



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการนัยทั่วไปของการเป็นอินजेคทีฟ (On the generalization of injectivity)

โดย รองศาสตราจารย์ ดร. สมยศ พลับเที่ยง
และคณะ

มิถุนายน 2546

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการนัยทั่วไปของการเป็นอินเจคทีฟ (On the generalization of injectivity)

คณะผู้วิจัย

สังกัด

- รองศาสตราจารย์ ดร. สมยศ พลับเที่ยง มหาวิทยาลัยนเรศวร
- ศาสตราจารย์ ดร. สมพงษ์ ธรรมพงษา มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนส่งเสริมการวิจัย

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบคุณสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัยเป็นอย่างสูงที่สนับสนุนทุนวิจัยหลังปริญญาเอก ประจำปี 2544 ให้แก่ข้าพเจ้า และขอกราบขอบพระคุณ ศาสตราจารย์ ดร. สมพงษ์ ธรรมพงษา (นักวิจัยที่เลี้ยง) เป็นอย่างสูงที่เสียสละเวลาในการให้คำปรึกษาและตรวจแก้ไขผลงานที่ส่งโลงตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ

สมยศ พลับเที่ยง

25 มิถุนายน 2546

บทคัดย่อ

รหัสโครงการ : PDF/91/2544

ชื่อโครงการ : ภัยทั่วไปของการเป็นอินเจกทีฟ

ชื่อนักวิจัย : รองศาสตราจารย์ ดร. สมยศ พลับเที่ยง

ระยะเวลาโครงการ : 1 กรกฎาคม 2544- 30 มิถุนายน 2546

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ต้องการพิสูจน์ทฤษฎีบทใหม่เกี่ยวกับการอธิบายลักษณะเฉพาะของริงที่เป็นแบบฉบับโดยใช้กลุ่มของมอดูลที่เป็นภัยทั่วไปของมอดูลอินเจกทีฟ ผลงานหลักของงานวิจัยนี้มีดังต่อไปนี้

1. ริง R จะเป็นริงเนื้อแท้เรียนทางขวาก็ต่อเมื่อ ทุก $\varphi \in R$ มอดูลก่อกำเนิด 2 ทางขวา เป็นผลบวกตรงของมอดูลไพร์เจกทีฟและมอดูลซีเอส หรือมอดูลเนื้อแท้เรียน
2. ริง R จะเป็นริงอาร์ทีเนียนทางขวาก็ต่อเมื่อทุก $\varphi \in R$ มอดูลก่อกำเนิด -2 ทางขวา เป็นมอดูลควอซี-คอนทีนิวอัส หรือมอดูลที่มีความยาวจำกัด
3. ริงซิมเพล R จะเป็นริงเนื้อแท้เรียนทางขวาก็ต่อเมื่อทุก $\varphi \in R$ มอดูลซิคคลิกซิงกูลาร์ทางขวาเป็นมอดูลซีเอสหรือมอดูลเนื้อแท้เรียน
4. ให้ R เป็นริงไพรม์ถ้าทุก $\varphi \in R$ มอดูลซิคคลิกแท้ทางขวาเป็นผลบวกตรงของมอดูลควอซี-อินเจกทีฟ และมอดูลไฟไนท์โคเจเนอเรเตอร์ แล้ว R จะเป็นริงเซมิซิมเพลอาร์ทีเนียนหรือโดเมนอูททางขวา
5. ริงไพรม์ R จะเป็นริงเนื้อแท้เรียนทางขวาก็ต่อเมื่อทุก $\varphi \in R$ มอดูลซิคคลิกทางขวาเป็นผลบวกตรงของมอดูลควอซี-อินเจกทีฟและมอดูลเนื้อแท้เรียน
6. ริง R จะเป็นริงเซมิเพอร์เฟกต์ถ้าทุก $\varphi \in R$ มอดูลซิคคลิกทางขวาเป็นผลบวกตรงของมอดูลคอนทีนิวอัสและมอดูลเซมิเพอร์เฟกต์
7. ริง R จะเป็นเนื้อแท้เรียนทางขวาก็ต่อเมื่อทุก $\varphi \in R$ มอดูลก่อกำเนิดแบบนับได้ทางขวาเป็นผลบวกตรง ของมอดูลคอนทีนิวอัส
8. ริง R จะเป็นริงอาร์ทีเนียนทางขวาก็ต่อเมื่อทุก $\varphi \in R$ มอดูลก่อกำเนิดแบบนับได้ทางขวาเป็นผลบวกตรงของมอดูลคอนทีนิวอัสและมอดูลโลคัลลีอาร์ทีเนียน
9. ริง R จะเป็นริงอาร์ทีเนียนทางขวาถ้าทุก $\varphi \in R$ มอดูลก่อกำเนิดแบบนับได้ทางขวาเป็นผลบวกตรงของมอดูลควอซี-คอนทีนิวอัสและมอดูลเซมิซิมเพล
10. ริง R จะเป็นริงอาร์ทีเนียนทางขวาถ้าทุก $\varphi \in R$ มอดูลเป็นผลบวกตรงของมอดูลซีเอสและมอดูลเซมิซิมเพล

คำหลัก : Noetherian rings, Artinian rings, Injective modules, Continuous modules, CS-modules

Abstract

Project Code : PDF/91/2544

Project Title : On the generalization of Injectivity

Investigator : Assoc.Prof. Dr. Somyot Plubtieng

E-mail Address : somyotp@nu.ac.th

Project Period : July 1, 2001 – June 30, 2003

The purpose of this research was establish some characterizations of the classical rings through the class of generalized of injective modules. Our main results, among any others, are list as follow:

1. A ring R is right noetherian if and only if every 2-generated right R -module is a direct sum of a projective module and a module that is either CS or noetherian.
2. A ring R is right artinian if and only if every 2-generated right R -module is either quasi-continuous or finite length.
3. A simple ring R is right noetherian if and only if every cyclic singular right R -module is either a CS-module or a noetherian module.
4. Let R be a prime ring. If every proper cyclic right R -module is a direct sum of a quasi-injective module and a finitely cogenerated module, then R is either semisimple artinian or right Ore domain.
5. A prime ring R is right noetherian if and only if every cyclic right R -module is a direct sum of a quasi-injective module and a noetherian module.
6. A ring R is semiperfect if every cyclic right R -module is a direct sum of a continuous module and a semiperfect module.
7. A ring R is right noetherian if and only if every countably generated right R -module is a direct sum of a continuous module and a locally noetherian module.
8. A ring R is right artinian if and only if every countably generated right R -module is a direct sum of a continuous module and a locally artinian module.
9. A ring R is right artinian if every countably generated right R -module is a direct sum of a quasi-continuous module and a semisimple module.
10. A ring R is right artinian if every right R -module is a direct sum of a CS-module and a semisimple module.

Keywords : Noetherian rings, Artinian rings, Injective modules, Continuous modules, CS-modules

เนื้อหางานวิจัย

1. ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

การศึกษาทฤษฎีมอดูลมีแนวทางหลักที่ทำการศึกษาวิจัยอยู่ 2 แนวทาง คือ แนวทางแรกจะศึกษาคุณสมบัติของมอดูลบนริงใด ๆ หรือศึกษาคุณสมบัติของมอดูลบนเฉพาะริง (เช่น บนริงแบบนอเอเธอร์ (noetherian rings), ริงแบบเซมิเพอร์เฟกต์ (semiperfect rings) เป็นต้น) อีกแนวทางหนึ่งจะศึกษาเพื่ออธิบายลักษณะเฉพาะของริงที่เป็นแบบฉบับ (classical rings) โดยใช้กลุ่ม (class) ของมอดูลบนริงดังกล่าว

มอดูลอินเจกทีฟ (injective module) ถือว่าเป็นมอดูลชนิดหนึ่งที่มีความสำคัญมากในการค้นพบและพัฒนาทฤษฎีบทมอดูลเองและทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับซึ่งจะพบว่ามีงานวิจัยจำนวนมากที่ศึกษาคุณสมบัติของมอดูลอินเจกทีฟ เช่น คุณสมบัติการมีอินเจกทีฟฮูล (injective hull) คุณสมบัติการแยกเป็นผลบวกตรงของมอดูลอินดีคอมโพสเซเบิล (indecomposable modules) เป็นต้น และอีกด้านหนึ่งมีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากที่ศึกษาทำงานวิจัยในการอธิบายลักษณะเฉพาะของริงที่เป็นแบบฉบับ (classical rings) ซึ่งได้แก่ ริงแบบเซมิซิมเพิล (semisimple rings) ริงแบบควิเอฟ (QF-rings) ริงแบบอาร์ทีน (Artinian ring) เป็นต้น โดยที่เราทราบว่าริงที่เป็นแบบฉบับมีความสัมพันธ์กันดังนี้

$$\begin{array}{ccccccc} \text{เซมิซิมเพิล} & \Rightarrow & \text{อาร์ทีน} & \Rightarrow & \text{เซมิพรีมิตีฟ} & \Rightarrow & \text{เพอร์เฟกต์} & \Rightarrow & \text{เซมิเพอร์เฟกต์} \\ & & \downarrow & & (\text{semiprimitive}) & & (\text{Perfect}) & & (\text{semiperfect}) \\ & & \text{นอเอเธอร์} & & & & & & \end{array}$$

เนื่องจากในช่วง 30 ปีที่ผ่านมา มีนักคณิตศาสตร์ที่ศึกษานัยทั่วไปของมอดูลอินเจกทีฟเป็นจำนวนมาก ซึ่งทราบกันว่ามอดูลที่เป็นนัยทั่วไปของมอดูลอินเจกทีฟมีการศึกษากันในหลาย ๆ ทิศทางและนัยทั่วไปของมอดูลอินเจกทีฟที่นิยมศึกษากันมากที่สุด คือ มอดูลควอซี-อินเจกทีฟ (quasi-injective modules) มอดูลคอนทินิวอัส (continuous modules) มอดูลควอซี-คอนทินิวอัส (quasi-continuous modules) และมอดูลซีเอส (CS-modules) โดยที่มอดูลดังกล่าวทั้งหลายข้างต้นมีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccc} \text{อินเจกทีฟ} & \Rightarrow & \text{ควอซี-อินเจกทีฟ} & \Rightarrow & \text{คอนทินิวอัส} & \Rightarrow & \text{ควอซี-คอนทินิวอัส} & \Rightarrow & \text{ซีเอส} \\ (\text{injective}) & & (\text{quasi-injective}) & & (\text{continuous}) & & (\text{quasi-continuous}) & & (\text{CS}) \end{array}$$

การพัฒนาทฤษฎีบทเกี่ยวกับคุณสมบัติของมอดูลดังกล่าวข้างบนนี้ จะทำให้การศึกษาลักษณะเฉพาะของริงที่เป็นแบบฉบับมีความสมบูรณ์และชัดเจนยิ่งขึ้น ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการสร้างทฤษฎีใหม่ทางคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ และคณิตศาสตร์ประยุกต์ต่อไป

2. วัตถุประสงค์ของโครงการ

เป้าหมายหลักของโครงการอยู่ที่การสร้างองค์ความรู้ใหม่และการขยายขอบเขตขององค์ความรู้เดิม ให้กว้างขวางยิ่งขึ้น ตามรายละเอียด ดังนี้

1. เพื่อสร้างทฤษฎีใหม่เกี่ยวกับคุณสมบัติของมอดูลที่เป็นนัยทั่วไปของมอดูลอินเจกทีฟ เช่น คุณสมบัติ Exchange property และคุณสมบัติ Decomposition complements direct summands ตามแนวความคิดของ R.B. Warfield และ E. Matlis ที่ได้ทำไว้กับมอดูลอินเจกทีฟ
2. เพื่อสร้างทฤษฎีบทใหม่เกี่ยวกับการอธิบายลักษณะเฉพาะของริงที่เป็นแบบฉบับ (เช่น ริงแบบเชมิซิมเปิล ริงแบบเนอแทร์ ริงแบบอาร์ทิน) โดยใช้กลุ่มของมอดูล (บนริงดังกล่าว) ที่เป็นนัยทั่วไปของมอดูลอินเจกทีฟ ทั้งนี้จะอาศัยแนวความคิดของ B.L. Osofsky, P.F. Smith และ D.V. Huynh ที่ได้อธิบายลักษณะเฉพาะของริงดังกล่าวด้วยมอดูลอินเจกทีฟ

3. เอกสารและผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาเกี่ยวกับมอดูลที่เป็นนัยทั่วไปของมอดูลอินเจกทีฟได้ทำกันอย่างแพร่หลายตั้งแต่ปี ค.ศ. 1960 เป็นต้นมา โดยมีผลงานวิจัยจำนวนมากที่ได้ถูกรวบรวมไว้ในหนังสือ Continuous and Discrete Modules โดย S.H. Mohammed and B.J. Muller [11] ในปี ค.ศ. 1990 และในหนังสือ Extending modules ซึ่งรวบรวมโดย N.V. Dung, และคณะ [5] ในปี ค.ศ. 1994 นอกจากนี้ยังมีผลงานวิจัยที่ยังไม่ได้รวบรวมไว้ในหนังสือดังกล่าว ซึ่งในที่นี้จะยกเอามาบางประเด็นเฉพาะที่ผู้เสนอโครงการสนใจดังนี้

3.1 คุณสมบัติที่เกี่ยวกับทฤษฎีบทการแยก (decomposition) เป็นผลบวกตรง (direct sum) ของมอดูล ซึ่งจะเกี่ยวข้องกับคุณสมบัติ complements direct summands, locally semi-T-nilpotent และ exchange property ซึ่งมีผลงานของผู้เชี่ยวชาญที่เด่น ๆ ดังนี้

- ในปี ค.ศ. 1969 R.B. Warfield [18] ได้พิสูจน์ว่าทุก ๆ มอดูลควอซี-อินเจกทีฟมีคุณสมบัติ exchange property
- ในปี ค.ศ. 1988 S.H. Mohamed B.J. Muller [11] ได้ขยายแนวความคิดของ Warfield พิสูจน์ว่าทุก ๆ มอดูลคอนทินิวอัสมีคุณสมบัติ exchange property
- ในปี ค.ศ. 1996 K.Oshiro และ S.T. Rizvi [13] ได้พบเงื่อนไขที่ทำให้ทุก ๆ มอดูลควอซี-คอนทินิวอัสมีคุณสมบัติ exchange property ซึ่งเงื่อนไขดังกล่าวคือ คุณสมบัติ finite exchange property.

3.2 การอธิบายลักษณะของริงแบบเนอแทร์มีผลงานวิจัยที่สำคัญ ๆ ดังนี้

- ในปี ค.ศ. 1958 E. Matlis [10] ได้พิสูจน์ว่า R จะเป็นริงแบบเนอแทร์ทางขวาก็ต่อเมื่อทุก ๆ มอดูลอินเจกทีฟทางขวา (บนริง R) เป็นผลบวกตรงของมอดูลอินดิคอมโพสเชเบิล (indecomposable modules)

- ในปี ค.ศ. 1964 B.L. Osofsky [14] ได้พิสูจน์ว่า R จะเป็นริงแบบเซมิซิมเปิล(semisimple rings) ก็ต่อเมื่อทุก ๆ มอดูลซิคคลิก(cyclic module)ทางขวา (บนริง R) เป็นมอดูลอินเจกทีฟ
- ในปี ค.ศ. 1984 M.Okado [12] ได้ขยายแนวคิดของ Matlis มาใช้มอดูลซีเอสในการอธิบายลักษณะเฉพาะของริงแบบเนอเธอร์ โดยพิสูจน์ว่า R จะเป็นริงแบบเนอเธอร์ทางขวาก็ต่อเมื่อทุก ๆ มอดูลซีเอสทางขวา (บนริง R) เป็นผลบวกตรงของมอดูลอินดิคอมโพสเซเบิล
- ในปี ค.ศ. 1982 A.W.Chatters [3] ได้พิสูจน์ว่า R จะเป็นริงแบบเนอเธอร์ทางขวาก็ต่อเมื่อทุก ๆ มอดูลซิคคลิก (cyclic module) ทางขวา (บนริง R) เป็นผลบวกตรงของมอดูลโปรเจกทีฟ (projective modules) และ มอดูลเนอเธอร์ (noetherian module)
- ในปี ค.ศ. 1991 B.L. Osofsky and P.F. Smith [16] ได้พิสูจน์ว่า R จะเป็นริงแบบเนอเธอร์ ทางขวาดำทุก ๆ มอดูลซิคคลิกทางขวา (บนริง R) เป็นผลบวกตรงของมอดูลโปรเจกทีฟ และมอดูลอินเจกทีฟ
- ในปี ค.ศ. 1996 D.V. Huynh [7] ได้ขยายแนวความคิดของ Chatters [3] และ Osofsky and Smith [16] โดยพิสูจน์ว่า R จะเป็นริงแบบเนอเธอร์ ทางขวาก็ต่อเมื่อทุก ๆ มอดูลอินเจกทีฟทางขวา (บนริง R) เป็นมอดูลอินเจกทีฟหรือเป็นผลบวกตรงของมอดูลโปรเจกทีฟและมอดูลเนอเธอร์
- ในปี ค.ศ. 1996 D.V. Huynh , S.T. Rizvi and M.F.Yousif [8] ได้ใช้มอดูลซีเอสในการอธิบายลักษณะเฉพาะของริงแบบเนอเธอร์โดยพิสูจน์ว่า R เป็นริงแบบเนอเธอร์ทางขวาดำทุก ๆ มอดูลไฟไนต์เจเนอเรเตด (finitely generated modules) เป็นมอดูลซีเอส

3.3 การอธิบายลักษณะเฉพาะของริงแบบคิวเอฟ (QF-rings)

- ในปี ค.ศ. 1951 M. Ikeda [9] ได้นิยามริงแบบคิวเอฟว่า ถ้า R เป็นริงแบบอาร์ทีนทางขวา (หรือทางซ้าย) และเป็นริงอินเจกทีฟทางขวา (หรือทางซ้าย) แล้วเราจะกล่าวว่า R เป็นริงแบบคิวเอฟ พร้อมทั้งพิสูจน์ได้ว่าเงื่อนไขการเป็นริงแบบอาร์ทีนสามารถแทนด้วยริงแบบเนอเธอร์
- ในปี ค.ศ. 1966 B.L. Osofsky [15] ได้พิสูจน์ว่า R เป็นริงแบบคิวเอฟ ก็ต่อเมื่อ R เป็นริงแบบเพอเฟคต์ทางขวา และเป็นริงอินเจกทีฟทั้งทางซ้ายและทางขวา
- ในปี ค.ศ. 1966 C. Faith [6] ได้พิสูจน์เงื่อนไขที่เป็นนัยทั่วไปยิ่งขึ้นของริงแบบคิวเอฟโดยแทนเงื่อนไขการเป็นริงแบบเนอเธอร์ด้วยเงื่อนไขที่อ่อนกว่า พร้อมทั้งเสนอข้อความคาดการณ์ที่มีชื่อว่า Faith Conjecture ดังนี้
“ริงแบบเซมิพริมาทีฟอินเจกทีฟทางขวา R เป็นริงแบบคิวเอฟ”
ซึ่งปัญหานี้ยังไม่สามารถหาคำตอบได้จนถึงปัจจุบันนี้
- ในปี ค.ศ. 1965 Y. Utumi [17] ได้พิสูจน์ว่า R เป็นริงแบบคิวเอฟ ก็ต่อ

เมื่อ R เป็นริงแบบอาร์ทินทั้งทางขวาและทางซ้าย และเป็นริงคอนทินิวอัลทั้งทางขวาและทางซ้าย

- ในปี ค.ศ. 1994 J. Clark and D.V. Huynh [14] ได้ศึกษาว่าเมื่อไร ริงแบบเซมิเพเฟคต์อินเจกทีฟทางขวา (บนริง R) จะเป็นริงแบบคิวเอฟ ซึ่งพวกเขาพิสูจน์ได้ว่า R เป็นริงแบบคิวเอฟก็ต่อเมื่อ R เป็นริงแบบเซมิเพเฟคต์อินเจกทีฟทางขวา และทุก ๆ ยูนิฟอร์มสับมอดูล (uniform submodule) ของแต่ละมอดูลโพรเจกทีฟ P (บนริง R) ถูกบรรจุอยู่ในไฟไนต์เจเนอเรเตด (finite generated) สับมอดูลของ P

4. วิธีการดำเนินวิจัย

1. รวบรวมศึกษาเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับเรื่อง A characterization of Noetherian rings, Artinian rings and QF-rings
2. กำหนดสมมติฐานและพิสูจน์ทฤษฎีบทที่กำหนดลักษณะเฉพาะของริงนอเทเรียน (Noetherian rings) และเขียนเป็น paper ในชื่อ "Conditions for a ring to be Noetherian and Artinian" ให้นักวิจัยที่เลี้ยงตรวจสอบ
3. ส่งมอบ paper ในหัวข้อ 2) เพื่อตีพิมพ์ในวารสาร The Communication in Algebra
4. แก้ไข paper ของงานวิจัยในข้อ 3) ที่ได้รับการตอบรับเพื่อลงตีพิมพ์แล้ว ตามข้อเสนอแนะของ Referee ให้นักวิจัยที่เลี้ยงตรวจสอบและส่งมอบให้ Editor
5. กำหนดสมมติฐานและพิสูจน์ทฤษฎีบทลักษณะเฉพาะของริงนอเทเรียนบนริงซิมเปิล และเขียน paper ของงานวิจัยชื่อ "On Simple Noetherian rings" ให้นักวิจัยที่เลี้ยงตรวจสอบ
6. ส่งมอบ paper ในหัวข้อ 5) เพื่อตีพิมพ์ในวารสาร Algebra Colloquium
7. แก้ไข paper ของงานวิจัยในข้อ 6) ที่ได้รับการตอบรับเพื่อลงตีพิมพ์แล้ว ตามข้อเสนอแนะของ Referee ให้นักวิจัยที่เลี้ยงตรวจสอบและส่งมอบให้ Editor
8. กำหนดสมมติฐานและพิสูจน์ทฤษฎีบทลักษณะเฉพาะของริงนอเทเรียนและริงอาร์ทินเนียน และเขียน paper ของงานวิจัยชื่อ "Rings with many direct summands" ให้นักวิจัยที่เลี้ยงตรวจสอบ
9. ส่งมอบ paper ในหัวข้อ 8) เพื่อตีพิมพ์ในวารสาร The Mathematical Journal of Okayama University
10. แก้ไข paper ของงานวิจัยในข้อ 9) ที่ได้รับการตอบรับเพื่อลงตีพิมพ์แล้ว ตามข้อเสนอแนะของ Referee ให้นักวิจัยที่เลี้ยงตรวจสอบและส่งมอบให้ Editor
11. กำหนดนิยามของมอดูลที่เป็นนัยทั่วไปของมอดูลคอนทินิวอัล กำหนดสมมติฐานและพิสูจน์ทฤษฎีบทลักษณะเฉพาะมอดูล ec-continuous และริงคิวเอฟ และเขียน

paper ของงานวิจัยชื่อ " A generalization of continuous modules and their application to QF-rings " ให้นักวิจัยพี่เลี้ยงตรวจสอบ

12. ส่งมอบ paper ในหัวข้อ 11) เพื่อตีพิมพ์ในวารสาร The Kyungpook Mathematical Journal
13. แก้ไข paper ของงานวิจัยในข้อ 12) ที่ได้รับการตอบรับเพื่อลงตีพิมพ์แล้ว ตามข้อเสนอแนะของ Referee ให้นักวิจัยพี่เลี้ยงตรวจสอบและส่งมอบให้ Editor
14. กำหนดสมมติฐานและพิสูจน์ทฤษฎีบทลักษณะเฉพาะของริงเนอแทเรียนและริงอาร์ทีเนียน และเขียน paper ของงานวิจัยชื่อ "Modules characterized by their proper cyclic subfactors" ให้นักวิจัยพี่เลี้ยงตรวจสอบ
15. ส่งมอบ paper ในหัวข้อ 14) เพื่อตีพิมพ์ในวารสาร Southeast Asian Bulletin of Mathematics
16. แก้ไข paper ของงานวิจัยในข้อ 15) ที่ได้รับการตอบรับเพื่อลงตีพิมพ์แล้ว ตามข้อเสนอแนะของ Referee ให้นักวิจัยพี่เลี้ยงตรวจสอบและส่งมอบให้ Editor

5. ผลงานวิจัยที่ได้รับ

ผลงานหลักของงานวิจัยนี้มีดังต่อไปนี้ กำหนดให้ M เป็นมอดูลก่อกำเนิดจำกัด

1. ลักษณะเฉพาะของริงเนอแทเรียน และอาร์ทีเนียน
 - 1.1 มอดูล M เป็นเนอแทเรียนก็ต่อเมื่อทุก ๆ มอดูลก่อกำเนิดจำกัดใด $\sigma[M]$ เป็นผลบวกตรงของมอดูลไพเรเจทิฟ และมอดูลซีเอสหรือมอดูลเนอแทเรียน
 - 1.2 ริง R จะเป็นริงเนอแทเรียนทางขวาก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ R - มอดูลก่อกำเนิด 2 ทางขวาเป็นผลบวกตรงของมอดูลไพเรเจทิฟและมอดูลซีเอสหรือมอดูลเนอแทเรียน
 - 1.3 ริง R จะเป็นริงอาร์ทีเนียนทางขวาก็ต่อเมื่อทุก ๆ $(R-)$ มอดูลก่อกำเนิด -2 ทางขวาเป็นมอดูลควอซี-คอนทีนิวอัส หรือมอดูลที่มีความยาวจำกัด
 - 1.4 ริงซิมเปิล R จะเป็นริงเนอแทเรียนทางขวาก็ต่อเมื่อทุก ๆ $(R-)$ มอดูลซิคคลิกซิงกูลาร์ทางขวาเป็นมอดูลซีเอสหรือมอดูลเนอแทเรียน
 - 1.5 ให้ R เป็นริงไพรม์ถ้าทุก ๆ $(R-)$ มอดูลซิคคลิกแท้ทางขวาเป็นผลบวกตรงของมอดูลควอซี-อินเจกทิฟ และมอดูลไฟไนท์โคเจเนอเรเตอร์ แล้ว R จะเป็นริงเซมิซิมเปิลอาร์ทีเนียนหรือโดเมนอทางขวา
 - 1.6 ริงไพรม์ R จะเป็นริงเนอแทเรียนทางขวาก็ต่อเมื่อทุก ๆ $(R-)$ มอดูลซิคคลิกทางขวาเป็นผลบวกตรงของมอดูลควอซี-อินเจกทิฟและมอดูลเนอแทเรียน
 - 1.7 ริง R จะเป็นริงเซมิเพอร์เฟกต์ถ้าทุก ๆ $(R-)$ มอดูลซิคคลิกทางขวาเป็นผลบวกตรงของมอดูลคอนทีนิวอัสและมอดูลเซมิเพอร์เฟกต์
 - 1.8 ริง R จะเป็นเนอแทเรียนทางขวาก็ต่อเมื่อทุก ๆ $(R-)$ มอดูลก่อกำเนิดแบบนับได้ทางขวาเป็นผลบวกตรง ของมอดูลคอนทีนิวอัส

- 1.9 รিং R จะเป็นริงอาร์ทีเนียนทางขวาก็ต่อเมื่อทุก ๆ $(R-)$ มอดูลก่อกำเนิดแบบนับได้ทางขวาเป็นผลบวกตรงของมอดูลคอนทีนิวัสและมอดูลโลคัลลีอาร์ทีเนียน
- 1.10 รিং R จะเป็นริงอาร์ทีเนียนทางขวาก็ต่อเมื่อทุก ๆ $(R-)$ มอดูลก่อกำเนิดแบบนับได้ทางขวาเป็นผลบวกตรงของมอดูลควอซี-คอนทีนิวัสและมอดูลเซมิซิมเพล
- 1.11 รিং R จะเป็นริงอาร์ทีเนียนทางขวาก็ต่อเมื่อทุก ๆ $(R-)$ มอดูลเป็นผลบวกตรงของมอดูลซีเอสและมอดูลเซมิซิมเพล
- 1.12 ถ้าทุก ๆ ซิคคลิกแลปแฟกเตอร์แท้ของ M เป็นผลบวกตรงของมอดูลซีเอสและมอดูลที่มีมิดิยูนิฟอร์มจำกัด หรือเป็นผลบวกตรงของมอดูล M -โปรเจกทิฟกับมอดูล Q หรือ Q เป็นมอดูลซีเอสหรือเนอแทเรียนแล้วทุก ๆ มอดูลแฟกเตอร์ของ M จะมีมิดิยูนิฟอร์มจำกัด
- 1.13 รিং R จะเป็นริงเนอแทเรียนทางขวาก็ต่อเมื่อทุก ๆ $(R-)$ มอดูลซิคคลิกแท้ทางขวาเป็นผลบวกตรงของมอดูลโปรเจกทิฟและมอดูลอินเจกทิฟหรือมอดูลเนอแทเรียน
- 1.14 รিং R จะเป็นริงเนอแทเรียนทางขวาก็ต่อเมื่อทุก ๆ $(R-)$ มอดูลก่อกำเนิดแบบจำกัดแท้เป็นผลบวกตรงของมอดูลโปรเจกทิฟ และมอดูลซีเอสหรือมอดูลเนอแทเรียน
- 2 นัยทั่วไปของมอดูลคอนทีนิวัสและริงคิวเอฟ
- 2.1 งานวิจัยที่ได้ศึกษากลุ่มของมอดูลที่เป็นนัยทั่วไปของมอดูลคอนทีนิวัสและมอดูลควอซี-คอนทีนิวัส ซึ่งได้แก่มอดูลอีซี-คอนทีนิวัส และมอดูลอีซี-ควอซี-คอนทีนิวัส
- 2.2 งานวิจัยนี้ได้พิสูจน์ทฤษฎีของดีคอมโพสิชันสำหรับมอดูลอีซี-ควอซี-คอนทีนิวัส และพิสูจน์เงื่อนไขเพียงพอที่ทำให้มอดูลอีซี-คอนทีนิวัสเป็นมอดูลคอนทีนิวัส
- 2.3 งานวิจัยนี้ได้พิสูจน์ทฤษฎีบทที่อธิบายลักษณะเฉพาะของริงคิวเอฟโดยใช้เงื่อนไข "อีซี-คอนทีนิวัส" แทนเงื่อนไข "อินเจกทิฟ"

ผลการวิจัยดังกล่าวเขียนเป็น paper จำนวน 5 paper ซึ่งสรุปบทความแต่ละ paper ดังกล่าวได้ดังนี้

1) Conditions for a rings to be noetherian and artinian

Abstract. Let M be a finitely generated module. It is shown that M is noetherian if and only if every finitely generated module in $\sigma[M]$ is a direct sum of a projective module and a module Q , where Q is either CS or noetherian. Consequently, (i) a ring R is right noetherian if and only if every 2-generated right R -module is a direct sum of a projective module and a module that is either CS or noetherian, and (ii) a ring R is right artinian if and only if every 2-generated right R -module is either quasi-continuous or finite length. (ดูรายละเอียดในภาคผนวก 1)

2) On simple noetherian rings

Abstract. A module M is called a CS-module (or extending module) if every submodule of M is essential in a direct summand of M . It is shown that (i) a simple ring R is right noetherian if and only if every cyclic singular right R -module is either a CS-module or a noetherian module, (ii) over a prime ring R if every proper cyclic right R -module is a direct sum of a quasi-injective module and a finitely cogenerated module, then R is either semisimple artinian or right Ore domain, and (iii) a prime ring R is right noetherian if and only if every cyclic right R -module is a direct sum of a quasi-injective module and a noetherian module. (ดูรายละเอียดในภาคผนวก 2)

3) Rings with many direct summands

Abstract. It is shown that (i) a ring R is semiperfect if every cyclic right R -module is a direct sum of a continuous module and a semiperfect module, (ii) a ring R is right noetherian if and only if every countably generated right R -module is a direct sum of a continuous module and a locally noetherian module, (iii) a ring R is right artinian if and only if every countably generated right R -module is a direct sum of a continuous module and a locally artinian module, (iv) a ring R is right artinian if every countably generated right R -module is a direct sum of a quasi-continuous module and a semisimple module, and (v) a ring R is artinian if every right R -module is a direct sum of a CS-module and a semisimple module. (ดูรายละเอียดในภาคผนวก 3)

4) A generalization of continuous modules and their application to QF-rings

Abstract. A ring R is called quasi-Frobenius, briefly QF, if R is right or left artinian and right or left self-injective. In this note we study the new class of modules which generalize the concept of continuous (quasi-continuous) modules, that is, ec-continuous (ec-quasi-continuous) modules. We prove the decomposition theorems for ec-quasi-continuous modules, and we also give a sufficient condition for ec-continuous to be continuous. Moreover, we give a characterization of QF-rings with the injectivity condition replaced by ec-continuity. (ดูรายละเอียดในภาคผนวก 4)

5) Modules characterized by their proper cyclic subfactors

Abstract. For a finitely generated self-projective right R -module M , we show that if every proper cyclic subfactor of M is a direct sum of a CS-module and a module of finite uniform dimension, or a direct sum of an M -projective module and a module Q ,

where Q is either CS or noetherian, then every factor module of M has finite uniform dimension. Consequently, (i) a ring R is right noetherian if and only if every proper cyclic right R -module is a direct sum of a projective module and a module Q , where Q is either injective or noetherian, and (ii) a ring R is right noetherian if and only if every proper finitely generated right R -module is a direct sum of a projective module and a module Q , where Q is either CS or noetherian. (ดูรายละเอียดในภาคผนวก 5)

6. ผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติ

- 6.1) S. Plubtieng and H., Tansee, *Conditions for a ring to be Noetherian and Artinian*, Comm. Algebra 30 (2002), 305-308.
- 6.2) S. Plubtieng, *On simple Noetherian rings*, To appear in Algebra Colloquium, (2003).
- 6.3) S. Plubtieng, *Rings with many direct summands*, Math. J. Okayama. Univ. 44 (2002), 29-35.
- 6.4) S. Plubtieng *A generalization of continuous modules and their application to QF-rings*, Kyungpook Math J. 43 (2003), 11-18.
- 6.5) S. Plubtieng, *Modules characterized by their proper cyclic subfactors*, To appear in Southeast Asian Bulletin of Mathematics (2004).

หนังสืออ้างอิง

- [1] F .W. Anderson and K.R. Fuller, *"Rings and categories of modules"*, Second edition, Springer-Verlag, New York, 1992
- [2] P. Ara, and J.K. Park, *On continuous semiprimitive rings*, Comm. Algebra 19, (1991), 299 – 308.
- [3] A.W. Chatters, *A characterization of right noetherian rings*, Quart. J. Math. Oxford 33, (1982), 65-69.
- [4] J. Clark and D.V. Huynh, *When is a self-injective ring quasi-Frobenius?*, J. Algebra, 164 (1994), 531-542.
- [5] N.V. Dung, D.V. Huynh, P.F. Smith and R. Wisbuer, *"Extending modules"* , Research Note in Mathematics series 313, Pitman London (1994).
- [6] C. Faith, *Rings with ascending chain condition on annihilators*, Nagoya Math.J., 27 (1966), 179-191.
- [7] D.V. Huynh, *A characterization of noetherian rings by cyclic modules*, Proc.

Edinburgh. Math. Soc. 39(1996), 253 – 262.

- [8] D.V. Huynh, S.T. Rizvi and M.F. Yousif, *Rings whose finitely generated module are extending*, J. Pure. Appl. Algebra, 111(1996) , 325 – 328.
- [9] M. Ikeda, *A characterization of quasi-Frobenius rings*, Osaka J. Math., 4(1952), 203 – 210.
- [10] E. Matlis, *Injective modules over noetherian rings*, Pacific J. Math., 8(1958), 511– 528.
- [11] S.H. Mohamed and B.J. Muller, "*Continuous and Discrete Modules*" , London Math. Soc. Lecture Note Series No. 147, Cambridge Uni Press (1990).
- [12] M. Okado, *On the decomposition of extending modules*, Math. Japonica, 29 (1984), 939-941.
- [13] K. Oshiro and S.T. Rizvi , *The exchange property of quasi-continuous modules with the finite exchange property*, Osaka J.Math., 33(1996), 217 – 234.
- [14] B.L. Osofsky, *Rings all of whose finitely generated modules are injective*, Pacific J. Math, 14(1964), 645-650.
- [15] B.L. Osofsky, *A generalization of quasi-Frobenius rings*, J. Algebra, 4(1966), 373-389.
- [16] B.L. Osofsky and P.F. Smithh, *Cyclic modules whose quotients have all complement submodules direct summands*, J. Algebra, 139(1991), 342 – 354.
- [17] Y. Utumi, *On continuous rings and self-injective rings*, Trans. Amer. Math. Soc, 118 (1965), 158 – 173.
- [18] R.B. Warfield, *Decompositions of injective modules*, Pacific J.Math., 31(1969), 263 – 276.

Output จากโครงการวิจัยที่ได้รับทุนจาก สกว.

1. ผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติ

- 1.1) S. Plubtieng and H., Tansee, *Conditions for a ring to be Noetherian and Artinian*, Comm. Algebra 30 (2002), 305-308.
- 1.2) S. Plubtieng, *On simple Noetherian rings*, To appear in Algebra Colloquium, (2003).
- 1.3) S. Plubtieng, *Rings with many direct summands*, Math. J. Okayama. Univ. 44 (2002), 29-35.
- 1.4) S. Plubtieng *A generalization of continuous modules and their application to QF-rings*, Kyungpook Math J. 43 (2003), 11-18.
- 1.5) S. Plubtieng, *Modules characterized by their proper cyclic subfactors*, To appear in Southeast Asian Bulletin of Mathematics (2004).

2. การนำผลงานวิจัยไปใช้ประโยชน์

- 2.1) ทำให้นักคณิตศาสตร์ได้ค้นพบทฤษฎีบทที่อธิบายลักษณะเฉพาะของริงแบบเนอแทเรียนซึ่งครอบคลุมทั่วไปกว่าของเดิมซึ่ง Huynh , Rizvi and Yousif ได้ทำการพิสูจน์ไว้
- 2.2) ทำให้นักคณิตศาสตร์ได้ค้นพบทฤษฎีบทที่อธิบายลักษณะเฉพาะของริงแบบอาร์ทีเนียนชั้นใหม่โดยใช้มอดูลซีเอส และมอดูลควอซี-คอนทีนิวอัล
- 2.3) ได้ค้นพบองค์ความรู้ใหม่ที่จะเป็นประโยชน์ในการศึกษาอ้างอิงในสาขา Ring and Module theory เพิ่มขึ้น
- 2.4) ได้ค้นพบองค์ความรู้พื้นฐานใหม่ที่เป็นประโยชน์ในการประยุกต์เพื่อการค้นคว้าวิจัยในสาขาอื่นๆ

3. กิจกรรมอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง ได้แก่

3.1) ผลงานอื่นๆ

เข้าร่วมการเสนอผลงานวิชาการทางคณิตศาสตร์ ที่มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ ระหว่างวันที่ 13-14 พฤษภาคม 2545 โดยเสนอผลงานวิจัยเรื่อง " On simple noetherian rings"

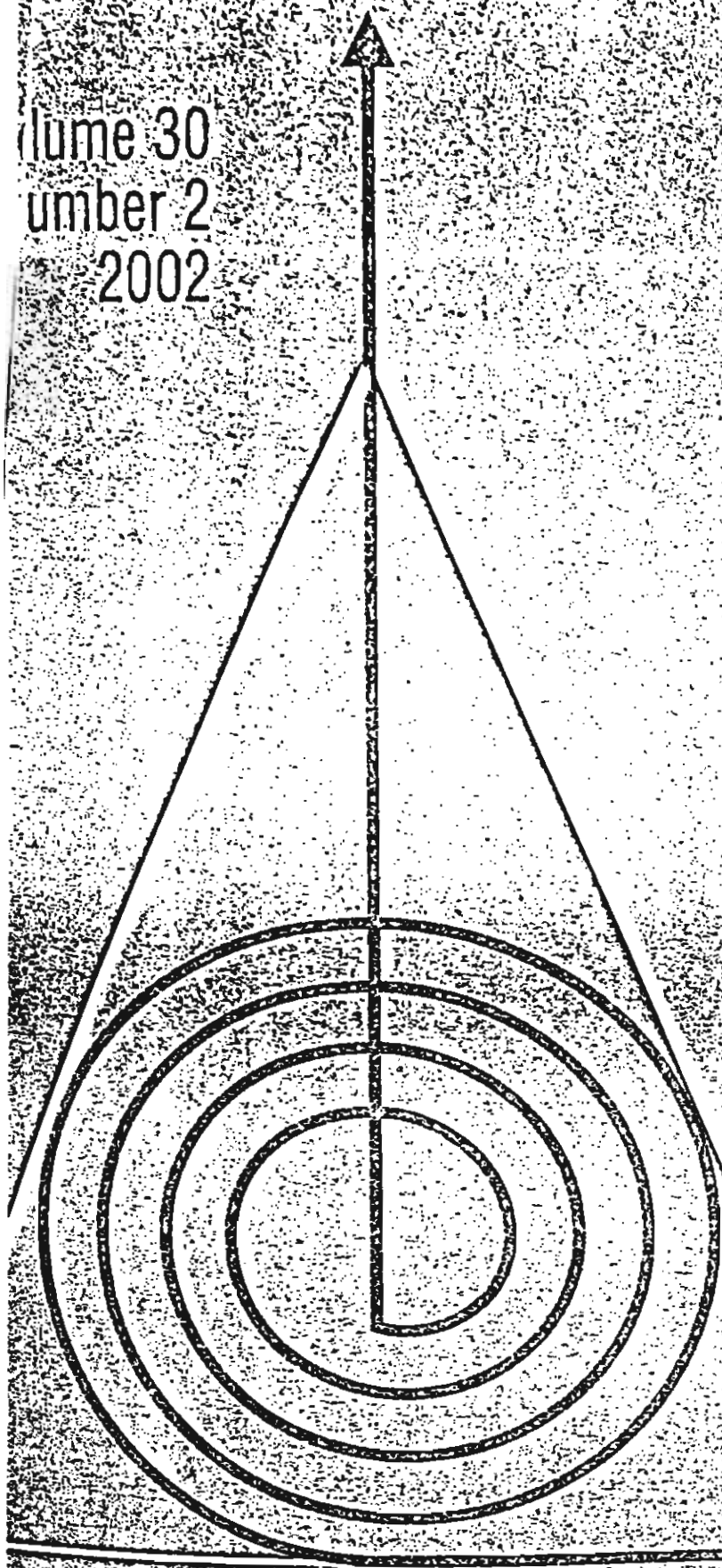
ภาคผนวก 1

CONDITION FOR A RING TO BE NOETHERIAN AND ARTINIAN

Somyot Plubtieng and Hansuk Tansee

COMMUNICATIONS IN ALGEBRA, 30(2), 78-786(2002)

Volume 30
Number 2
2002



communications
in
ALGEBRA

CONDITIONS FOR A RING TO BE NOETHERIAN OR ARTINIAN

Somyot Plubtieng* and Hansuk Tansee

Department of Mathematics, Naresuan University,
Phitsanulok 65000, Thailand

ABSTRACT

Let M be a finitely generated module. It is shown that M is noetherian iff every finitely generated module in $\sigma[M]$ is a direct sum of a projective module and a module Q , where Q is either CS or noetherian.

A module M is called a *CS-module* (or an *extending module* [1]) if every submodule of M is essential in a direct summand of M . The study of rings over which finitely generated right modules are CS was initiated by Huynh, Rizvi and Yousif [2]. They were shown that such rings must be right noetherian. On the other hand, Huynh showed in [3] that a ring R is right noetherian if and only if every cyclic right R -module is injective or a direct sum of a projective module and a noetherian module.

In this note we consider some properties of 2-generated modules in $\text{Mod-}R$ which make R to be right noetherian or right artinian. For the basic definitions and properties of rings, modules and categories we refer to Wisbauer [4].

*Corresponding author. E-mail: somyotp@nu.ac.th

Lemma 1. *If U_R (resp. S_R) is a uniform (resp. simple) right R -module such that $U \oplus S$ is CS, then S is $(U/\text{Soc}(U))$ -injective.*

Proof: See [5]. □

Lemma 2. *Let M_R be a finitely generated module such that $M/\text{Soc}(M)$ is noetherian. If for any direct summand N of M and for any submodule $H \subseteq \text{Soc}(N)$, N/H is a direct sum of a projective module and a module of finite uniform dimension, then M is noetherian.*

Proof. Using the same argument presented in the last part of the proof of [6, Theorem 1]. □

Lemma 3. *Let M_R be a finitely generated module. If every finitely generated module in $\sigma[M]$ is either CS or noetherian, then M is noetherian.*

Proof. By [1, Corollary 9.4], every factor module of M has finite uniform dimension. If M is not noetherian, then M must be CS. Hence there is a non-noetherian uniform direct summand U of M . It implies that U is finitely generated, $U/\text{Soc}(U)$ is also non-noetherian, and every factor module of U has finite uniform dimension. For any simple module $S \in \sigma[M]$, $S \oplus U$ is CS because it is finitely generated and non-noetherian. By Lemma 1, S is $U/\text{Soc}(U)$ -injective. This shows that $U/\text{Soc}(U)$ is a V-module. Hence $U/\text{Soc}(U)$ is noetherian by [7], a contradiction. Thus M must be noetherian. □

A module M is said to satisfy the condition (*) if every finitely generated module in $\sigma[M]$ is a direct sum of a projective module and a module Q , where Q is either CS or noetherian.

The condition (*) was first considered in [8] for cyclic modules in $\text{Mod-}R$, where "CS" is replaced by "injective".

Theorem 4. *If M is a finitely generated module satisfying (*), then M is noetherian.*

Proof. Let E be an essential submodule of M , then $N = M/E$ is a singular module. It implies that each finitely generated module in $\sigma[N]$ is either CS or noetherian. Hence N is noetherian by Lemma 3. Thus $M/\text{Soc}(M)$ is noetherian by [1, 5.15(1)].

Next, if K is a direct summand of M and N be a submodule of $\text{Soc}(K)$, then by hypothesis, K/N is a direct sum of a projective module P and a module Q , where Q is noetherian or CS. Clearly, Q is finitely generated, and $Q/\text{Soc}(Q)$ is noetherian. Hence, $\text{Soc}(Q)$ must have finite length also in case Q being CS (see [1, 9.1]). We have shown that, in any case, the uniform

dimension of Q is finite. Now applying Lemma 2 we get that M is noetherian. $\square$

From the proofs of Lemma 3 and Theorem 4 we see that, if we put $M_R = R$, then Lemma 3 and Theorem 4 remain true for R even if we make the same assumption only on 2-generated right R -modules. That means we obtain the following.

Corollary 5. *A ring R is right noetherian if and only if every 2-generated right R -module is a direct sum of a projective module and a module that is either CS or noetherian.*

We remark that if we assume the same only for cyclic right R -modules then the situation is much more complicated, and we don't know yet if R is right noetherian or not. It was shown in [8] by Huynh-Rizvi, that a ring R is right noetherian iff every cyclic right R -module is a direct sum of a projective module and a module that is either injective or noetherian.

Corollary 6. *A ring R is right artinian if and only if every 2-generated right R -module is either quasi-continuous or of finite length.*

Proof. One direction is clear. Now consider R with every 2-generated right R -module quasi-continuous or of finite length. By Corollary 5, R is right noetherian. If R is not right artinian, then $(R \oplus R)_R$ is quasi-continuous. Hence R is right self-injective. Then, it is known that R is right (and left) artinian, a contradiction. Hence R must be right artinian. $\square$

Proposition 7. *Let R be a ring such that every 2-generated right R -module is a direct sum of a projective module and a quasi-continuous module. If R/J is von Neumann regular, then R is a right artinian ring with $J^2 = 0$, where J is the Jacobson radical of R .*

Proof. From the assumption it follows that every singular 2-generated right R -module is quasi-continuous. Hence by [9], $R/\text{Soc}(R_R)$ is right SI with $J^2 = 0$. Moreover, by Corollary 5, R is right noetherian. As R/J is von Neumann regular, R is semiprimary. Thus R is right artinian, as desired. $\square$

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank Professor Sompong Dhompongsa for many useful discussions and helpful comments. Moreover the authors wish to thank the referee for his suggestion to include Lemma 2 and for his hard

work on simplifying the proofs which brought our original paper to the present form.

The first author was supported by Thailand Research Fund under grant PDF/91/2544. The second author was supported by the Royal Golden Jubilee Program.

REFERENCES

1. Dung, N.V.; Huynh, D.V.; Smith, P.F.; Wisbauer, R. *Extending Modules*, Research Note in Mathematics Series 313, Pitman London, 1994.
2. Huynh, D.V.; Rizvi, S.T.; Yousif, M.F. Rings whose Finitely Generated Modules are Extending. *J. Pure Appl. Algebra* 1996, *111*, 325–328.
3. Huynh, D.V. A Characterization of Noetherian Rings by Cyclic Modules. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 1996, *39*, 253–262.
4. Wisbauer, R. *Foundations of Module and Ring Theory*; Gordon and Breach: London, 1991.
5. Vanaja, N. All Finitely Generated M -subgenerated Modules are Extending. *Comm. Algebra* 1996, *24*, 543–572.
6. Huynh, D.V.; Phan Dan. On Rings with Restricted Minimum Condition. *Arch. Math.* 1988, *51*, 313–326.
7. Huynh, D.V.; Smith, P.F.; Wisbauer, R. A Note on GV-modules with Krull Dimension. *Glasgow Math. J.* 1990, *32*, 389–390.
8. Huynh, D.V.; Rizvi, S.T. A New Characterization of Noetherian Rings by Cyclic Modules. Preprint.
9. Rizvi, S.T.; Yousif, M.F. *On Continuous and Singular Modules*. Non-commutative Ring Theory (Athens), Springer-LNM 1448, 1990; 116–124.

Received August 2000

Revised August 2001

ภาคผนวก 2

RINGS WITH MANY DIRECT SUMMANDS

Somyot Plubtieng

MATHEMATICAL JOURNAL OF OKAYAMA UNIVERSITY

Vol. 44, 2002

RINGS WITH MANY DIRECT SUMMANDS

SOMYOT PLUBTIENG

RINGS WITH MANY DIRECT SUMMANDS

SOMYOT PLUBTIENG

ABSTRACT. It is shown that (i) a ring R is semiperfect if every cyclic right R -module is a direct sum of a continuous module and a semiperfect module, (ii) a ring R is right noetherian if and only if every countably generated right R -module is a direct sum of a continuous module and a locally noetherian module, (iii) a ring R is right artinian if and only if every countably generated right R -module is a direct sum of a continuous module and a locally artinian module, (iv) a ring R is right artinian if every countably generated right R -module is a direct sum of a quasi-continuous module and a semisimple module, and (v) a ring R is artinian if every right R -module is a direct sum of a CS-module and a semisimple module.

1. INTRODUCTION

A module M is called a *CS-module* (or an *extending module* [6]) if every submodule of M is essential in a direct summand of M . CS-modules generalize quasi-continuous modules, which in turn generalize continuous, quasi-injective and injective modules, in this order (see example [11]). It was proved by Jain and Mohamed [10] that a ring R is semiperfect if every cyclic right R -module is a continuous module. The study of rings, via decomposition properties of cyclic or finitely generated modules, was originally initiated by P. F. Smith in [14]. A famous theorem of Chatters stated that a ring R is right noetherian if and only if every cyclic right R -module is a direct sum of a projective module and a noetherian module (see [2, Theorem 3]). Moreover, Dung and Smith showed in [5, Theorem 7 and Theorem 11] that a ring R is right and left artinian, right and left serial with $J(R)^2 = 0$ if and only if every right R -module is a CS-module, and if and only if every cyclic right R -module is a direct sum of an injective module and a semisimple module. On the other hand, it was shown in [6, 20.9] that there is a non-right noetherian ring R for which every cyclic right R -module is a direct sum of an injective module and a noetherian module. However, we notice that a ring R is right noetherian if and only if every right R -module is a direct sum of an injective module and a locally noetherian module (see [6, 9.15]).

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 16P40, Secondary 16D40, 16D50, 16D70.

Key words and phrases. Semiperfect rings, Noetherian rings and Artinian rings.

Supported by Thailand Research Fund under grant PDF/91/2544.

In this paper, we consider the related properties in more general settings. First, we shows that a ring R is semiperfect if every cyclic right R -module is a direct sum of a continuous module and a semiperfect module. Further we proves that (i) a ring R is right noetherian if and only if every countably generated right R -module is a direct sum of a continuous module and a locally noetherian module, (ii) a ring R is right artinian if and only if every countably generated right R -module is a direct sum of a continuous module and a locally artinian module, (iii) a ring R is right artinian if every countably generated right R -module is a direct sum of a quasi-continuous module and a semisimple module, and (iv) a ring R is artinian if every right R -module is a direct sum of a CS-module and a semisimple module.

2. PRELIMINARIES

Throughout this paper we consider associative rings R with identity and unitary right R -modules. For a module M we denote by $\text{Soc}(M)$ and $E(M)$ the socle and the injective hull of M , respectively. If $M = \text{Soc}(M)$, then M is called a *semisimple module*. A right R -module M is called *semiperfect* if it is a projective module and every its homomorphic image has a projective cover.

We will refer to Anderson and Fuller [1], Dung, Huynh, Smith and Wisbauer [6] and Wisbauer [15] for undefined notions used in the text, and also for basic facts concerning CS-modules, noetherian rings and artinian rings. We begin with the following lemmas.

Lemma 1 ([3, Theorem 1.24]). *Let R be a prime right Goldie ring and assume that the socle $\text{Soc}(R_R)$ of R is non-zero, then R is semisimple artinian.*

Lemma 2 ([9, Lemma 1]). *Let R be a semiprime right Goldie ring. If every uniform right ideal of R is countably Σ -CS, then R is semisimple artinian.*

Lemma 3. *Let R be a ring which every cyclic right R -module is a direct sum of a projective module and a CS-module. Then every cyclic right R -module has finite uniform dimension.*

Proof. Let X be a cyclic right R -module. We first aim to show that $X/\text{Soc}(X)$ has finite uniform dimension. Let E be an essential submodule of X , and set $M = X/E$. Let $\sigma[M]$ denote the full subcategory of $\text{Mod-}R$ whose objects are submodules of M -generated modules. By our assumption, every cyclic module in $\sigma[M]$ is CS. Hence, M has finite uniform dimension by [6, Corollary 9.4]. Therefore, by [6, Lemma 5.14], $X/\text{Soc}(X)$ has finite uniform dimension.

Now we shall use an argument in [13, Theorem 1, p. 160] to show that $\text{Soc}(X)$ is finitely generated. Assume on the contrary that $\text{Soc}(X)$ is infinitely generated. Then we may write $\text{Soc}(X) = H_1 \oplus H_2$, where H_1 and H_2 are infinite direct sums of simple modules. By hypothesis, we have $X/H_1 = \bar{P}_1 \oplus \bar{Q}_1$ where $\bar{P}_1$ is a projective module and $\bar{Q}_1$ is a CS-module. Let Q_1 be the inverse image of $\bar{Q}_1$ in X . Then clearly $\bar{P}_1 \simeq X/Q_1$, and Q_1/H_1 (being isomorphic to $\bar{Q}_1$) is a CS-module. Since $\bar{P}_1$ is projective, $X = Q_1 \oplus Q_2$ for some submodule Q_2 of X . Then $\text{Soc}(X) = \text{Soc}(Q_1) \oplus \text{Soc}(Q_2)$.

Observe that, because $\bar{Q}_1/\text{Soc}(\bar{Q}_1)$ has finite uniform dimension by the above argument, and $\bar{Q}_1$ is a finitely generated CS-module, it follows from [6, Lemma 9.1] that $\text{Soc}(\bar{Q}_1)$ is finitely generated. Hence $\bar{Q}_1$, and so Q_1/H_1 , has finite uniform dimension. Since $H_2 \simeq \text{Soc}(X)/H_1$ has infinite uniform dimension, it follows that X/H_1 has infinite uniform dimension. Therefore, this clearly implies that $\text{Soc}(Q_2)$ is infinitely generated since $Q_2 \simeq \bar{P}_1$ has infinite uniform dimension but $Q_2/\text{Soc}(Q_2)$ has finite uniform dimension. Note that

$$X/\text{Soc}(X) \simeq (Q_1/\text{Soc}(Q_1)) \oplus (Q_2/\text{Soc}(Q_2)),$$

where $Q_1 \neq \text{Soc}(Q_1)$ and $Q_2 \neq \text{Soc}(Q_2)$. Hence, $X/\text{Soc}(X)$ has uniform dimension at least 2. Applying the same arguments to the module Q_2 , and continuing the process in a similar manner, an obvious induction shows that $X/\text{Soc}(X)$ has infinite uniform dimension, a contradiction. This shows that $\text{Soc}(X)$ is finitely generated, and therefore X has finite uniform dimension, completing our proof. $\square$

3. THE MAIN RESULTS

We start our investigation by proving the following result.

Theorem 4. *Let R be a ring. If every cyclic right R -module is a direct sum of a continuous module and a semiperfect module, then R is semiperfect.*

Proof. Note that every semiperfect module is projective. By our assumption, we see that every cyclic right R -module is a direct sum of a projective module and a continuous module. Hence, by Lemma 3, R has finite uniform dimension. Therefore

$$R = (C_1 \oplus \cdots \oplus C_m) \oplus (S),$$

where each C_i are continuous indecomposable and S is semiperfect. Notice that each C_i has a local endomorphism ring. Since each C_i is finitely generated self-projective, it follows by [15, 41.4] that each C_i is local and $\text{Rad}(C_i) \ll C_i$. Moreover, it follows by [15, 42.5] that $S = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$, where each S_i is local and $\text{Rad}(S) \ll S$. Hence R is a direct sum of local modules and $\text{Rad}(R) \ll R$. Therefore R is semiperfect by [15, 42.6]. $\square$

Corollary 5. *A ring R is semiperfect if every cyclic right R -module is a direct sum of a continuous module and a module of finite length.*

Proof. It follows [6, Corollary 9.4] that R has finite uniform dimension. Then as done in the proof of Theorem 4, we get R is semiperfect since every indecomposable module of finite length has a local endomorphism ring. $\square$

Lemma 6. *If $R^{(N)}$ is quasi-continuous, then R is QF.*

Proof. First we observe that $R^{(N)} \oplus R^{(N)}$ is isomorphic to $R^{(N)}$. Since $R^{(N)}$ is quasi-continuous, it follows that $R^{(N)}$ is self-injective. This implies that $R^{(N)}$ is injective and hence, by [7, Proposition 20.3A], R is Σ -injective. Therefore R is a QF-ring by [6, 18.1]. $\square$

We are now in position to prove our main results.

Theorem 7. *A ring R is noetherian if and only if every countably generated right R -module is a direct sum of a continuous module and a locally noetherian module.*

Proof. The necessity is clear since every right module over a noetherian ring is locally noetherian. Conversely, we first observe that $R_R = C \oplus N$, where C is continuous and N is noetherian. By [6, Corollary 9.4], it follows that R_R has finite uniform dimension. Hence

$$R_R = \left(\bigoplus_{\alpha \in I} C_\alpha \right) \oplus \left(\bigoplus_{\beta \in J} N_\beta \right),$$

where each C_α is indecomposable continuous and each N_β is indecomposable noetherian. Without loss of generality we clearly may assume that each C_α is non-noetherian. Set $\bar{R} = R/N \cong \left(\bigoplus_{\alpha \in I} C_\alpha \right)$. We aim to show that $\bar{R}$ is noetherian. By our assumption, we obtain that

$$\bar{R}^{(N)} = \bar{C} \oplus \bar{N},$$

where $\bar{C}$ is continuous and $\bar{N}$ is locally noetherian. Since $\bar{R}^{(N)} \cong \bigoplus_{\alpha \in I} C_\alpha^{(N)}$ and each C_α has a local endomorphism ring, it follows by the Azumaya theorem that every non-zero direct summand of $\bar{R}^{(N)}$ has an indecomposable direct summand K which is isomorphic to some $C_\gamma \in \{C_\alpha \mid \alpha \in I\}$. If $\bar{N} \neq 0$, then there exists $C_\gamma \in \{C_\alpha \mid \alpha \in I\}$ which is isomorphic to a direct summand of $\bar{N}$. Hence C_γ is noetherian since it is finitely generated, a contradiction. Then $\bar{N} = 0$ and hence $\bar{R}^{(N)}$ is a continuous module. It follows by Lemma 6 that $\bar{R}^{(N)}$ is a QF-ring and hence it is right noetherian. Therefore R is right noetherian, as desired. $\square$

As a consequence of Theorem 7 we obtain the following characterization of artinian rings.

Corollary 8. *A ring R is right artinian if and only if every countably generated module is a direct sum of a continuous module and a locally artinian module.*

Proof. The necessity is clear since every right module over an artinian ring is locally artinian. Conversely, we first see that $R_R = C \oplus A$, where C is continuous and A is artinian. Without loss of generality we may write $C = \bigoplus_{i=1}^n C_i$, where each C_i is an indecomposable continuous non-artinian module. By using an argument similar to that of the proof of Theorem 7 we can verify that R/A is a QF-ring. Therefore R is right artinian. $\square$

Lemma 9. *Let R be a prime right noetherian ring. If every countably generated right R -module is a direct sum of a CS-module and a semisimple module, then R is semisimple artinian.*

Proof. If $\text{Soc}(R_R) \neq 0$, then it follows by Lemma 1 that R is semisimple artinian. We now suppose that $\text{Soc}(R_R) = 0$. Let U be any uniform right ideal of R . By our assumption, $U^{(N)} = C \oplus S$, where C is CS and S is semisimple. Since $\text{Soc}(U^{(N)}) = 0$, it follows that U is countably Σ -CS. This implies that every uniform right ideal of R is countably Σ -CS. Hence R is semisimple artinian by Lemma 2, which is a contradiction to our assumption. Therefore R is right semisimple artinian, completing our proof. $\square$

Theorem 10. *A ring R is right artinian if every countably generated right R -module is a direct sum of a quasi-continuous module and a semisimple module.*

Proof. We first show that R is right noetherian. Without loss of generality we may assume that R is quasi-continuous and $R = \bigoplus_{\alpha \in I} C_\alpha$, where each C_α is an indecomposable non-simple quasi-continuous module. For convenience, we write

$$Q = R^{(N)} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma,$$

where each C_γ is isomorphic to some C_α in $\{C_\alpha \mid \alpha \in I\}$. By assumption, $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma = R^{(N)} = C \oplus S$ where C is a CS-module and S is a semisimple module. Since every quasi-injective module has the exchange property, it follows that $\bigoplus_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma = S \oplus (\bigoplus_{\gamma \in \Gamma_0} C_\gamma)$ for some $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Assume $\Gamma_0 \subset \Gamma$. Then $S \cong \bigoplus_{\gamma \in (\Gamma \setminus \Gamma_0)} C_\gamma$ and hence each C_γ is simple, a contradiction. Thus $S = 0$ and therefore R is right countably Σ -CS.

For any $\alpha \in I$, we see that $C_\alpha \oplus C_\alpha = Q \oplus S_1$ where Q is quasi-continuous and S_1 is semisimple. If $S_1 \neq 0$, $C_\alpha \cong S_1$ by the exchange property of S_1 , a contradiction. Hence $S_1 = 0$ and therefore $C_\alpha \oplus C_\alpha$ is a quasi-continuous module for each $\alpha \in I$. It follows by [11, Theorem 2.13] that each C_α is quasi-injective and hence each C_α has a local endomorphism ring. Therefore

R is a semiperfect ring. By [8, Theorem 1], we obtain that R is right Σ -CS and hence R has ACC on right annihilators by [4, Corollary 2.9]. It implies by [12, Lemma 3] that every CS right R -module is a direct sum of uniform submodules. Therefore R is right noetherian by [12, Theorem 4].

Next, we aim to show that R is right artinian. Assume on contrary that R is not right artinian. Then, by [7, 18.34B], there exist a prime ideal P of R such that R/P is not right artinian. Put $\bar{R} = R/P$. Hence $\bar{R}$ is a prime right noetherian ring such that every countably generated right module over factor ring $\bar{R}$ is a direct sum of a CS module and a semisimple module. It follows by Lemma 9 that $\bar{R}$ is right artinian, a contradiction. Therefore R is right artinian, completing our proof. $\square$

Corollary 11. *A ring R is right artinian if every right R -module is a direct sum of a CS-module and a semisimple module.*

Proof. Using the same argument presented in the proof of Theorem 10. $\square$

ACKNOWLEDGMENT

I would like to thank Professor Sompong Dhompongsa for many useful discussions and helpful comments. Moreover I wish to thank the referee for their comments.

REFERENCES

- [1] F. W. ANDERSON AND K. R. FULLER, *Rings and categories of modules*, Second edition, Springer-Verlag, 1992.
- [2] A. W. CHATTERS, *A characterization of right noetherian rings*, Quart. J. Math. Oxford **33**(1982), 65–69.
- [3] A. W. CHATTERS AND C. R. HAJARNAVIS, *Rings with chain conditions*, Pitman, London, 1980.
- [4] J. CLARK AND R. WISBAUER, Σ -extending modules, J. Pure Appl. Algebra **104**(1995), 19–32.
- [5] N. V. DUNG AND P. F. SMITH, *Rings for which certain modules are CS*, J. Pure Appl. Algebra **102**(1995), 273–287.
- [6] N. V. DUNG, D. V. HUYNH, P. F. SMITH AND R. WISBAUER, *Extending Modules*, Pitman Research Notes in Mathematics Series **313**, Longman, Harlow, 1994.
- [7] C. FAITH, *Algebra II: Ring theory*, Springer-Verlag, 1976.
- [8] D. V. HUYNH, *A right countably sigma-CS ring with ACC or DCC on projective principal right ideals is left artinian and QF-3*, Trans. Amer. Math. Soc. **347**(1995), 3131–3139.
- [9] D. V. HUYNH, S. K. JAIN AND S. R. LÓPEZ-PERMOUTH, *Rings characterized by direct sums of CS modules*, Comm. Algebra **28**(2000), 4219–4222.
- [10] S. K. JAIN AND S. H. MOHAMED, *Rings whose cyclic modules are continuous*, J. Indian Math. Soc. **42**(1978), 197–202.
- [11] S. H. MOHAMED AND B. J. MÜLLER, *Continuous and discrete modules*, London Math. Soc. Lecture Note Series **147**, Cambridge Univ. Press, 1990.

- [12] M. OKADO. *On the decomposition of extending modules*, Math. Japonica **29**(1984), 939-941.
- [13] S. PLUBTIENG, *Decompositions of modules into projective modules and CS-modules*, Bull. Austral. Math. Soc. **62**(2000), 159-164.
- [14] P. F. SMITH. *Rings characterized by their cyclic modules*, Canad. J. Math. **31**(1979), 93-111.
- [15] R. WISBAUER, *Foundations of module and ring theory*, Gordon and Breach, 1991.

SOMYOT PLUBTIENG
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
NARESUAN UNIVERSITY
PHITSANULOK 65000, THAILAND
e-mail address: somyotp@nu.ac.th

(Received September 7, 2001)