



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ

พฤติกรรมเซมิคลาสสิกของอนุภาคในสนามศักย์ที่นิยามโดย $(Q-xy)^2$

The Semiclassical Behaviour of the Particle in the $(Q-xy)^2$ Potential

โดย

ผศ.ดร.กฤษณะเดช เจริญสุธาสินี

สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์

กันยายน 2545



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ

พฤติกรรมเซมิคลาสสิกของอนุภาคในสนามศักย์ที่นิยามโดย $(Q-xy)^2$

The Semiclassical Behaviour of the Particle in the $(Q-xy)^2$ Potential

โดย

ผศ.ดร.กฤษณะเดช เจริญสุธาสินี
สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์

กันยายน 2545

สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.)
ชั้น 14 อาคาร เอส เอ็ม เทวาเจอร์
เลขที่ 979 17-21 ถนนพหลโยธิน แขวงสามเสนใน
เขตจตุจักร กรุงเทพมหานคร 10400
โทร 298-0455 โทรสาร 298-0476
Home page : <http://www.trf.or.th>
E-mail : trf-info@trf.or.th



วันที่.....	3 ส.ย. 2546
เลขทะเบียน.....	00008
	PDF
เลขเรียกหนังสือ.....	40
	8

C062

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ

พฤติกรรมเซมิคลาสสิกของอนุภาคในสนามศักย์ที่นิยามโดย $(Q-xy)^2$

The Semiclassical Behaviour of the Particle in the $(Q-xy)^2$ Potential

ผู้วิจัย

ผศ.ดร.กฤษณะเดช เจริญสุธาสินี

สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

(ความเห็นในรายงานฉบับนี้เป็นของผู้วิจัย สกว.ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

บทคัดย่อ

(รหัสโครงการ) PDF/62/2540
(ชื่อโครงการ) พฤติกรรมเซมิลาสสิกของอนุภาคในสนามศักย์ที่นิยามโดย $(Q-xy)^2$
ชื่อนักวิจัย ผศ.ดร.กฤษณะเดช เจริญสุธาสินี
สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์
อ.ท่าศาลา จ.นครศรีธรรมราช
Email address: jkrisana@wu.ac.th
ระยะเวลาโครงการ 3 ปี
ชื่อนักวิจัยที่ปรึกษา Prof.Dr. George Rowlands
Department of Physics, Warwick University, Coventry CV4 7AL
United Kingdom

โครงการนี้มีวัตถุประสงค์

เพื่อคำนวณหาโครงสร้างมหภาคของระนาบเฟสของอนุภาคที่อยู่ในสนามศักย์ $(Q-xy)^2$ จะสนใจระนาบเฟสที่ประกอบด้วยวงโคจรมีคาบที่มีคาบสั้นและคาบไม่ยาวมากนักเนื่องจากวงโคจรเหล่านี้มีผลที่สำคัญอย่างมากกับการคำนวณระดับพลังงาน (Energy Eigenvalues) ซึ่งจะเป็นการวิจัยต่อไป

Keywords: Chaos, Periodic Orbit Calculation, Periodic Orbit Family

Abstract

Project Code : PDF/62/2540
Project Title : The Semiclassical Behaviour of the Particle in the $(Q-xy)^2$ Potential
Investigator : Asst.Prof.Dr. Krisanadej Jaroensutasinee
Institute of Science, Walailak University
Tasala, NakhonSiThammarat
Email address: jkrisana@wu.ac.th

Project Period 3 years

ชื่อนักวิจัยที่ปรึกษา Prof.Dr. George Rowlands
Department of Physics, Warwick University, Coventry CV4 7AL
United Kingdom

Objectives of this project

To calculate macroscopic structure of the phase space of the dynamic of a single particle in $(Q-xy)^2$ potential. We consider the phase space which composes of orbits of short period. This knowledge is important when computing semiclassical energy eigenvalues which is the object of further study.

Keywords: Chaos, Periodic Orbit Calculation, Periodic Orbit Family

พฤติกรรมเซมิคลาสสิกของอนุภาคในสนามศักย์ที่นิยามโดย $(Q-xy)^2$

The Semiclassical Behaviour of the Particle in the $(Q-xy)^2$ Potential

1 เนื้อหางานวิจัย

1.1 บทนำ

1.1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

ความสำเร็จในการศึกษาระบบต่างๆ ทางฟิสิกส์ในธรรมชาติเกิดจากการสร้างแบบจำลองทางฟิสิกส์ของระบบนั้นๆ แบบจำลองเหล่านี้ช่วยให้เกิดความเข้าใจ และโดยอาศัยความสามารถในการทำนายความเป็นไปในอนาคตของระบบจากแบบจำลองนั้นทำให้เกิดความสามารถที่จะควบคุม ความสามารถในการทำนายและความสามารถที่จะควบคุมธรรมชาติรอบๆตัวเราเหล่านี้ได้ทำให้มนุษย์มีความสามารถที่จะสร้างสิ่งประดิษฐ์และเทคโนโลยีต่างๆ รอบตัวเราที่ช่วยยกมาตรฐานและอำนวยความสะดวกต่อการดำรงชีวิต และเป็นที่มาของเทคโนโลยีที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบัน อย่างไรก็ตามขณะนี้เราทราบว่ามีแง่มุมหนึ่งของธรรมชาติ ซึ่งรู้จักกันดีในชื่อ “ส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น” ของธรรมชาติ แง่มุมนี้ของธรรมชาติมักจะถูก “ละเลย” จาก การทำให้แบบจำลองง่าย (Simplification of the model) การละเลยนี้พบว่าแบบจำลองที่ได้จะสูญเสียคุณสมบัติและพฤติกรรมที่สำคัญๆ ไป แต่เมื่อเราไม่ตัดส่วนไม่เป็นเชิงเส้นออกจากตัวโมเดล (จากการศึกษาโดยใช้คอมพิวเตอร์ประสิทธิภาพสูงในช่วง 10-20 ปีที่ผ่านมา) พบว่าระบบมีความสลับซับซ้อนที่น่าสนใจมากและบรรจุพฤติกรรมมากมายที่เคยถูกละเลย สิ่งนี้ทำลายความสามารถในการทำนายแบบเก่า (Unpredictability) และการควบคุมทำได้ยากขึ้น หรือที่รู้จักกันในชื่อ “พฤติกรรมแบบเคออส” (ความซับซ้อนไร้ระเบียบสามารถเกิดจากองค์ประกอบภายนอกที่รบกวนระบบได้ ซึ่งเราไม่สนใจในที่นี้) ฟิสิกส์ของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นและเคออสได้กลายเป็นสาขาใหญ่ และแทรกตัวเข้าไปในหลายๆ สาขาวิชานอกจากฟิสิกส์ มีกิจกรรมการวิจัยทั่วโลก มีการตั้งศูนย์วิจัยเฉพาะเรื่องนี้ขึ้นทั่วโลก ตัวอย่างที่สำคัญมากคือ Santa Fe Institute ที่สละการวิจัยทั้งหมดให้กับศาสตร์ของความซับซ้อน (Complex systems) นักวิจัยทั่วโลกเริ่มเข้าถึงปรัชญาที่เกิดจากวิชาเคออสที่กล่าวว่า ความสลับซับซ้อนไม่จำเป็นต้องมาจากความซับซ้อน มันสามารถเกิดจากโครงสร้างง่ายๆ ได้

จากการค้นพบปรัชญานี้ก่อให้เกิดการถกเถียงและศึกษากันอย่างกว้างขวางถึงสิ่งที่เป็นรากฐานของวิชาฟิสิกส์ (และวิทยาศาสตร์) นักวิทยาศาสตร์ทั่วโลกได้ให้ความสนใจศึกษาระบบทางควอนตัมที่ในระดับคลาสสิกเป็นเคออสอย่างมากมาย หนึ่งในสิ่งที่ศึกษาคือความไม่สอดคล้องกันระหว่างกลศาสตร์ควอนตัมกับกลศาสตร์คลาสสิก สำหรับระบบที่มีการแสดงพฤติกรรมเคออสในระดับคลาสสิกควอนตัมเคออสคือการศึกษาถึงความเกี่ยวพันเพื่อจะแก้ความขัดแย้งนี้ การวิจัยจะมุ่งเน้นไปที่ระดับเซมิคลาสสิกที่เป็นรอยต่อของทั้งสองระดับ ปัจจุบันเริ่มมีความเข้าใจสิ่งที่เกิดขึ้นในบริเวณเชื่อมโยง

นี้สำหรับบางระบบที่ได้ถูกศึกษาแล้ว ตัวอย่างเช่น ระบบของอะตอมที่ถูกกระตุ้นไปอยู่ที่สภาวะเลขควอนตัมสูงๆและอยู่ภายในสนามแม่เหล็กความเข้มสูง เป็นต้น

ในการศึกษาหรือทำความเข้าใจระบบพลวัตแบบไม่เชิงเส้นนี้ต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างของระนาบเฟส ที่ประกอบด้วยวงโคจรที่มีคาบ ทั้งเสถียรและไม่เสถียร รวมไปถึงวงโคจรที่มีคาบเทียม (Quasiperiodicity) การหาวงโคจรเหล่านี้ไม่ใช่เรื่องง่าย วงโคจรเหล่านี้ดูเหมือนว่าจะมีอยู่โดยไม่มีเหตุผล นักคณิตศาสตร์และนักวิจัยได้พยายามสร้างเครื่องมือสำหรับหาวงโคจรเหล่านี้ ยังไม่มีผู้ใดค้นพบวิธีมาตรฐาน โครงสร้างมหภาค (Global Structure) เป็นสิ่งที่ต้องการอย่างมากแต่คำนวณได้ยากในการนำไปใช้ การหาวิธีใหม่ๆในการสร้างระนาบเฟสมหภาคนี้เป็นวัตถุประสงค์หนึ่งของโครงการวิจัยนี้

1.1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการ

- เพื่อประยุกต์หรือคิดค้นวิธีการต่างๆ เพื่อหาวงโคจรที่มีคาบ ทั้งที่มีเสถียรภาพและไม่มีเสถียรภาพ สำหรับอนุภาคในสนามศักย์ $(Q-xy)^2$
- เพื่อศึกษาโครงสร้างมหภาค (Global Structure) ของระนาบเฟสภาพตัดขวางของปองคาเรของพลศาสตร์ของอนุภาคในสนามศักย์ $(Q-xy)^2$ ที่ประกอบด้วย วงโคจรมีคาบ โครงสร้าง มหภาคของระนาบเฟสนี้สามารถนำไปสู่ความเข้าใจในพลศาสตร์ของอนุภาคทั้งหมด
- เพื่อศึกษาพฤติกรรมของอนุภาคในระบบนี้ในระดับเซมิคลาสสิก ซึ่งเกี่ยวข้องกับปัญหาที่สำคัญๆในสาขาการวิจัยควอนตัมเคออส เช่น ความสมเหตุสมผลของหลักความสอดคล้อง

1.2 วิธีการทดลอง

1.2.1 ระเบียบวิธีวิจัย

การศึกษาเพื่อสร้างโครงสร้างมหภาค (Global Structure) ของระนาบเฟสภาพตัดขวางของปองคาเรของระบบที่สนใจ ด้วยการใช้คอมพิวเตอร์คำนวณซึ่งผสมผสานวิธีที่ใช้ในระดับคลาสสิกที่เคยใช้มาแล้ว และวิธีตรง (Direct Function Definition) ซึ่งกำลังพัฒนาขึ้นมาใหม่

นอกจากนี้อาจจะมีการประยุกต์วิธีทางเซมิคลาสสิก เช่น ใช้การคำนวณของ Husimi, และการสร้างภาพตัดขวางของฟังก์ชันคลื่นตามวิธีการศึกษาของ Heller เป็นต้น อาจจะต้องนำวิธีของการใส่สัญลักษณ์ (Symbolic Coding) มาใช้ถ้าจำเป็น การวิเคราะห์ผลที่ได้จะบอกถึงพฤติกรรมรวมของอนุภาคในระบบนี้ทั้งในระดับเซมิคลาสสิกและในระดับคลาสสิก

1.2.2 ขอบเขตของการวิจัย

การศึกษาจะพยายามคำนวณหาโครงสร้างมหภาคของระนาบเฟสของอนุภาคที่อยู่ในสนามศักย์ $(Q-xy)^2$ จะสนใจระนาบเฟสที่ประกอบด้วยวงโคจรมีคาบที่มีคาบสั้นและคาบไม่ยาวมากนักเนื่องจากวง

โคจรเหล่านี้มีผลที่สำคัญอย่างมากกับการคำนวณระดับพลังงาน (Energy Eigenvalues) ซึ่งจะเป็นการวิจัยต่อไป

1.2.3 อุปกรณ์ที่ใช้ในการวิจัย

จัดหาในโครงการวิจัย

- ประกอบเครื่องคอมพิวเตอร์ Pentium 200 MHz 2 CPU, 256 MB RAM, 4 GB Harddisk พร้อมระบบ Backup ข้อมูล
- ระบบปฏิบัติการ Windows NT 4.0, Windows 2000, Linux Redhat

ได้มาภายหลังปี 2544

- Mathematica
- Parallel Computing Toolkit
- WAC16P4 Cluster

1.3 ผลการทดลอง

ได้ทำการวิเคราะห์และคำนวณ ทั้งพัฒนาวิธีการต่างๆ โดยสามารถศึกษารายละเอียดได้จากบทความวิจัยต่างๆ ที่แนบมาด้วย

1.4 บทวิจารณ์

1.4.1 แผนการดำเนินงานตลอดโครงการ และผล (output) ที่จะได้

1.4.2 แผนการดำเนินงาน

ระยะเวลาของโครงการ 3 ปี

แผนงานวิจัยและขั้นตอนวิธีการวิจัย

1. การสำรวจและเก็บรวบรวม ติดตาม บทความและผลงานที่ทำโดยนักวิจัยทั่วโลก
2. การติดตั้งคอมพิวเตอร์ ระบบปฏิบัติการ และซอฟต์แวร์ที่จำเป็น ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนที่สำคัญมากที่สุดขั้นตอนหนึ่ง และเป็นขั้นตอนที่ใช้เวลามาก เนื่องจากการวิจัยเป็นการคำนวณที่ซับซ้อนและใช้เวลามาก
3. การเตรียมระบบพิมพ์ ซึ่งจะใช้โปรแกรมมาตรฐานสำหรับการตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ คือระบบ TeX LaTeX และ RevTeX ขณะนี้ได้ทำสำเร็จแล้วในระดับหนึ่ง แต่ยังคงต้องมีการทดสอบต่อไปถึงการรวมภาพกราฟิก
4. โปรแกรมเครื่องคอมพิวเตอร์เพื่อให้ทำการคำนวณหาโครงสร้างของวงโคจรที่มีคาบทั้งแบบที่เสถียรและแบบที่ไม่เสถียรโดยใช้ระบบเฟสแบบภาพตัดของปองคาเร
5. พัฒนาริขตรง (Direct Function Definition) ให้ใช้งานได้ใน 2 มิติแล้วนำมาทดสอบคำนวณ

6. โปรแกรมเครื่องคอมพิวเตอร์เพื่อให้ทำการคำนวณหาโครงสร้างของวงโคจรที่มีคาบทั้งแบบที่เสถียรและแบบที่ไม่เสถียรโดยใช้วิธีทางเซมิคลาสสิก เช่นวิธีของ Husimi, วิธีของ Heller และวิธีของ Wigner
 7. โปรแกรมเครื่องคอมพิวเตอร์เพื่อให้ทำการคำนวณหาโครงสร้างของวงโคจรที่มีคาบทั้งแบบที่เสถียรและแบบที่ไม่เสถียรโดยใช้วิธีของการใส่สัญลักษณ์ (Symbolic Coding) ถ้าจำเป็น
 8. ทดสอบกับระบบที่ได้ศึกษามาแล้ว เช่น สนามคักย์แบบ x^2+x^4 (Takahashi 1989)
 9. นำมาประยุกต์กับสนามคักย์ $(Q-xy)^2$
 10. การวิเคราะห์ และแปลความหมายของผลที่ได้ทั้งหมด
 11. การนำเอาผลที่ได้ไปใช้ในการสัมมนา หรือแสดงโปสเตอร์ในการประชุมวิชาการระดับในประเทศ และการเตรียมบทความสำหรับตีพิมพ์ในวารสารภายในประเทศ
 12. การเตรียมบทความเพื่อไปตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติ และการสัมมนาหรือแสดงโปสเตอร์ในการประชุมวิชาการองค์ความรู้ใหม่ที่ได้
- 1.4.3 ผลงานหรือกิจกรรมที่ทำได้อ้างอิง
- 1.4.3.1 ติดตั้งระบบคอมพิวเตอร์ Cluster
- ติดตั้งและทดสอบระบบปฏิบัติการ Linux
 - ติดตั้ง Windows Terminal Edition
 - ทำการแปลง Code มาอยู่ในภาษา Java เพื่อให้โปรแกรมเชื่อมโยงกันเป็นแบบ Cluster
 - พัฒนาวิธีตรง (Direct Function Definition Method – DirectD Method) สำหรับปัญหา $1/2(Q-xy)^2$ เพื่อคำนวณวงโคจรที่มีคาบ
 - พัฒนาเทคนิคเพื่อแก้ปัญหาการใช้เวลาในการคำนวณสำหรับกรณีที่ Magnetic Moment มีค่าน้อยๆ
 - ติดตั้งและทดสอบ Windows 2000 Advanced Server
 - ติดตั้งโปรแกรม Matlab และ Mathematica
 - สั่งซื้อ Parallel Computing Toolkit
 - Upgrade Mathematica จากรุ่น 3.0 ไปรุ่น 4.1 เพื่อเพิ่มความเร็วในการคำนวณเชิงตัวเลข
 - ได้ทำการแปลง Code มาอยู่ในภาษา Java เพื่อให้โปรแกรมเชื่อมโยงกันเป็นแบบ Cluster
 - ติดตั้งเครือข่าย Network ให้เครื่องคอมพิวเตอร์ติดต่อกันได้
 - เตรียมระบบสำหรับการทำงานแบบ Parallel
 - ติดตั้งระบบคลัสเตอร์ เพราะทางมหาวิทยาลัยพึงจะจัดหาครุภัณฑ์ให้
 - ทำการทดสอบ Parallel Computing Toolkit เพื่อนำมาใช้ในการคำนวณหาวงโคจรมีคาบโดยวิธี DirectD

- ได้งบประมาณจากทางมหาวิทยาลัยเพื่อจัดหาระบบคลัสเตอร์ประสิทธิภาพสูง ขณะนี้อยู่ในขั้นตอนการติดตั้งระบบคลัสเตอร์และโปรแกรมคำนวณขนาน
- กำลังติดต่อกับทาง Wolfram เพื่อจัดหาซอฟต์แวร์ *Mathematica* รวมทั้งพวก Toolkit ต่างๆ ซึ่งถ้าได้มาก็จะทำให้การคำนวณเป็นไปได้ง่ายและสะดวกขึ้น เพราะมี Parallel Toolkit ที่สามารถนำไปใช้งานได้ทันที

1.4.3.2 การวิจัย

- ทดสอบวิธีการ DirectD กับ Logistic Map และได้สร้างโครงสร้างที่ซ่อนอยู่ ซึ่งสามารถอธิบายกระบวนการ Bifurcation 2 แบบที่เกิดขึ้นใน Logistic Map ได้
- ทดสอบวิธีการ DirectD กับ Standard Map และค้นพบวิธีการสร้างภาพของ Homoclinic Tangle อย่างรวดเร็วได้ ทำให้เข้าใจกระบวนการ Mixing ที่เกิดใน Map นี้ได้เป็นอย่างดี อย่างไรก็ตามก็ตีการคำนวณตำแหน่ง Periodic Orbit โดยใช้วิธีนี้ต้องอาศัยการทำ Optimization และในปัญหานี้เทคนิคการทำ Optimization เป็นเรื่องที่ยากมากเนื่องจากโครงสร้าง Fractal ที่เกิดขึ้นโดยปกติทำให้กระบวนการวิธีค้นหาแบบปกติ เช่น Simplex Searching ล้มเหลว
- เขียนโปรแกรมสำหรับการคำนวณ Poincare Map สำหรับปัญหา $1/2(Q-xy)^2$ ซึ่ง Map นี้จะเป็นรากฐานที่สำคัญในการคำนวณหาวงโคจรมีคาบโดยวิธี DirectD โดยใช้ Mathematica ซึ่งยาก เพราะถ้าเขียนไม่ถูกวิธีจะทำงานช้ามาก
- พัฒนาเทคนิคเพื่อแก้ปัญหาการใช้เวลานานในการคำนวณสำหรับกรณีที่มี Magnetic Moment มีค่าน้อยๆ โดยได้ตีพิมพ์เนื้อหาในส่วนนี้แล้วใน Journal of Plasma Physics
- พัฒนาวิธีการ Multiple Scale Perturbation Analysis เพื่อสร้าง Map สำหรับทุกค่า Q อันจะนำไปใช้ในการศึกษาพฤติกรรม Quantum ของระบบต่อไป

1.4.3.3 สํารวจบทความและรวบรวมผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

- บอกรับเป็นสมาชิกวารสาร Chaos, Phys. Rev. E, Nonlinearity, American Journal of Physics และ Computing in Science and Engineering โดยสมัครเป็นสมาชิกสมาคม IEEE, APS, AIP, IOP
- จัดซื้อหนังสือเกี่ยวกับการดูแลและโครงสร้างของ Windows 2000 และภาษา Java เพื่อที่จะได้ใช้งานระบบปฏิบัติการนี้ให้มีประสิทธิภาพสูงสุด
- ได้ทำสำเนาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย โดยเฉพาะด้าน Cluster และ Parallel Computing

1.4.3.4 การเขียนบทความเพื่อเผยแพร่ผลงานวิจัย

- เขียนบทความเพื่อตีเผยแพร่ในการประชุมต่างๆ เช่น Annual National Symposium on Computational Science and Engineering ครั้งที่ 1-6, การประชุม NCSEC 2001, การประชุมวทท.และที่สกว.จัดขึ้น โดยสามารถศึกษารายละเอียดได้จากบทความวิจัยที่แนบมาด้วย

1.4.3.5 ทบทวนงานวิจัยของนักวิจัยอื่นที่ได้ตีพิมพ์

- Computing in Science and Engineering March/April 2001 ตีพิมพ์บทความเปรียบเทียบการทำงานของ Java และ ภาษาอื่นๆ เช่น C, Fortran พบว่าในบาง Platform Java มีการทำงานที่เร็วกว่า โดยเฉพาะ Platform Intel, เป็นการยืนยันว่าการที่ทางโครงการตัดสินใจเปลี่ยนไปใช้ Java เป็นการตัดสินใจที่ถูกต้อง นอกจากนี้ Mathematica 4.1 มี Jlink ที่ออกแบบมาเพื่อเชื่อมโยง Java เข้ากับ Mathematica
- งานวิจัยที่ได้ตีพิมพ์ไปแล้วมักจะทำการคำนวณโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ระดับ Supercomputer เช่นในการคำนวณระดับพลังงานของ Billiard ที่ต้องใช้การแก้สมการหาค่า Eigenvalue ของปัญหา Finite Elements หรือการคำนวณโดยวิธี Monodromy Matrix แต่ไม่มีงานใดที่ซ้ำหรือใกล้เคียงกับงานที่ทำอยู่มากนัก

1.4.4 ผลที่ได้เมื่อจบโครงการ

- วิธีการคำนวณโครงสร้างมหภาคที่สามารถนำไปใช้กับระบบไม่เชิงเส้นอื่นๆ โดยได้ทดสอบกับ Logistic Map และ Standard Map
- ได้โครงสร้างมหภาคของระนาบเฟสของระบบที่ศึกษาแต่ยังไม่ครอบคลุมทั้งเส้น
- ได้ฐานข้อมูลของงานวิจัยในสาขานี้ ซึ่งจะก่อให้เกิดโมเมนตัมให้งานวิจัยเกี่ยวกับ เคออส และควอนตัมเคออส กระทำได้ต่อไป
- ได้ฐานข้อมูลของวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อหาวงโคจรที่มีคาบที่ประกอบขึ้นเป็นโครงสร้างแบบมหภาคของระนาบเฟส
- การสร้าง Poincare Section โดยระบบคลัสเตอร์ที่ทำงานแบบขนานโดยใช้วิธีการโปรแกรมแบบฟังก์ชัน

1.4.5 ความเห็นและข้อเสนอแนะ

ปัญหาอุปสรรคสำคัญของโครงการนี้คือ

- ความไม่พร้อมของบุคลากรในประเทศที่เชี่ยวชาญในการติดตั้งระบบคอมพิวเตอร์ ทำให้นักวิจัยต้องลงไปดูในรายละเอียดเองทุกเรื่อง สิ้นเปลืองพลังงานและเวลามาก แทนที่จะได้พุ่งเป้าไปทำงานวิจัย
- ความไม่พร้อมของเครื่องคอมพิวเตอร์และอุปกรณ์ต่อพ่วงต่างๆ เพราะเราไม่สามารถจัดหาได้ทุกอย่างในระยะเวลาที่กำหนด ระบบคลัสเตอร์เป็นระบบซับซ้อนที่ต้องการงานวิจัยดูแลอีกโครงการหนึ่ง
- ความไม่พร้อมของซอฟต์แวร์และระบบปฏิบัติการ ในที่นี้ระบบปฏิบัติการที่ต้องใช้ในงานวิจัยจะต้องมีเสถียรภาพและมีประสิทธิภาพพอที่ต้องทำงานเป็นเวลานานๆ ซึ่งไม่ใช่เรื่องง่ายที่จะติดตั้งระบบปฏิบัติการให้สมบูรณ์ได้ในระดับนี้ และซอฟต์แวร์ที่ต้องใช้ก็ขึ้นกับระบบปฏิบัติการมาก นอกจากนี้ โดยมากซอฟต์แวร์ที่ใช้กันในงานวิจัยฟิสิกส์เชิงคำนวณมักมี

ราคาแพงมากเช่น IDL สำหรับ Windows NT ปัจจุบันมีราคาสูงมากถึงประมาณ 60,000-70,000 บาท

- ความจำเป็นที่ต้องเรียนรู้ระบบคอมพิวเตอร์ใหม่สำหรับผู้ทำวิจัย เนื่องจากระบบคอมพิวเตอร์ที่จัดเตรียมได้ไม่มีทางเหมือนกับระบบคอมพิวเตอร์ที่ผู้ทำวิจัยเคยใช้ในการศึกษาที่ประเทศอังกฤษซึ่งมีความพร้อมสูงมาก ความพร้อมนี้เกิดขึ้นได้จากต้นทุนที่มหาวิทยาลัย Warwick ได้จ่ายไปอย่างมากมายและเป็นเวลานานในการจัดสรรซึ่ง ระบบฮาร์ดแวร์ ระบบซอฟต์แวร์ และ ที่สำคัญที่สุด บุคลากรที่ดูแลระบบการทำงานทั้งหมดของระบบ
- เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงสถานที่ทำงานจาก ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล มาเป็น สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ ทำให้แผนการศึกษาวิจัยและพัฒนาที่จะใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์เพื่อการวิจัย ที่ภาควิชาฟิสิกส์ และคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล ต้องเปลี่ยนแปลงไป โดยขณะนี้ผู้วิจัยสามารถใช้เครื่องคอมพิวเตอร์สมรรถนะสูงของหลักสูตรบัณฑิตศึกษาวิทยาศาสตร์เชิงคำนวณ มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์ที่เพิ่งได้รับมา กำลังอยู่ในการติดตั้งให้เป็นระบบคลัสเตอร์อยู่ ซึ่งถ้าเสร็จสิ้นก็จะทดลองคำนวณเพิ่มเติมต่อไป
- เครื่องคอมพิวเตอร์คอมพิวเตอร์หลักที่ใช้งาน เป็นเครื่องที่ประกอบขึ้นเองจากงบประมาณด้านวัสดุ มีความเร็วไม่มากและหน่วยความจำไม่สูงนัก แต่ก็พอใช้งานได้ โปรแกรมหรือซอฟต์แวร์ที่ใช้คือ Mathematica ซึ่งเป็นรุ่นที่มหาวิทยาลัยซื้อไว้ มีการพัฒนาระบบเก็บและสำรองข้อมูล นอกจากนี้มีการใช้ซอฟต์แวร์เถื่อนบางตัวในการทำงาน แต่คาดว่า ไม่มีปัญหาลิขสิทธิ์เพราะเป็นรุ่นเก่าไปหมดแล้ว
- ที่มหาวิทยาลัยวลัยลักษณ์มีปัญหาการจ่ายกระแสไฟฟ้า ทำให้ไฟฟ้าดับเป็นเวลานาน และบ่อยมากที่จะมีไฟฟ้าดับเป็นเวลา 1 วัน ทำให้ Program ที่ทำงานอยู่ต้องหยุด และเริ่มใหม่ ไฟฟ้าดับนานมากทำให้ระบบ UPS ที่มีอยู่รองรับไม่ไหว อาจจะต้องหา UPS ที่มีกำลังสูงขึ้น แต่ราคาแพงมาก นอกจากนี้ยังมีปัญหาไฟฟ้ากระชากทำให้อุปกรณ์คอมพิวเตอร์เสียหาย
- โครงการวิจัยหลังปริญญาเอก ของสกว. นับเป็นโครงการนำร่องที่ดีมาก อย่างไรก็ตาม เป็นที่น่าเสียดายว่า ปรัชญาของทุนที่ใช้ชื่อ postdoc นั้น ไม่เป็นไปตามชื่อ postdoc ในโครงการนี้ สาเหตุหลักคือ นักวิจัยไม่สามารถทุ่มเทเวลาทำงานวิจัยนี้ 100 % สำหรับในต่างประเทศทุน postdoc เป็นลักษณะของการจ้างทำวิจัยของนักวิจัย ฉะนั้นนักวิจัย postdoc จะมีเวลาทำงานนี้ได้เต็มเวลา ในขณะที่ นักวิจัยในโครงการนี้ของสกว.จะต้องทำการสอน งานบริการ วิชาการ งานเป็นที่ปรึกษาและการวิจัยอื่นๆ ที่มหาวิทยาลัย assign ให้ การที่โครงการจะคาดหวังว่า นักวิจัยจะทุ่มเทเวลา 100% ดังเช่น postdoc จริงๆ นั้นเป็นไปได้เลย ทางออกหนึ่งที่เห็นจากตัวอย่างๆ อื่นที่นักวิจัยในโครงการนี้ทำกันในภายหลังก็คือ การจ้างนักศึกษาหรือผู้ช่วยวิจัยในการช่วยงาน สิ่งนี้จะช่วยให้โอกาสที่โครงการนี้จะสำเร็จสูงมาก เพราะถ้าไม่จ้างหรือไม่มีผู้ช่วยวิจัยเลย เมื่อนักวิจัยหยุดทำงานวิจัย งานก็จะหยุด 100% ทำ

ให้ไม่เกิดโมเมนต์ที่ต่อเนื่อง และในโครงการนี้ไม่ได้ตั้งบไว้เพื่อจ้างเนื่องจากเท่าที่ทราบมาในช่วงเขียนข้อเสนอโครงการว่าโครงการนี้ไม่สนับสนุนให้มีการจ้างงานผู้ช่วยวิจัย ดังนั้นจึงไม่ได้ตั้งบหรือวางแผนการทำงานไว้ในส่วนนี้

1.5 เอกสารอ้างอิง

1.5.1 ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง (literature review) และเอกสารอ้างอิง

ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ดังที่กล่าวมาแล้ว ในการศึกษาหรือทำความเข้าใจระบบพลวัตแบบไม่เชิงเส้นนี้ต้องอาศัยความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างของระนาบเฟส ที่ประกอบด้วยวงโคจรที่มีคาบ ทั้งเสถียรและไม่เสถียร รวมไปถึงวงโคจรที่มีคาบเทียม (Quasiperiodicity) โดยปกติการหาวงโคจรเหล่านี้ทำได้โดยการหาจุดตัดแกนนอนของฟังก์ชันที่นิยามจากหลาย ๆ ตัวแปรที่อธิบายระนาบเฟส วิธีเชิงคำนวณที่มักใช้คือวิธี Newton Raphson ซึ่งต้องการการเดาจุดเริ่มต้นที่ดี (Good initial guess) ในการที่จะประกันการค้นพบวงโคจรดังกล่าว (Jaroensutasinee and Rowlands 1993 และเอกสารอ้างอิงอื่นที่ระบุไว้) วิธีการนี้เปรียบได้กับงมเข็มในมหาสมุทร ในกระบวนการนี้เราเพียงแค่ว่าโครงสร้างของระนาบเฟสเพียงบริเวณเล็กๆ เท่านั้น โครงสร้างของระนาบเฟสมหภาค (Global Structure) เป็นสิ่งที่ต้องการอย่างมากในการนำไปใช้ นี่เป็นวัตถุประสงค์หนึ่งของโครงการวิจัยนี้

เนื่องจากพฤติกรรมแบบเคออสนี้เกิดจากความไม่เชิงเส้นของระบบเอง เราจะต้องได้พฤติกรรมนี้ถ้าเราศึกษาระบบเดียวกันนี้ในระดับควอนตัม แต่เราจะพบความขัดกันอย่างทันที เนื่องด้วยความเป็นเชิงเส้นของทฤษฎีกลศาสตร์ควอนตัมประกันการไม่เกิดขึ้นของการตีจากแบบเอกโปเนนเชียล (Exponential deviation) หรือความไวต่อสถานะเริ่มต้น (Sensitivity to initial conditions) ได้มีการทบทวนงานวิจัยถึงความขัดแย้งกันอย่างกว้างขวาง แต่ก็ยังหาข้อสรุปที่แน่ชัดไม่ได้ (Ford and Mantica 1992) ผลการวิจัยในส่วนนี้จะกระทบโดยตรงกับหลักความสอดคล้อง (Correspondence Principle) ซึ่งเคยเชื่อกันว่าเป็นหลักเดียวที่เชื่อมโลกมหภาค (Classical World) และโลกระดับควอนตัม (Quantum World) เข้าด้วยกัน ความเข้าใจในการเปลี่ยนแปลงจากของระบบจากระดับคลาสสิกไปเป็นระดับควอนตัมเป็นสิ่งสำคัญอย่างมากต่อพัฒนาการของวิชาฟิสิกส์

สนามศักย์ $(Q-xy)^2$ เป็นสนามศักย์ที่มีรูปไม่ซับซ้อน Q เป็นค่าคงที่ที่มากกว่า 0 และ x กับ y ก็คือโคออร์ดิเนตในระบบ Rectangular ได้มีการศึกษาระบบนี้อย่างมากมายตั้งแต่ปี ค.ศ. 1970 จนถึงปัจจุบัน เนื่องจากมันสามารถช่วยให้เข้าใจถึงปัญหาของการสร้างเตาปฏิกรณ์ปรมาณูแบบฟิวชันแบบใช้สนามแม่เหล็กกักพลาสมา ยุโรป และสหรัฐอเมริกา รวมทั้งญี่ปุ่น ได้ทำการวิจัยเรื่องนี้มาเป็นเวลากว่า 20 ปี ใช้งบประมาณมหาศาลเพื่อสร้างเตาปฏิกรณ์นี้แต่ก็ยังคงไม่ประสบความสำเร็จ เตาปฏิกรณ์ยังไม่สามารถให้พลังงานออกมามากกว่าพลังงานที่ใส่เข้าไป ปัจจุบันเราทราบว่าสาเหตุหนึ่งของความล้มเหลวก็คือเกิดปรากฏการณ์เคออสที่หมายถึงเกิดสนามแม่เหล็กที่ไม่เสถียรในเตาปฏิกรณ์ปรมาณู และเกิดการรั่วของอนุภาคมีประจุที่กระจายตัวออกไปทั่วระนาบเฟสก่อให้เกิดการสูญเสียพลาสมาที่กักไว้ (Jaroensutasinee 1994)

นอกจากสนามศักย์ $(Q-xy)^2$ จะมีการประยุกต์ในการศึกษาเตาปฏิกรณ์ปรมาณูแบบฟิวชันแบบใช้สนามแม่เหล็กกักพลาสมาแล้ว เรายังสามารถพบสนามศักย์นี้ในระบบอื่นๆอีกมากมาย อีกทั้งยังมีการศึกษาสนามศักย์นี้ในกรณีพิเศษ $(Q=0) \ x^2 y^2$ ในแง่เซมิคลาสสิกอีกด้วย (Dahlqvist and Russberg 1991)

การศึกษาในระดับคลาสสิกได้กระทำอย่างละเอียดในวิทยานิพนธ์ของผู้วิจัย แต่ด้วยข้อจำกัดทางเครื่องมือทั้งในแง่ทฤษฎีที่มีอยู่ และความสามารถของเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มีในขณะนั้น ทำให้โครงสร้างระนาบเฟสมหภาคของระบบนี้ยังเป็นปริศนา ปัจจุบันผู้เสนอโครงการมีความมั่นใจว่าความก้าวหน้าของการวิจัยควอนตัมเคออสก่อให้เกิดเครื่องมือใหม่ๆ ที่สามารถนำมาพัฒนา ปรับเปลี่ยนและประยุกต์ใช้กับระบบนี้อันก่อให้เกิดวิธีการใหม่ในการสร้างภาพระนาบเฟสมหภาคของระบบที่ต้องการได้

1.5.2 เอกสารอ้างอิงที่สำคัญ

- Allegrini P, Bonci L, Grigolini P, Mannella R, Roncaglia R and Vitali D 1995 Phys. Rev. Lett. 74 (8) p 1484
- Berry M V 1987 Proc. R. Soc. Lond. A 412 pp 183-198
- Biswas D, Azam M, Lawande QV and Lawande SV 1991 J. Phys. A 25 pp L297-L301.
- Casati G 1995 Physica D 86 p 220
- Crespi B, Perez G and Chang S J 1993 Phys. Rev. E 47 (2) pp 986-991
- Dahlqvist P and Russberg G 1991 J. Phys. A 24 pp 4763-4778
- Eckhardt B 1993 Phys. Lett. A 172 pp 411-415
- Ford J and Mantica G 1992 Am.J.Phys. 60 p 1086
- Fromhold T M, Eaves L, Sheard F W, Foster T J, Leadbeater M L and Main P C 1994 Physica B 201 pp 367-373
- Grobged D, Pollak E and Zakrzewski J 1992 Physica D 56 pp 368-380
- Gutzwiller MC 1990 Chaos in Classical and Quantum Mechanics (Berlin: Springer)
- Heller EJ 1991 Les Houches, Session LII Chaos and quantum physics (Giannoni MJ, Voros A and Zinn-Justin J eds., 1989) pp 547-663.
- Jaroensutasinee K and Rowlands G 1993 Physics Computing'92 (Singapore: World Scientific) p 355
- Jaroensutasinee K and Rowlands G 1994 J. Phys. A 27 p 1163
- Jaroensutasinee K 1994 Thesis (Submitted to the University of Warwick)
- Jensen R V 1992 Nature 355 (23 January 1992)

- Kim J W and Su W P 1994 Phys. Rev. A 50 (2 part A) pp 1019-1023
- Leboeuf P, Kurchan J, Feingold M and Arovas D P 1990 Phys. Rev. Lett. 65 (25) pp 3076-3079
- Nakamura K 1993 Quantum Chaos (Cambridge: CUP)
- Reichl L E 1992 The transition to chaos (New York: Springer)
- Sieber M and Steiner F 1991 Phys. Rev. Lett. 67 (15) pp 1941-1944
- Takahashi K 1989 Prog. Theo. Phys. Suppl. 98 (Saito N and Aizawa Y, Eds.) p 109
- Zelevinsky V G 1994 Nuclear Phys. A 570 (1-2) pp C 411-C 420

2 ผลงานจากโครงการวิจัยที่ได้รับทุนจาก สกว. และที่เกี่ยวข้อง

1. K. Jaroensutasinee and G. Rowlands 'A New Method for Cycle Calculation' Proceedings of The First National Computational Science and Engineering Symposium. Bangkok, Thailand. 20th -21st March 1997, pp. 32-35.
2. K. Jaroensutasinee and G. Rowlands 'Prime Cycles in the Logistic Map' Proceedings of The Second National Computational Science and Engineering Symposium. Bangkok, Thailand. 26th -27th March 1998, pp.174-181.
3. K. Jaroensutasinee and G. Rowlands 'Homoclinic Tangle Visualization' Proceedings of The Third National Computational Science and Engineering Symposium. Bangkok, Thailand. 24th -26th March 1999, pp. 75-83.
4. K. Jaroensutasinee and G. Rowlands 2000. 'Charged-particle orbits near a magnetic null point' Journal of Plasma Physics 64 (3) 255-262.
5. K. Jaroensutasinee and G. Rowlands 'Visualization of Particle Motion in $(Q-xy)^2$ Potential' Proceedings of The Fifth National Computational Science and Engineering Symposium. Bangkok, Thailand. 19th -20th June 2001, pp. 91-97.
6. K. Jaroensutasinee and G. Rowlands 'Q dependence of global particle behavior in $(Q-xy)^2$ potential' 27th Congress on Science and Technology of Thailand. Bangkok, Thailand. 16th -18th Oct, 2001, pp. 381.
7. K. Jaroensutasinee, Proceedings of the 5th National Computer Science and Engineering Conference, Nov.7th -9th, 2001, Chiang Mai, Thailand, p 429.
8. K. Jaroensutasinee and G. Rowlands, to be appeared in the proceedings of the 6th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering, Apr.3rd -5th, 2002, Walailak University, Nakhon Si Thammarat, Thailand.

9. K. Jaroensutasinee and G. Rowlands, to be appeared in the proceedings of International Conference on Computational Mathematics and Modeling, May 22-24, 2002, Bangkok, Thailand.
10. K. Jaroensutasinee. Parallel Construction of Poincaré Surface of Section Method on WAC16P4 Cluster, to be appeared in the proceedings of the 6th National Computer Science and Engineering Conference, Nov., 2002, Thailand.

3 รายงานการเงินพร้อมสำเนาสมุดบัญชีเงินฝาก

ดังปรากฏในเอกสารแนบที่ส่งมาด้วย

A New Method for Cycle Calculation

Dr. Krisanadej Jaroensutasinee

Department of Physics, Faculty of Science,

Salaya Centre, Mahidol University, NakronPratom 73170 Thailand

email: sckjr@mahidol.ac.th WWW: <http://www.sc.mahidol.ac.th>

Abstract

Cycles or periodic solutions play a very important role in the modelling of nature using differential or difference equations. These special orbits have the nature to exist without any other indicators, hence making them extremely hard to search for, especially the unstable ones. We have developed a novel method to compute both stable and unstable cycles numerically. This new method is equipped with a special searching technique that is similar to simulated annealing. This special technique allows us to probe as many cycles with a given period as the computational limits impose. For small cycles, we expect to discover all of them. The method has been applied to the well-known logistic map and the results are shown here.

1 Periodic Orbits and Their Importance

Knowledge of "Periodic orbits" (POs) in a chaotic system is the most important key to understanding chaos in such a system. Many researchers (e.g. Wintgen D 1988 or Dahlqvist and Russberg 1991) are now using periodic orbits to compute semiclassical eigenvalues of classically chaotic systems. Other researchers use POs to determine the fractal dimension of a complicated strange attractor (e.g. Parker and Chua 1989). The diffusion rate in the standard map is also found to connect with POs (Eckhardt 1993).

It is known that although a system under consideration is chaotic, its POs are regular and attainable. POs can be classified into 2 groups, stable and unstable. It is easier to calculate stable POs numerically, and sometimes analytically, than to calculate unstable POs. Nevertheless, stable POs are much less used in chaotic systems since one definition of chaos is that almost no stable POs exist.

To calculate unstable POs is not a simple task. A number of methods for computing these UPOs have been invented but which one is the generally best method is still arguable. Moreover, the methods are normally invented to study some specific systems. We present here a novel method that can be applied generally to maps and the Poincaré surface of section. The method can be used to compute both stable and unstable POs. We have applied it to study the logistic map which is a 1-d map. The study gives us many interesting results which are to be presented later on in this paper.

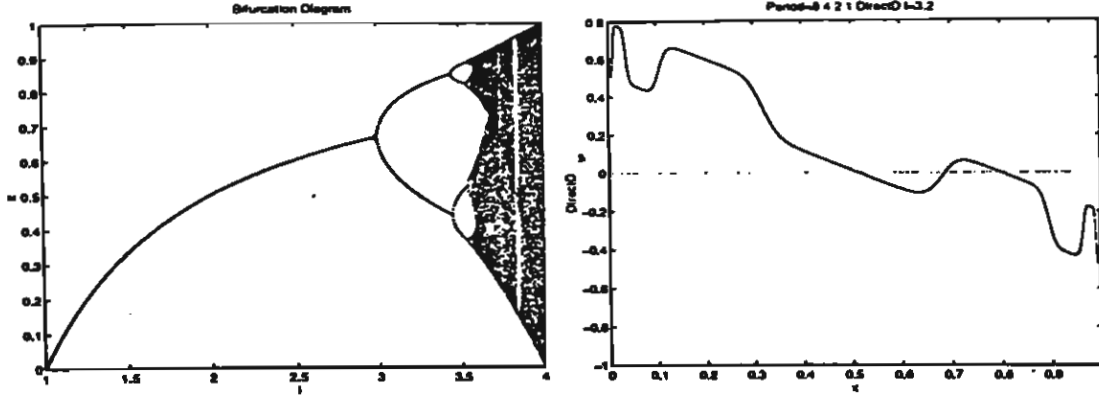


Figure 1: (a) Bifurcation Diagram of Logistic Map. (b) An example of D_{Def} plot for the Logistic map.

2 The new method

We define a function D_{Def} , which we call the DirectD function, as:

$$D_{Def}(\lambda, x, n) = F_\lambda^n(x) - x. \quad (1)$$

where n is the period of POs, F represents the mapping function, λ is the control parameter, x is the state variable, and $F_\lambda^n(x) = F_\lambda(\dots n \text{ times } \dots(x))$.

Obviously, POs result from the condition that simply requires the function to be zero. This makes it easy to visualise the problem which is one of the two convenient points of this DirectD approach. The other point is that stable or unstable POs appear to be the same in this aspect. So, the task is now just to search for zeros of the DirectD function.

One can assume the task is simple because it is possible to employ the zeros finding algorithm such as the Gauss-Newton method that converges to the solution very quickly but needs a very good initial guess. However, technical problems can prevent one from obtaining a meaningful result easily. Technical problems are, for example, traps caused by the local minima and numerical overflow due to high values of gradient around UPOs.

There are a number of approaches that can be applied to increase the degree of convergence of the Gauss-Newton method such as the *damped*-Newton method (Dennis and Schnabel 1983) and some authors use the recurrence theorem to find good initial guesses for the routine. In general it is found that computing costs can be very high, not only due to these technical problems, but also as a result of a dense set of POs in one particular region of interest.

We resort to the method of simulated annealing to solve the local minimum problem. By slowly cooling the system down, we assume that the local minima can be avoided. Then, we take the points as initial guesses for further refinement in which we employ the Gauss-Newton algorithm. Roughly speaking, we choose points at random over the domain of interest, calculate the total energy which is defined by the sum of the square of D_{Def} and let them cool down by rearranging the configuration so that the total energy reduces slowly. Then we take all the points as initial guesses for Gauss-Newton methods in which the refinements take place. The combination of these two numerical methods and the DirectD definition to calculate POs is the new method we propose here. We call it the

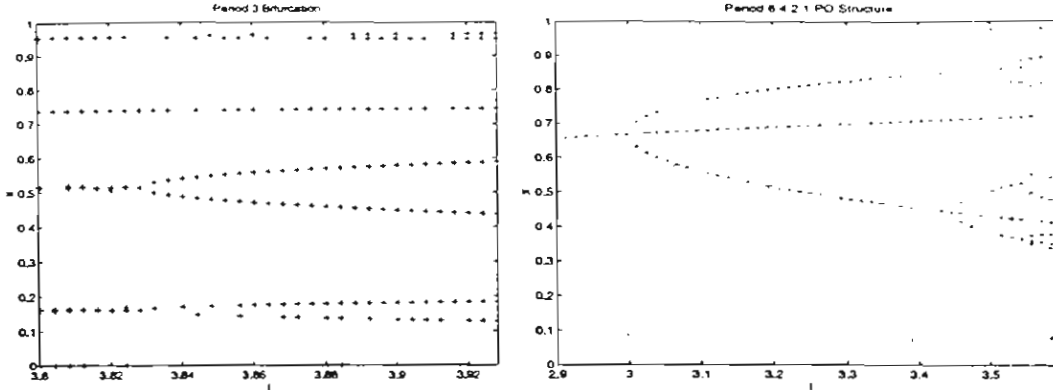


Figure 2: (a) The hidden bifurcation of period-3 cycles. (b) Full Bifurcation Diagram for Period 8 4 2 1.

DirectD method.

3 Application to Logistic Map

The logistic map is a 1-dimensional map that has a rich structure due to the presence of nonlinearity. It also has a bifurcation route (Fig. 1a) to chaos. The most important thing is that it is very simple, and is hence widely used to demonstrate period doubling, n -period oscillation, universality, and chaos. One of the mapping equations has the form:

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \quad (2)$$

where x is the state variable ranging from 0 to 1, λ is the control parameter taking the domain from 1 to 4, and n is the index of iteration.

For the logistic map, we have

$$D_{Def}(\lambda, x, n) = F_\lambda^n(x) - x, \quad (3)$$

where $F_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ and n is the period of POs of interest. Fig. 1b gives an idea of what the DirectD function looks like for $\lambda = 3.2$ and $n = 8$. Note that when we define $n = 8$, the function effectively includes the periods 4, 2, and 1 as well. We have used the method to calculate period 3 and period 1 POs for λ s around the well-known Period-3 structure, and found that this cycle bifurcated further into stable period-3 and unstable period-3 orbits. We don't usually see this additional branch in the bifurcation diagram (Fig. 1a). The reason is that one of the branches that corresponds to the just-bifurcated cycle is unstable, and therefore missing from the bifurcation diagram. The result is shown graphically in Fig. 2a. The full bifurcation diagram (including unstable cycles - Fig. 2b) can also be obtained by the method.

4 Conclusions

For the logistic map, we perform a simulation by choosing a uniform distribution of 50000 points over the domain 0 to 1 and then iterating the map on each point

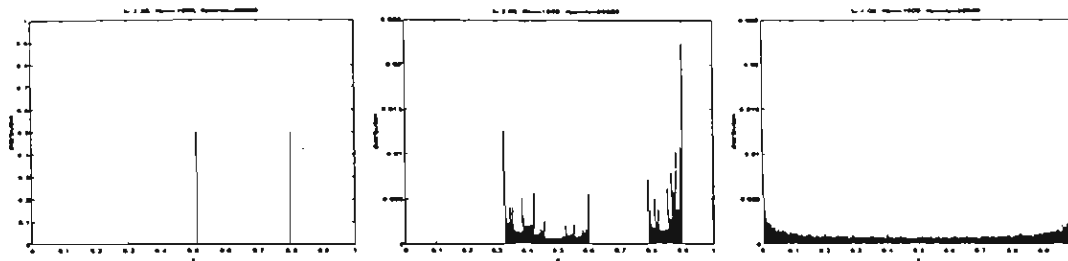


Figure 3: (a) Distribution function obtained from simulation of 50000 points at $\lambda = 3.25$ where the cycle-2 dominates. (b) at $\lambda = 3.6$ where chaos is present. (c) at $\lambda = 4.0$ where chaos completely dominates and no stable orbits are present.

1000 times. A histogram with 1000 bins of these points is then obtained. At $\lambda = 2.5$ it is found that the histogram is dominated by the only stable cycle. This domination of POs in the histogram can be seen more clearly in Fig. 3a at $\lambda = 3.25$ in which the period-two cycles and the single unstable period-one cycle have a great influence. The situation when we have the mixing of chaos and stable cycles is shown in Fig. 3b. Notice the shallow curve in the middle of two sharp peaks. Fig. 3c gives the picture when all stable cycles disappear.

Analytical equations for the determination of properties of POs after knowing their positions will be the subject of future investigation. Analytical formulas that link the first derivative to the Lyapunov number are also waiting to be found. One can also speed up the method by employing a different approach in the simulated annealing part. Generalisation of this method to apply to two-dimensional problems such as the standard map and the 2D Poincaré surface of section for the flow of 2D Hamiltonian system is another very interesting avenue for further work.

Acknowledgements

This work is supported by the Faculty of Science, Mahidol University and the Development and Promotion of Science and Technology Talents project (DPST).

References

- Dahlqvist P and Russberg G 1991 *J.Phys. A* **24** pp 4763-4778.
- Dennis J E and Schnabel R 1983 *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations* (Prentice-Hall, Eaglewood Cliffs, NJ).
- Eckhardt B 1993 *Phys.Lett. A* **172** pp 411-415.
- Parker TS and Chua LO 1989 *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems* (Springer-Verlag, New York).
- Wintgen D 1988 *Phys.Rev.Lett.* **61** (16) pp 1803-1806.

Prime Cycles in the Logistic Map

K. Jaroensutasinee¹ and G. Rowlands²

¹Dept. Of Physics, Faculty of Science, Mahidol University, Rama VI Road,
Bangkok 10400 Thailand

and

²Dept. Of Physics, University of Warwick, Coventry, CV4 7AL England

Abstract

Generating the Bifurcation diagrams of the Logistic map is an easy computational task. The mapping equation is very simple and the algorithm requires only the power of a desktop computer. Nevertheless, the diagram is found to be very complicated. It is fractal and contains a number of interesting structures apart from the well-known bifurcation route to chaos. One example of such structures is the birth of the period 3 cycle which appears immediately after chaos. For this reason this structure can be clearly noticed in the diagram. There are other structures of other periods too. But these structures are not obvious - they are hidden in the diagram. By employing the DirectD method, these structures can be calculated easily and so they are revealed. The prime cycles are chosen for detailed calculation. The structures found by the method are very interesting. For no obvious reason, they appear in the diagram, bifurcate, and disappear in the bifurcation diagram. The strength of the method is that specific periods can be chosen and it can also detect the unstable cycles. These unstable cycles are needed to connect up the structures.

1. Introduction

1.1 The Logistic Map

It is now widely known that simple mathematical models can possess very complicated behavior. May [8] was one of the pioneers to point this out to the scientific society. The difference equation of the form:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) \quad (1)$$

was the first to be used to illustrate this point where x is the state variable having the domain from 0 to 1, λ is the control parameter taking the domain from 1 to 4, and n is the index of iteration. This equation is known as "the Logistic equation". This equation can be used to model various situations ranging from physics to biology. It also illustrates many of the phenomena found in realistic models of physics [12].

Mathematically speaking, the Logistic map is a 1-dimensional map that has the rich feature of nonlinearity. It has a bifurcation route to chaos. The most important thing is because of its simplicity, it is widely used to demonstrate period doubling, n -period oscillation, universality, and chaos. It contains many bifurcation sequences and has been explored in detail since its discovery [5,8].

1.2 Importance of cycles

It is known that although a system under consideration is chaotic, its POs are regular and attainable. Therefore, knowledge of "Periodic orbits" (POs) in a chaotic system is the most important key to understanding chaos in such a system. POs can be classified into 2 groups, stable and unstable. It is easier to calculate stable POs numerically, and sometimes analytically, than to calculate unstable POs. However, stable POs are much less used in chaotic systems since one definition of chaos is that no stable POs exist.

Many researchers (e.g. [1,13]) are now using periodic orbits to compute semiclassical eigenvalues of classically chaotic systems. Other researchers use POs to determine the fractal dimension of a complicated strange attractor [10]. Diffusion rate in the standard map is also found to connect with POs [4]. Cycles are the key structure of bifurcation diagram (fig.1 and fig.4). For the Logistic map, special consideration was given to cycles. Very fine details of cycles of many period were given in May [8].

1.3 Prime cycles

Prime numbers have always been special. It is widely noted that the period 3 emerges out of chaos in the bifurcation diagram. Other prime period cycles such as period 5 are noted to exist but buried in the chaotic bands of the diagram, therefore it is hard to observe those cycles. In our work, we have revealed these structures and we discovered their convergence, by numerical means, to the value of the control parameter 3.6786. In the following, the first hundred prime numbers are presented.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
31	37	41	43	47	53	59	61	67	71
73	79	83	89	97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223	227	229
233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541

Table 1 The first hundred prime numbers.

2. Cycle calculation

2.1 Survey of the methods

Up to now, there are a number of numerical techniques for calculating cycles or periodic solutions for a system of ordinary differential equations and also for a map. Each technique has its own advantages. The simplest method is to let the system execute until it reaches the cycle. This method is called the "Brute-force method"[10] and just like many other techniques, it has some advantages despite its simplicity. This method is easy to code in a programming language and it is relatively general because it can locate many different types of cycles (equilibrium point, cycles of period one or more). For the Logistic Map, cycles are the results of the iteration of the map after having the transient removed by ignoring the first

few hundred iterations. Nevertheless, the method has many problems. It obviously cannot be used for conservative Hamiltonian systems since for such systems the state of the systems will never reach an asymptotic state and can go quasiperiodic. Next, the method is slow for lightly damped systems. Furthermore, in many cases it is not possible to say that the system has reached an asymptotic state. Most importantly, the method can only locate stable cycles.

More sophisticated methods turn the problem of locating their cycles into a boundary value problem (BVP). This method is natural and is extensively utilised in bifurcation studies of dynamical systems (see for example [2,6]). The condition of a cycle for the BVP is:

$$\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(0) \quad (2)$$

There are two standard methods for solving two point boundary value problems[12]: the shooting method and the relaxation method. They both, however, are unsuitable for chaotic systems in general since the orbits are bound to be complicated, highly oscillating, which requires more time and more grid points.

2.2 DirectD method and Prime cycles

Calculation of unstable POs is more difficult. A method called DirectD method was developed [7]. This method can be applied generally to maps and Poincare surfaces of section. In the present work, this method was used to compute both stable and unstable POs of the Logistic map. For the Logistic map, a function D_{def} , which we call the DirectD function, can be defined by

$$D_{def}(\lambda, x, n) = F_{\lambda}^n(x) - x \quad (3)$$

where n is the period of POs, F represents the mapping function, λ is the control parameter and x is the state variable, and $F_{\lambda}^n(x) = F_{\lambda}(\dots n \text{ times } \dots(x))$. For the Logistic map $F_{\lambda}(x) = \lambda x(1 - x)$. POs result from the condition that simply requires the function to be zero. Fig.2 gives an idea of what the DirectD function looks like for $\lambda = 3.2$ and $n = 8$.

2.3 What are enclosed in Period n DirectD calculation?

In order to calculate unstable cycles, there is a price to pay. The DirectD function has one major drawback. It cannot separate period 4 from period 8, nor cannot separate period 5 from 10. To determine the period of the output from the method is not difficult. Making the drawback into a slight inconvenience. We simply need to generate the possible period sequence and test the output one by one from the lowest to the highest period, n . It is also possible to test their stability property at the same time.

The other solution is simple. We just concentrate our calculation on prime cycles, since one drawback of this method is that it finds all the lower period cycles that can be fractions of the given period. By focusing on primes, we then rule out this problem for the calculation.

3. Cycles

3.1 Existence of period 3

It can be seen from the bifurcation diagram (Fig.1) that for λ in the range 3.8284 to 3.8495 there is a stable period 3 solution. What is not seen is the other period 3 solution that exists but it is unstable. Even though they both seem to originate from the same origin, their behavior is completely different. The stable one undergoes period doubling, just like another Feigenbaum sequence, while the unstable just continues to exist for the rest of λ . This result is obtained analytically and shown in Drazin [3], but the more complete result is shown here in fig.3. The visibility of this period 3 cycle leads to the discovery of other prime and interger period cycles that are buried in the bifurcation diagram.

3.2 Low period prime cycles and the hidden skeleton

Fig.4 is the structure of POs period 8 4 2 1 that is hidden in the bifurcation diagram. The birth of some structures can be clearly noticed and these are regular structures in chaotic region. May [8] mentioned that the birth is produced by the tangent bifurcation process while the birth of 2^n cycles in the main bifurcation sequence before the critical value of the controlling parameter (λ_∞) is caused by the pitchfork bifurcation process.

The appearance of period 3 right after the Chaos at λ around 3.8284 is very appealing. It makes one wonder if this situation happens for the other prime cycles, or does it just happens for this special cycle. By using our method we can reveal this prime structures at ease.

The results for other prime cycles show that they exist (but undergo unstable) to λ equals to 4. Thus, this can be treated as numerically proof of the complete chaotic state at this value of λ where all cycles exist but unstable:

The more intriguing result is when we overlap the prime cycles on the same plot starting from low period that is period 3, 5, 7 and so on. We found geometrically that the sequence of λ when the first time these cycles exist should converge to a special value of λ . By calculating these numerical values of λ for each cycles from the period from 3 upward, we found that these λ s converge to 3.6786. Surprisingly this value of λ is reported in May [8]. It is the first λ where the first odd period cycle appears. Together with our result, we conclude that the first odd cycle must have a very high period (infinity?). Numerical values of these λ s are shown in Table 2 and plotted in Fig.6.

period	the first appearing λ
3	3.828258
5	3.738068
7	3.701481
11	3.681572
13	3.679700
17	3.678679

Table 2 First appearing values of λ for the prime cycles.

4. Conclusion

To sum up, we have explored prime cycles structures in the bifurcation diagram of the Logistic map. Some of the results accidentally confirm the first value of λ where the first odd cycle exist which was reported by May [8]. Further work includes (1) calculation of Feigenbaum numbers using the DirectD method and (2) exploration of the fine structure in the bifurcation diagram more in detail. Then, the result can be compared with the result reported in Metropolis, Stein and Stein [9].

Acknowledgement

This work was supported in part by the post-doctoral grant of Thailand Research Fund (TRF). One of authors (KJ) would like to thank Dr.M.A.Allen for fruitful discussion.

5. References

- [1] Dahlqvist P and Russberg G 1991 *J.Phys. A* **24** pp 4763-4778.
- [2] Deuffhard P 1984 *BIT* **24** p 456.
- [3] Drazin PG 1992 *Nonlinear Systems* (CUP: Cambridge).
- [4] Eckhardt B 1993 *Phys.Lett. A* **172** pp 411-415.
- [5] Feigenbaum M J 1980 *Los Alamos Sci.* **1** pp 4-27.
- [6] Holodniok M and Kubicek M 1984 *J.Comp.Phys.* **55** p 254.
- [7] Jaroensutasinee K 1997 *A New Method for Cycle Calculation*, Proceeding of the 1st National Computational Science and Engineering Symposium, Bangkok, Thailand, March 1997, pp 32-35.
- [8] May R 1976 *Nature* **251** pp 459-67.
- [9] Metropolis N, Stein ML, and Stein JM 1973 *J. Combinatorial Theory* **15** (A) pp 25-44.
- [10] Parker TS and Chua LO 1989 *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems* (Springer-Verlag, New York).
- [11] Press WH, Flannery BP, Teukolsky SA and Vetterling WT 1991 *Numerical Recipes in C* (Cambridge: CUP).
- [12] Rowlands G 1990 *Non-linear phenomena in science and engineering* (Ellis Horwood series in physics and its applications: England)
- [13] Wintgen D 1988 *Phys.Rev.Lett.* **61** (16) pp 1803-1806.

Figure captions

1. Bifurcation diagram of the Logistic map.
2. An example of D_{Def} plot for the Logistic map for period 8 and at $\lambda = 3.2$.
3. The hidden bifurcation of period-3 cycles.
4. Structure of Period 8 4 2 1.
5. Structure of Period 1 3 5 7. (a) Period 3 (b) Period 5 and (c) Period 7.
6. Convergence of the sequence of the first apperence λ of some prime cycles.

To calculate period Do the histogram
and check no. of nonzero bin.

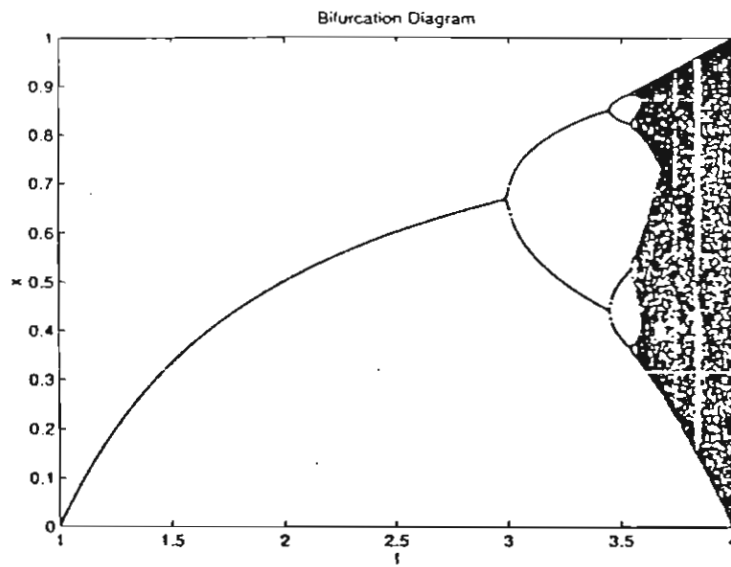


Fig. 1

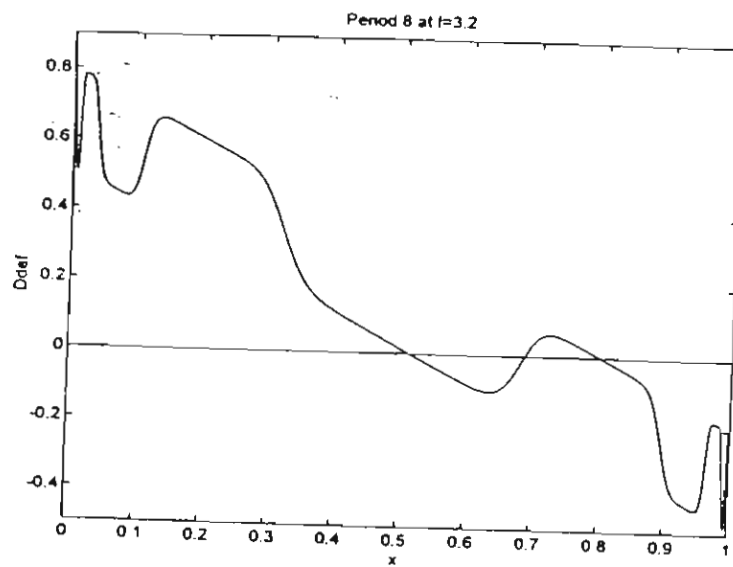


Fig. 2

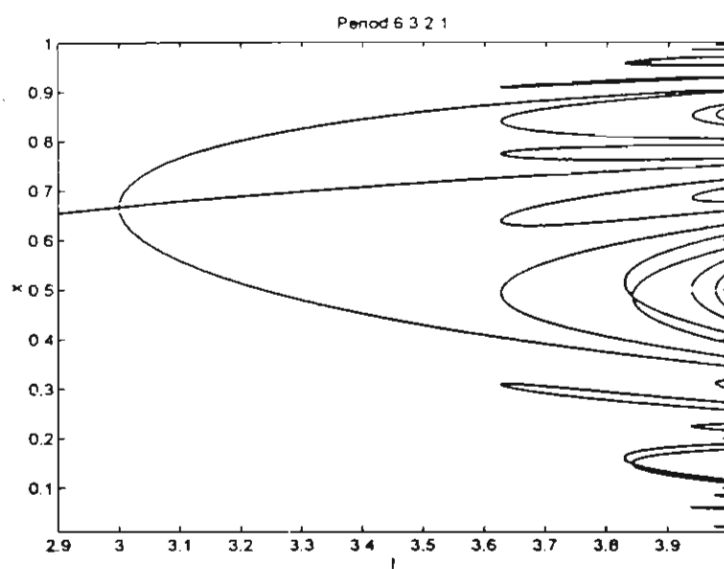


Fig. 3

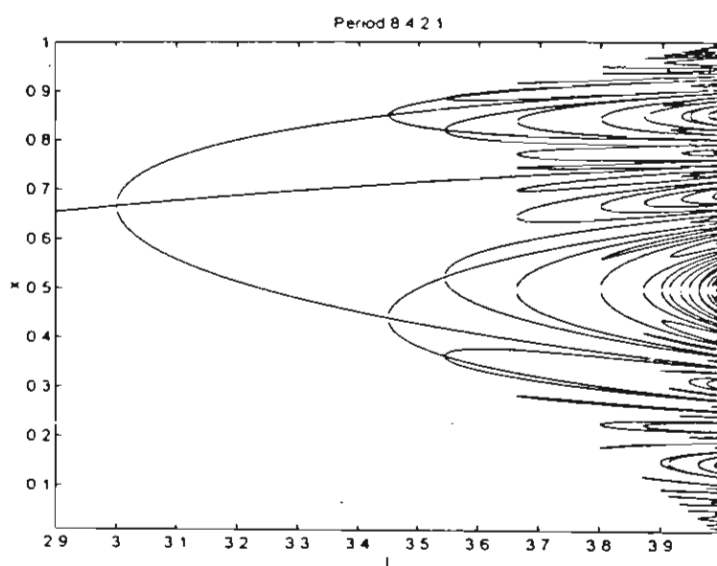


Fig. 4

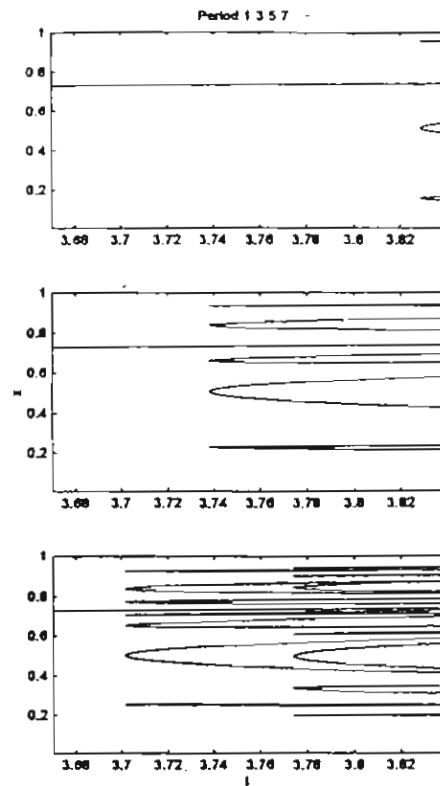


Fig. 5

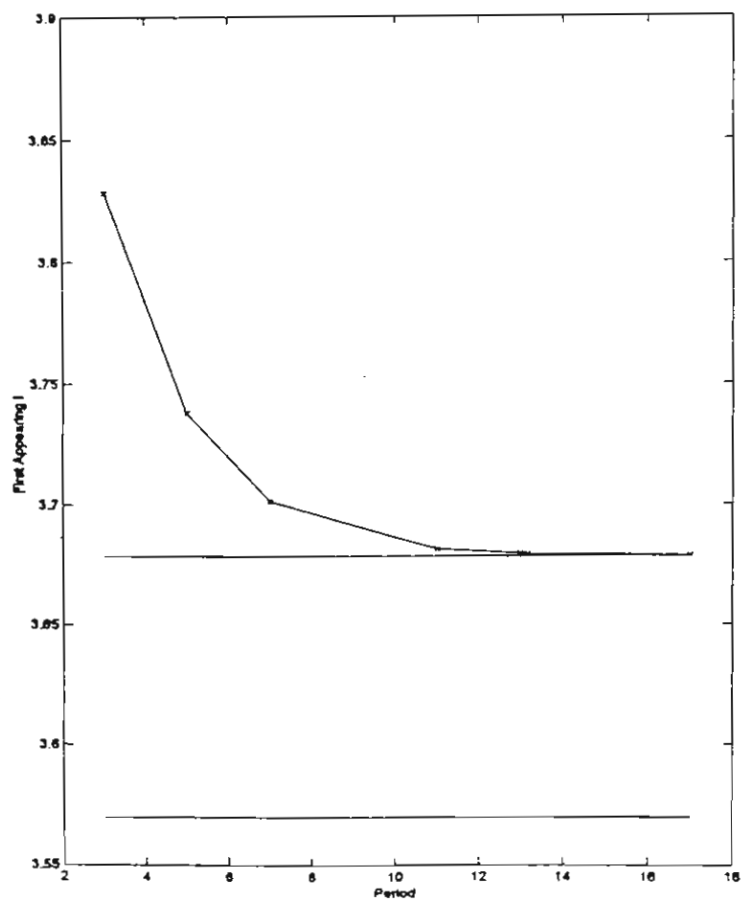


Fig. 6

Homoclinic Tangle Visualisation

Krisanadej Jaroensutasinee,
School of Science, Walailak University
222 Tasala NakronSiThammarat 80160 Thailand
jkrisana@praduu2.wu.ac.th

Abstract

It is proved mathematically that Homoclinic Tangle (HT) is the source of chaos in nonlinear Hamiltonian systems and area conservative maps. The complicated and intricate cutting of stable manifold and unstable manifold causes this. It is possible to make HT visible in some systems such as Henon Map by continuously iterating the map in which we choose many initial conditions that lie on the desired stable manifold. This method works well except it requires long time to locate the selected stable manifold. Here a method called DirectD is applied to the Standard Map (SM) and with slight improvement, this method can make HT very clearly visible. More over, global behaviour of the map at any value of K can be seen with this same method. Periodic orbits structure is also visible. This is possible because both stable and unstable periodic orbits are computable by the method. Interesting plots of the method which show interesting global behaviour of SM are presented.

1. Introduction

Understanding "global" behaviour of chaotic Hamiltonian systems is certainly not an easy task, especially for autonomous or time independent systems because it is very difficult to locate the positions of nonlinear resonance in the phase space. By using the DirectD method, I can compute the behaviour in the phase space for the systems that have the dimension of the phase space equal to 2 (these include the cases of 2d Poincare Surface of Section).

2. Improving DirectD for 2 dimensional Map

The method of DirectD is applicable effectively for the calculation of periodic orbits (POs) in 1d dimensional systems [1,2]. Even though there is some references to methods similar to this method (see for example in [3]) but here I have improved the calculation in sense that it can help us to visualise the systems in a global view. The means we do not need to locate just one particular orbit but we calculate this function for the whole domain. In this work, I calculate this function for Standard Map (SM) in the all-possible domain of interest at any value of K and then study the results. And unexpectedly, this function gives the global picture of the dynamical behaviour of the system automatically.

2.1 DirectD Method of the Standard Map

The method begins with the definition of D_{def} which I called the DirectD function as the following :

$$D_{def}(K, q, p, n) = (Q_K^n(q, p) - q)^2 + (P_K^n(q, p) - p)^2$$

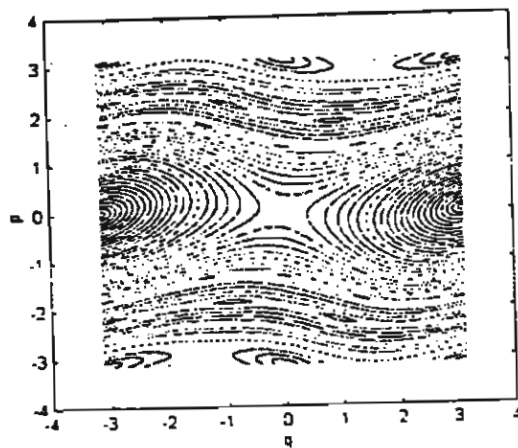
where n is the period of the orbit of interest. Q_n^n is the variable q after n iteration by the mapping function of the Standard Map. Similarly, P_n^n is the variable p after the same number of iteration with the same mapping functions. K is the control parameter of the SM and by definition POs can be found by asserting the condition that requires this function to vanish. For SM the mapping functions are:

$$p' = p + K \sin(q)$$

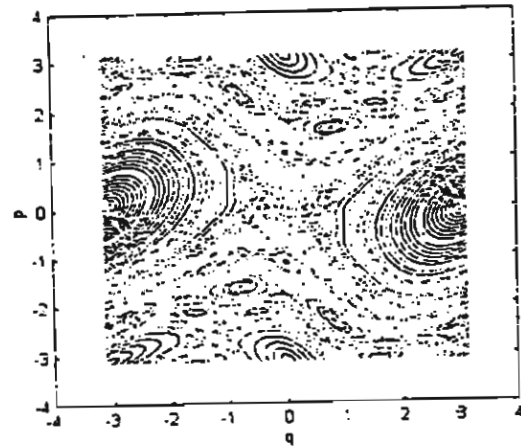
$$q' = (q + p') \bmod 2\pi$$

3. Results

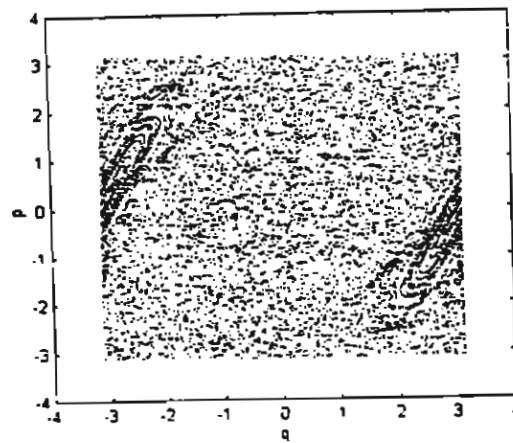
Results are presenting in the following figures:



$K = 0.5, n = 150, m = 100$



$K = 1.0, n = 150, m = 100$



$K = 4.0, n = 70, m = 100$

Fig. 1 The Standard Map.

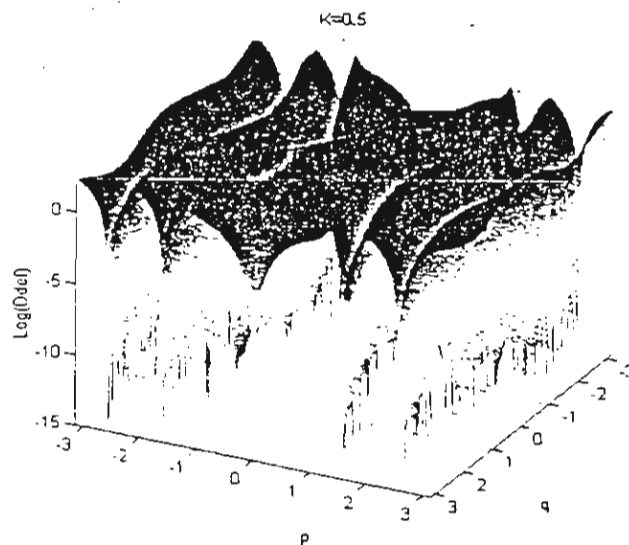


Fig. 2 DirectD function for SM at $K = 0.5$ and $n = 5$.

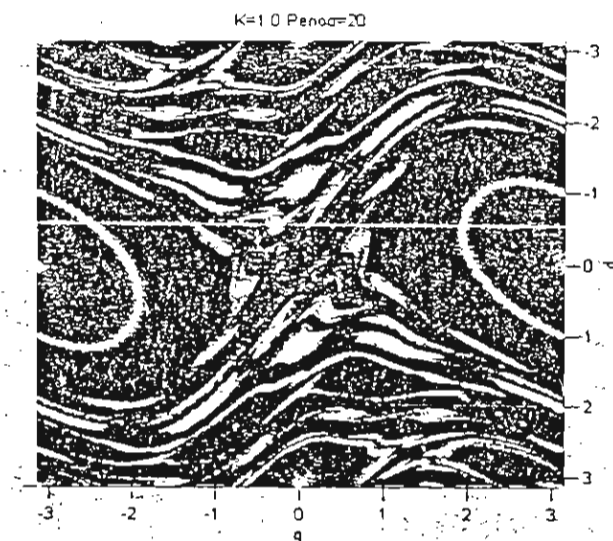
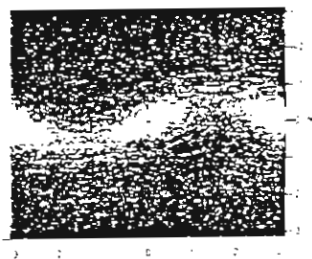


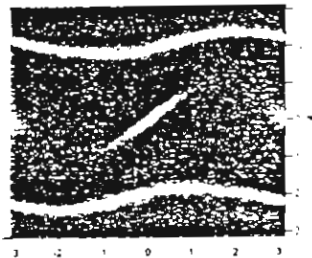
Fig. 3 $K = 1.0$ and $n = 20$.



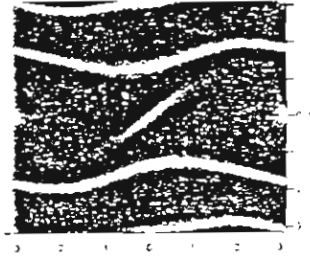
Period = 1



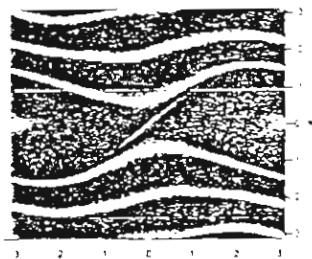
Period = 2



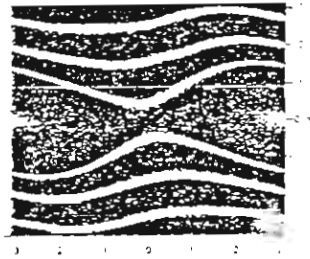
Period = 3



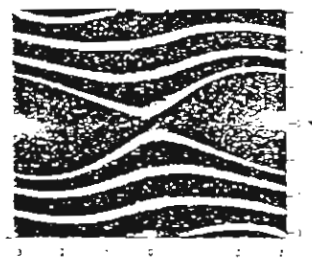
Period = 5



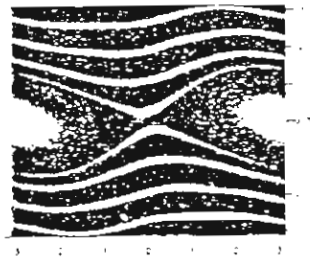
Period = 6



Period = 7

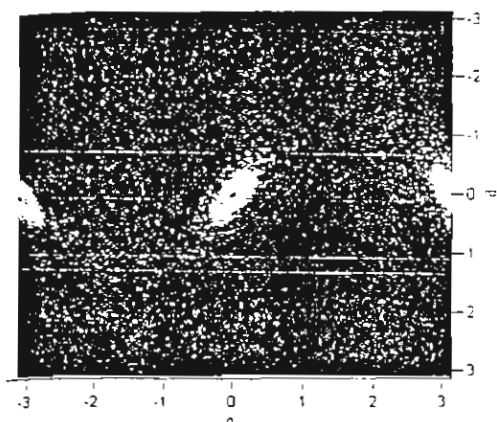


Period = 8

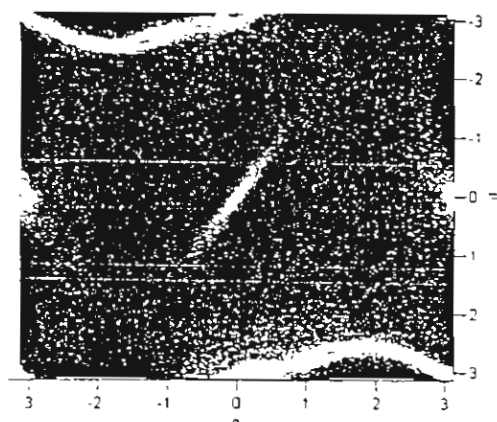


Period = 9

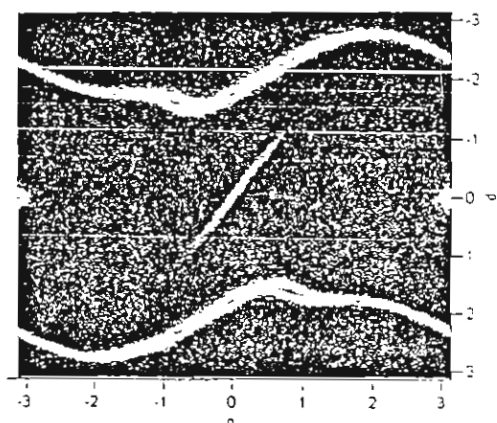
Fig. 4 DirectD functions for $K = 0.5$.



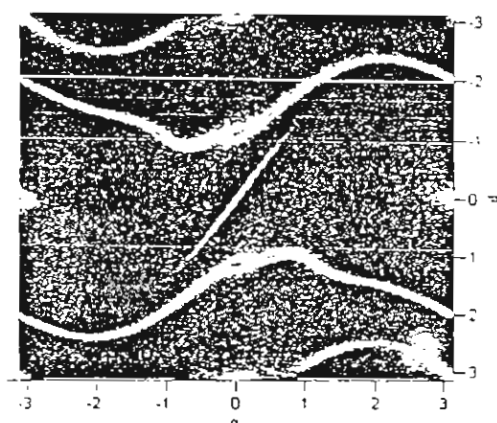
Period = 1



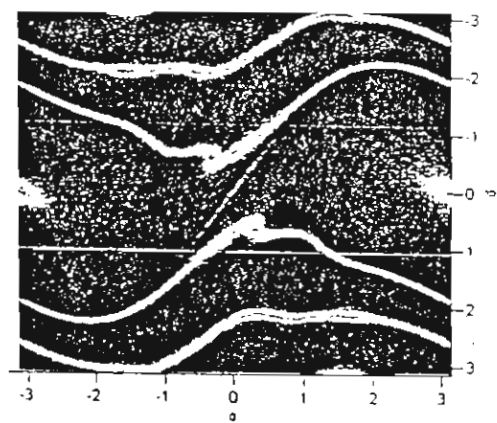
Period = 2



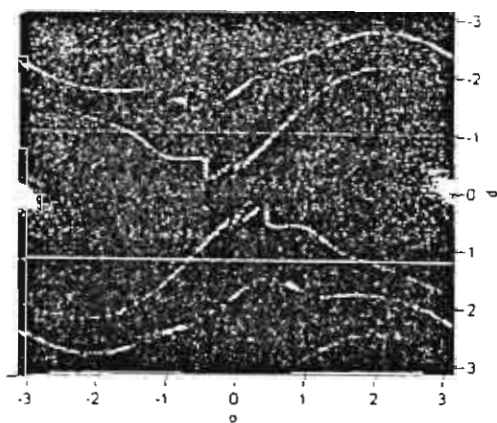
Period = 3



Period = 4



Period = 5



Period = 6

Fig. 5 DirectD functions for $K = 1.0$.

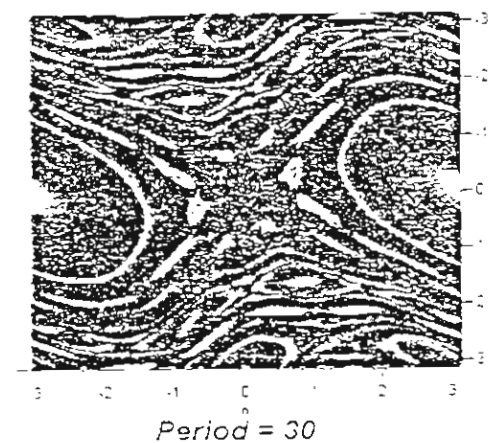
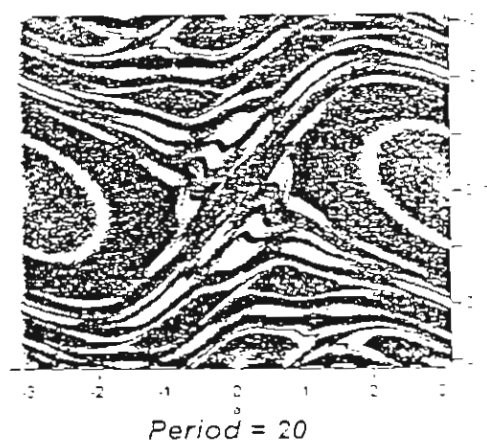
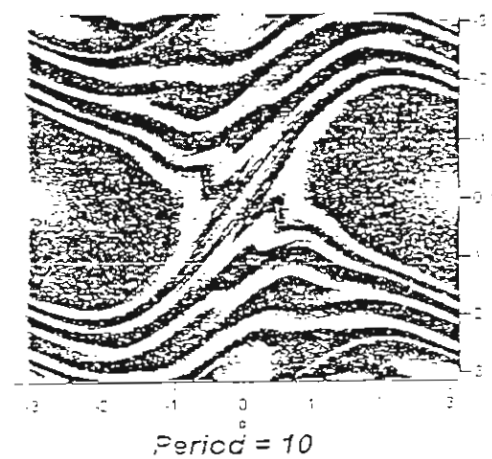
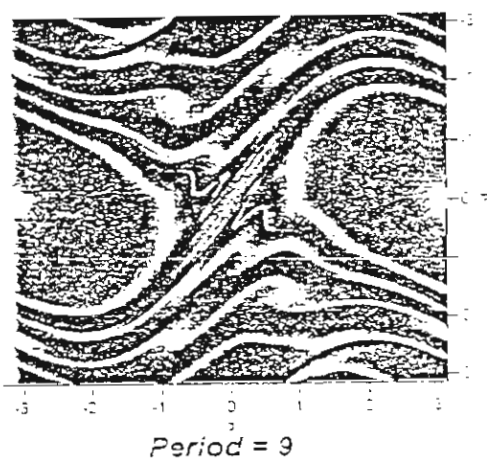
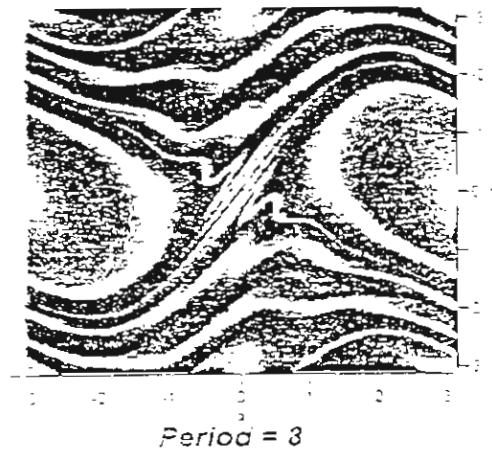
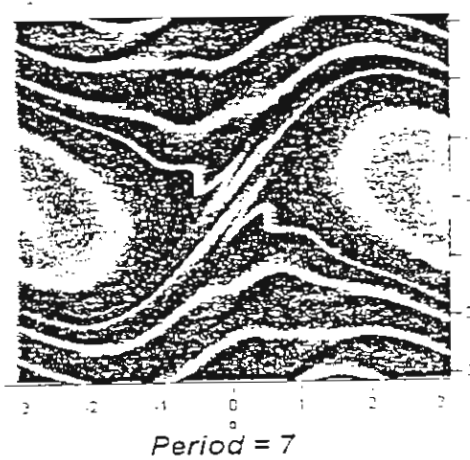
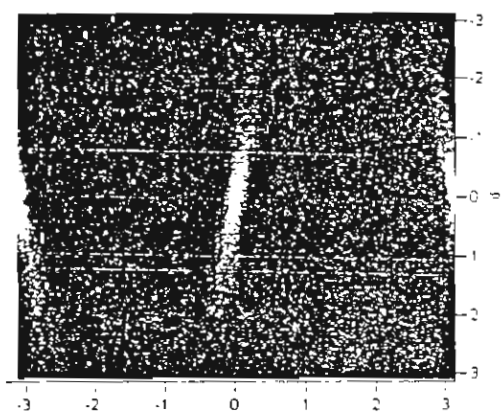
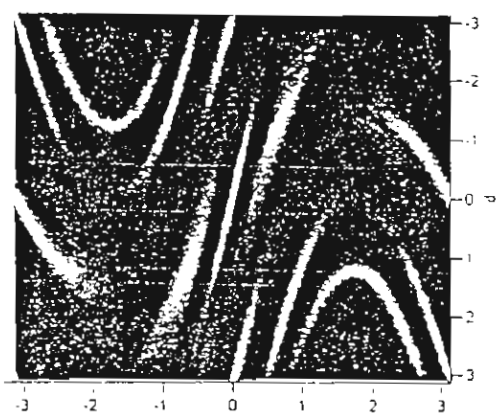


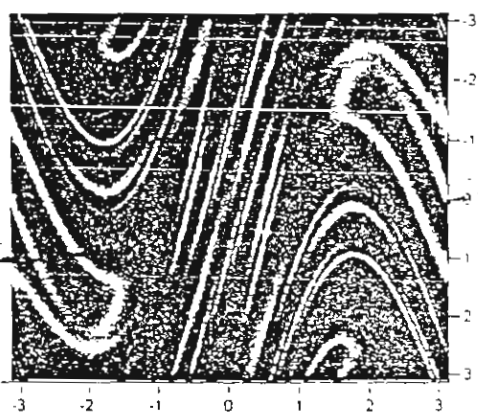
Fig. 5 DirectD function for $K = 1.0$



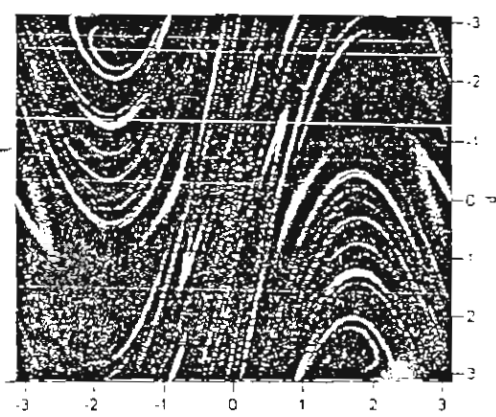
Period = 1



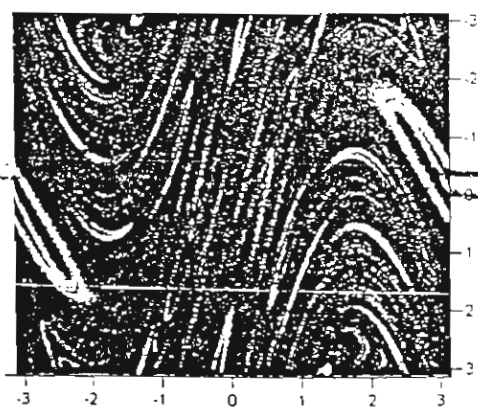
Period = 2



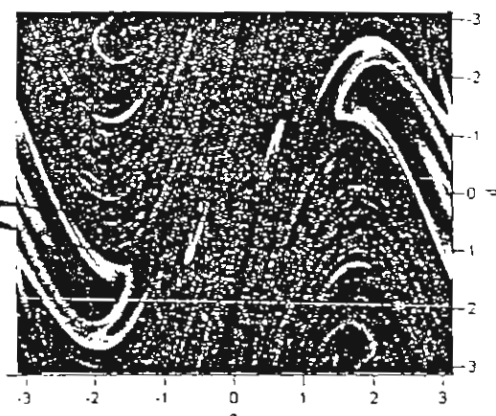
Period = 3



Period = 4



Period = 5



Period = 6

Fig. 7 DirectD functions for $K = 4.0$

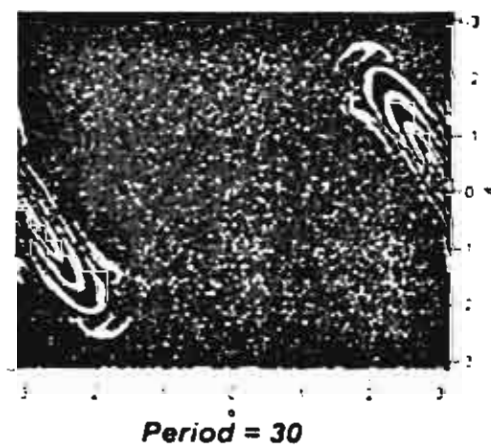
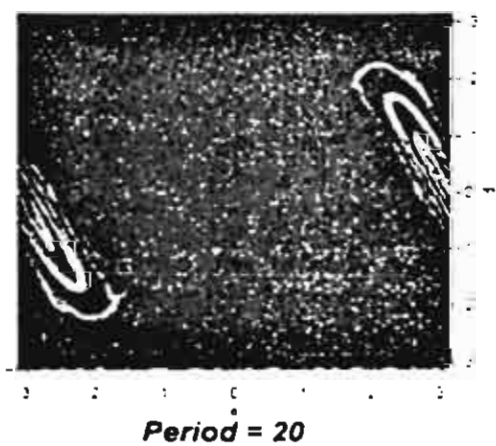
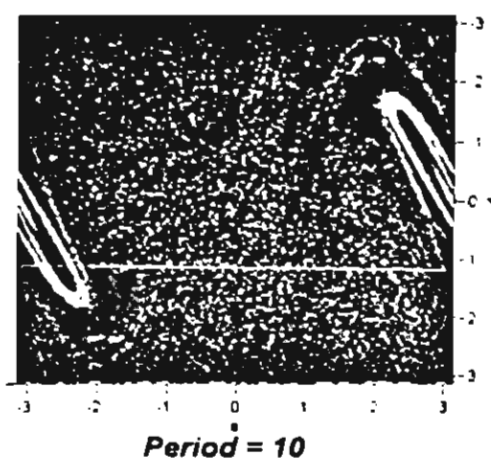
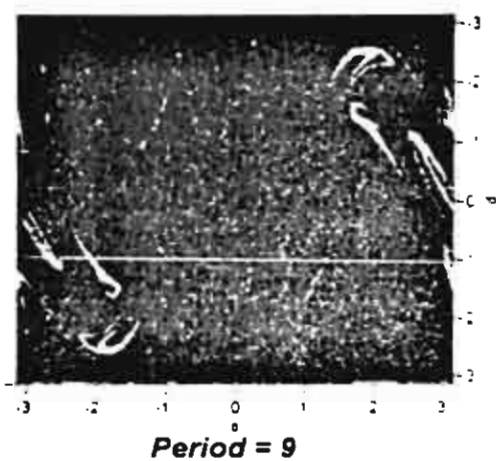
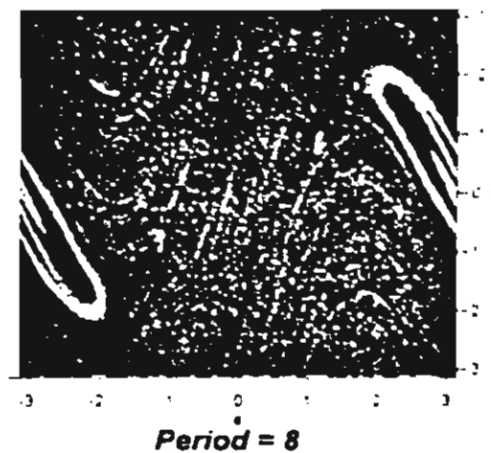
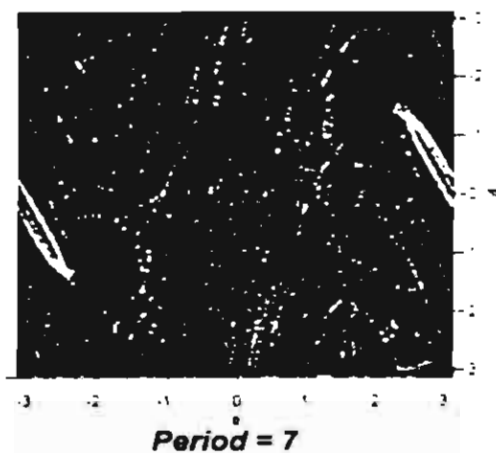


Fig. 8 DirectD function for $K = 4.0$

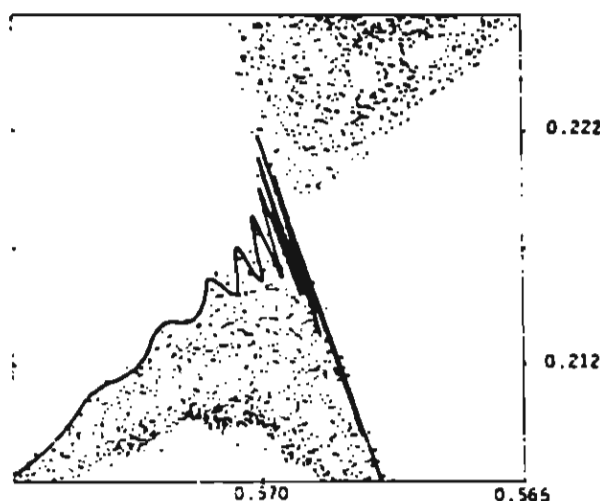


Fig 9. Homoclinic Tangle that appears in [4]

4. Conclusions

I did the calculation for various values of K and found that periodic points can be seen clearly in the plots. As we change K , we found that when K is increased to 1 where chaotic behaviour can be found in some regions. The plots show the intricate structures of the cutting between stable manifolds and unstable ones very distinctively. These structures are known as Homoclinic Tangle (HT) as shown in figure 3. In this figure one could see HTs in many other regions in the plot but these HTs appear in smaller (fractal) sizes such as in the region when q has the value between 1 to 2 and p is between 2 to 3. Another region is when q is between -2 to -1 and p is -3 to -2. [4] has a plot showing orbits that lie on stable manifold to give the clue how HT should be appeared. However, the DirectD method visualises HT a lot more clearly.

And for stable cycles one could see a hollow smooth region in which the centre is the exact location of the POs. Cutting the hole quasi-periodic orbits can be recovered. In conclusion, this method visually gives global dynamical behaviour of the system.

Acknowledgement

This study is supported by the post doctoral grant of Thailand Research Fund (TRF).

References

- [1] Jaroensutasinee K 1997 *A New Method for Cycle Calculation* The proceeding of the 1st Annual National Symposium on Computational Science and Engineering, NSTDA, Bangkok pp 32-35.
- [2] Jaroensutasinee K and Rowlands G 1998 *Prime Cycles in the Logistic Map*, The proceeding of the 2nd Annual National Symposium on Computational Science and Engineering, NSTDA, Bangkok pp 174-181.
- [3] Parker TS and Chua LO 1989 *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems* (Springer-Verlag, New York).
- [4] Helleman RHG 1980 *Fundamental Problems in Statistical Mechanics 5* (ed Cohen EGD) pp 165-233.

Charged-particle orbits near a magnetic null point

K. JAROENSUTASINEE★ and G. ROWLANDS

Department of Physics, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, UK

(Received 10 January 2000)

Abstract. An approximate analytical expression is obtained for the orbits of a charged particle moving in a cusp magnetic field. The particle orbits pass close to or through a region of zero magnetic field before being reflected in regions where the magnetic field is strong. Comparison with numerically evaluated orbits shows that the analytical formula is surprisingly good and captures all the main features of the particle motion. A map describing the long-time behaviour of such orbits is obtained.

The motion of charged particles in spatially varying magnetic fields has received a great amount of attention because of its relevance to plasma fusion devices, particle accelerators and astrophysics. Even in the simplest cases, the motion is complicated and is now known to be an example of chaos. One simplifying assumption, which is good when the ratio of the Larmor radius to a scale length describing the spatial variation of the magnetic field, ϵ , is small, is that the so-called adiabatic invariant μ is a constant. This immediately leads to an explanation of charged-particle containment in the Van Allen radiation belts and in magnetic mirror fusion devices. For larger values of ϵ , it has been found that the adiabatic invariant undergoes jumps $\Delta\mu$ where μ changes rapidly in just a few Larmor periods in special regions of symmetry, but otherwise μ is to all intents and purposes constant. The jumps are such that $\Delta\mu \propto \exp(-1/\epsilon)$. For a specific calculation of $\Delta\mu$ for a wide range of magnetic field configurations, see for example Cohen et al. (1978). In this case, the long-time behaviour of particles can be understood in terms of a map relating the values (μ_n, θ_n) before a jump to the values $(\mu_{n+1}, \theta_{n+1})$ after a jump. Here θ is an angle specifying the Larmor phase of the particle. It is found that, to a reasonable approximation (terms of order $\exp(-2/\epsilon)$ being neglected), that one can write

$$\mu_{n+1} = \mu_n + \Delta\mu \cos \theta_n,$$

where, of course, $\Delta\mu$ is a function of μ_n . In many applications, it is sufficient to restrict attention to changes in μ that are small, so that one may linearize the value of μ_n about a chosen mean. Then the above equation reduces to

$$\delta\mu_{n+1} = \delta\mu_n + K \cos \theta_n, \quad (1)$$

and since the original equations of motion were Hamiltonian, the equation for θ variation can be obtained by insisting that the Jacobian is unity. This gives

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \delta\mu_{n+1}. \quad (2)$$

★ Present address: Walailak University, Thailand.

In the above, K is a constant whose value is determined by the field configuration and energy of the particle.

The above map $(\delta\mu, \theta)$ is the Chirikov map, and is used to study the long-time behaviour of nearly adiabatic particles in spatially varying magnetic fields. For sufficiently small values of $\Delta\mu$, it is found that the particle motion is such that μ changes periodically about a constant value (superadiabatic). For larger values, the motion can become chaotic; and for sufficiently large values, the motion of the charged particle can be understood in terms of a diffusion in momentum space with diffusion coefficient proportional to $\exp(-1/\varepsilon)$. Numerous examples of this type of behaviour have now been studied in detail, and are described in the book by Lichtenberg and Lieberman (1983).

It must be stressed that the direct numerical solution of the particle-orbit equations becomes prohibitively expensive in machine time because one has to follow the particle around its Larmor orbit, whereas it is the motion of the guiding centre that is really needed. Adiabatic and weakly non-adiabatic theory overcome this problem by essentially introducing a suitable averaging procedure to remove the fast motion associated with motion about the Larmor orbit.

However, the whole theory is totally inadequate if, during its motion, a particle can move in a region where the field strength is small or even zero. An example of such a field is the two-dimensional cusp described by the vector potential $\mathbf{A} = xy\mathbf{k}$, where $\mathbf{k}$ is a unit vector along the z axis. For such a field, $\mathbf{B} = (x, -y, 0)$, and the motion of a charged particle in this field is governed by the reduced Hamiltonian (Jaroensutasinee and Rowlands, 1994)

$$H = \frac{1}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (Q - xy)^2], \quad (3)$$

where Q is a constant proportional to the z component of the momentum and $\dot{x} \equiv dx/dt$. An immediate consequence of the constancy of H (which in the following we normalize to $\frac{1}{2}$) is that the particle motion is confined to regions between the curves $y = (Q \pm 1)/x$. Thus, for $Q > 1$, the particle is excluded from the origin, the position of the zero of the magnetic field. For $Q \gg 1$, adiabatic theory applies, and the value of the jump $\Delta\mu$ was given some time ago by Howard (1971). A typical orbit is shown in Fig. 1(d).

For $Q < 1$, the origin is no longer excluded, and particle orbits may pass through or close to the zero-magnetic-field region. Some typical orbits are shown in Fig. 1. A subset of these orbits (Figs 1a, b) are such that they remain close to the x axis, and it is for this type of orbit that we now develop a novel analytical approach. The case $Q = 0$ is developed in detail, although the method is applicable to all $Q < 1$.

The exact equations of motion are simply

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -xy^2, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -x^2y,$$

whilst the adiabatic invariant μ (the ratio of the perpendicular kinetic energy to the magnitude of the magnetic field) is given by

$$\mu = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} [(\dot{x}x + \dot{y}y)^2 + x^2y^2(x^2 + y^2)]. \quad (4)$$

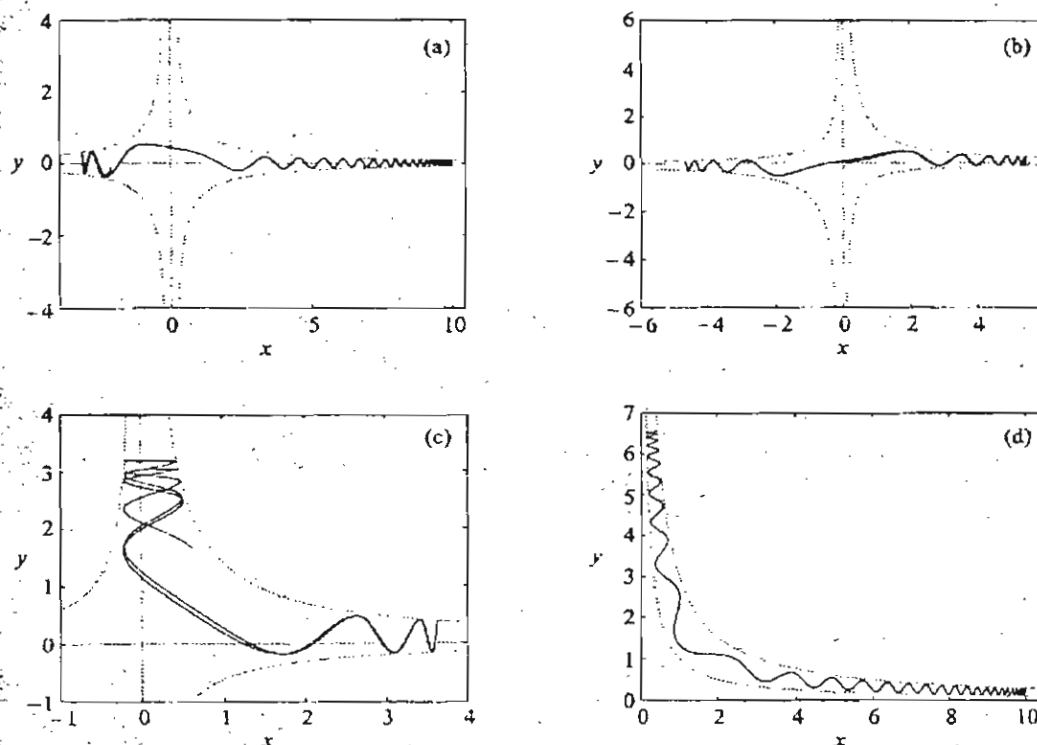


Figure 1. Typical orbits in the linear cusp field: (a) $Q = 0$; (b) 0.4; (c) 0.4; (d) Dotted lines are $y = (Q \pm 1)/x$.

For the type of orbit under discussion, we write $y = g(x)$ and take g to be a monotone function of x . Then, using the equations of motion, we find that g satisfies the following differential equation:

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{1}{1 - x^2 g^2} [xg(1 + g'^2)(gg' - x)], \quad (5)$$

where $g' = dg/dx$.

It is apparent from Figs 1(a, b) that the orbits that pass close to the region where the magnetic field is zero are such that the value of y is small for a range of values of x . Thus we treat both g and x as small, and linearize the above equation in g about $x = 0$ to give $d^2 g/dx^2 = -x^2 g$, whose solution is

$$y = A \sqrt{x} J_{1/4}(\frac{1}{2} x^2) + B \sqrt{x} J_{-1/4}(\frac{1}{2} x^2), \quad (6)$$

where A and B are constants and $J_{\pm 1/4}$ are Bessel functions (Nip et al. 1994). However, such a solution for all x is totally inappropriate, since it excludes the possibility of the particle being reflected in regions of high magnetic field (large x), which is clearly the case as shown in Fig. 1. On the other hand, it is in such regions that adiabatic theory is valid. Thus, in the following, we obtain an approximate analytical expression for the whole orbit of a particle by combining the above form, valid for small x , with an expression, valid for large x , obtained by assuming constancy of the adiabatic invariant.

With $y = g(x)$, so that $\dot{y} = g'(x)\dot{x}$, one can use the expression for the Hamiltonian given by (1) to obtain an expression for $\dot{x}$ and $\dot{y}$ in terms of x , y and