บข้อมูลตามแนวขวาง (Lateral sampling) มีค่าเป็น 'a' ดังนั้นจากทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง (Sampling theorem) จะได้ว่า

$$\Omega = 2\pi f_{\max} = \frac{\pi}{a} \quad (2.25)$$

จากสมการ (2.23) แทนค่า $|R|$ ด้วย $H(R)$ และใช้ทฤษฎีคอนโวลูชัน (Convolution) จะได้สมการการสร้างภาพเสมือน (Reconstruction formula) เป็น

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty p_\theta(\tau) h(x \cos \theta + y \sin \theta - \tau) d\tau d\theta \quad (2.26)$$

เมื่อ $h(r)$ เป็นการแปลงฟูรีเยร์ผกผันของ $H(R)$ ซึ่งสามารถเขียนในรูปวิเคราะห์ (Analytic form) ได้เป็น

$$h(r) = \begin{cases} \frac{\Omega^2}{2\pi} & , r = 0 \\ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{2\Omega}{r} \sin(\Omega r) + \frac{2}{r^2} \cos(\Omega r) - \frac{2}{r^2} \right] & , r \neq 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

ฟิลเตอร์ฟังก์ชัน $h(r)$ สามารถเขียนเป็นรูปไม่ต่อเนื่อง $h(r_k=ak)$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ได้เป็น

$$\begin{aligned} h(0) &= \frac{\pi}{2a^2} \\ h(r_k) &= -\frac{2}{\pi k^2 a^2} \quad \text{เมื่อ } k \text{ เป็นเลขคี่} \\ h(r_k) &= 0 \quad \text{เมื่อ } k \text{ เป็นเลขคู่} \end{aligned} \quad (2.28)$$

สมการ (2.28) คือฟิลเตอร์ฟังก์ชันของรามาชานเดรียน (Ramachandran, 1971) ซึ่งมีลักษณะที่กว้างมาก ต่อมาเชพฟ์ (Shepp, 1974) และโลแกน (Logan) แนะนำฟิลเตอร์ฟังก์ชันที่กว้างน้อยลงซึ่งทำให้ผลการสร้างภาพเสมือนดีขึ้น

$$h(r_k) = -\frac{4}{\pi a^2 (4k^2 - 1)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (N-1) \quad (2.29)$$

สมการนี้เรียกว่าฟิลเตอร์ฟังก์ชันเชพฟ์และโลแกน (Shepp and Logan filter function) ภาพที่ 4 แสดงฟิลเตอร์ฟังก์ชันทั้งสอง ทั้งในสเปซโดเมน (Space domain) และในโดเมนความถี่ (Frequency domain)

ดังนั้นการประมาณแบบไม่ต่อเนื่องของสมการการสร้างภาพเสมือนด้วยวิธี FBP สามารถเขียนได้เป็น

$$f(x, y) = \frac{a}{2M} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N p_{\theta_j}(r_k) h(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j - r_k) \quad (2.30)$$

โดยที่ M เป็นจำนวนมุมของการเก็บข้อมูล และ N เป็นจำนวนจุดของการเก็บข้อมูลต่อ 1 มุม

ผลการสร้างภาพเสมือน

จากการสร้างภาพเสมือนของ Gaussian profile และ multi-layer top hat profile ด้วยวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน เมื่อใช้จำนวนการเก็บข้อมูลและปริมาณสัญญาณรบกวนเป็นพารามิเตอร์ในการสร้างภาพเสมือน พบว่าเปลวเพลิงทดสอบแต่ละแบบมีคุณลักษณะต่างกันทั้งในสเปซโดเมนและโดเมนความถี่

เลือกใช้รามาชานเดรียนฟิลเตอร์ฟังก์ชัน กรณีที่ไม่มีสัญญาณรบกวนจากภาพที่ 7 และภาพที่ 8 แสดงให้เห็นว่าเมื่อจำนวนมุมที่เก็บข้อมูลมีค่าน้อย ภาพเสมือนที่ได้มีลักษณะไม่เรียบ คล้ายกับมี noise-like pattern เกิดขึ้น ทั้งนี้เนื่องจากฟิลเตอร์ฟังก์ชันที่ใช้นั้นมีค่าบวกสูงสุดและ

ค่าลบต่ำสุดแตกต่างกันมากในสเปซโดเมน (ภาพที่ 4a) การใช้จำนวนมุนน้อย ๆ ไม่สามารถชดเชยความคลาดเคลื่อนลักษณะเช่นนี้ได้ ก่อให้เกิดลักษณะของ noise-like pattern ในภาพเสมือน และเมื่อพิจารณาค่าพิกเจอร์ดิสเทนซ์ (ภาพที่ 9) กรณีของ multi-layer top hat นั้นพบว่าเมื่อใดก็ตามที่พยายามจับสัญญาณความถี่สูงมาใช้โดยการเพิ่มจำนวนแถบการเก็บข้อมูลเพื่อให้ใกล้เคียงกับทฤษฎีการสุ่มตัวอย่าง(sampling theorem) และลดปรากฏการณ์กิบส์อันเนื่องมาจากความไม่ต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Bracewell, 1986) จำเป็นต้องเพิ่มจำนวนมุนที่เก็บข้อมูลด้วย มิฉะนั้นจะเกิดลักษณะ noise-like pattern ขึ้นในภาพเสมือน การเลือกใช้ฟิลเตอร์ฟังก์ชันที่ให้ผลต่างระหว่างค่าบวกสูงสุดและค่าลบต่ำสุดน้อยลง เช่น เชพฟ์และโลแกนฟิลเตอร์ฟังก์ชัน (ภาพที่ 4c) จึงเป็นอีกทางเลือกหนึ่งเพื่อลด noise-like pattern ซึ่งจะกล่าวถึงในย่อหน้าถัดไป

เพื่อแสดงให้เห็นผลกระทบจากสัญญาณรบกวนและการเลือกใช้ฟิลเตอร์ฟังก์ชันที่มีต่อผลการสร้างภาพเสมือน ทำการจำลอง Gaussian profile ที่เพิ่มสัญญาณรบกวนเข้าไปในฟังก์ชันภาพฉาย โดยกำหนดให้มีขนาดไม่เกิน 1% ของค่าสูงสุดของข้อมูลภาพฉาย (ภาพที่ 10) เนื่องจากการแปลงฟูเรียร์ของเกาส์เซียนฟังก์ชันยังคงเป็นเกาส์เซียนฟังก์ชัน ดังนั้นองค์ประกอบฟูเรียร์ควรจะลดลงแบบเอกซ์โปเนนเชียลเมื่อเพิ่มความถี่ แต่ในกรณีที่จำลองสัญญาณรบกวนเข้าไปกลายเป็นว่าองค์ประกอบฟูเรียร์ที่ความถี่สูงก่อให้เกิดสัญญาณรบกวนขึ้น ดังนั้นการเพิ่มจำนวนแถบข้อมูลจึงเป็นการทำให้เกิดสัญญาณรบกวนมากขึ้นในขั้นตอนการสร้างภาพเสมือน เป็นผลให้ค่าพิกเจอร์ดิสเทนซ์มีค่าสูงดังแสดงในภาพที่ 11 แต่เมื่อเปลี่ยนมาใช้เชพฟ์และโลแกนฟิลเตอร์ฟังก์ชันปรากฏว่าภาพเสมือนที่ได้มีความถูกต้องมากขึ้น ลดสัญญาณรบกวนได้ดีขึ้น (ภาพที่ 11 และ ภาพที่ 12) ทั้งนี้เพราะว่าเชพฟ์และโลแกนฟิลเตอร์ฟังก์ชันไวต่อสัญญาณความถี่สูงน้อยกว่ารามาชานเดรียนฟิลเตอร์ฟังก์ชัน ดังนั้นในกรณีที่มีสัญญาณรบกวนควรเลือกใช้เชพฟ์และโลแกนฟิลเตอร์ฟังก์ชัน นอกจากนี้ยังทำให้สามารถใช้จำนวนมุนเก็บข้อมูลที่น้อยลงได้

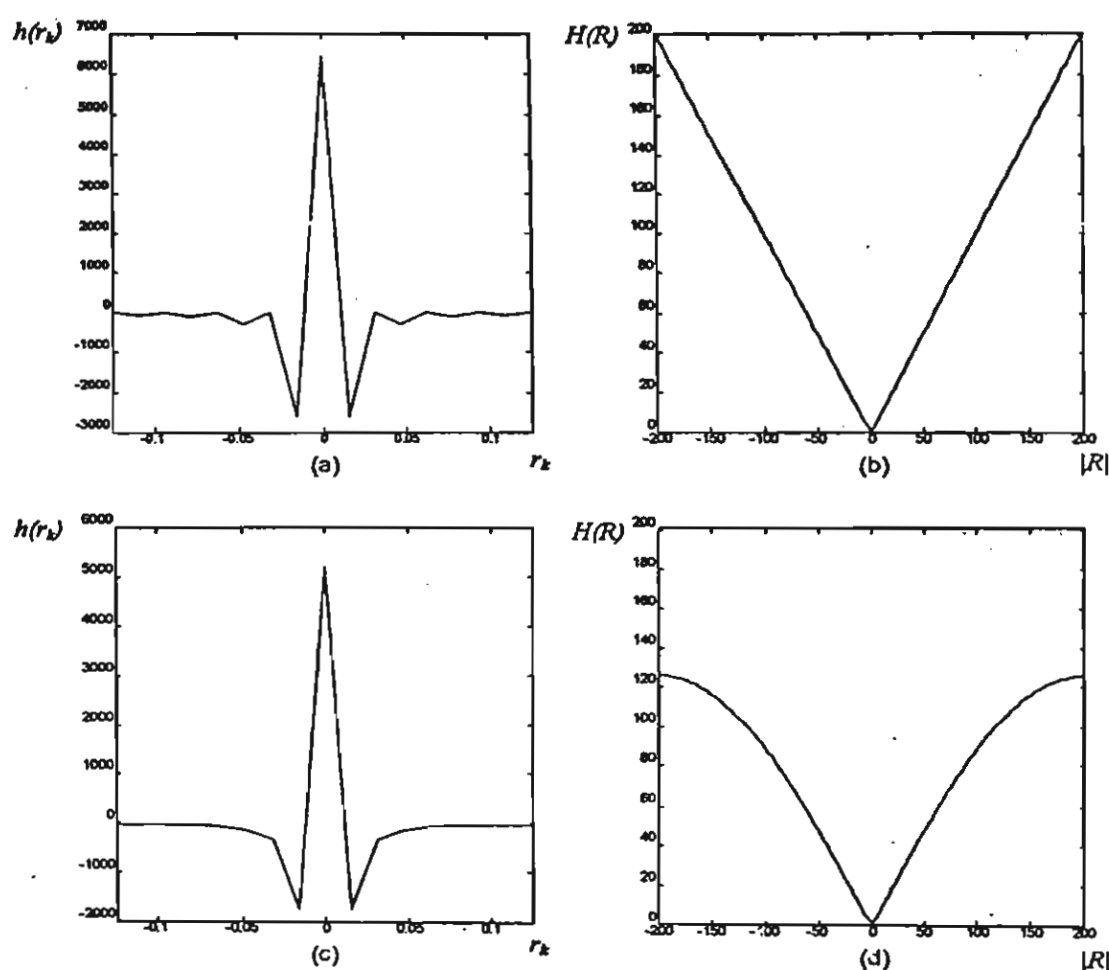
ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการสร้างภาพเสมือนของฟังก์ชันที่มีลักษณะสมมาตร ในภาพที่ 13 เป็นการสร้างภาพเสมือนของรูปร่าง 2 มิติใด ๆ ด้วยวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน (ใช้เชพฟ์และโลแกนฟิลเตอร์ฟังก์ชัน) การเพิ่มจำนวนแถบข้อมูลทำให้ปรากฏการณ์กิบส์เนื่องจากความไม่ต่อเนื่องของฟังก์ชันลดลง ถ้ามีการเพิ่มจำนวนมุนในการเก็บข้อมูลจะช่วยให้ noise-like pattern เกิดขึ้นน้อยมาก และเนื่องจากฟังก์ชันทดสอบไม่มีการใส่สัญญาณรบกวนเข้าไปการใช้รามาชานเดรียนฟิลเตอร์ฟังก์ชันจึงน่าจะให้ผลการสร้างภาพเสมือนที่ดีกว่านี้

ข้อวิจารณ์ผลการสร้างภาพเสมือน

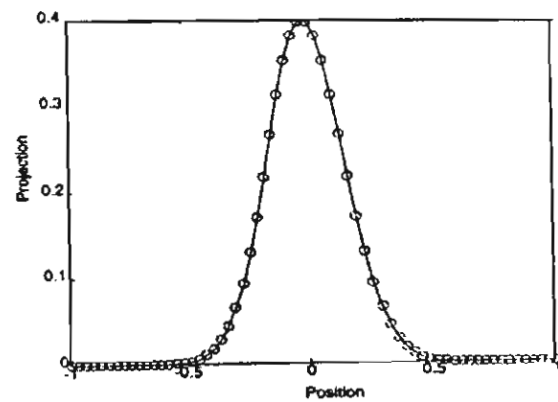
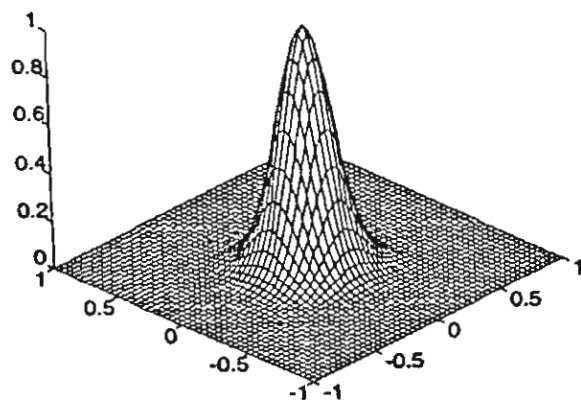
การศึกษาและประเมินผลการสร้างภาพเสมือนของค่าคุณสมบัติเฉลี่ยของเปลวเพลิงจำลองด้วยวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชันพบว่า วิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชันมีข้อจำกัดด้านจำนวนข้อมูลที่ใช้ เนื่องจากจำเป็นต้องใช้จำนวนมุนเพื่อข้อมูลจำนวนมาก ซึ่งอาจเนื่องจากการเลือกใช้

วิธีการคำนวณกลับ วิธีการแปลงทางคณิตศาสตร์ไม่ใช่วิธีที่ดีที่สุดสำหรับเกาส์เซียนฟังก์ชัน จึงควรมีการปรับปรุงขั้นตอนวิธีและฟิลเตอร์ฟังก์ชันที่ใช้ให้ดีกว่าเดิม

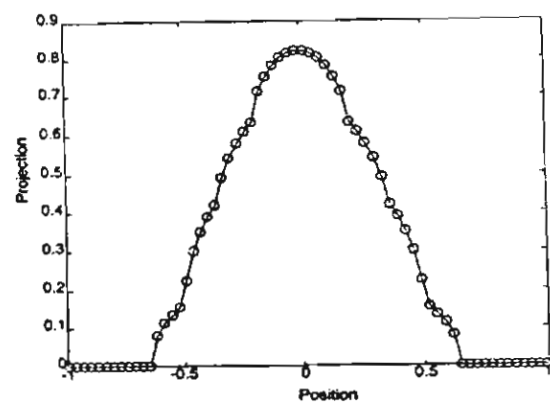
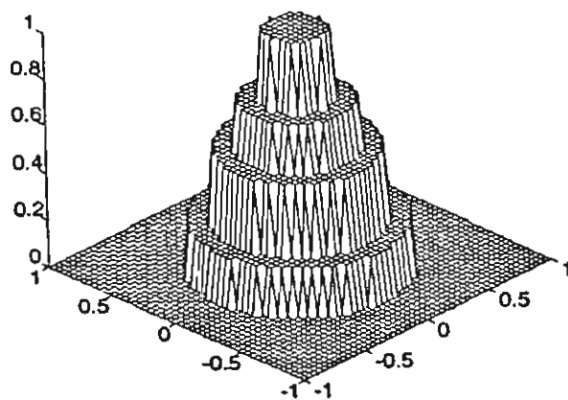
วิธีการอื่น ๆ เช่น pattern recognition และ maximum entropy ซึ่งยังไม่มีนำมาประยุกต์ใช้กับงานด้านการเผาไหม้เป็นแนวทางที่น่าสนใจ และจากงานวิจัยด้านเวฟเลตยังแสดงให้เห็นความคล้ายกันระหว่างปัญหาด้านเวฟเลตและด้านการเผาไหม้อีกด้วย นอกจากนี้เพื่อให้เหมาะสมกับทางปฏิบัติเช่น เตาเผาในโรงงานอุตสาหกรรม ควรปรับปรุงวิธีโทโมกราฟีให้สามารถใช้กับกรณีที่มีข้อจำกัดในด้านจำนวนมุมที่เก็บข้อมูลด้วย



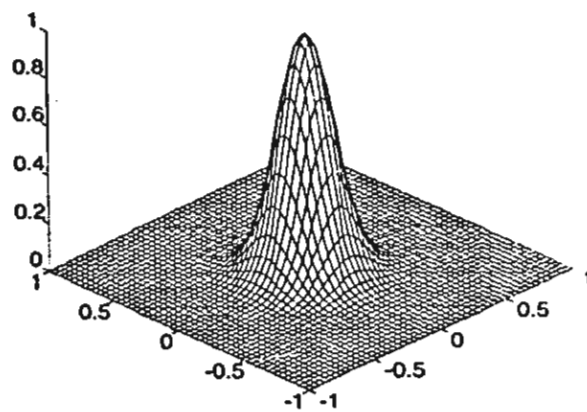
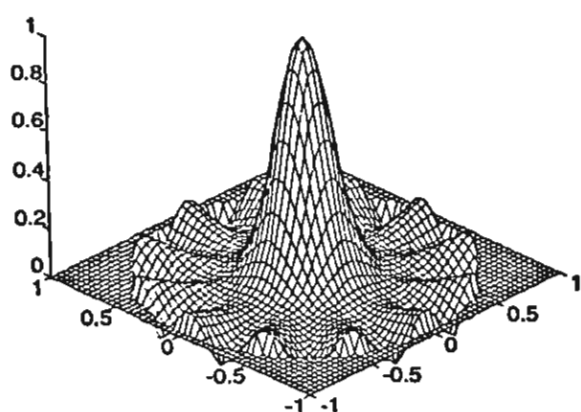
ภาพที่ 4 แสดงฟิลเตอร์ฟังก์ชันรามาชานเดรียน (a) ในสเปซโดเมน (b) ในโดเมนความถี่ แสดงฟิลเตอร์ฟังก์ชันเชพฟ์และโลแกน (c) ในสเปซโดเมน (d) ในโดเมนความถี่



ภาพที่ 5 ฟังก์ชันจริงและภาพฉายของ Gaussian



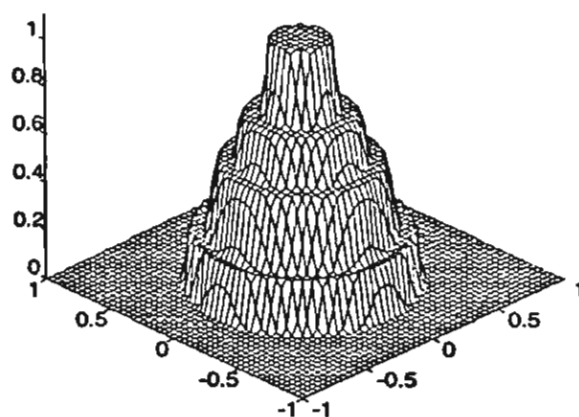
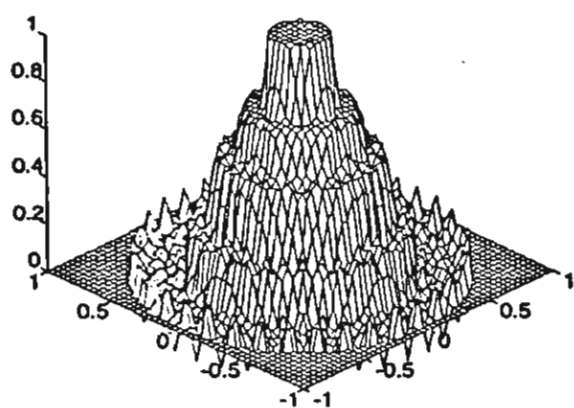
ภาพที่ 6 ฟังก์ชันจริงและภาพฉายของ multi-layer top hat



ภาพที่ 7 ภาพเสมือน Gaussian profile จากวิธี FBP ด้วยจำนวนมุมการเก็บข้อมูลต่างกัน

(a) 64 แดบ, 6 มม

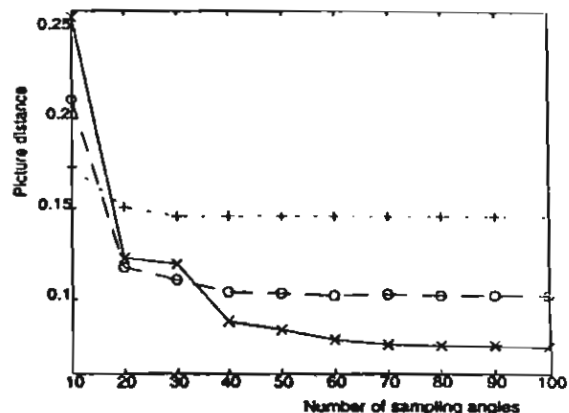
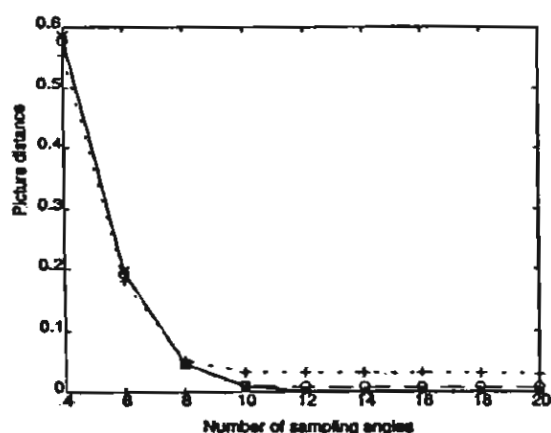
(b) 64 แดบ, 18 มม



ภาพที่ 8 ภาพเสมือน multi-layer top hat profile จากวิธี FBP ด้วยจำนวนมุมการเก็บข้อมูลต่างกัน

(a) 64 แดบ, 18 มม

(b) 64 แดบ, 180 มม

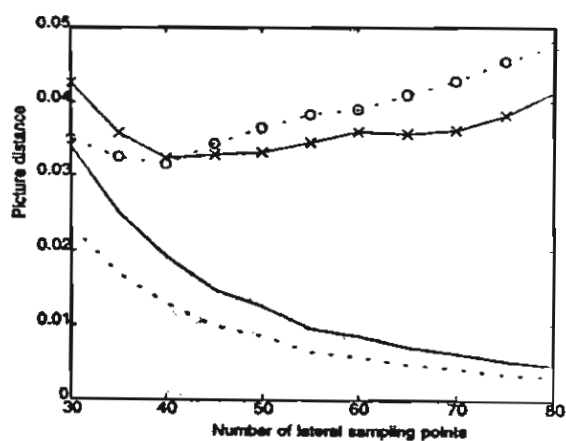
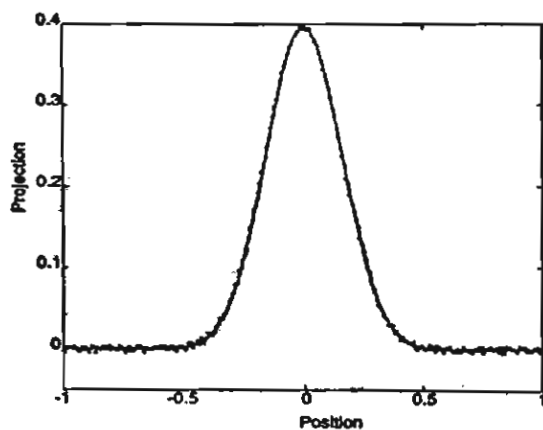


ภาพที่ 9 เปรียบเทียบค่าพิกเจอร์ดิสแทนซ์ของภาพเสมือนที่สร้างด้วยจำนวนมุมต่าง ๆ กัน

(a) Gaussian profile

(b) multi-layer top hat profile

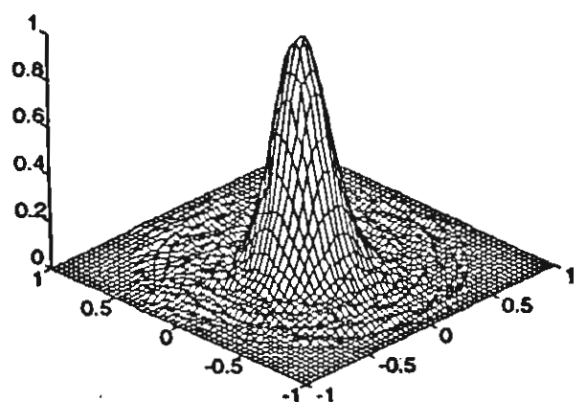
---+--- 32 แอบ
---O--- 64 แอบ
---X--- 128 แอบ



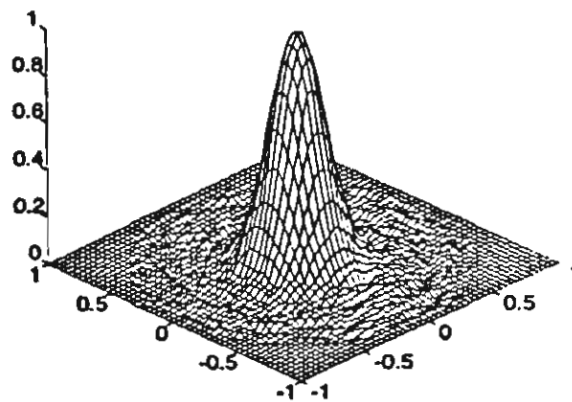
ภาพที่ 10 ภาพฉายของ Gaussian profile ที่มีสัญญาณรบกวน 1%

ภาพที่ 11 ผลกระทบของสัญญาณรบกวนและชนิดของฟิลเตอร์ฟังก์ชันที่มีต่อพิกเจอร์ดิสแทนซ์เมื่อจำนวนมุมเท่ากัน (90 มุม)

----- RMCD เมื่อไม่มีสัญญาณรบกวน
---O--- RMCD เมื่อมีสัญญาณรบกวน
---X--- SL เมื่อมีสัญญาณรบกวน
———— SL เมื่อไม่มีสัญญาณรบกวน



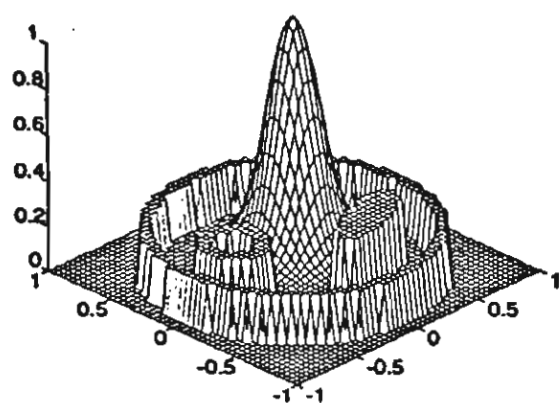
(a)



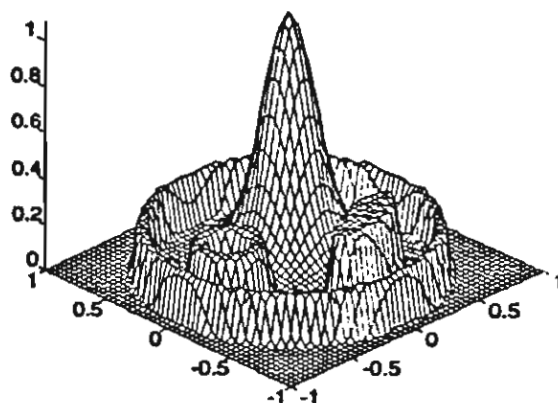
(b)

ภาพที่ 12 ภาพเหมือน Gaussian profile ที่มีสัญญาณรบกวน เมื่อใช้ฟิลเตอร์ฟังก์ชันต่างกัน

(a) รามาชานเดรียน (64 มุม, 90 แดบ) (b) เชฟฟ์และโลแกน (64 แดบ, 90 มุม)



(a)



(b)

ภาพที่ 13 Off-center Gaussian profile ที่มีวัตถุกีดขวาง

(a) ฟังก์ชันจริง

(b) ภาพเหมือนเมื่อใช้เชฟฟ์และโลแกน (64 แดบ, 90 มุม)

บทที่ 3

การสร้าง Local-PDF ด้วยวิธีโทโมกราฟฟี

การวัดความแปรปรวนของค่าการส่งผ่าน

ค่าการส่งผ่านวิถี S (Transmittance of path S), τ_S , ของก๊าซของค์ประกอบในเปลวเพลิง สามารถเขียนเป็นตัวแปรสโตแคสติก (Stochastic variable) แบบไม่ต่อเนื่อง $\tau_{S,k}$ (Sivathanu, 1993) หมายถึงโอกาสที่จะพบก๊าซของค์ประกอบที่มีค่าการส่งผ่าน $\tau_{S,k}$ อยู่ในช่วง $\tau_{S,k} - (\Delta\tau_{S,k}/2)$ และ $\tau_{S,k} + (\Delta\tau_{S,k}/2)$ มีค่าความน่าจะเป็น P_k เนื่องจากค่าการส่งผ่านมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ดังนั้น $\tau_{S,1} = 0$, $\tau_{S,k} = k\Delta\tau_S$, $\tau_{S,K} = 1$ และ $\sum P_k (k=1\dots K)$ มีค่าเป็น 1 นิยามของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete probability density function), $PDF(\tau_{S,k})$ โดย

$$P_k \equiv PDF(\tau_{S,k})\Delta\tau_S \quad (3.1)$$

ดังนั้นค่าโมเมนต์อันดับที่ n สามารถคำนวณจากนิยามของโมเมนต์ (Tennekes, 1992)

$$M_{S,n} = \int \tau_S^n PDF(\tau_S) d\tau_S \cong \sum_{k=1}^K \tau_{S,k}^n P_k \quad (3.2)$$

เมื่อ $M_{S,n}$ คือค่าโมเมนต์อันดับที่ n และ $PDF(\tau_S)$ คือค่าฟังก์ชันความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่องของ τ_S

หากแบ่งพิจารณาค่าการส่งผ่านวิถี S ออกเป็นค่าการส่งผ่านไม่เท่ากัน 2 ค่าคือ τ_{S1} และ τ_{S2} มีวิถี $S1$ และ $S2$ ตามลำดับ ค่าการส่งผ่านรวมคือ

$$\tau_S = \tau_{S1}\tau_{S2} \quad (3.3)$$

ตั้งสมมุติฐานให้การกระจายตัวของ τ_{S1} และ τ_{S2} มีความเป็นอิสระต่อกัน (Statistically independent) ดังนั้นตัวแปร τ_S , τ_{S1} และ τ_{S2} สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของโมเมนต์ได้เป็น

$$M_{S,n} = M_{S1,n} M_{S2,n} \quad (3.4)$$

ค่าโมเมนต์ทางขวามือของสมการ (3.4) อิงอยู่บนวิธี $S1$ และ $S2$ ตามลำดับ อาศัยผลของสมการ (3.4) โมเมนต์วิธีรวม, $M_{S,n}$, สามารถเขียนให้อยู่ในเทอมของโมเมนต์วิธีหนึ่งหน่วย, $m_{1,n}$ และ $m_{2,n}$, ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} M_{S,n} &= (m_{1,n})^{S1} (m_{2,n})^{S2} \\ \text{หรือ} \quad -\ln M_{S,n} &= S1(-\ln m_{1,n}) + S2(-\ln m_{2,n}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

เนื่องจากค่าโมเมนต์, $m_{1,n}$ และ $m_{2,n}$, เป็นคุณสมบัติภายใน (Intensive property) จึงสามารถเขียนเป็นฟังก์ชัน $m_n(r,s)$ ในระบบพิกัด (r,s) และเรียก $m_n(r,s)$ ว่าโลคัลโมเมนต์ พิจารณาภาพที่ 3 สามารถเขียนสมการ (3.5) เสียใหม่เป็น

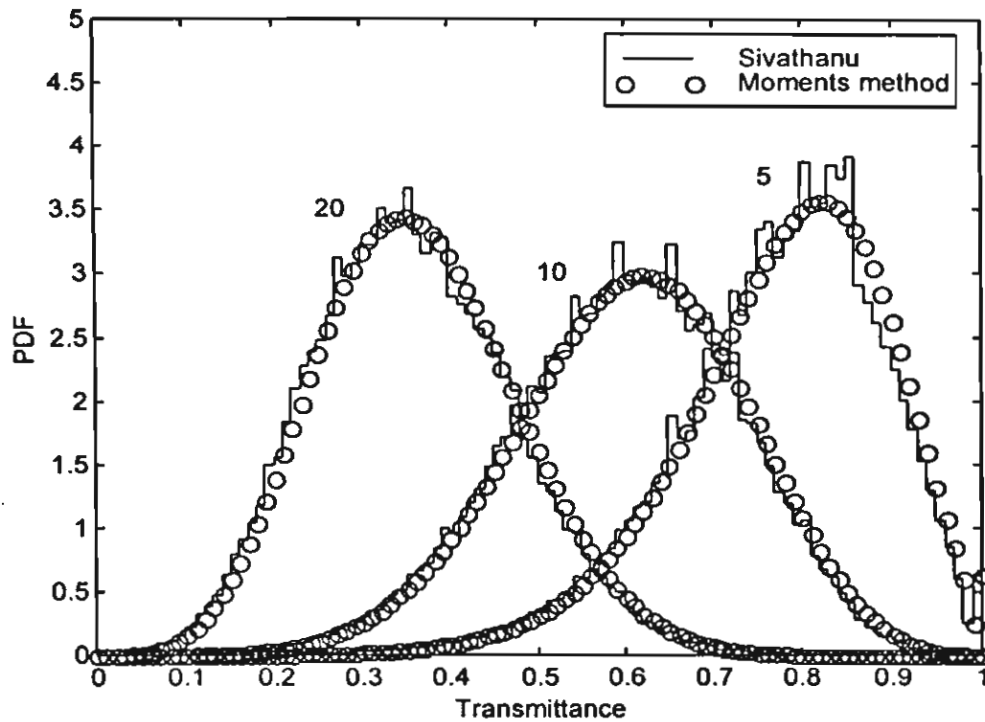
$$p_\theta(r) = -\ln M_{\theta,n}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} -\ln m_n(r,s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(r,s) ds \quad (3.6)$$

สมการ (3.6) เป็นสมการอินทิเกรตแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง โมเมนต์วิธีรวมและโลคัลโมเมนต์ วิธีการแก้สมการ (3.6) เพื่อหาโลคัลโมเมนต์จากโมเมนต์วิธีรวมที่กำหนดให้ แสดงไว้ในหัวข้อถัดไป

ความถูกต้องของความสัมพันธ์โลคัลโมเมนต์ – โมเมนต์วิธีรวม

โมเมนต์วิธีรวมที่คำนวณจากโลคัลโมเมนต์ด้วยสมการ (3.5) แสดงเปรียบเทียบกับค่าโมเมนต์วิธีรวมที่คำนวณด้วยวิธีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete probability density function, DPF) (Sivathanu, 1993) โดยนำโลคัลโมเมนต์มาซ้อนกัน 5, 10 และ 20 ชั้น จะได้ค่าโมเมนต์วิธีรวมที่สอดคล้องกันดังแสดงในภาพที่ 14

ผลสรุปจากภาพที่ 14 เป็นการยืนยันความถูกต้องของสมการ (3.5) ซึ่งเป็นสมการพื้นฐานที่สำคัญของโทโมกราฟฟีแบบต่อเนื่อง



ภาพที่ 14 แสดงค่าโมเมนต์วิธีรวมที่คำนวณจากสมการ (3.5) เปรียบเทียบกับวิธี DPF

ปัญหาโมเมนต์

เมื่อสามารถหาค่าโลคัลโมเมนต์, $m_n(x_0, y_0)$, จากการสร้างภาพเสมือนด้วยวิธีโทโมกราฟฟีแล้ว ต่อไปต้องคำนวณเป็น PDF โดยสมการที่ (3.2) ซึ่งเป็นปัญหาโมเมนต์คือกำหนดค่าโมเมนต์ให้คำนวณหา PDF เขียนสมการ (3.2) ในรูปเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} \tau_1^0 & \tau_2^0 & \cdots & \tau_K^0 \\ \tau_1^1 & \tau_2^1 & \cdots & \tau_K^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tau_1^{I-1} & \tau_2^{I-1} & \cdots & \tau_K^{I-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{I-1} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

โดยที่ค่าการส่งผ่าน $\tau_1 = 0$ และ $\tau_K = 1$ และค่า $PDF_k = P_k / (\Delta\tau)$ ในงานวิจัยนี้กำหนดให้ $\Delta\tau = 0.01$ เมทริกซ์ทางซ้ายของสมการ (3.7) คือเมทริกซ์ของค่าการส่งผ่าน P_k และ m_i คือค่าความน่าจะเป็น และค่าโลคัลโมเมนต์ ตามลำดับ

ในการแก้สมการโมเมนต์ (3.7) เพื่อหาค่า P_k ใช้วิธีการแยกค่าเอกฐาน (Singular value decomposition, SVD) (William, 1996) โดยกำหนดให้ปัญหานี้เป็นปัญหาที่มีสมการมากกว่า

ตัวแปรไม่ทราบค่า (Overdetermined problem) โดยที่ $I > K$ ผลเฉลย P_k ที่ได้จึงเป็นผลเฉลยแบบกำลังน้อยสุด (Least square solution)

เขียนสมการ (3.7) ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายเป็น

$$AP = m \quad (3.8)$$

เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ค่าการส่งผ่าน มีขนาด $I \times K$, P เป็นเวกเตอร์ค่าความน่าจะเป็น และ m คือเวกเตอร์โลคัลโมเมนต์ หลักการของวิธี SVD (Forsythe, 1977 ; Wilkinson, 1978) คือแยก A ออกเป็น

$$A = U\Sigma V^T \quad (3.9)$$

โดยที่ U เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก (Orthogonal matrix) มีขนาด $I \times I$ และ Σ เป็นเมทริกซ์ที่มีค่าเฉพาะในแนวเส้นทแยงมุม (Diagonal matrix) มีขนาด $I \times K$, V เป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉากขนาด $K \times K$ ด้วยวิธีนี้สามารถคำนวณหาเมทริกซ์ P ในสมการ (3.8) ได้โดย

$$P = V\Sigma^{-1}U^T m \quad (3.10)$$

ดังนั้นค่าความน่าจะเป็น P_k (ซึ่งแปลงเป็น Local-PDF ด้วยความสัมพันธ์ $PDF_k = P_k / (\Delta \tau)$) สามารถหาได้จากโมเมนต์ m และค่าการส่งผ่าน τ

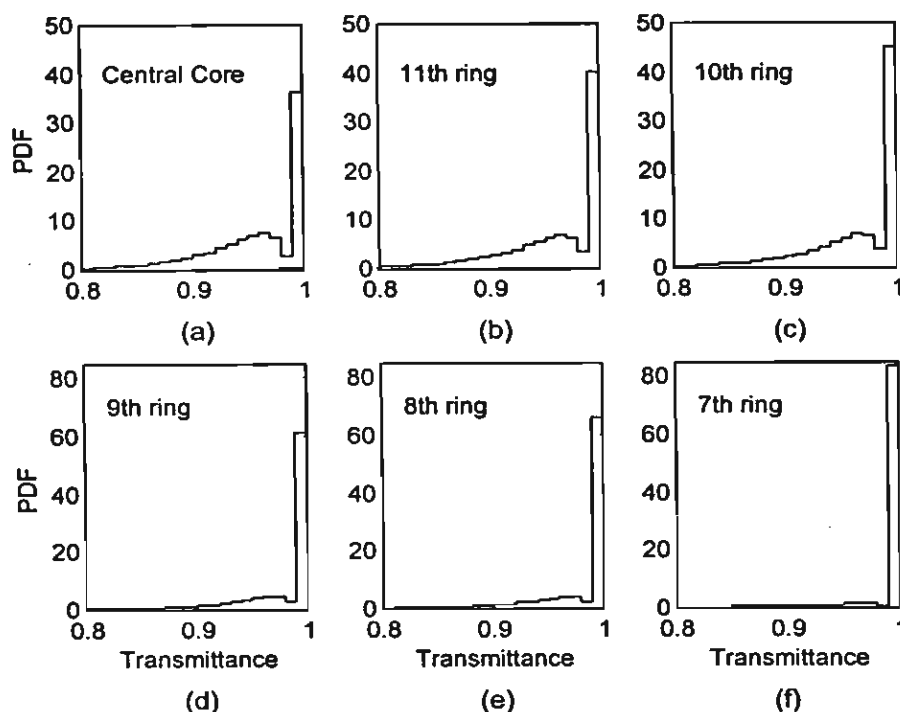
การสร้าง Local-PDF ด้วยวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน

การสร้างภาพเสมือนของ Local-PDF ในเพลวเพลิงเทอร์บิวเลนซ์ จากข้อมูล Path-PDF แบ่งได้เป็น 4 ขั้นตอนดังนี้

1. ทำการวัดค่า Path-PDF
2. คำนวณข้อมูล Path-PDF ให้เป็นข้อมูลโมเมนต์วิถีสรวมด้วยสมการ (3.2)
3. ใช้ข้อมูลโมเมนต์วิถีสรวมนี้สร้างภาพเสมือนของค่าโลคัลโมเมนต์ของเพลวเพลิงด้วยวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชัน
4. แปลงค่าโลคัลโมเมนต์เป็นค่า Local-PDF โดยการแก้ปัญหามอเมนต์ด้วยวิธี SVD

ผลการสร้าง Local-PDF ของเปลว Propylene

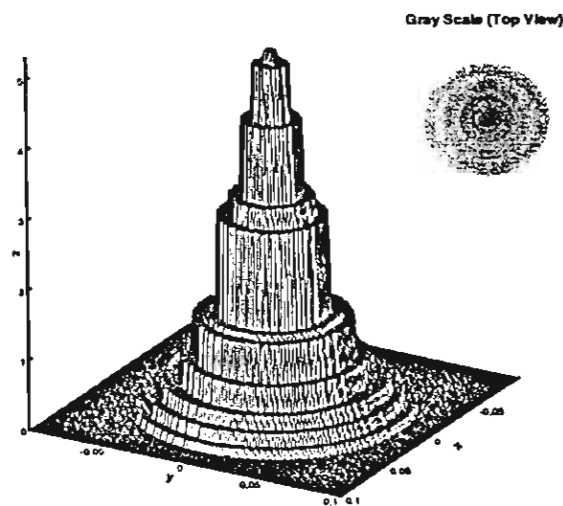
เปลวที่ใช้ทำการทดสอบ เป็นเปลวเพลิงนอนทรีมิกซ์ (Non-premixed flame) โพรไพลีน/อากาศ (Propylene/air flame) ซึ่งสมมุติให้พื้นที่หน้าตัดของเปลวทดสอบเป็นวงกลมรัศมี 0.0805 เมตร แบ่งออกเป็นวงแหวน 11 วง และรวมกับจุดศูนย์กลางเปลว โดยในแต่ละวงมีการวัด Local-PDF ของค่าการส่งผ่านจากการทดลองจริง ซึ่งใช้โพรบวัดแสง (Optical probe) ที่มีระยะห่างระหว่างหัวโพรบ 0.007 เมตร (Sivathanu, 1993) ดังนั้นในพื้นที่หน้าตัดของเปลวทดสอบจะมี Local-PDF ทั้งหมด 12 ฟังก์ชันที่แตกต่างกันเรียงเป็นวงในลักษณะสมมาตร



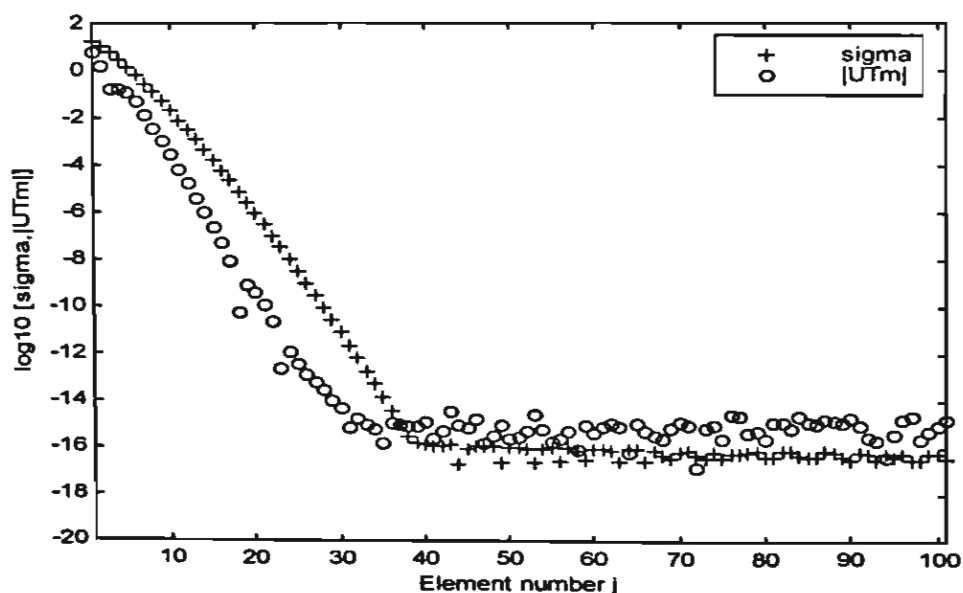
ภาพที่ 15 แสดงค่า Local-PDF ของเปลวทดสอบจากการวัด (Sivathanu, 1993)

ภาพที่ 15a แสดง Local-PDF จากการวัดที่ตำแหน่งศูนย์กลางเปลว ภาพที่ 15b เป็น Local-PDF ที่วงแหวนวงที่ 11 ซึ่งอยู่ถัดออกมาจากศูนย์กลางเปลว และภาพที่ 15c เป็นค่าที่วงแหวนวงถัดออกมาเรื่อย ๆ ภาพ 3 มิติของค่าโลคัลโมเมนต์ลำดับที่ 1 ของเปลวสมมาตรจำลอง แสดงในภาพที่ 16 โดยด้านขวาบนของรูปเป็นมุมมองด้านบนของรูป 3 มิติ แสดงความแตกต่างของค่าโมเมนต์ด้วยความเข้มสีเทาที่ต่างกัน บริเวณที่มีสีเข้มแสดงถึงค่าโมเมนต์หรือค่าเฉลี่ยของค่าการส่งผ่านต่ำ ซึ่งหมายถึงบริเวณนั้นมีความทึบแสงมากนั่นเอง นำข้อมูลที่วัดนี้ไปจำลองเป็นข้อมูลภาพฉาย แล้วใช้วิธี FBP ในการคำนวณกลับเพื่อหาค่าโลคัลโมเมนต์, $m(x,y)$. ในงานวิจัยนี้ได้เลือกจุด $x=0$ และ $y=0$ ในการแสดงผล ได้คำนวณโมเมนต์ทั้งหมด 300 ลำดับ ($m_n, n=0$ ถึง 299) เพื่อใช้เป็นข้อมูลเพื่อสร้าง PDF แบบไม่ต่อเนื่อง 100 ค่า (PDF,

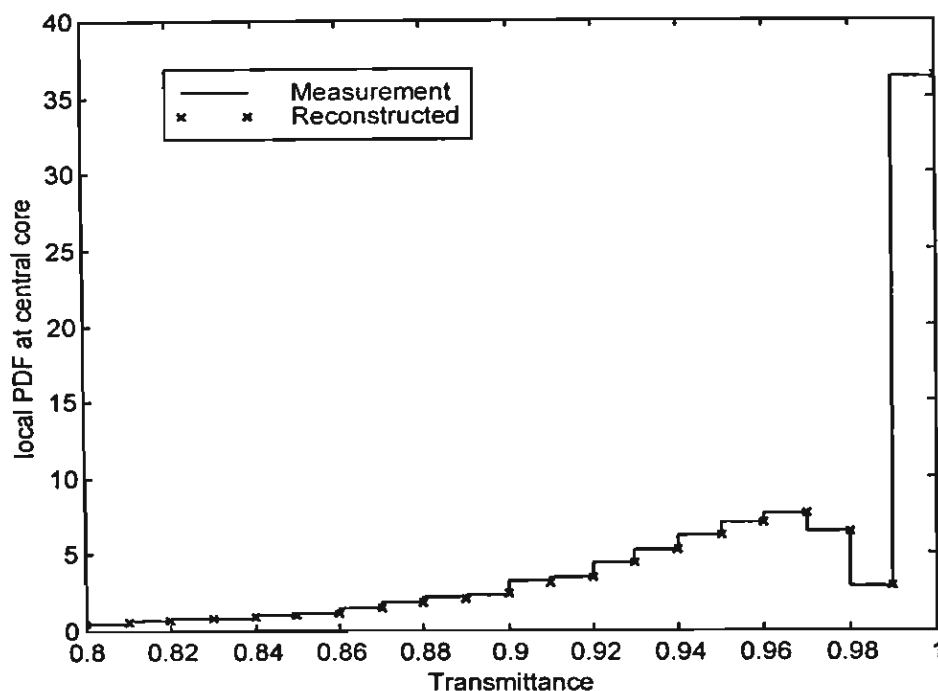
, $i = 1$ ถึง 100) ภาพที่ 17 แสดงค่า $\log_{10} \Sigma$ และ $\log_{10} |U^T m|$ สำหรับแก้ปัญหาโมเมนต์ด้วยวิธี SVD จะเห็นว่าค่าเอกฐานที่นำมาคำนวณได้มีไม่ถึง 40 ค่าเท่านั้น เนื่องจากเครื่องคำนวณสามารถบันทึกความละเอียดจุดทศนิยมได้เพียง 10^{-15} ถึง 10^{-16} (ที่ความละเอียดจุดทศนิยมแบบสองเท่า) ค่าที่น้อยกว่านี้จึงเป็นค่าที่ไม่สามารถเชื่อถือได้ ซึ่งเป็นสาเหตุหนึ่งของความผิดพลาดของผลเฉลยในการแก้ปัญหาโมเมนต์ ผลการคำนวณ Local-PDF ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลวจากภาพเหมือนของเปลวสมมาตรจำลอง เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากข้อมูลการวัดที่จุดศูนย์กลางเปลว (ภาพที่ 15a) แสดงในภาพที่ 18 ซึ่งมีความผิดพลาดเฉลี่ยประมาณ 0.1% เท่านั้น



ภาพที่ 16 ค่าโลคัลโมเมนต์ลำดับที่ 1 ของเปลวจำลองแบบสมมาตร



ภาพที่ 17 ค่า $\log_{10} \Sigma$ และ $\log_{10} |U^T m|$ สำหรับแก้ปัญหาโมเมนต์ด้วยวิธี SVD
ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลวของเปลวจำลองแบบสมมาตร

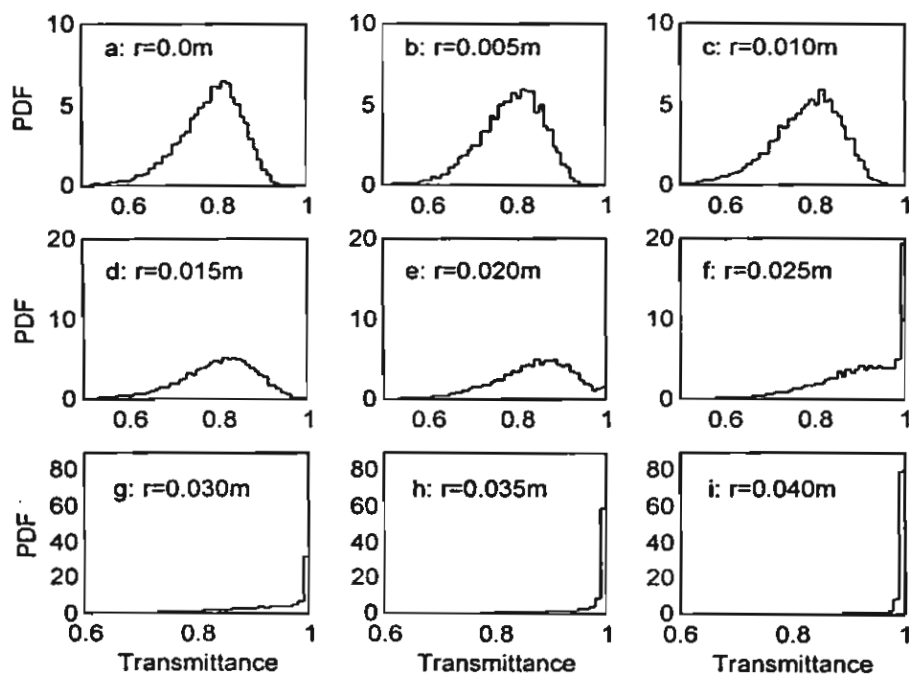


รูปที่ 18 เปรียบเทียบผลการสร้างภาพเสมือน Local-PDF กับค่าที่ได้จากการวัด ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลวของเปลวจำลองแบบสมมาตร

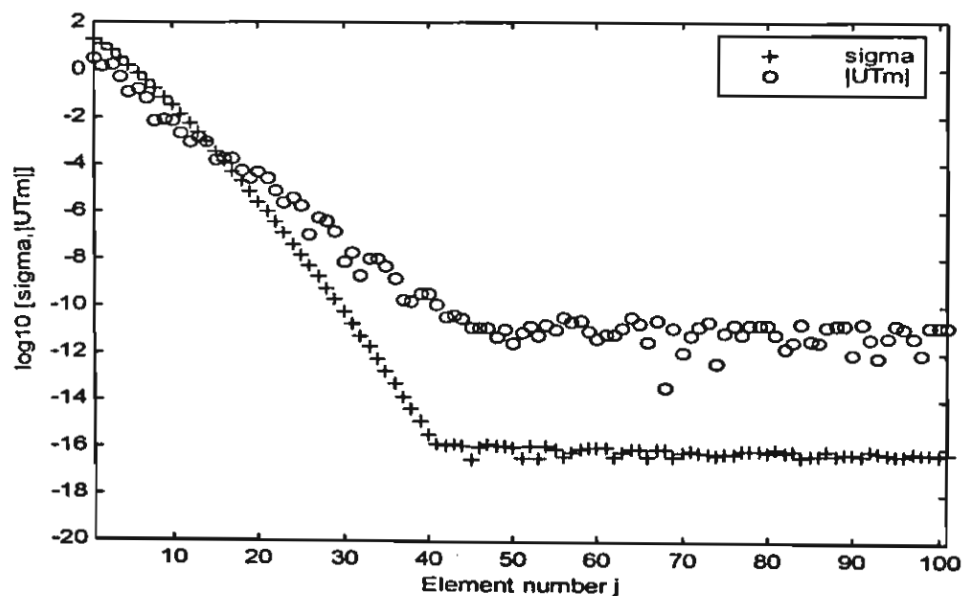
ผลการสร้างภาพเสมือนจากข้อมูลวิถีรวมจริง

ข้อมูลวิถีรวมจริงที่ใช้ในการสร้างภาพเสมือน วัดจากเปลวเพลิงเอทิลีน/อากาศ (Ethylene/air flame) (Sivathanu, 1993) โดยเราสมมุติว่าเปลวที่ทำการวัดมีลักษณะเป็นวงกลมสมมาตรรัศมี 0.0475 เมตร ทำการวัดข้อมูลวิถีรวมจำนวน 19 จุดต่อการฉาย 1 มุม แต่ละจุดห่างกัน 0.005 เมตร ดังนั้นข้อมูลวิถีรวมจากการฉาย 1 มุมจะมีค่าที่แตกต่างกันทั้งหมด 10 ค่า (ข้างซ้ายและขวาข้างละ 9 จุดรวมกับเส้นที่วัดผ่านศูนย์กลางเปลวอีก 1 เส้น) ค่า Path-PDF ที่วัดได้ที่รัศมีต่าง ๆ ของเปลว แสดงดังภาพที่ 19

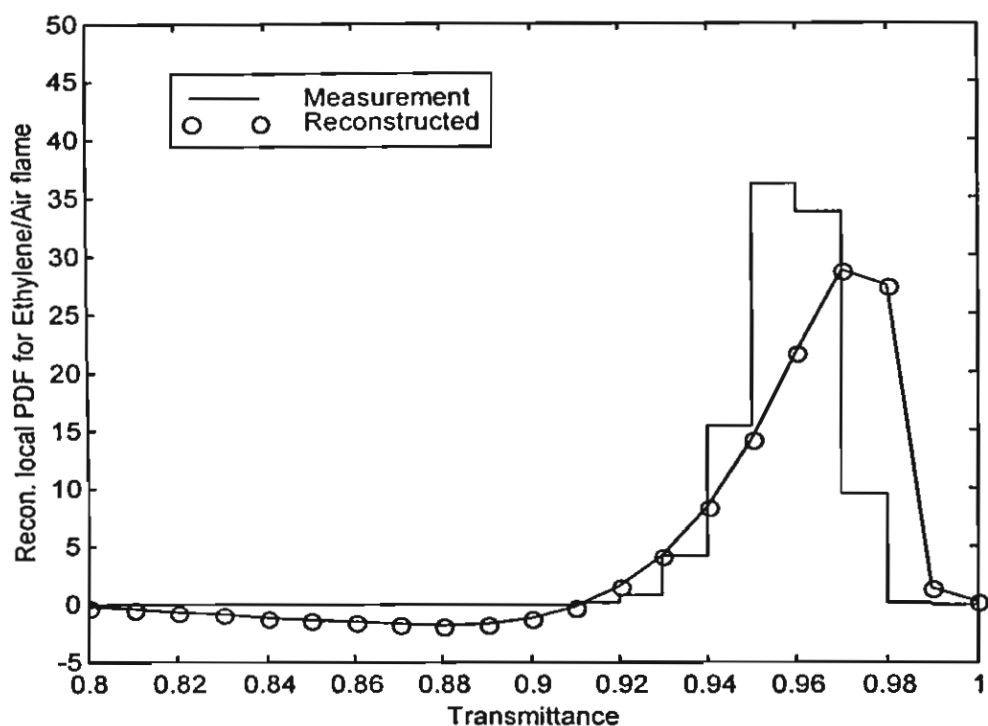
เลือกคำนวณเฉพาะ Local-PDF ที่จุดศูนย์กลางเปลว จากภาพที่ 20 จะเห็นว่ามีค่าโมเมนต์และค่าเอกฐานที่สอดคล้องกันเพียง 8 ค่าเท่านั้น ซึ่งเป็นสาเหตุสำคัญที่ทำให้ผลเฉลยเกิดความผิดพลาด การเปรียบเทียบค่า PDF ที่ได้จากการวัดด้วยโพรบและที่ได้จากการคำนวณกลับด้วยวิธีโมเมนต์ แสดงดังภาพที่ 21



ภาพที่ 19 แสดง Path-PDF จากการวัดของเปลวเพลิงเอททิลีน/อากาศ (Sivathanu, 1993)



ภาพที่ 20 ค่า $\log_{10} \Sigma$ และ $\log_{10} |U^T m|$ สำหรับแก้ปัญหามอเมนต์ด้วยวิธี SVD
ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลวของเปลวเพลิงเอททิลีน/อากาศ



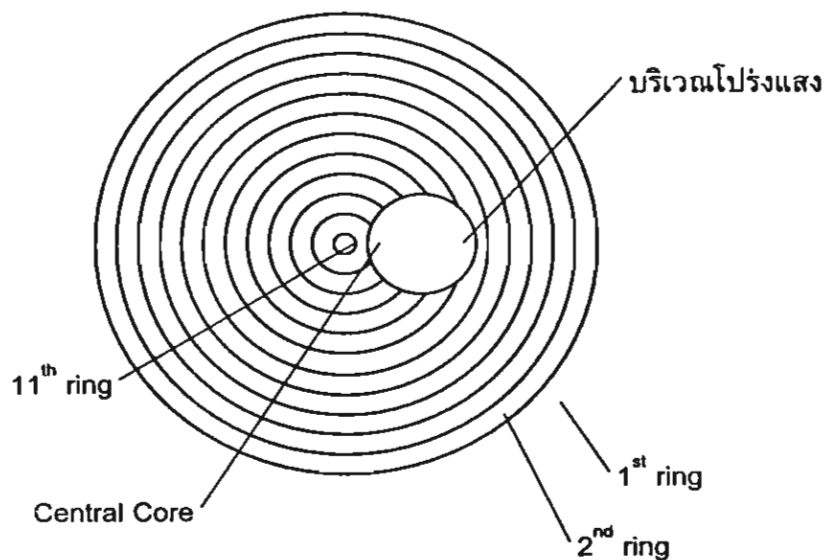
ภาพที่ 21 เปรียบเทียบผลการสร้างภาพเสมือน Local-PDF กับค่าที่ได้จากการวัด ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลวของเปลวเอทิลีน/อากาศ

ผลการสร้าง Local-PDF ของฟังก์ชันทดสอบแบบไม่สมมาตร

ในการจำลองฟังก์ชันทดสอบเปลวเพลิงโพรไพส/อากาศ (ดูภาพที่ 15) ให้เป็นแบบไม่สมมาตร (Meekunnasombat, 1998) ทำได้โดยกำหนดให้ความน่าจะเป็นของฟังก์ชันมีค่าการส่งผ่านเป็น 1 (ไม่มีการดูดกลืน) อยู่ภายในบริเวณวงกลมรัศมี 0.0175 เมตร ที่มีตำแหน่งศูนย์กลางอยู่ที่คู่ลำดับ (0.0245,0) ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของพื้นที่โปร่งแสงที่เพิ่มเข้าไปคือ

$$P(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } \tau = 1 \\ 0 & \text{เมื่อเป็นค่าอื่น} \end{cases} \quad (3.1)$$

ภาพที่ 22 แสดงภาพมุมมองด้านบนของเปลวจำลอง ภาพ 3 มิติของค่าโลคัลโมเมนต์ลำดับที่ 1, $-\ln m_1(x, y)$, ของฟังก์ชันทดสอบแสดงดังภาพที่ 23 และมุมมองบนแสดงระดับความทึบแสงของเปลวจำลอง



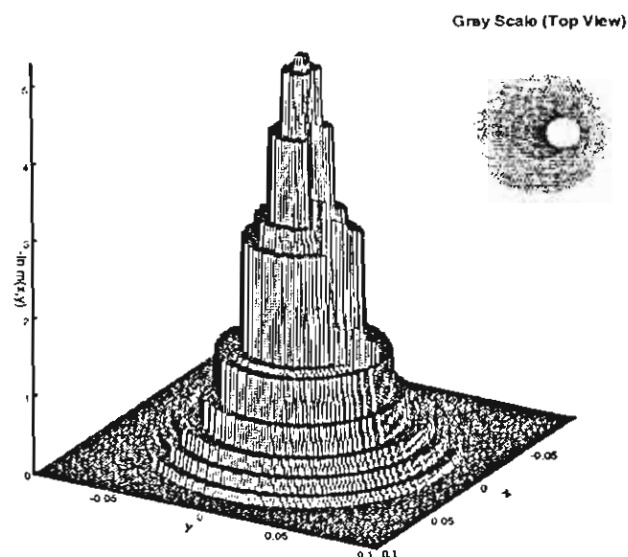
ภาพที่ 22 แสดงภาพมุมมองด้านบนและส่วนประกอบของเปลวจำลองแบบไม่สมมาตร

ฟังก์ชันภาพฉายของโมเมนต์ลำดับที่ 1, $-\ln M_{\theta,1}(r)$, ของเปลวจำลอง หาได้จากการอินทิเกรตฟังก์ชันทดสอบตามแนววิถี ดังวิธีที่แนะนำโดยคัลค์ (Kak) (Rosenfeld, 1982) ในการศึกษาครั้งนี้เราสร้างภาพเสมือนของโมเมนต์ จากข้อมูลโมเมนต์วิถีรวมที่คำนวณได้จากทั้งหมด 180 มุม และในแต่ละมุมเก็บข้อมูลจำนวน 128 จุด ดังนั้นเราจะมีฟังก์ชันภาพฉายของเปลวจำลองทั้งหมด 180 ฟังก์ชันที่แตกต่างกัน และมีข้อมูลทั้งหมด $180 \times 128 = 23,040$ จุด

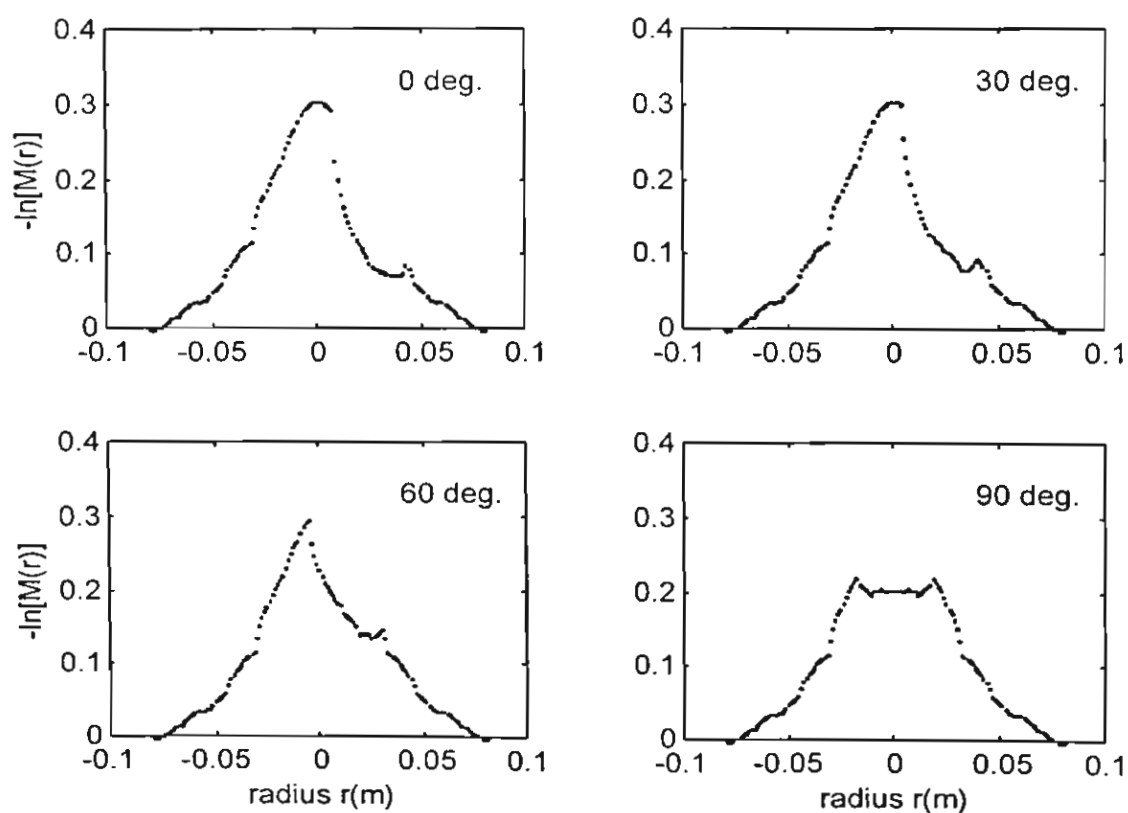
ฟังก์ชันภาพฉายของเปลวจำลองที่คำนวณได้จากมุม 0 องศา, 30 องศา, 60 องศา และ 90 องศา แสดงไว้ดังภาพที่ 24 ลักษณะของฟังก์ชันภาพฉายของฟังก์ชันทดสอบที่คำนวณได้ในแต่ละมุมจะไม่เหมือนกัน เนื่องจากฟังก์ชันทดสอบเป็นฟังก์ชันที่ไม่สมมาตร ข้อมูลโมเมนต์วิถีรวมที่คำนวณได้จากทั้ง 180 มุม ถูกใช้ในการสร้างภาพเสมือนของโมเมนต์ของเปลวจำลอง ด้วยวิธี FBP ภาพที่ 25 แสดงภาพเสมือน 3 มิติของโมเมนต์ลำดับที่ 1 ของเปลวจำลอง โดยที่มุมขวามือของรูปเป็นภาพมุมมองด้านบนของภาพเสมือน แสดงความแตกต่างของค่าการส่งผ่านเฉลี่ยด้วยความเข้มที่ต่างกัน สังเกตที่บริเวณรอบนอกของภาพเสมือนจะเกิดความผิดพลาดในรูปแบบคล้ายสัญญาณรบกวน (Noise-like pattern error) และเกิดปรากฏการณ์กิบส์ (Gibbs phenomenon) ณ บริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าอย่างกะทันหัน (Sharp variation) (Meekunnasombat, 1997)

สำหรับการคำนวณหา Local-PDF ในทุกตำแหน่งของเปลวจำลอง เราจำเป็นต้องหาค่าลำดับของค่าโลคัลโมเมนต์ให้มีจำนวนมากกว่าจำนวนค่า PDF ของค่าการส่งผ่าน (ในที่นี้กำหนดให้เป็น 100 จุดในช่วงค่าการส่งผ่านเป็น 0 ถึง 1) เพื่อแก้ปัญหาโมเมนต์ดังสมการ (3.7) ด้วยวิธี SVD ในการศึกษาครั้งนี้ได้คำนวณโมเมนต์ทั้งหมด 300 ลำดับ จากข้อมูลโมเมนต์วิถี

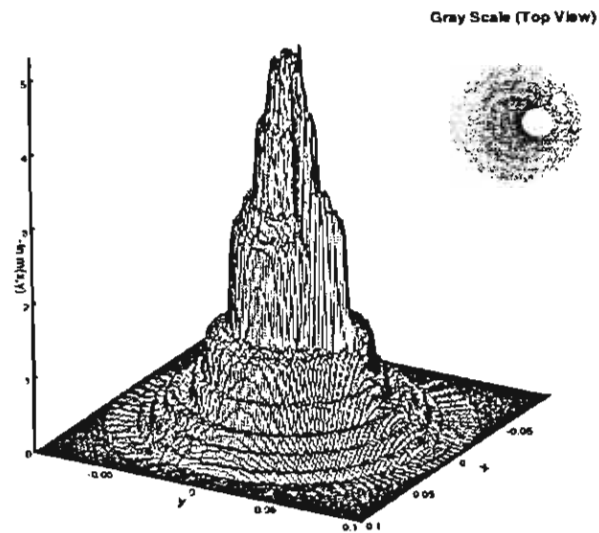
รวมตั้งแต่ลำดับที่ 1 ถึง 300 ค่าโมเมนต์และค่าเอกฐาน 100 ค่าแรก ที่ใช้คำนวณในขั้นตอน SVD แสดงในภาพที่ 26 จะเห็นได้ว่ามีลักษณะความสอดคล้องกันของข้อมูลเช่นเดียวกับภาพเสมือนจากเปลวจำลองแบบสมมาตร



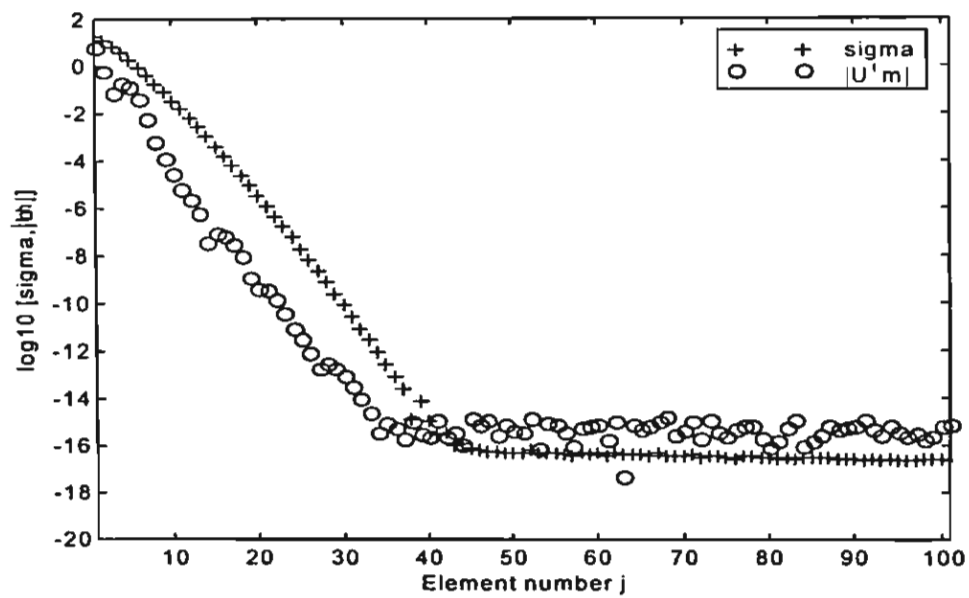
รูปที่ 23 ค่าโลคัลโมเมนต์ลำดับที่ 1 ของเปลวจำลองแบบไม่สมมาตร



ภาพที่ 24 ฟังก์ชันภาพฉายของเปลวจำลองแบบไม่สมมาตรที่มุมต่าง ๆ

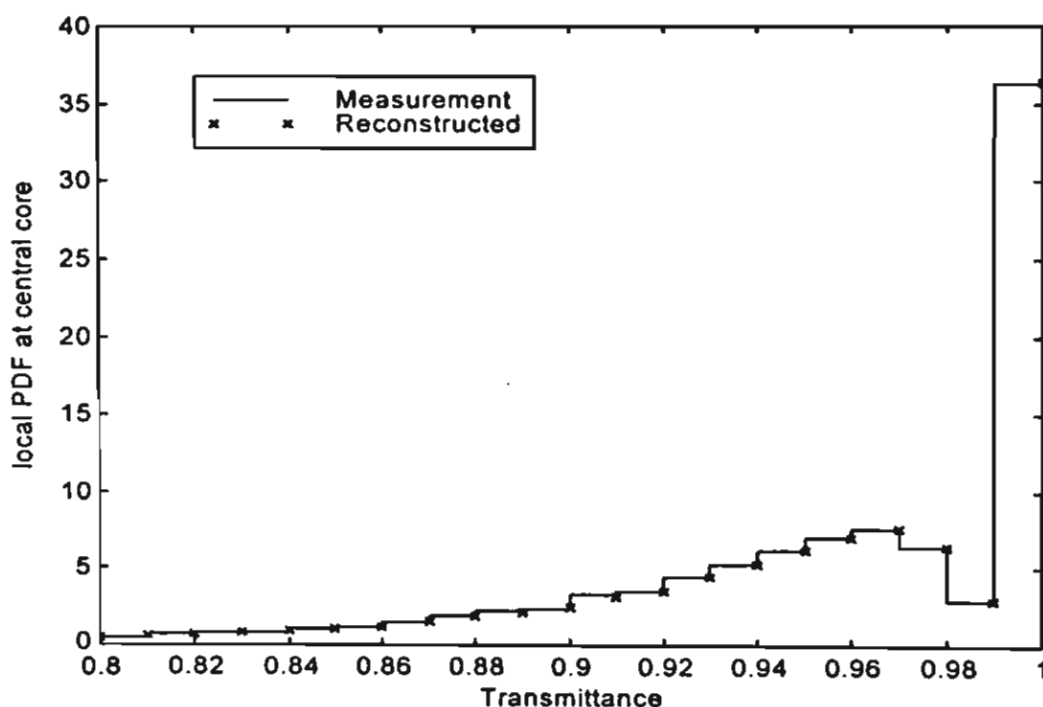


ภาพที่ 25 ภาพเหมือนโลคัลโมเมนต์ลำดับที่ 1 ของเปลวจำลองแบบไม่สมมาตร



ภาพที่ 26 ค่า $\log_{10} \Sigma$ และ $\log_{10} |U^T m|$ สำหรับแก้ปัญหามอเมนต์ด้วยวิธี SVD
ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลวของเปลวจำลองแบบไม่สมมาตร

ผลการสร้างภาพเสมือนของ Local-PDF ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลวของเปลวจำลอง แสดงดังภาพที่ 27 เมื่อเปรียบเทียบกับค่า Local-PDF ที่ได้จากการวัด จะเห็นว่าใกล้เคียงกันมาก โดยมีความแตกต่างกันไม่ถึง 0.15% (แต่ยังคงมีความแตกต่างกันเล็กน้อยดังแสดงเป็นตัวเลขในตารางที่ 2) ซึ่งเป็นการยืนยันได้ส่วนหนึ่งว่าการสร้างภาพเสมือนของ Local-PDF จากเปลวเพลิงไม่สมมาตร ด้วยวิธีการแปลงโมเมนต์ให้ผลการคำนวณที่ถูกต้องเชื่อถือได้ อย่างไรก็ตามการแก้ปัญหาโมเมนต์ยังคงมีความผิดพลาดเนื่องมาจากวิธี SVD ต้องการจำนวนลำดับของโมเมนต์มากกว่านี้ (ต้องการให้ปัญหามีสมการมากกว่าตัวแปรมาก ๆ) และข้อจำกัดด้านความละเอียดจุดทศนิยมของเครื่องคำนวณ ทำให้ไม่สามารถนำข้อมูลที่มีค่าน้อยจนเครื่องคำนวณไม่สามารถคำนวณ (น้อยกว่า 10^{-14}) ไปใช้ในการแก้สมการปัญหาโมเมนต์



รูปที่ 27 เปรียบเทียบผลการสร้างภาพเสมือน Local-PDF กับค่าที่ได้จากการวัด ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลวของเปลวจำลองแบบไม่สมมาตร

ตารางที่ 2 ผลการสร้างภาพเหมือนของ Local-PDF เทียบเป็นตัวเลขกับค่าที่ได้จากการวัด ณ ตำแหน่งศูนย์กลางแปลว

ค่าการส่งผ่าน	ค่า PDF ที่วัดได้	ค่า PDF จากภาพเหมือน
0.85	1.1025	1.0263
0.86	1.2183	1.2268
0.87	1.4986	1.5394
0.88	1.8290	1.8485
0.89	2.1996	2.0891
0.90	2.3926	2.5110
0.91	3.2616	3.1749
0.92	3.4881	3.5192
0.93	4.4238	4.4060
0.94	5.3151	5.3090
0.95	6.2379	6.2286
0.96	7.0739	7.0622
0.97	7.5803	7.5692
0.98	6.5057	6.5042
0.99	2.9465	2.9545
1.00	36.2862	36.3361

บทที่ 4

วิธีโทโมกราฟฟีแบบไม่ต่อเนื่อง

ฟังก์ชันภาพฉายแบบแถบ

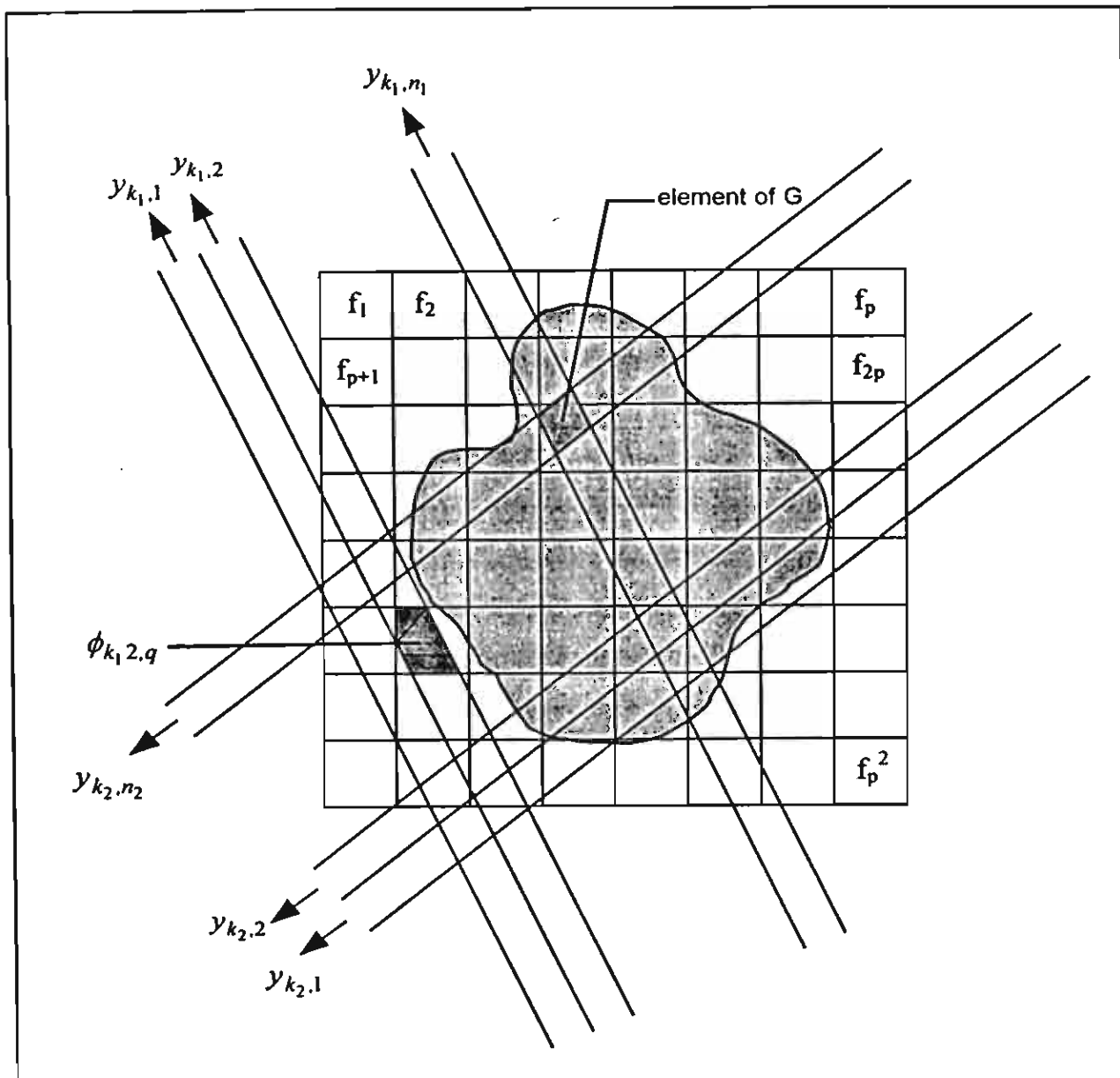
จากสมการ (2.30) สังเกตได้ว่า $p_\theta(r)$ เป็นฟังก์ชันแบบไม่ต่อเนื่องในขณะที่ภาพเสมือน $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันแบบต่อเนื่อง ดังนั้นการสร้างภาพเสมือน $f(x,y)$ ที่สอดคล้องกับค่าจริงจึงจำเป็นต้องใช้ข้อมูล $p_\theta(r)$ จำนวนมาก ถ้าฟังก์ชันภาพฉายมีจำนวนจำกัด ผลลัพธ์ที่ได้จากการสร้างภาพเสมือนจึงไม่เป็นผลลัพธ์ที่สอดคล้องกับความเป็นจริง ทั้งนี้เพราะปัญหากลายเป็นประเภทปัญหาที่มีข้อมูลน้อยเกินไป (Extremely under determined problem) (Louis, 1990) ในการสร้างภาพเสมือนจากข้อมูลที่จำกัดจึงมักทำการแยกฟังก์ชัน $f(x,y)$ ให้เป็นฟังก์ชันแบบไม่ต่อเนื่อง และใช้การอินทิเกรตแบบแถบแทนการอินทิเกรตแบบแนววิถี (Buonocore, 1981) ซึ่งวิธีนี้จัดเป็นวิธีโทโมกราฟฟีแบบไม่ต่อเนื่อง (Herman, 1978)

ฟังก์ชันภาพฉายแบบแถบ สามารถคำนวณได้โดยแบ่งโดเมนที่สนใจ ออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมจัตุรัสเล็ก ๆ (เรียกว่าพิกเซล) และให้ค่าในแต่ละพิกเซลคือ $f(x,y)$ ฟังก์ชันภาพฉายแบบแถบคือผลรวมตลอดแนวของผลคูณระหว่างพื้นที่ที่แถบพาดผ่านกับค่าของ $f(x,y)$ ในพิกเซลนั้น ๆ (ดังภาพที่ 28) และพื้นที่ของแต่ละพิกเซลที่แถบพาดผ่านสามารถรวบรวมเขียนเป็นเมทริกซ์พื้นที่, ϕ ดังนี้

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{11,1} & \phi_{11,2} & \cdots & \phi_{11,q} & \cdots & \phi_{11,p^2} \\ \phi_{12,1} & \phi_{12,2} & \cdots & \phi_{12,q} & \cdots & \phi_{12,p^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi_{kn,1} & \phi_{kn,2} & \cdots & \phi_{kn,q} & \cdots & \phi_{kn,p^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \phi_{MN,1} & \phi_{MN,2} & \cdots & \phi_{MN,q} & \cdots & \phi_{MN,p^2} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

โดยที่ $\phi_{kn,q}$ คือค่าของพื้นที่ที่แถบลำดับที่ n ในมุมที่ k พาดผ่านพิกเซลที่ q และ p^2 คือจำนวนพิกเซลทั้งหมด รวบรวมเขียน $f(x,y)$ เสียใหม่ในรูปของเวกเตอร์ $\underline{f}$ โดย

$$\underline{f} = [f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_q \quad \cdots \quad f_{p^2}]^T \quad (4.2)$$



ภาพที่ 28 แสดงลักษณะการเก็บข้อมูลวิธีรวมแบบแถบ และการหาค่าเมทริกซ์พื้นที่, ϕ

เมื่อ f_q คือค่าของฟังก์ชันในพิกเซลที่ q และในทำนองเดียวกันเวกเตอร์ของฟังก์ชันภาพฉายแบบแถบ $\underline{y}$ รวบรวมอยู่ในรูป

$$\underline{y} = [y^T(1) \quad y^T(2) \quad \dots \quad y^T(k) \quad \dots \quad y^T(M)]^T \quad (4.3)$$

โดยที่

$$y(k) = [y_{k1} \quad y_{k2} \quad \dots \quad y_{kn} \quad \dots \quad y_{kN}]^T$$

เมื่อ y_{kn} คือค่าของฟังก์ชันภาพฉายแบบแถบที่ตำแหน่ง n ในมุมที่ k จากการกำหนดตัวแปรสมการ (4.1) ถึง (4.3) ความสัมพันธ์ของ $\underline{f}$, ϕ และ $\underline{y}$ จึงเขียนได้เป็น

$$\underline{y} = \phi \underline{f} \quad (4.4)$$

ในกรณีที่มีข้อมูลมีจำกัด, $p^2 > M \times N$, ปัญหาการแก้สมการ (4.4) เป็นปัญหาประเภทข้อมูลน้อย (Under determined problem) ในงานวิจัยนี้ได้ทดลองแก้สมการ (4.4) ด้วยวิธีการแทนค่าซ้ำ (Iteration) และการแก้สมการโดยตรงด้วยการผกผันเมทริกซ์ (Matrix inversion)

การสร้างภาพเสมือนด้วยวิธีพีชคณิต

วิธีแคชมาร์ซ (Kaczmarz method) หรือในบางครั้งเรียกว่าวิธีพีชคณิต (Algebraic reconstruction technique, ART) (Rosenfeld, 1982) เป็นวิธีแบบแทนค่าซ้ำ (Iterative) ชนิดหนึ่งที่ใช้ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยการสมมุติค่าเริ่มต้นของผลเฉลย แล้วทำการฉายเงาลงบนระนาบหลายมิติ (Hyper-plane) ของสมการเชิงเส้นแต่ละสมการไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งผลเฉลยที่ได้มีการเปลี่ยนแปลงอยู่ในช่วงที่ยอมรับได้ จึงถือว่าค่านั้นเป็นผลเฉลยของระบบสมการ ดังที่แสดงรายละเอียดในย่อหน้าถัดไป

พิจารณาสมการ (4.4) และเขียนให้อยู่ในรูปกระจายได้เป็น

$$\begin{aligned} y_{11} &= \phi_{11,1}f_1 + \phi_{11,2}f_2 + \dots + \phi_{11,q}f_q + \dots + \phi_{11,p^2}f_{p^2} \\ y_{12} &= \phi_{12,1}f_1 + \phi_{12,2}f_2 + \dots + \phi_{12,q}f_q + \dots + \phi_{12,p^2}f_{p^2} \\ &\vdots \\ y_{kn} &= \phi_{kn,1}f_1 + \phi_{kn,2}f_2 + \dots + \phi_{kn,q}f_q + \dots + \phi_{kn,p^2}f_{p^2} \\ &\vdots \\ y_{MN} &= \phi_{MN,1}f_1 + \phi_{MN,2}f_2 + \dots + \phi_{MN,q}f_q + \dots + \phi_{MN,p^2}f_{p^2} \end{aligned} \quad (4.5)$$

สมการ (4.5) เป็นระบบสมการเชิงเส้น โดยที่ $f_1, f_2, \dots, f_{p^2}$ เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า หากพิจารณาในแต่ละแถวของระบบสมการ (4.5) จะเห็นว่า ในแต่ละสมการก็คือระนาบหลายมิติ 1 ระนาบ ที่มีมิติเป็น p^2 การแก้ระบบสมการนี้ด้วยวิธี ART เริ่มด้วยการสมมุติเวกเตอร์ผลเฉลย, $f^{(0)}$, ที่มีขนาด p^2 ซึ่งก็คือจุดพิกัดจุดหนึ่งในระบบพิกัด p^2 มิติ แล้วฉายเงาของ $f^{(0)}$ ลงบนระนาบ p^2 มิติของสมการปัญหา จะได้เวกเตอร์ผลเฉลยตัวใหม่, $f^{(1)}$, แล้วฉายเงาของ $f^{(1)}$ ลงบนระนาบ p^2 มิติของสมการต่อไป จะได้ $f^{(2)}$ ทำการฉายเงาเช่นนี้

ไปเรื่อย ๆ จนค่าของผลเฉลย $f^{(kn)}$ มีการเปลี่ยนแปลงอยู่ในช่วงเล็ก ๆ ที่ยอมรับได้ ถือว่า $f^{(kn)}$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการซึ่งก็คือเวกเตอร์ภาพเสมือนของฟังก์ชันเริ่มต้น f ที่สนใจนั่นเอง

กระบวนการข้างต้นสามารถสรุปเป็นสูตรการคำนวณได้ดังนี้

$$f_q^{(kn)} = f_q^{(kn-1)} + \left[(y_{kn} - w_{kn}) / \sum_{i=1}^{p^2} \phi_{kn,i}^2 \right] \phi_{kn,q} \quad (4.6)$$

โดยที่

$$w_{kn} = \sum_{j=1}^{p^2} f_j^{(kn-1)} \phi_{kn,j}$$

จะเห็นได้ว่าผลเฉลยลำดับที่ $kn, f^{(kn)}$, หาได้จากผลเฉลยลำดับที่ $kn-1, f^{(kn-1)}$, บวกกับค่าความเปลี่ยนแปลงเนื่องมาจากการฉาย $f^{(kn-1)}$ ลงบนระนาบ p^2 มิติของสมการลำดับที่ kn ในระบบสมการ (4.5) และหากคำนวณจนครบทุกสมการแล้ว การเปลี่ยนแปลงของผลเฉลยยังไม่อยู่ในช่วงที่ยอมรับได้ ก็ให้เริ่มการคำนวณจากสมการแรกใหม่อีกครั้ง โดยใช้ผลเฉลยล่าสุดเป็นค่าเริ่มต้น

การสร้างภาพเสมือนด้วยวิธีการแยกพิกเซลธรรมชาติ

วิธีแยกพิกเซลธรรมชาติเป็นวิธีการแก้สมการโดยตรงด้วยการผกผันเมทริกซ์ เริ่มต้นจากการกระจาย f ให้อยู่ในเทอมของพื้นที่ที่แถบพาดผ่านพิกเซล โดยมี x_{kn} เป็นสัมประสิทธิ์ของการกระจาย

$$\begin{aligned} f_1 &= \phi_{11,1}x_{11} + \phi_{12,1}x_{12} + \dots + \phi_{kn,1}x_{kn} + \dots + \phi_{MN,1}x_{MN} \\ f_2 &= \phi_{11,2}x_{11} + \phi_{12,2}x_{12} + \dots + \phi_{kn,2}x_{kn} + \dots + \phi_{MN,2}x_{MN} \\ &\vdots \\ f_q &= \phi_{11,q}x_{11} + \phi_{12,q}x_{12} + \dots + \phi_{kn,q}x_{kn} + \dots + \phi_{MN,q}x_{MN} \\ &\vdots \\ f_{p^2} &= \phi_{11,p^2}x_{11} + \phi_{12,p^2}x_{12} + \dots + \phi_{kn,p^2}x_{kn} + \dots + \phi_{MN,p^2}x_{MN} \end{aligned} \quad (4.7)$$

หรือเขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\underline{f} = \phi^T \underline{x} \quad (4.8)$$

เมื่อ $\underline{x} = [x^T(1) \ x^T(2) \ \cdots \ x^T(k) \ \cdots \ x^T(M)]^T$ (4.9)

โดยที่ $x(k) = [x_{k1} \ x_{k2} \ \cdots \ x_{kn} \ \cdots \ x_{kN}]^T$

แทนค่า $\underline{f}$ จากสมการ (4.8) ลงในสมการ (4.4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \underline{y} &= \phi \phi^T \underline{x} \\ \underline{y} &= G \underline{x} \quad \text{where } G = \phi \phi^T \end{aligned} \quad (4.10)$$

เมทริกซ์ G คือเมทริกซ์พิกเซลธรรมดา ในการศึกษาค้างนี้ใช้วิธี SVD ในการหาเวกเตอร์สัมประสิทธิ์, $\underline{x}$ จากนั้นแทนค่าลงในสมการ (4.8) เพื่อหาเวกเตอร์ของภาพเสมือน, $\underline{\hat{f}}$, ดังสมการข้างล่างนี้

$$\underline{\hat{f}} = \phi^T G^{-1} \underline{y} \quad (4.11)$$

การประยุกต์การแปลงเวฟเลทกับวิธีการแยกพิกเซลธรรมดา

เนื่องจากการสร้างภาพเสมือนด้วยวิธีการแยกพิกเซลธรรมดาจำเป็นต้องใช้เวลาและหน่วยความจำของเครื่องคำนวณสูง ในการแก้สมการเมทริกซ์ขนาดใหญ่ (Buonocore, 1981) จึงทำให้วิธีนี้ไม่เป็นที่นิยมจนกระทั่งในปี 1994 บาร์ทเทียร์ (Bhatia, 1994) และคณะ ได้อาศัยคุณสมบัติการแบ่งสเกล (Scale) การคำนวณของการแปลงเวฟเลท (Wavelet transform) มาประยุกต์ใช้กับการสร้างภาพเสมือนด้วยวิธีการแยกพิกเซลธรรมดา ทำให้วิธีนี้มีประสิทธิภาพในการคำนวณมากขึ้น และสามารถจัดผลของสัญญาณรบกวนได้ดีด้วยคุณสมบัติของการแปลงเวฟเลท ในการศึกษาค้างนี้มีได้ลงไปรายละเอียดของการนำวิธีการแปลงเวฟเลทมาประยุกต์ใช้ แต่จะแนะนำเพียงหลักการพื้นฐานในการประยุกต์ใช้ เพื่อให้ได้ผลการคำนวณเบื้องต้นสำหรับใช้ในการศึกษาระดับสูงต่อไป รายละเอียดทางคณิตศาสตร์ของวิธีเวฟเลทสามารถศึกษาได้ในบรรณานุกรม (Burrus, 1998 ; Mallat, 1989 ; Newland, 1993)

เวกเตอร์สัมประสิทธิ์ $\underline{x}$ และเวกเตอร์ฟังก์ชันภาพฉายแบบแถบ $\underline{y}$ สามารถทำการแยกในอยู่ในรูปหลายสเกล (Multiscale decomposition) ได้โดย

$$\begin{aligned}\underline{\xi} &\triangleq N W \underline{x} \\ \underline{\psi} &\triangleq W \underline{y}\end{aligned}\quad (4.12)$$

โดยที่ N คือจำนวนแถบของการฉายต่อ 1 มุม, W คือเมทริกซ์การแปลงเวฟเลท ซึ่งเป็นเมทริกซ์เชิงตั้งฉาก (Orthogonal matrix) โดยมีคุณสมบัติ $W^{-1} = W^T$, $\underline{\xi}$ และ $\underline{\psi}$ คือเวกเตอร์หลายสเกลของ $\underline{x}$ และ $\underline{y}$ ตามลำดับ ซึ่งมีลักษณะดังนี้

$$\underline{\xi} = [\underline{\xi}^T(h) \quad \underline{\xi}^T(h+1) \quad \dots \quad \underline{\xi}^T(j) \quad \dots \quad \underline{\xi}^T(l) \quad \underline{\xi}^T(d)]^T \quad (4.13)$$

โดยที่ $\underline{\xi}(j)$ คือเวกเตอร์สัมประสิทธิ์ในสเกล j และกำหนดให้สเกล h คือสเกลที่ละเอียดที่สุด, สเกล l คือสเกลที่หยาบที่สุด และ d เป็นสเกลพื้นฐานของฟังก์ชัน เวกเตอร์ $\underline{\xi}(j)$ แต่ละสเกลประกอบไปด้วยค่าสัมประสิทธิ์ที่เกิดจากลำแสงแต่ละเส้นถูกแยกออกเป็นสเกลต่าง ๆ ดังนี้

$$\underline{\xi}(j) = [\underline{\xi}_\theta^T(1,j) \quad \underline{\xi}_\theta^T(2,j) \quad \dots \quad \underline{\xi}_\theta^T(k,j) \quad \dots \quad \underline{\xi}_\theta^T(M,j)]^T \quad (4.14)$$

โดยที่ $\underline{\xi}_\theta(k,j) = [\xi_{kj1} \quad \xi_{kj2} \quad \dots \quad \xi_{kjn_j}]^T$, ξ_{kjn_j} หมายถึงค่าสัมประสิทธิ์ที่เกิดจากลำแสงแถบลำดับที่ n_j ในมุมที่ k ถูกแยกลงในสเกล j โดยที่

$$n_j = \begin{cases} \frac{N}{2^j} & \text{for } j \neq d \\ 1 & \text{for } j = d \end{cases} \quad (4.15)$$

เวกเตอร์หลายสเกลของฟังก์ชันภาพฉาย, $\underline{\psi}$, นิยามในทำนองเดียวกันคือ

$$\underline{\psi} = [\underline{\psi}^T(h) \quad \underline{\psi}^T(h+1) \quad \dots \quad \underline{\psi}^T(j) \quad \dots \quad \underline{\psi}^T(l) \quad \underline{\psi}^T(d)]^T \quad (4.16)$$

$$\text{โดยที่ } \underline{\psi}(j) = [\underline{\psi}_\theta^T(1,j) \quad \underline{\psi}_\theta^T(2,j) \quad \dots \quad \underline{\psi}_\theta^T(k,j) \quad \dots \quad \underline{\psi}_\theta^T(M,j)]^T \quad (4.17)$$

$$\text{และ } \underline{\psi}_\theta(k,j) = [\psi_{kj1} \quad \psi_{kj2} \quad \dots \quad \psi_{kjn_j}]^T$$

เมทริกซ์หลายสเกลของเมทริกซ์พื้นที่, ϕ , นิยามโดย

$$\Phi = W\phi \quad (4.18)$$

$$\Phi = [\Phi(h) \quad \Phi(h+1) \quad \dots \quad \Phi(j) \quad \dots \quad \Phi(l) \quad \Phi(d)]^T \quad (4.19)$$

$$\text{โดยที่ } \Phi(j) = [\underline{\Phi}(1, j) \quad \underline{\Phi}(2, j) \quad \dots \quad \underline{\Phi}(k, j) \quad \dots \quad \underline{\Phi}(M, j)] \quad (4.20)$$

$$\text{และ } \underline{\Phi}(k, j) = [\Phi_{kj1} \quad \Phi_{kj2} \quad \dots \quad \Phi_{kjn_j}]^T$$

เมทริกซ์หลายสเกลของเมทริกซ์พิกเซลธรรมชาติ, G , นิยามโดย

$$\Gamma = WGW^T = W(\phi\phi^T)W^T = (W\phi)(W\phi)^T = \Phi\Phi^T \quad (4.21)$$

จากสมการ (4.10) สามารถแปลงเป็นเมทริกซ์หลายสเกลได้โดย

$$\begin{aligned} \underline{y} &= G\underline{x} \\ W\underline{y} &= WGW^{-1}W\underline{x} \\ \underline{\psi} &= (WGW^T)\underline{\xi} \end{aligned}$$

$$\text{ซึ่งจะได้ว่า} \quad \underline{\psi} = \Gamma\underline{\xi} \quad (4.22)$$

และจากสมการการแยกพิกเซลธรรมชาติ (4.8) สามารถแปลงให้อยู่ในรูปเมทริกซ์หลายสเกลได้เป็น

$$\begin{aligned} \underline{f} &= \phi^T \underline{x} \\ &= \phi^T W^T W\underline{x} \\ &= (W\phi)^T \underline{\xi} \end{aligned}$$

$$\text{ซึ่งจะได้ว่า} \quad \underline{\hat{f}} = \Phi^T \underline{\xi} \quad (4.23)$$

ในการศึกษาครั้งนี้ใช้การแปลงเวฟเลทแบบคูบิซรี 6 (Daubechies-6, D6) (Burrus, 1998) ในการคำนวณเป็นเมทริกซ์หลายสเกล โดยได้รับความอนุเคราะห์โปรแกรมคำนวณจากคุณดำรงศักดิ์ วิเศษรัฐ (Wirasaet, 1999)

ขั้นตอนการสร้างภาพเสมือนเริ่มด้วยการแปลงเมทริกซ์ G , ϕ และ y ให้เป็นเมทริกซ์หลายสเกล Γ , Φ และ ξ ตามลำดับ จากนั้นใช้วิธี SVD แก่สมการเมทริกซ์ (4.22) หาเวกเตอร์สัมประสิทธิ์หลายสเกล, ξ , แล้วแทนค่าลงในสมการสร้างภาพเสมือน (4.23) ก็จะได้เวกเตอร์ภาพเสมือน, $\hat{f}$ วิธีการนี้ยอมให้แกสมการเมทริกซ์แบบหลายสเกล ซึ่งมีผลดีคือสามารถลดพื้นที่หน่วยความจำที่ใช้, สามารถแก้ปัญหาโดยวิธีปรับแต่ง (Adaptive scheme) เฉพาะบริเวณที่สนใจได้ อย่างไรก็ตามรายละเอียดเหล่านี้อยู่นอกเหนือเนื้อหาของงานวิจัยครั้งนี้

บทที่ 5

ผลการสร้างภาพเสมือนด้วยวิธีโทโมกราฟฟีแบบไม่ต่อเนื่อง

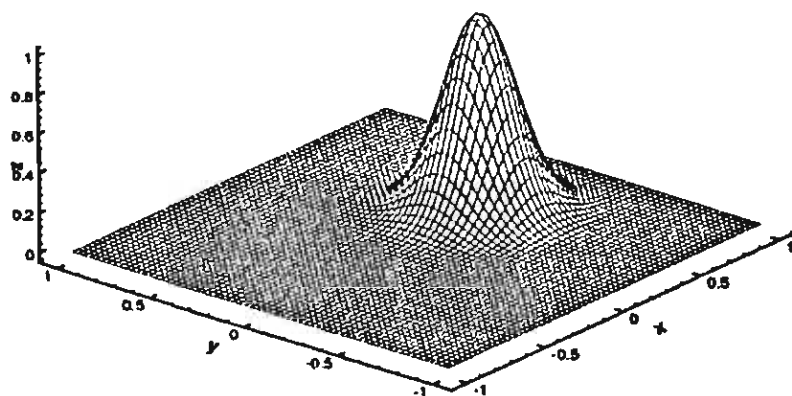
ฟังก์ชันทดสอบ

บทนี้มุ่งเน้นในการศึกษาขั้นตอนวิธีการสร้างภาพเสมือนจากข้อมูลวิถีรวมที่จำกัด ด้วยวิธีโทโมกราฟฟีแบบไม่ต่อเนื่อง ฟังก์ชันที่ใช้ทดสอบจึงไม่ซับซ้อนเพื่อให้สามารถเห็นผลการสร้างภาพเสมือนจากขั้นตอนวิธีต่าง ๆ ได้ชัดเจน ในการศึกษารั้งนี้ใช้ฟังก์ชันเกาส์เขียนแบบเยื้องศูนย์ (Off-center Gaussian profile) เป็นฟังก์ชันทดสอบ โดยมีสมการในรูปวิเคราะห์เป็น

$$f(x, y) = e^{-c[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]} \quad (5.1)$$

ค่า c เป็นค่าคงที่เท่ากับ 20 , (x_0, y_0) คือจุดศูนย์กลางของฟังก์ชันเท่ากับ (0.4,0.0)

ภาพ 3 มิติของฟังก์ชันทดสอบ แสดงไว้ดังภาพที่ 29



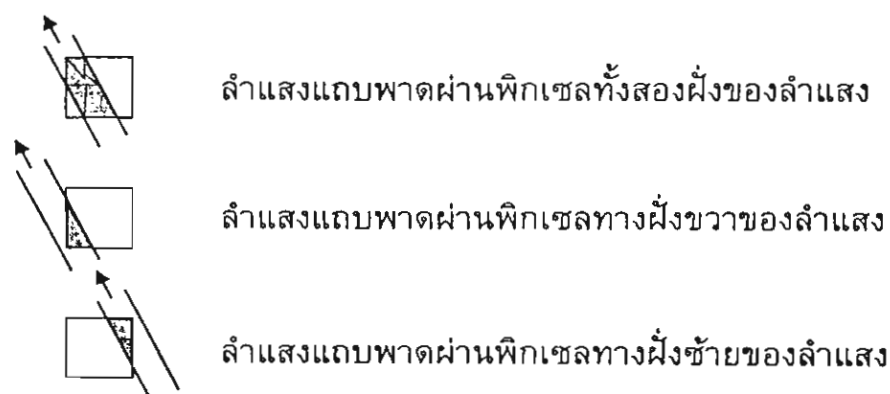
ภาพที่ 29 ฟังก์ชันทดสอบ

การสร้างเมทริกซ์พื้นที่

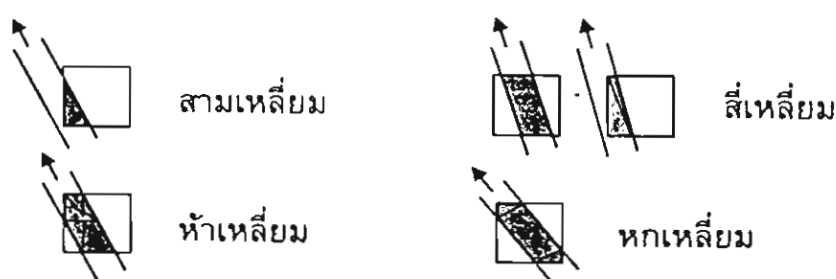
ข้อมูลแต่ละหน่วยภายในเมทริกซ์พื้นที่, ϕ , คือขนาดของพื้นที่ที่แถบหนึ่ง ๆ พาดผ่าน พิกเซลหนึ่ง ๆ ซึ่งการคำนวณหาขนาดพื้นที่ในแต่ละหน่วยของเมทริกซ์นั้นค่อนข้างยุ่งยาก เพราะฟังก์ชันทดสอบถูกแยกออกเป็นหลายพิกเซล และแถบจำนวนมากก็มีแนววิถีมาจากหลาย ๆ มุม จึงทำให้พื้นที่ที่ลำแสงแถบพาดผ่านพิกเซลเกิดขึ้นได้หลายลักษณะ ไม่ว่าจะเป็น สามเหลี่ยม, สี่เหลี่ยม, ห้าเหลี่ยม หรือหกเหลี่ยมใด ๆ จึงของสรุปขั้นตอนการคำนวณหาขนาดพื้นที่ดังนี้

1. พิจารณาแนววิถีของแถบผ่านฟังก์ชันทดสอบที่ละมุม แล้วเริ่มพิจารณาทีละพิกเซลของฟังก์ชันทดสอบว่า ในพิกเซลนั้นมีลำแสงแถบเส้นใดบ้างที่พาดผ่าน โดยเริ่มจากหาจุดตัดของสมการเส้นตรงทั้ง 4 ด้านของพิกเซลกำหนดเป็นขอบเขตของพิกเซลไว้ หากสมการเส้นตรงของแถบไม่ว่าฝั่งซ้ายหรือฝั่งขวา (แถบมีความหนาจึงต้องพิจารณาทั้งสองฝั่งของแถบ) พาดผ่านขอบเขตของพิกเซลถือว่าแถบนั้นพาดผ่านพิกเซล และนำไปพิจารณาในขั้นต่อไป

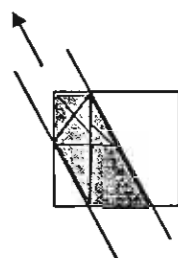
2. นำจุดตัดระหว่างสมการขอบเขตพิกเซลกับสมการของแถบที่พาดผ่านไปพิจารณาเป็นกรณี ๆ ไปว่า ลักษณะการพาดผ่านทำให้เกิดพื้นที่อย่างไรบนพิกเซล ซึ่งสามารถสรุปได้เป็น 3 กรณีใหญ่ ๆ คือ



โดยในแต่ละกรณีก็จะแยกย่อยเป็นกรณีต่าง ๆ ขึ้นอยู่กับลักษณะของพื้นที่ที่เกิดขึ้น เช่น



ในการคำนวณพื้นที่ที่สามารถทำได้โดยแบ่งพื้นที่ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมประกอบกัน และใช้สูตรการหาพื้นที่สามเหลี่ยมจากความยาวด้าน 3 ด้าน เช่น หากพื้นที่การพาดผ่านเป็นรูปห้าเหลี่ยม ให้พิจารณาเป็นสามเหลี่ยมสามรูปประกอบกันดังภาพด้านล่าง



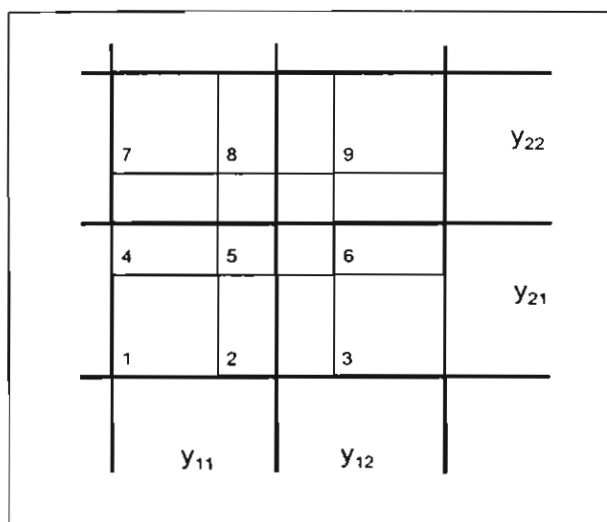
3. นำค่าพื้นที่ที่คำนวณได้บรรจุลงในเมทริกซ์พื้นที่ แล้วพิจารณาพิกเซลถัดไปจนครบทั้งฟังก์ชัน (p^2 พิกเซล) และเริ่มการคำนวณในมุมถัดไปของการฉายลำแสงแถบจนครบทุกมุมที่กำหนด

ในการคำนวณหาเมทริกซ์พื้นที่นั้น ปัญหาที่มักจะประสบคือการหาจุดตัดไม่พบ เพราะจุดตัดแต่ละจุดไม่ว่าจะเป็นจุดตัดขอบเขตของพิกเซล หรือจุดตัดของแถบกับขอบเขตพิกเซล อาจจะอยู่ห่างกันในระยะที่น้อยมาก จึงควรใช้ความละเอียดแบบสองเท่า (Double precision) ในการคำนวณ

การตรวจสอบความถูกต้องของเมทริกซ์พื้นที่, ϕ

เนื่องจากเมทริกซ์พื้นที่เป็นหัวใจหลักของการคำนวณตามขั้นตอนวิธีโทโมกราฟฟีแบบไม่ต่อเนื่อง การตรวจสอบความถูกต้องของเมทริกซ์จึงเป็นเรื่องสำคัญ สำหรับการตรวจสอบทำได้โดยเปรียบเทียบผลรวมของพื้นที่ที่ลำแสงแถบพาดผ่านพิกเซลทั้งหมดตลอดความกว้างยาวของแถบในแต่ละมุม ว่ามีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ที่ควรจะเป็นหรือไม่

กำหนดเมทริกซ์ λ มีมิติเท่ากับเมทริกซ์พื้นที่ ϕ และในแต่ละหน่วยของ λ จะมีค่าเป็น 1 เมื่อแถบพาดผ่านพิกเซล และเป็นศูนย์เมื่อแถบไม่ผ่านพิกเซล ตัวอย่างเช่น พิจารณาฟังก์ชันใด ๆ ที่ถูกแยกเป็นพิกเซลจัดรัสจำนวน 9 พิกเซล โดยให้แต่ละพิกเซลมีพื้นที่ 1 หน่วย และมีลำแสงแถบฉายมาจาก 2 มุม คือ มุม 0 องศา และ 90 องศา โดยแต่ละมุมมีลำแสงแถบ 2 แถบ ดังภาพที่ 30



ภาพที่ 30 ตัวอย่างการแยกฟังก์ชันเพื่อการพิจารณาเมทริกซ์พื้นที่

คำนวณหาเมทริกซ์พื้นที่ ϕ และเมทริกซ์ λ ได้เป็น

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

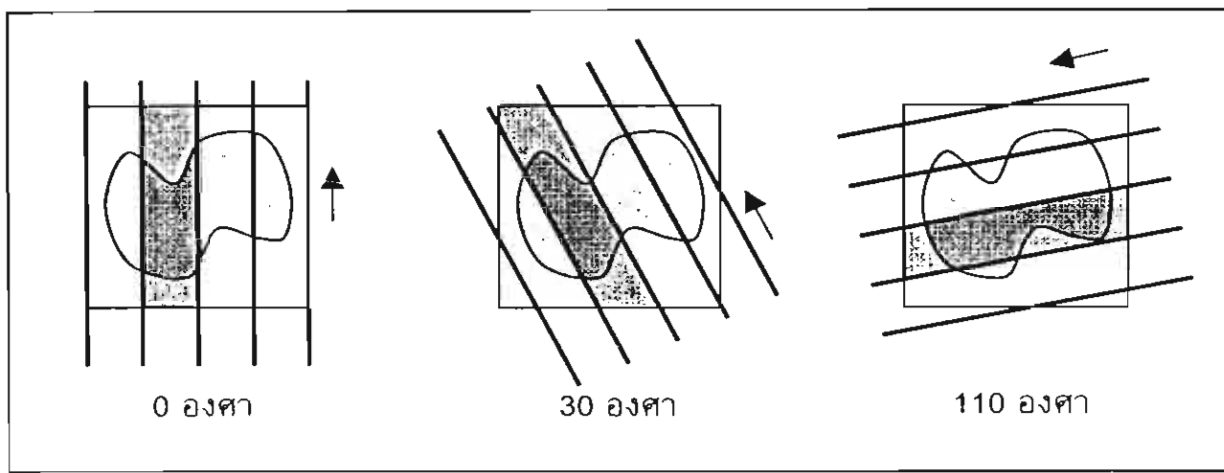
ผลคูณของ ϕ และ λ^T คือพื้นที่ความเกี่ยวข้องกันของลำแสงแถบแต่ละเส้น ดังนี้

$$(\phi)(\lambda^T) = \begin{bmatrix} 4.5 & 1.5 & 3 & 3 \\ 1.5 & 4.5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4.5 & 1.5 \\ 3 & 3 & 1.5 & 4.5 \end{bmatrix}$$

เช่น ลำแสงแถบ y_{11} ความเกี่ยวข้องกับ y_{11} เป็นพื้นที่ 4.5 หน่วย, ลำแสงแถบ y_{11} ความเกี่ยวข้องกับ y_{12} เป็นพื้นที่ 1.5 หน่วย และลำแสงแถบ y_{11} ความเกี่ยวข้องกับ y_{21} เป็นพื้นที่ 3 หน่วย (พิกเซลหมายถึง

เลข 1 ; 1 หน่วย, หมายเลข 4 ; 1 หน่วย, หมายเลข 5 ; 0.5 หน่วย, หมายเลข 2 ; 0.5 หน่วย) เป็นต้น สังเกตได้ว่าหน่วยของเมทริกซ์ที่อยู่ในแนวเส้นทะแยงมุม คือผลรวมของพื้นที่ทั้งหมดที่ลำแสงแถบแต่ละเส้นพาดผ่าน

ในการศึกษาครั้งนี้ กำหนดให้ความกว้างของการฉายในแต่ละมุมเท่ากับความกว้างทั้งหมดของฟังก์ชันที่ถูกแยกเป็นพิกเซลจัตุรัสแล้ว ดังนั้นในแต่ละมุมของการฉายพื้นที่ที่แถบแต่ละแถบครอบคลุมจึงไม่เท่ากัน ดังภาพที่ 31



ภาพที่ 31 แผนภาพแสดงความแตกต่างของพื้นที่ที่แถบพาดผ่านฟังก์ชันจากแนววิถีในมุมต่าง ๆ

การตรวจสอบความถูกต้อง เริ่มด้วยการคำนวณหาพื้นที่ที่แถบพาดผ่านฟังก์ชันโดยพิจารณาว่าฟังก์ชันมีเพียง 1 พิกเซลที่มีพื้นที่เท่ากับ p^2 หน่วย (ซึ่งสามารถคำนวณหาได้ง่ายกว่าหาเมทริกซ์พื้นที่มาก) นำมาเทียบกับค่าในแนวทะแยงมุมของเมทริกซ์ $(\phi)(\lambda^T)$ หากหน่วยใดมีค่าไม่ตรงกันก็แสดงว่าเกิดความผิดพลาดในการคำนวณพื้นที่ที่ลำแสงแถบเส้นนั้นพาดผ่านพิกเซล ด้วยการตรวจสอบในลักษณะนี้ ทำให้สามารถปรับปรุงความถูกต้องของเมทริกซ์พื้นที่ ϕ จนกระทั่งทุก ๆ ค่าที่ทำการตรวจสอบมีความผิดพลาดน้อยกว่า 10^{-8} ซึ่งทำให้มั่นใจได้ส่วนหนึ่งว่าเมทริกซ์พื้นที่ที่จะใช้ในการคำนวณต่อไปมีความถูกต้อง

ศักยภาพในการประยุกต์วิธีโทโมกราฟฟีแบบไม่ต่อเนื่อง

จากที่ได้แสดงลักษณะสมบัติของ $(\phi)(\lambda^T)$ หรืออีกนัยหนึ่งคือเมทริกซ์ G แสดงชัดเจนว่า G_{11} เป็นค่าพื้นที่รวมของแถบ y_{11} ในขณะที่ G_{12} เป็นค่าพื้นที่ที่ควมเกี่ยวระหว่าง y_{11} และ y_{12} และ G_{13} เป็นค่าพื้นที่ที่ควมเกี่ยวระหว่าง y_{11} กับ y_{13} ตามลำดับ

ลักษณะสมบัติของ G แสดงศักยภาพอย่างชัดเจนถึงความสามารถที่จะพัฒนาให้ G รวมเอาความขึ้นต่อกัน (Dependence) ของแต่ละพิกเซล อันจะนำไปสู่การผ่อนปรนเงื่อนไขความไม่ขึ้นต่อกัน (Independence) ของ Local-PDF ในที่สุด

งานวิจัยนี้จะแสดงเฉพาะคุณสมบัติเบื้องต้นของเมทริกซ์ ϕ โดยแสดงการวิเคราะห์หาขนาดการเก็บตัวอย่างที่เหมาะสม ทั้งนี้เมทริกซ์ ϕ มีพารามิเตอร์ที่สำคัญ 3 ค่า คือ จำนวนพิกเซลในคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate) , จำนวนการเก็บตัวอย่างในแนวขวาง (Lateral sampling) และจำนวนการเก็บตัวอย่างเชิงมุม (Angular sampling)

ผลของจำนวนพิกเซล (x, y) ที่มีต่อเมทริกซ์ ϕ

จากนิยามของการแยกพิกเซลธรรมชาติของฟังก์ชันทดสอบ f ในสมการ (4.8) เราสามารถแยก f ออกเป็นสัมประสิทธิ์ $\underline{x}$ ได้ด้วยวิธี SVD (เมื่อจำนวนข้อมูลวิถีสองมิติรวมมีค่าไม่มากกว่าจำนวนพิกเซล : $MN < p^2$)

$$\underline{x} = (\phi^T)^{-1} \underline{f} \quad (5.2)$$

แทนเวกเตอร์ $\underline{x}$ ที่คำนวณได้ลงในสมการ (4.8) จะได้ฟังก์ชันประมาณ $\hat{f}$ ของฟังก์ชันทดสอบ f เนื่องจากการคำนวณข้างต้นไม่มีผลของฟังก์ชันภาพฉายแบบแถบมาเกี่ยวข้อง ทำให้ไม่เกิดความผิดพลาดเนื่องจากความไม่สอดคล้องกันของข้อมูลวิถีสองมิติรวมกับ $\underline{f}$ ภาพที่ 32 แสดงภาพ 3 มิติของ $\hat{f}$ จากข้อมูล ϕ ที่ใช้ 64 แถบและจำนวนมุม 8 มุม ในช่วง 0 - 180 องศา โดยมีระยะห่างระหว่างมุมเท่ากัน ที่ความละเอียดของการแยกฟังก์ชันต่าง ๆ โดยที่ภาพที่ 32a แยกที่ความละเอียด 32 x 32 พิกเซล ภาพที่ 32b แยกที่ความละเอียด 64 x 64 พิกเซล และภาพที่ 32c แยกที่ความละเอียด 128 x 128 พิกเซล จะเห็นว่าไม่ว่าฟังก์ชันจะถูกแยกให้ละเอียดมากขึ้นหรือน้อยลง รูปแบบของ $\hat{f}$ ที่ได้จะมีลักษณะเดียวกัน คือมีความผิดพลาดเป็นรูปแนวเส้น (Streakline error) คล้ายกันทั้ง 3 รูป ซึ่งแสดงให้เห็นว่าการแยกฟังก์ชันให้ละเอียดมากขึ้นมิได้ส่งผลให้ผลเฉลยมีค่าถูกต้องมากขึ้น แต่กลับจะเป็นการสิ้นเปลืองหน่วยความจำในการคำนวณ ทั้งนี้เพราะข้อมูลถูกจำกัดด้วยจำนวนแถบของ ϕ (64 x 8) ดังนั้นในการเลือกความละเอียดของการแยกฟังก์ชันจึงขึ้นอยู่กับความซับซ้อนของฟังก์ชัน และความจำเป็นในการประเมินภาพเสมือน

การตรวจสอบความถูกต้องของเมทริกซ์ ϕ ด้วยฟังก์ชันทดสอบ

ใช้ฟังก์ชันภาพฉายแบบแถบที่คำนวณได้จากการอินทิเกรตโดยตรง, สมการ (5.3), เป็นค่าอ้างอิง เพื่อเปรียบเทียบกับฟังก์ชันภาพฉายแบบแถบ, y , ที่สร้างจากสมการ (2.4)

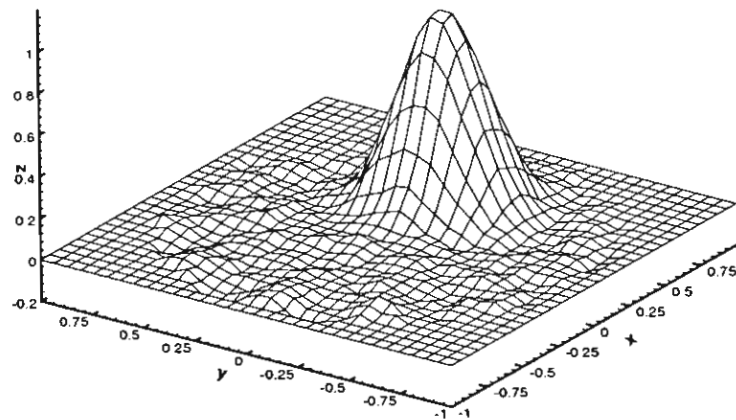
$$p_s(r_i) = \int_{r_i - \frac{1}{2}}^{r_i + \frac{1}{2}} p_\theta(r) dr = \int_{r_i - \frac{1}{2}}^{r_i + \frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{c}} e^{-c(r-R)^2} dr \quad (5.3)$$

$$\text{โดยที่ } R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cos \left\{ \left[\tan^{-1} \left(\frac{y_0}{x_0} \right) \right] - \theta \right\}$$

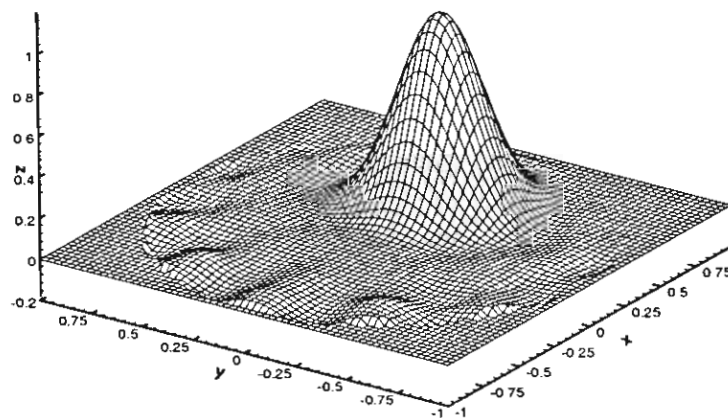
ภาพที่ 33 แสดงฟังก์ชันภาพฉายแบบแถบที่คำนวณจากสมการ (2.4) เปรียบเทียบกับค่าอ้างอิง ที่จำนวนการเก็บข้อมูลแนวขวางต่าง ๆ กัน โดยแสดงความผิดพลาดเป็นร้อยละผลต่างรากกำลังสองเฉลี่ย (Root mean square error) จะเห็นได้ว่าร้อยละผลต่างสูงสุดมีประมาณร้อยละ 1 เท่านั้น และมีค่าน้อยลงเรื่อย ๆ เมื่อจำนวนแถบมากขึ้น ซึ่งเป็นการยืนยันความถูกต้องของเมทริกซ์ภาพฉายได้อีกประการหนึ่ง

ในที่นี้ได้แยกฟังก์ชันออกเป็น 64×64 พิกเซล จากภาพที่ 33 จะเห็นว่าค่าร้อยละผลต่างเฉลี่ยลดลงอย่างมากเมื่อจำนวนแถบเพิ่มขึ้นจาก 32 เป็น 64 แถบ แต่จะมีค่าลดลงไม่มากเมื่อจำนวนแถบเพิ่มขึ้นเป็น 128 แถบ เป็นการแสดงให้เห็นว่าความถูกต้องของฟังก์ชันภาพฉายถูกจำกัดด้วยความละเอียดในการแยกฟังก์ชัน (64×64 พิกเซล) ดังนั้นหากต้องการให้ฟังก์ชันภาพฉายมีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากขึ้น จะต้องเพิ่มทั้งจำนวนแถบและความละเอียดในการแยกฟังก์ชัน

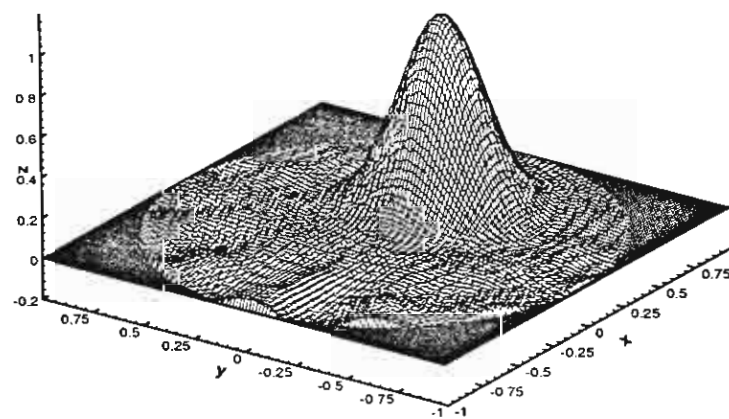
ผลของการเพิ่มจำนวนมุมการเก็บข้อมูลแสดงดังภาพที่ 34 ซึ่งจะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าเมื่อเพิ่มจำนวนมุมในการเก็บข้อมูลเพิ่มขึ้น $\hat{f}$ ที่ได้ก็มีความถูกต้องขึ้นเป็นลำดับ



(a)

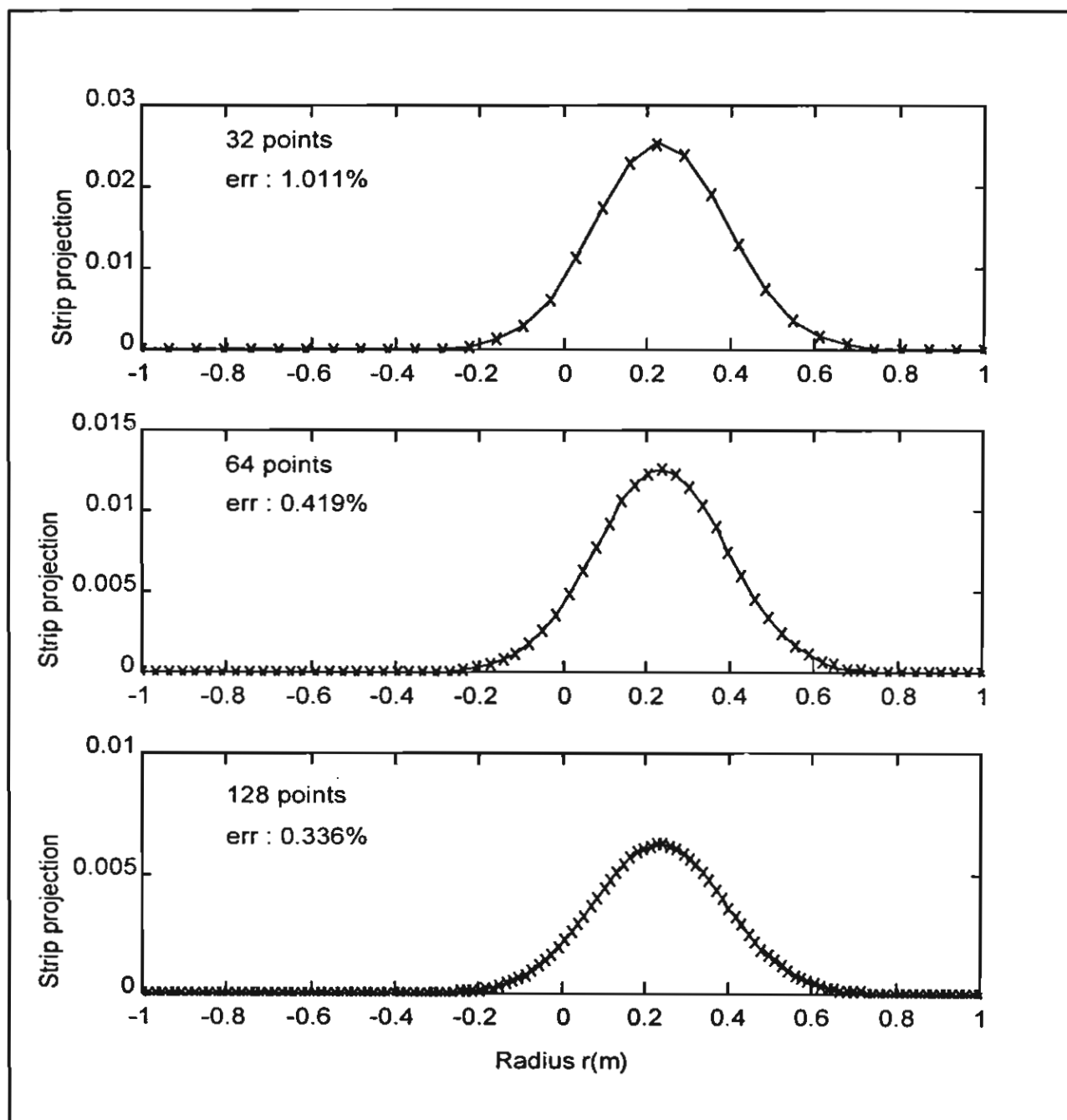


(b)

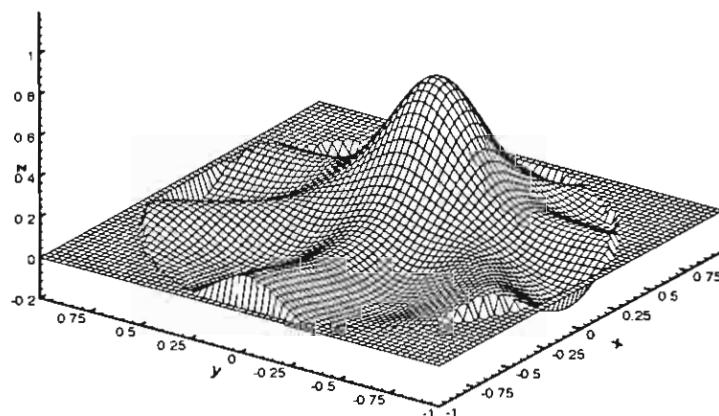


(c)

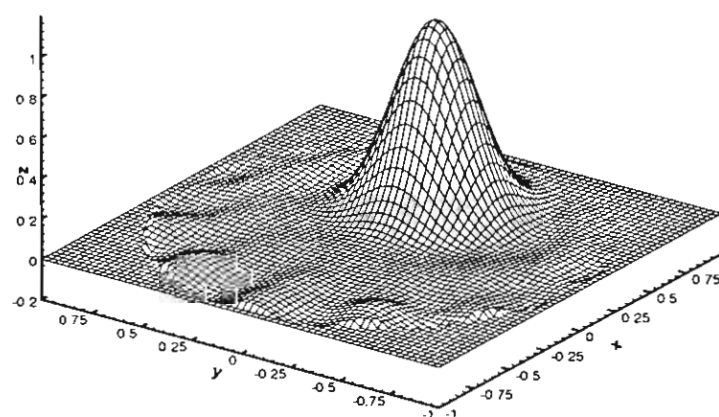
ภาพที่ 32 ผลเฉลยจากข้อมูลวิธีรวม 8 มุม ๆ ละ 64 แถบที่ความละเอียดในการแยก
ฟังก์ชันต่างกัน (a) 32 x 32 พิกเซล (b) 64 x 64 พิกเซล (c) 128 x 128 พิกเซล



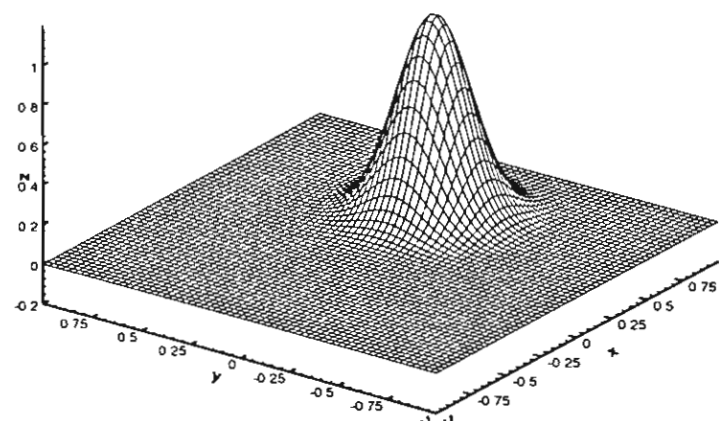
ภาพที่ 33 ฟังก์ชันภาพฉายแบบแถบของฟังก์ชันทดสอบจากการฉายด้วยจำนวนแถบต่าง ๆ



(a)



(b)



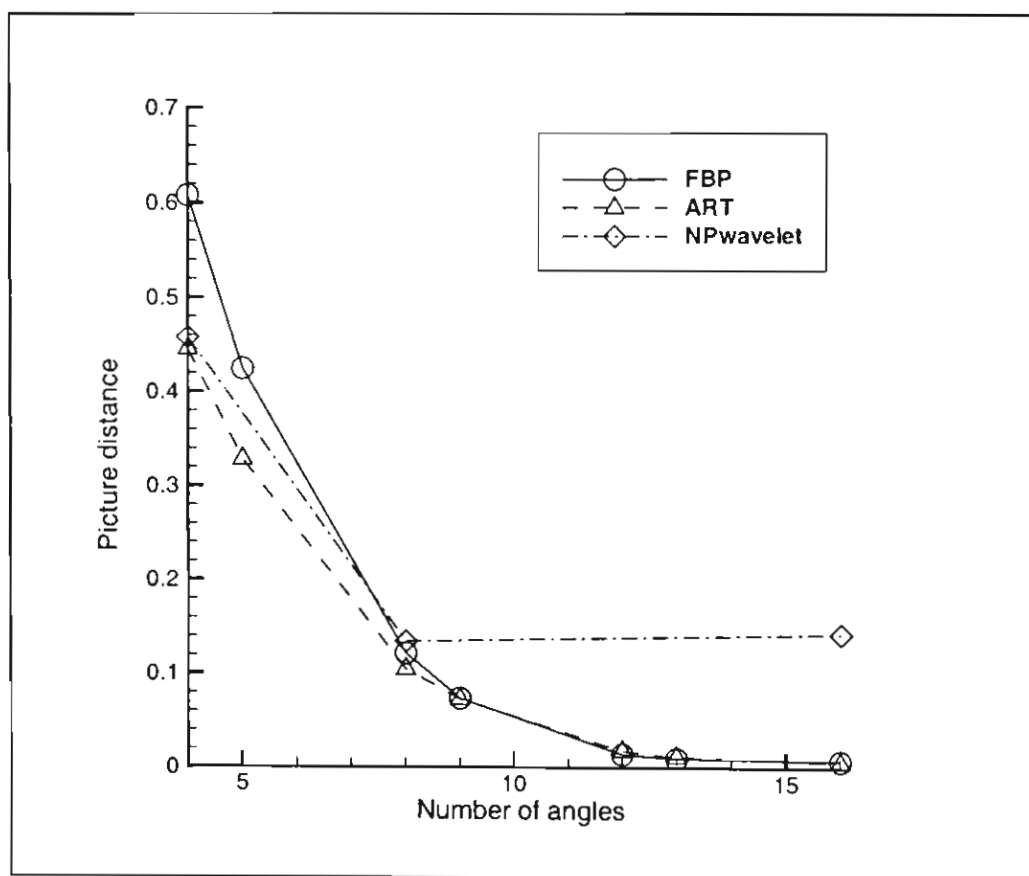
(c)

ภาพที่ 34 ภาพเสมือนคุณภาพสูงสุดของวิธีการแยกฟังก์ชันเชิงซ้อนจากจำนวนมุมการเก็บ
ข้อมูลต่าง ๆ กัน (a) 64 แถบ, 4 มุม (b) 64 แถบ, 8 มุม (c) 64 แถบ, 16 มุม

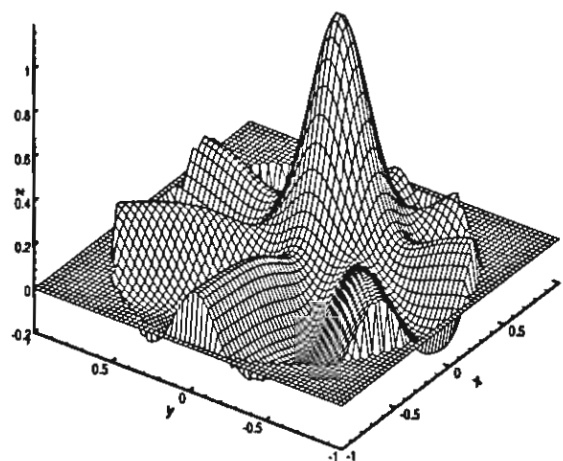
ผลการสร้างภาพเสมือน

ภาพที่ 36, 37 และ 38 แสดงภาพ 3 มิติของภาพเสมือนที่สร้างด้วยวิธี FBP, วิธีพีชคณิต (ART) และวิธีการประยุกต์การแปลงเวฟเลทกับการแยกพิกเซลธรรมชาติ (NP) ตามลำดับ โดยเป็นภาพเสมือนที่สร้างจากข้อมูลวิถีรวมจำนวน 64 แถบจาก 4, 8 และ 16 มุม ซึ่งแสดงไว้ในรูปย่อย (a), (b) และ (c) ตามลำดับ

ภาพที่ 35 แสดงค่าพิกเจอร์ดิสแทนซ์เปรียบเทียบภาพเสมือนที่สร้างด้วยวิธี FBP, ART และ NP จะเห็นว่าวิธี FBP เกิดความผิดพลาดมากเมื่อจำนวนข้อมูลมีน้อย ดังสังเกตได้จากภาพที่ 36a และ 36b ในขณะที่ภาพเสมือนที่สร้างด้วยวิธี ART มีความผิดพลาดน้อยกว่าที่จำนวนข้อมูลเท่ากัน แม้ว่าค่าพิกเจอร์ดิสแทนซ์ของภาพเสมือนที่สร้างด้วยวิธี NP จะสูง แต่ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นมีลักษณะคล้ายสัญญาณรบกวนความถี่สูง (ซึ่งต่างจากความผิดพลาดของวิธี FBP ซึ่งเกิดจากความไม่สมบูรณ์ของข้อมูล) ลักษณะสัญญาณรบกวนเช่นนี้ สามารถขจัดออกได้โดยใช้คุณสมบัติของการแปลงเวฟเลท ซึ่งมีการพัฒนาอย่างกว้างขวางในปัจจุบัน รายละเอียดของการประยุกต์เวฟเลทไม่อยู่ในขอบเขตการวิจัยครั้งนี้

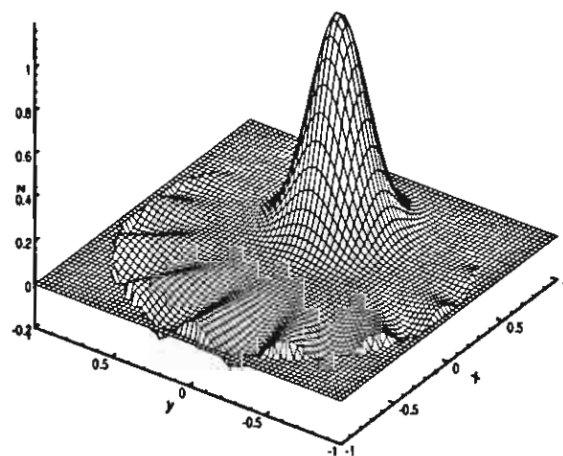


ภาพที่ 35 เปรียบเทียบค่าพิกเจอร์ดิสแทนซ์ของภาพเสมือนที่สร้างโดยวิธีโทโมกราฟีแบบไม่ต่อเนื่องแบบต่าง ๆ



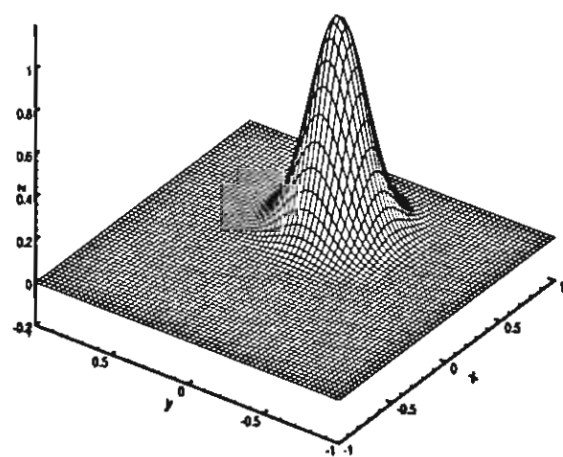
PD : 0.607829

(a)



PD : 0.120953

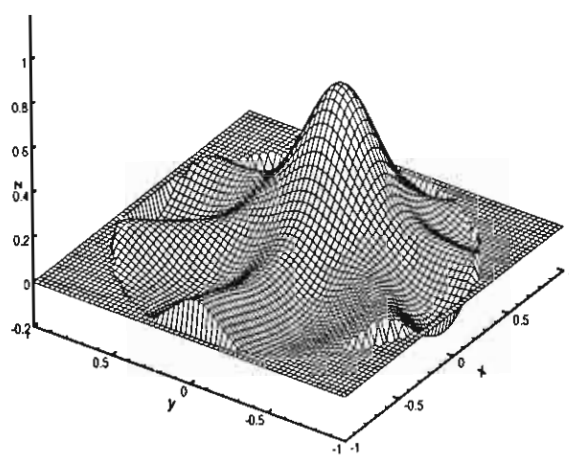
(b)



PD : 0.007097

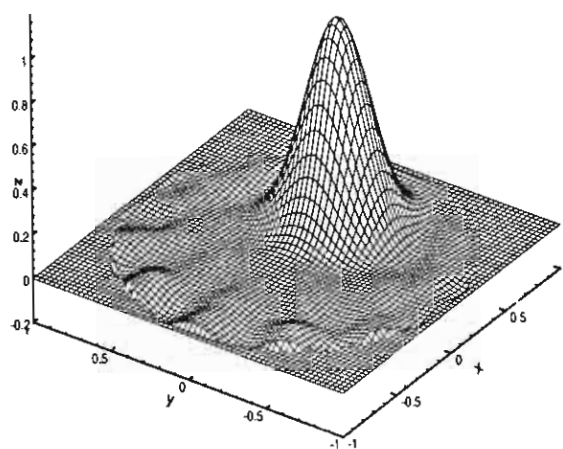
(c)

ภาพที่ 36 ภาพเสมือนจากวิธี FBP ด้วยจำนวนมุมการเก็บข้อมูลต่าง ๆ กัน
 (a) 64 แดบ, 4 มุม (b) 64 แดบ, 8 มุม (c) 64 แดบ, 16 มุม



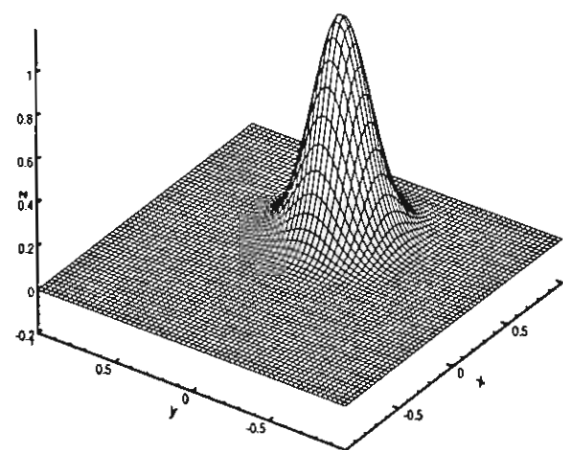
(a)

PD : 0.445108



(b)

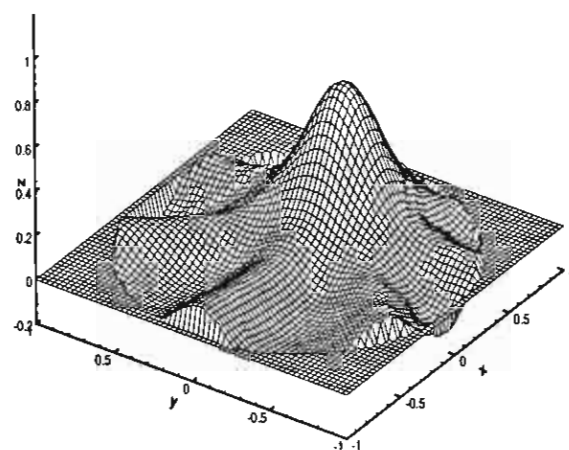
PD : 0.104254



(c)

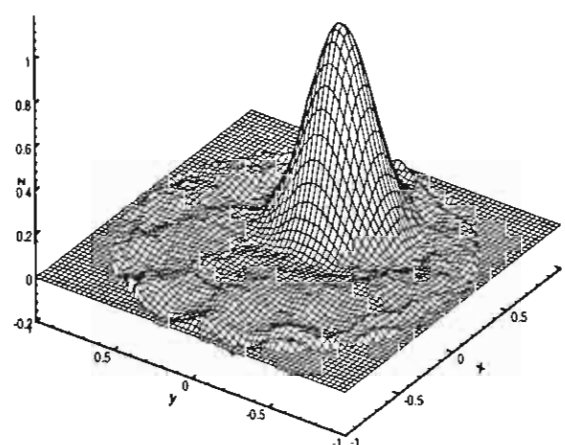
PD : 0.005325

ภาพที่ 37 ภาพเสมือนจากวิธี ART ด้วยจำนวนมุมการเก็บข้อมูลต่าง ๆ กัน
 (a) 64 แถบ, 4 มุม (b) 64 แถบ, 8 มุม (c) 64 แถบ, 16 มุม



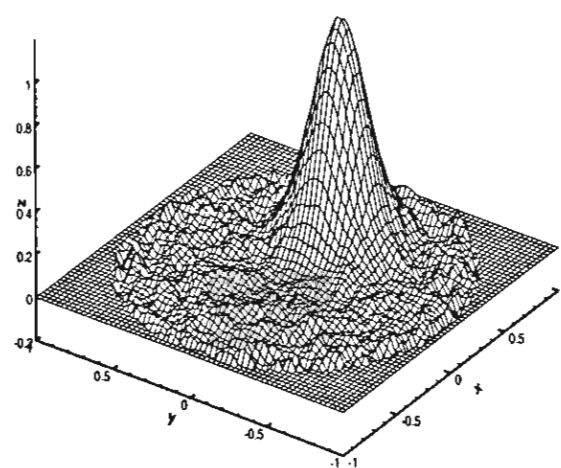
(a)

PD : 0.457832



(b)

PD : 0.133641



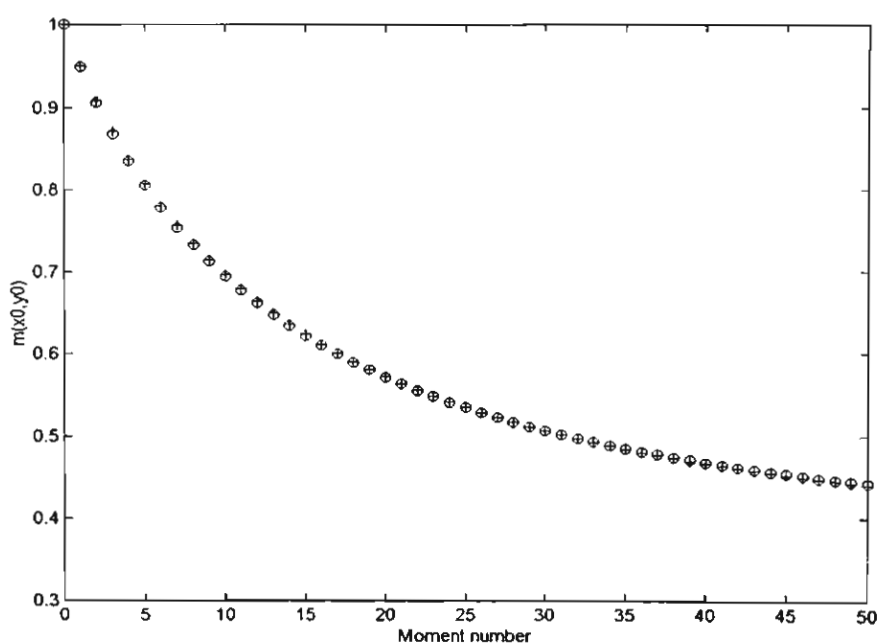
(c)

PD : 0.141423

ภาพที่ 38 ภาพเสมือนจากการประยุกต์การแปลงเวฟเลขกับวิธี NP ด้วยจำนวนมุมการเก็บ
ข้อมูลต่าง ๆ กัน (a) 64 แอบ, 4 มุม (b) 64 แอบ, 8 มุม (c) 64 แอบ, 16 มุม

การสร้างโลคัลโมเมนต์ด้วยจำนวนข้อมูลจำกัด

ในบทที่ 3 ได้กล่าวถึงการสร้างภาพเสมือนของ Local-PDF จากข้อมูลโมเมนต์วิถีสรวมของเพลวเพลิงโพรไฟเส้น โดยการนำโมเมนต์วิถีสรวมมาสร้างภาพเสมือนของโลคัลโมเมนต์ด้วยวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน จากนั้นจึงนำค่าโลคัลโมเมนต์นี้ไปคำนวณเป็นค่า Local-PDF ทั้งนี้ในการสร้างภาพเสมือนค่าโลคัลโมเมนต์นั้นจำนวนข้อมูลแนวขวางและจำนวนมุมต้องมีมากเมื่อนำมาคำนวณเป็นค่า Local-PDF จึงได้ค่าที่ใกล้เคียงกับค่าจากการวัดจริง ซึ่งแสดงให้เห็นโดยนัยว่าค่าโลคัลโมเมนต์ที่สร้างมานั้นมีความถูกต้องแม่นยำสูง แต่ในทางปฏิบัติจำนวนมุมในการเก็บข้อมูลมีจำกัด ซึ่งย่อมมีผลต่อการสร้างภาพเสมือน Local-PDF อย่างแน่นอน ดังนั้นในหัวข้อนี้จึงได้ทำการสร้างภาพเสมือนของโลคัลโมเมนต์เมื่อถูกจำกัดด้วยจำนวนข้อมูลแนวขวางและจำนวนมุมด้วยวิธีแยกพิกเซลธรรมชาติ โดยจำกัดจำนวนมุมไว้ที่ 16 มุม จำนวนข้อมูลแนวขวาง 32 จุดต่อมุม และแบ่งโดเมนออกเป็น 64×64 พิกเซล ค่าโลคัลโมเมนต์ที่คำนวณได้จากวิธีนี้จะถูกนำมาเปรียบเทียบกับค่าโลคัลโมเมนต์ที่คำนวณจากวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันที่มีจำนวนข้อมูลสมบูรณ์ ดังแสดงในภาพที่ 39



ภาพที่ 39 เปรียบเทียบผลการสร้างภาพเสมือนโลคัลโมเมนต์ด้วยวิธี FBP และ NP

+ FBP $M = 180$ $N = 129$ pixel = 128×128

o NP $M = 16$ $N = 32$ pixel = 64×64

จากภาพเห็นได้ว่าค่าโลคัลโมเมนต์ที่คำนวณด้วยวิธีแยกพิกเซลธรรมชาติเมื่อมีข้อมูลจำกัดมีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันที่มีข้อมูลสมบูรณ์ และจากค่าที่ได้นี้จะนำไปสร้างภาพเสมือนของ Local-PDF ต่อไป

การแก้ปัญหาระบบสมการที่มีตัวแปรมากกว่าสมการด้วยวิธีเอนโทรปีสูงสุด

การสร้างภาพเสมือนของ Local-PDF ด้วยวิธีแยกค่าเอกฐานจำเป็นต้องมีจำนวนสมการมากกว่าตัวแปร ดังนั้นจึงใช้โลคัลโมเมนต์ทั้งหมด 300 ลำดับ ทำให้สิ้นเปลืองเวลาในการคำนวณมาก วิธีเอนโทรปีสูงสุด(Maximum Entropy technique)จึงเป็นอีกวิธีหนึ่งที่น่าสนใจ เนื่องจากต้องการจำนวนโลคัลโมเมนต์ไม่ถึงครึ่งของจำนวน Local-PDF มาใช้ในการคำนวณ สำหรับหลักการของวิธีเอนโทรปีสูงสุดจะกล่าวถึงในย่อหน้าถัดไป

พิจารณากรณีโมเมนต์ที่คำนวณได้มีจำนวนน้อยกว่าจำนวนของความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่องซึ่งเป็นตัวแปรไม่ทราบค่า ($I < K$) เราเรียกปัญหานี้ว่า underdetermined problem และผลเฉลยที่ได้มีหลายคำตอบ อย่างไรก็ตามอัลกอริทึมใดๆ ที่หาค่าความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่องจากโมเมนต์จะต้องเป็นไปตาม consistency conditions (Tikochinsky et al., 1984) และจากการศึกษาเงื่อนไขดังกล่าวโดย Tikochinsky และคณะแสดงให้เห็นว่า consistent algorithm นั้นนำไปสู่ฟังก์ชันที่มีเอนโทรปีสูงสุดภายใต้เงื่อนไขของโมเมนต์ที่ให้มา เทคนิคนี้ยังตรงกับหลักการของการลดปริมาณข้อมูล (principle of data reduction) อีกด้วย (Abels, 1972)

เลือกใช้วิธีการของ Maxwell-Boltzman เพื่อหาผลเฉลยของวิธีเอนโทรปีสูงสุด (Sears, 1959) โดยให้เซลล์ P_k ประกอบจากกล่องที่มีขนาด $d\tau$ เท่าๆ กัน จำนวน n_k กล่อง สมการเงื่อนไข I สมการแรกได้จากสมการโมเมนต์

$$M_i = \sum_{k=1}^K \tau_k^i n_k d\tau \quad (i = 1, 2, \dots, I) \quad (5.4)$$

สมการเงื่อนไขเพิ่มเติมหาได้จากสมการ

$$N = \sum_{k=1}^K n_k \quad (5.5)$$

เมื่อ N เป็นจำนวนกล่องทั้งหมด โดยเซลล์ที่ 1 มีกล่องอยู่ n_1 ใบ, เซลล์ที่ 2 มีกล่อง n_2 ใบ, และเซลล์ที่ k มีกล่อง n_k ใบ

ให้นิยามเอนโทรปี, S เป็นลอการิทึมของจำนวนวิธีทั้งหมดที่ได้จากการจัดกล่อง N กล่องในเซลล์ K เซลล์ โดยมี n_1 กล่องในเซลล์ที่ 1, n_2 กล่องในเซลล์ที่ 2, จนถึง n_k กล่องในเซลล์ที่ k จะได้ว่า

$$S = \log \left[\frac{N!}{\prod_k n_k!} \right] = - \sum_{k=1}^K n_k \log \left(\frac{n_k}{N} \right) \quad (5.6)$$

เพื่อให้เอนโทรปีมีค่าสูงสุดภายใต้เงื่อนไขทั้งหมด $l+1$ สมการ นิยามให้ objective function ,F เป็นผลบวกของเอนโทรปีกับผลคูณระหว่างแต่ละสมการเงื่อนไขกับตัวคูณ Lagrange γ และ β_i ตามลำดับ

$$F = S + \gamma \left(\sum_k n_k - N \right) + \sum_{i=1}^I \beta_i \left(\sum \tau_k^i n_k d\tau - M_i \right)$$

ทำให้ F มีค่าสูงสุดโดยการหาอนุพันธ์ของ F เทียบกับ n_k แล้วเซตให้อนุพันธ์แต่ละตัวมีค่าเป็นศูนย์ จะได้ผลเฉลย n_k ($k = 1, 2, \dots, K$) ที่มีเอนโทรปีสูงสุด เขียน P_k (ความน่าจะเป็น) แทน n_k

$$P_k = P_T \frac{\exp \left(\sum_{i=1}^I \beta_i \tau_k^i \right)}{\sum_{k=1}^K \exp \left(\sum_{i=1}^I \beta_i \tau_k^i \right)} \quad (5.7)$$

เมื่อ P_T เป็นผลรวมของความน่าจะเป็นซึ่งมีค่าเท่ากับหนึ่ง แต่ P_T มีค่าไม่คงที่ในแต่ละรอบของการคำนวณ อย่างไรก็ตามจะเข้าใกล้หนึ่งเมื่อการคำนวณให้ค่าที่เข้าสู่ผลเฉลย จึงถือได้ว่า P_T เป็นตัวแปรอีกตัวหนึ่ง ในการหาผลเฉลยเอนโทรปีสูงสุดเลือกใช้ขั้นตอนการ iterative ของ Bevensee ดังหัวข้อถัดไป

Bevensee's Iterative Algorithm

ในปี 1981, Bevensee ได้นำเทคนิคการ iterative ที่มีประสิทธิภาพสูงมาใช้ในการหาผลเฉลยระบบสมการที่มีตัวแปรมากกว่าสมการ ซึ่งภายหลังได้ปรับปรุงให้ดียิ่งขึ้น (Bevensee, 1993) โดยแต่ละรอบของการทำ iterative จะมีการแก้เมตริกซ์อยู่ด้วยเสมอทำให้เข้าสู่ผลเฉลยได้เร็วขึ้น อัลกอริทึมนี้เริ่มต้นด้วยการสมมติค่า $\beta_i^{(0)}$ และ $P_T^{(0)}$ ที่สมเหตุสมผล จากนั้นคำนวณค่าต่าง ๆ ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. คำนวณค่า $P_k^{(1)}$ จากสมการที่ (5.7)

2. คำนวณค่า $M_i^{(1)}$ จากสมการโมเมนต์
3. คำนวณ $P_T^{(0)}$ ด้วยค่า c ที่คำนวณจากสมการที่ (5.8) จะได้ค่า $P_T^{(1)}$

$$c = \frac{\sum \beta_i^{(0)} M_i}{\sum \beta_i^{(0)} M_i^{(1)}} \quad (5.8)$$

4. ในทำนองเดียวกัน คำนวณ $P_k^{(1)}$ และ $M_i^{(1)}$ ด้วย c

$$P_k^{(1)} \rightarrow c P_k^{(1)} \quad , \quad M_i^{(1)} \rightarrow c M_i^{(1)}$$

5. เพื่อให้ค่า $M_i^{(1)}$ ที่คำนวณได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าจากการวัด M_i จำเป็นต้องใช้ค่า $\Delta \beta_i^{(1)}$ ซึ่งทำได้โดยแก้ปัญหасмการดิฟเฟอเรนเชียลจำนวน 1 สมการ

$$\Delta M_i^{(1)} = M_i - M_i^{(1)} = \sum_{j=1}^I \frac{\partial M_i^{(1)}}{\partial \beta_j} \Delta \beta_j^{(1)} \quad (5.9)$$

ค่า $\Delta \beta_i^{(1)}$ ที่คำนวณได้นำมาหาค่า $\beta_i^{(1)}$ โดย

$$\beta_i^{(1)} = \beta_i^{(0)} + \Delta \beta_i^{(1)} \quad (5.10)$$

ด้วยค่า $\beta_i^{(1)}$ นี้ย้อนกลับสู่ขั้นตอนที่ 1-5 ใหม่อีกครั้งซึ่งจะได้ค่า $P_k^{(2)}$, $M_i^{(2)}$ และ $\beta_i^{(2)}$ ทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ค่า P_k ที่ต้องการโดยพิจารณาจากค่า M_i ที่ยอมรับได้ สมการที่ () สามารถเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

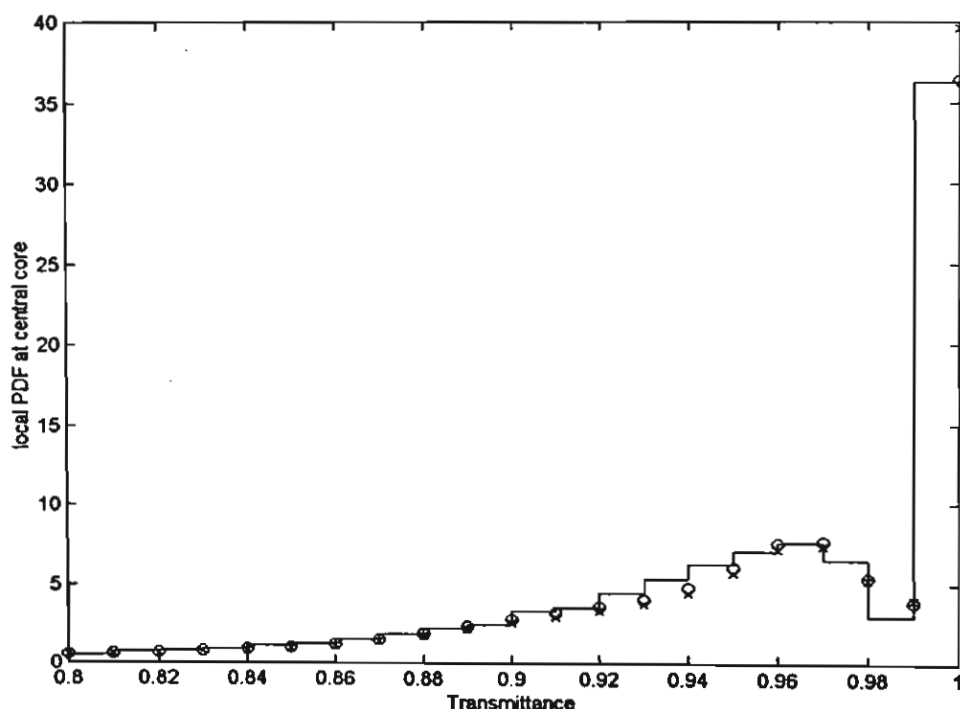
$$[\Delta M]^{(1)} = \left[A \left(X^{(1)} - \frac{1}{P_T} [P]^{(1)} [P^T]^{(1)} \right) A^T \right] \cdot [\Delta \beta]^{(1)} \quad (5.11)$$

เมื่อ A เป็นเมตริกซ์ค่าการส่งผ่านในปัญหาโมเมนต์ โดยมีขนาด $I \times K$ มีสมาชิกเป็น τ_k^i และ X เป็นเมตริกซ์แนวทแยงมุมหลักโดยมีสมาชิก X_{ii} เท่ากับ $P_i^{(1)}$ ด้วย T หมายถึง ทรานสโพสของเมตริกซ์หรือเวกเตอร์นั้น และ $[\]$ หมายถึงเวกเตอร์ ระบบสมการข้างต้นเป็นระบบสมการที่

ill-conditioned และ rank ไม่เพียงพอ งานวิจัยนี้เลือกใช้ Psudoinverse (Lawson, 1974) เพื่อแก้ปัญหานี้

ผลการสร้าง Local-PDF ของเปลว Propylene ด้วยข้อมูลจำกัด

ในหัวข้อนี้การคำนวณค่า Local-PDF จากโลคัลโมเมนต์ด้วยวิธีเอนโทรปีสูงสุดจะเลือกใช้โมเมนต์เพียง 50 ลำดับแรกเท่านั้น ผลการสร้าง Local-PDF ด้วยวิธีแยกพิกเซลธรรมชาติ และวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันเมื่อมีจำนวนข้อมูลเท่ากัน จะนำมาเปรียบเทียบกับค่าจากการวัดจริงดังแสดงในภาพที่ 39 ซึ่งเห็นได้ชัดว่าเมื่อจำกัดจำนวนมุมไว้ที่ 16 มุม จำนวนข้อมูลแนวขวาง 32 แถบ และจำนวนพิกเซล 64×64 พิกเซล วิธีแยกพิกเซลธรรมชาติจะให้ผลการสร้างภาพเสมือนที่ใกล้เคียงกับค่าจากวัดเมื่อเทียบกับวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชัน โดยเฉพาะที่ตำแหน่งค่าการส่งผ่านเท่ากับ 1 ซึ่งวิธีฟิลเตอร์แบ็คโปรเจกชันให้ค่าที่คลาดเคลื่อนสูงมาก อย่างไรก็ตามยังคงเห็นความแตกต่างของค่า Local-PDF ทั้งที่โลคัลโมเมนต์ที่คำนวณได้มีค่าใกล้เคียงกับเมื่อมีข้อมูลสมบูรณ์ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าค่าโลคัลโมเมนต์ที่เปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยมีผลกระทบต่อการสร้างภาพเสมือนของ Local-PDF เป็นอย่างมาก



ภาพที่ 40 เปรียบเทียบผลการสร้างภาพเสมือน Local-PDF ของเปลว Propylene กับค่าที่ได้จากการวัด ณ ตำแหน่งศูนย์กลางเปลว

x FBP $M = 16$ $N = 32$ pixel = 64×64

o NP $M = 16$ $N = 32$ pixel = 64×64

บทที่ 6

บทสรุป

รายงานวิจัยได้แสดงวิธีการประยุกต์วิธีโทโมกราฟฟีกับการวินิจฉัยการไหลหลายองค์ประกอบแบบมีปฏิริยาโดยเฉพาะการวินิจฉัยเปลวไฟแบบเทอร์บิวเลนซ์ โดยได้เริ่มศึกษาความเชื่อมโยงของวิธีโทโมกราฟฟีที่ใช้ในวงการแพทย์กับโทโมกราฟฟีที่ใช้ศึกษาการไหลหลายองค์ประกอบในเปลวเพลิง

ในระยะแรกของการวิจัยใช้วิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชันคำนวณหาลักษณะโปรไฟล์ของค่าเฉลี่ยคุณสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์ของเปลวไฟจำลองจากข้อมูลภาพฉาย โดยศึกษาผลกระทบของตัวแปรต่าง ๆ เช่น จำนวนมุม จำนวนเส้นวิถีรวมจากข้อมูลภาพฉาย ตลอดจนฟิลเตอร์ฟังก์ชันที่ใช้ในกระบวนการสร้างภาพที่มีต่อคุณภาพของภาพเสมือนที่สร้างขึ้น จากการศึกษาพบว่าจำนวนมุมตัวอย่างต้องมีมากพอที่จะเทียบเคียงกับความถี่ในการเก็บตัวอย่างของเส้นวิถีรวม หากจำนวนมุมน้อยเกินไปจะเกิดความคลาดเคลื่อนของภาพเสมือนไปจากภาพจริง ปรากฏเป็นลักษณะที่คล้ายกับสัญญาณรบกวน งานวิจัยยังได้แสดงผลของสัญญาณรบกวนต่อการสร้างภาพด้วยวิธีดังกล่าวนี้ด้วย

เนื่องจากปรากฏการณ์ในเปลวไฟมักเป็นการไหลในลักษณะที่เป็นเทอร์บิวเลนซ์ จึงได้ดำเนินการวิจัยการสร้างภาพเสมือนของความหนาแน่นความน่าจะเป็นของคุณสมบัติทางเทอร์โมไดนามิกส์โดยวิธีโทโมกราฟฟีด้วย ทั้งนี้ได้แสดงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ของโมเมนต์ของฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของผลรวมแนววิถีและโลคัลโมเมนต์ ผลการสร้างภาพเสมือนยืนยันให้เห็นว่าค่าที่คำนวณได้มีค่าสอดคล้องกับค่า PDF ของฟังก์ชันทดสอบ (Sivathanu, 1993) ดังแสดงในภาพที่ 18 สังเกตได้จากค่าผลรวมความหนาแน่นความน่าจะเป็นมีค่าต่างจาก 1 ไม่เกิน 0.01%

การศึกษานี้ได้ดำเนินการพัฒนาขั้นตอนวิธีการสร้างภาพเสมือนของ Local-PDF จากข้อมูล Path-PDF ด้วยวิธีการแปลงโมเมนต์ ซึ่งแบ่งออกเป็น 4 ขั้นตอน คือ

1. ทำการวัดค่า PDF วิถีรวม
2. แปลงข้อมูล PDF วิถีรวมจากการวัดเป็นโมเมนต์วิถีรวม ด้วยความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ตาม สมการ (3.2)

3. นำโมเมนต์วีธีรวมมาคำนวณสร้างภาพเสมือนของโลคัลโมเมนต์ (ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้ใช้ขั้นตอนวิธีฟิลเตอร์แบคโปรเจกชันหรือ FBP) ที่ลำดับต่าง ๆ เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาโมเมนต์สมการ (3.7)
4. ใช้โลคัลโมเมนต์ที่ได้จากการสร้างภาพเสมือนเป็น Local-PDF โดยการแก้ปัญหาโมเมนต์ (ในที่นี้ใช้วิธีการแยกค่าเอกฐานหรือ SVD)

แต่ขั้นตอนวิธีนี้มีข้อจำกัดสำคัญสองข้อคือ

1. ข้อมูลโมเมนต์วีธีรวมต้องมีจำนวนมาก (เพราะกระบวนการอยู่บนพื้นฐานการแปลงฟูริเยร์แบบต่อเนื่อง)
2. Local-PDF แต่ละจุดต้องเป็นอิสระต่อกัน (Statistically independent)

เพื่อผ่อนปรนเงื่อนไขเหล่านี้จึงได้นำวิธีโทโมกราฟีแบบไม่ต่อเนื่องมาประยุกต์ใช้กับงานวิจัยนี้

การพัฒนาขั้นตอนวิธีการสร้างภาพเสมือนด้วยวิธีโทโมกราฟีแบบไม่ต่อเนื่องเลือกฟังก์ชันเกาส์แบบเยื้องศูนย์เป็นฟังก์ชันทดสอบ และใช้วิธีพีชคณิต (Algebraic reconstruction techniques, ART) และวิธีการแยกพิกเซลธรรมชาติ (Natural pixel decomposition, NP) สำหรับวิธี NP นั้น ใช้เทคนิคเวฟเลทช่วยในการหาผลเฉลย และได้ใช้วิธี Maximum Entropy แก้ปัญหาโมเมนต์

ทั้งวิธี ART และวิธี NP จำเป็นต้องใช้เมทริกซ์ ϕ ที่ถูกต้อง การทดสอบ ϕ ได้อาศัยลักษณะสมบัติของ G (ในที่นี้คือ $(\phi)(\mathcal{X}^T)$) กล่าวคือ สมาชิกบนเส้นทะแยงมุมของ G คือพื้นที่ของแถบแต่ละแถบเช่น G_{11} คือพื้นที่แถบ y_{11} , G_{22} คือพื้นที่แถบ y_{22} นอกจากนี้สมาชิก G_{ij} ยังแสดงพื้นที่แถบที่ i ที่สัมพันธ์กับพื้นที่ j ดังนั้นเมทริกซ์ G จึงเป็นช่องทางที่จะประมาณความสัมพันธ์ร่วม (Correlation) ของพิกเซลต่าง ๆ อันจะเป็นผลการผ่อนปรนเงื่อนไขความไม่ขึ้นต่อกันของ Local-PDF

จำนวนพิกเซลที่ใช้ในการสร้าง ϕ ถูกจำกัดด้วยจำนวนแถบ การเพิ่มจำนวนพิกเซลภายใต้ข้อจำกัดของจำนวนแถบจะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนในลักษณะเป็นเส้น (Streakline error) ในทางตรงกันข้ามการเพิ่มจำนวนแถบจะทำให้ภาพฉายแบบแถบมีค่าเข้าใกล้ค่าที่อินทิเกรต (หรือวัดจริง) มากขึ้น แต่ก็ถูกจำกัดโดยจำนวนพิกเซลที่ใช้สร้าง ϕ เช่นกัน ข้อจำกัดของข้อมูลโทโมกราฟีมักจะอยู่ที่จำนวนมุมในการเก็บตัวอย่าง เมื่อมุมน้อยลงจะส่งผลให้การสร้างภาพมีความคลาดเคลื่อนสูง

การทดลองใช้กระบวนการโทโมกราฟีแบบไม่ต่อเนื่องด้วยวิธี ART และ เวฟเลท-NP พบว่าให้ค่า $\hat{f}$ ที่ดีกว่าวิธี FBP ในกรณีที่ข้อมูลเชิงมุมน้อย แต่เมื่อข้อมูลเชิงมุมมากขึ้นวิธี ART และ FBP ให้ผลที่ใกล้เคียงกัน วิธีเวฟเลท-NP มีข้อจำกัดเมื่อข้อมูลมาก และเมื่อดูจากผลเฉลยพบว่ามีลักษณะความผิดพลาดเหมือนกับสัญญาณรบกวน (White noise) ซึ่งอาจเกิด

จากวิธีการแก้เมตริกซ์ขนาดใหญ่ ดังนั้นเทคนิคในการแก้ปัญหามเมตริกซ์ขนาดใหญ่จึงเป็นแนวทางในการทำวิจัยต่อไป

ผลการสร้าง Local-PDF จากข้อมูลโทโมกราฟีที่มีปริมาณจำกัดโดยใช้วิธี FBP และ NP นั้นแสดงให้เห็นว่า วิธี NP ให้ผลที่ดีกว่าดังแสดงในภาพที่ 40 จึงสรุปได้ในเบื้องต้นว่า วิธีโทโมกราฟีแบบไม่ต่อเนื่องสามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาทางการสันดาปได้ นอกจากนี้การสร้าง PDF จากโมเมนต์ด้วยวิธี Maximum Entropy แสดงให้เห็นชัดเจนว่าฟังก์ชัน PDF ในกรณีของการสันดาปของเปลวเพลิงขึ้นอยู่กับโมเมนต์อันดับต้น ๆ เท่านั้น

แนวทางการวิจัยในอนาคต

จากผลการสร้างภาพเสมือนโดยนำการแปลงเวฟเลทมาประยุกต์กับวิธี NP แสดงให้เห็นว่า หากมีการพิจารณาดัดสัประสิทธิ์บางตัวในเมตริกซ์ที่ผ่านการแปลงเวฟเลทแล้ว จะสามารถลดความผิดพลาดของภาพเสมือนลงได้ เนื่องจากลักษณะของความผิดพลาดที่เกิดขึ้นคล้ายกับสัญญาณความถี่สูงขนาดเล็ก ซึ่งโดยคุณสมบัติของการแปลงเวฟเลทสามารถขจัดสัญญาณรบกวนในลักษณะนี้ได้ดี (Newland, 1993) ดังนั้นการศึกษากการแปลงเวฟเลทในระดับลึกเพื่อให้เข้าใจถึงรายละเอียดทางคณิตศาสตร์ จึงเป็นสิ่งจำเป็นในการนำการแปลงเวฟเลทมาประยุกต์กับวิธีโทโมกราฟี

เมตริกซ์พิกเซลธรรมชาติ, G , ที่ผ่านการแปลงเวฟเลทแล้ว แม้จะมีขนาดใหญ่แต่มีลักษณะที่กระจายมาก (Spread) ดังนั้นหากใช้ขั้นตอนวิธีการคำนวณเมตริกซ์ที่สามารถนำเฉพาะหน่วยที่มีค่าในเมตริกซ์มาคำนวณ โดยละการคำนวณในหน่วยที่ไม่มีค่า จะทำให้ใช้หน่วยความจำและเวลาในการคำนวณน้อยลงมาก ซึ่งสามารถสร้างภาพเสมือนจากข้อมูลวิถีรวมที่มากขึ้นได้โดยใช้เครื่องคำนวณแบบเดิม ทำให้การสร้างภาพเสมือนด้วยวิธี NP มีประสิทธิภาพมากขึ้น

การศึกษาความสัมพันธ์ของ Local-PDF ของค่าการส่งผ่านในแต่ละจุดในเปลวเพลิงที่ทำการวัด จะทำให้การสร้างภาพเสมือนให้ผลเฉลยที่ใกล้เคียงความเป็นจริงมากขึ้น โดยวิธีโทโมกราฟีแบบไม่ต่อเนื่อง อนุญาตให้ใส่ความสมการความสัมพันธ์นี้เพิ่มเข้าไปได้ เพราะเป็นการคำนวณสร้างภาพเสมือนที่มีระดับความเป็นอิสระ (Degree of freedom) ของค่าคุณสมบัติในแต่ละจุดสูง