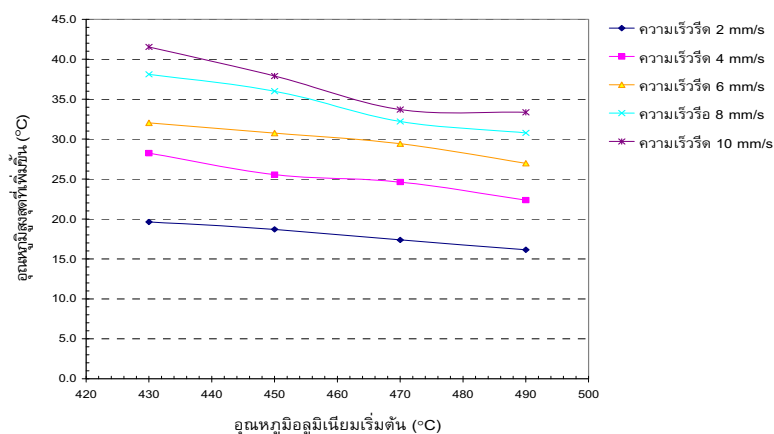


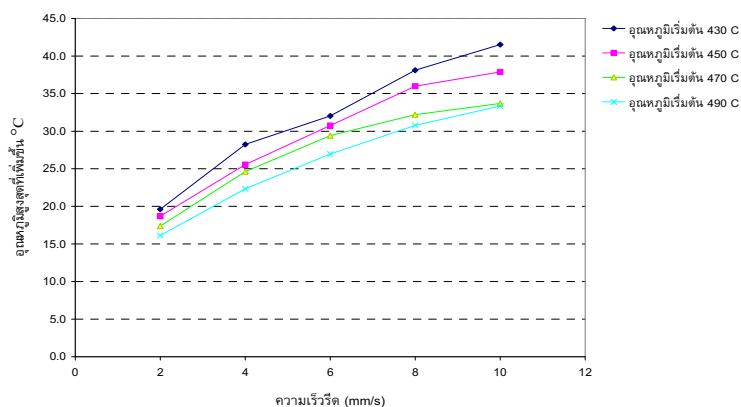
ตารางที่ 4-3 (ต่อ) อุณหภูมิสูงสุดหลังการรีดจากการวิเคราะห์ด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์

ความเร็วรีด (mm/s)	อุณหภูมิก่อนรีด (°C)	อุณหภูมิสูงสุดหลังรีด (°C)	ผลต่างระหว่างอุณหภูมิสูงสุดกับอุณหภูมิ ก่อนรีด (°C)
10	430	471.5	41.5
	450	487.9	37.9
	470	503.7	33.7
	490	523.4	33.4

จากตารางที่ 4-3 สามารถนำมาแสดงผลในรูปของกราฟความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิเริ่มต้นกับอุณหภูมิสูงสุดที่เพิ่มขึ้นดังภาพที่ 4-21 และความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับอุณหภูมิสูงสุดที่เพิ่มขึ้นดังภาพที่ 4-22



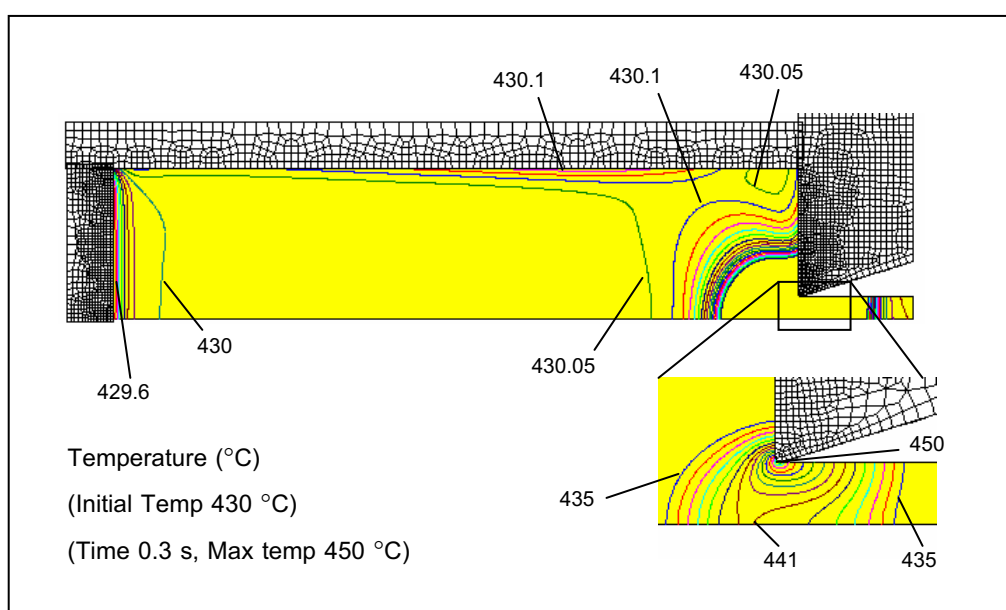
ภาพที่ 4-21 ความสัมพันธ์ระหว่างอุณหภูมิเริ่มต้นกับอุณหภูมิสูงสุดที่เพิ่มขึ้น



ภาพที่ 4-22 ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วรีดกับอุณหภูมิสูงสุดที่เพิ่มขึ้น

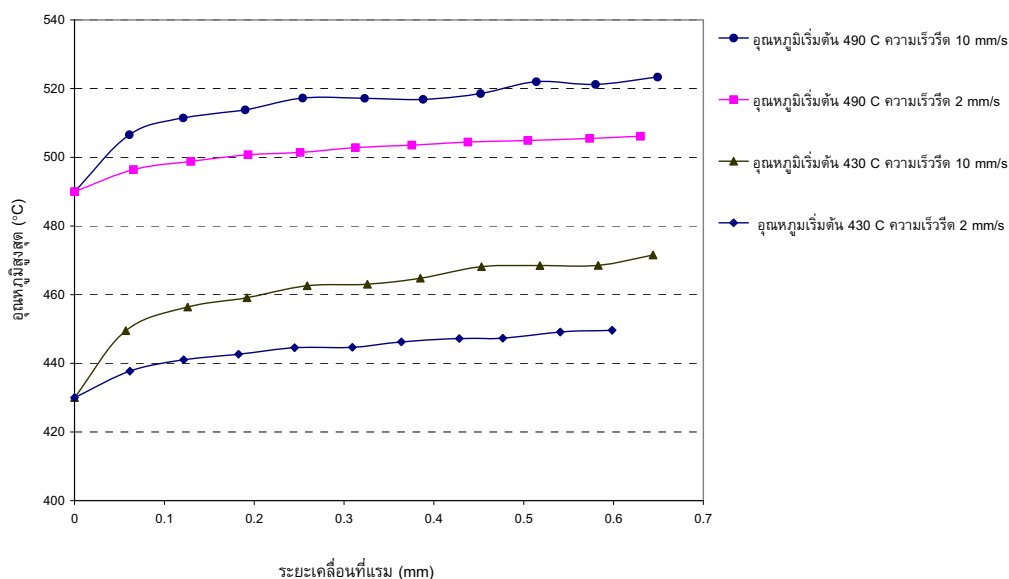
จากภาพที่ 4-21 เห็นได้ว่าเมื่ออุณหภูมิเริ่มต้นของอลูมิเนียมสูงขึ้นการเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิหลังการรีดมีแนวโน้มลดลง ซึ่งน่าจะมีสาเหตุจากอุณหภูมิที่สูงขึ้นทำให้ความเค้นลดลง ซึ่งทำให้พลังงานในการรีดลดลงความร้อนที่เกิดขึ้นจึงน้อยลง ในขณะที่ภาพที่ 4-22 แสดงถึงอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นมีค่ามากขึ้นเมื่อความเร็วในการรีดเพิ่มขึ้น ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิเคราะห์ในหัวข้อ 4.3 ที่ความเร็วรีดที่เพิ่มขึ้นทำให้ความดันสูงขึ้นมีผลต่อพลังงานที่เปลี่ยนเป็นความร้อนมากขึ้น

ภาพที่ 4-23 แสดงการกระจายอุณหภูมิในการรีดเส้นผ่านศูนย์กลาง 20 mm ด้วยความเร็ว 2 mm/s โดยมีอุณหภูมิเริ่มต้น 430 °C หลังการรีด 0.3 วินาที เห็นได้ว่าอุณหภูมิด้านติดกับดัมมี่บล็อกเริ่มลดลงเล็กน้อย ขณะที่อุณหภูมิผิวส่วนที่ติดกับคอนเทนเนอร์เริ่มสูงขึ้นเนื่องจากแรงเสียดทาน โดยส่วนที่มีอุณหภูมิสูงสุดคือที่ผิวสัมผัสขอบปากแม่พิมพ์ซึ่งเป็นบริเวณที่มีการเปลี่ยนรูปมากที่สุดโดยมีอุณหภูมิ 450 °C



ภาพที่ 4-23 การกระจายอุณหภูมิในการรีดเส้นผ่านศูนย์กลาง 20 mm ความเร็วรีด 2 mm/s ที่เวลา 0.3 วินาที

ภาพที่ 4-24 แสดงการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิสูงสุดในการรีดเส้นผ่านศูนย์กลาง 20 mm เมื่ออุณหภูมิเริ่มต้น 430 และ 490°C ความเร็วรีด 2 และ 10 mm/s แสดงว่าหากเพิ่มเวลาในการจำลองการรีดอุณหภูมิสูงสุดมีแนวโน้มเพิ่มขึ้นอีก

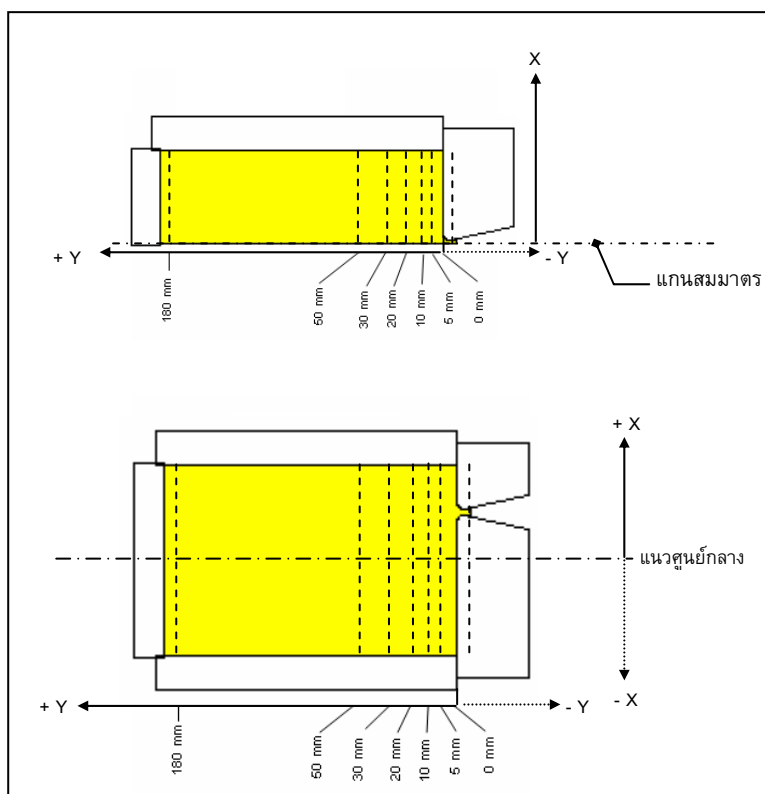


ภาพที่ 4-24 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิสูงสุดในการรีดเส้นผ่านศูนย์กลาง 20 mm
อุณหภูมิเริ่มต้น 430 และ 490 °C ความเร็วรีด 2 และ 10 mm/s

4.6 อิทธิพลของการเยื้องศูนย์กลางของตำแหน่งหน้าตัด

การศึกษาอิทธิพลของการเยื้องศูนย์กลางของตำแหน่งหน้าตัด ที่มีผลต่อการกระจายตัวของอุณหภูมิ ความดัน ภายในอลูมิเนียม โดยสร้างแบบจำลองการรีดความเครียดระนาบ ชั้น 2 แบบจำลองซึ่งอลูมิเนียมหลังการรีดมีลักษณะเป็นแผ่นมีความหนา 4 mm เท่ากันแต่มีตำแหน่งต่างกันคือตำแหน่งกลางแม่พิมพ์และเยื้องศูนย์กลางเป็นระยะ 32.75 mm ดังภาพที่ 3-2 โดยการจำลองการรีดใช้คอนเทนเนอร์ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 131 mm ความยาวของอลูมิเนียมที่ 200 mm อลูมิเนียมก่อนการรีดมีอุณหภูมิ 470 °C การรีดด้วยความเร็วคงที่ 5 mm/s อุณหภูมิเริ่มต้นแม่พิมพ์ 450 °C อุณหภูมิคอนเทนเนอร์ 430 °C อุณหภูมิดีมมีบล็อก 350 °C และอุณหภูมิสภาพแวดล้อม 35 °C

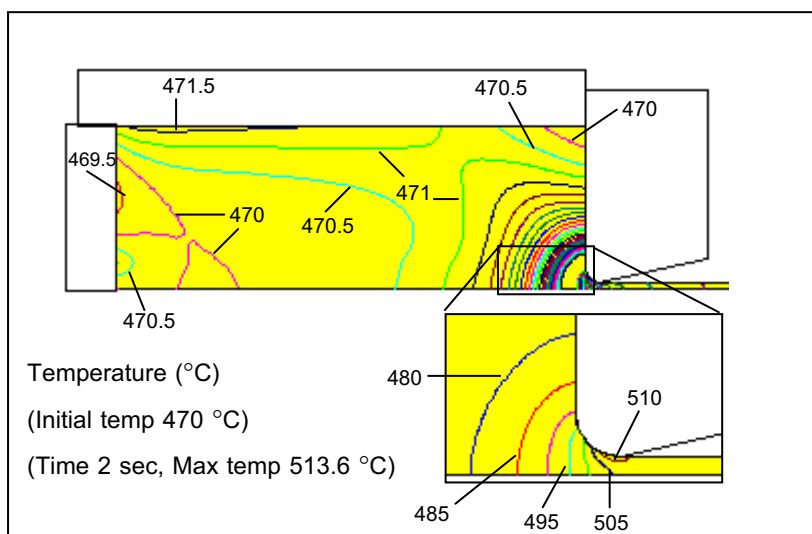
ภาพที่ 4-25 แสดงแนวตำแหน่ง -5, 0, 5, 10, 20, 30, 50 และ 180 mm ของแบบจำลอง ทั้ง 2 ในการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ, ความดัน และความเร็วไหลที่ตำแหน่งนั้น



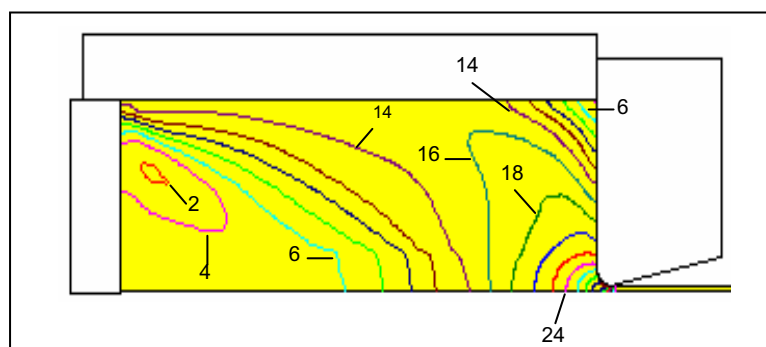
ภาพที่ 4-25 แนวตำแหน่งที่ใช้พิจารณาความเปลี่ยนแปลงสภาวะในแบบจำลองความเครียด
ระนาบแบบศูนย์กลางและเยื้องศูนย์กลาง

4.6.1 กรณีแบบจำลองความเครียดระนาบหน้าตัดศูนย์กลาง

ผลการจำลองการรีดของแบบจำลองหน้าตัดศูนย์กลางได้ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิแสดงดังภาพที่ 4-26 โดยแสดงเพียงครึ่งเดียวเนื่องจากสมมาตร โดยอุณหภูมิสูงสุดเกิดขึ้น 513.6°C บริเวณผิวสัมผัสกับรูแม่พิมพ์ก่อนออกจากแม่พิมพ์ ซึ่งเพิ่มขึ้นถึง 43.6°C เมื่อเวลารีดผ่านไปเพียง 2 วินาที เห็นได้ว่าบริเวณผิวสัมผัสกับคอนเทนเนอร์มีอุณหภูมิสูงขึ้นเล็กน้อยประมาณ 0.5°C เนื่องจากความเสียดทานระหว่างผิวสัมผัส ในขณะที่บริเวณสัมผัสกับดัมมี่บล็อกมีอุณหภูมิต่ำลงเล็กน้อยประมาณ 0.5°C เนื่องจากการถ่ายเทความร้อนจากอลูมิเนียมไปยังดัมมี่บล็อกซึ่งมีอุณหภูมิต่ำกว่า สำหรับบริเวณกลางอลูมิเนียมและบริเวณมุมระหว่างหน้าแม่พิมพ์กับคอนเทนเนอร์นั้นมีอุณหภูมิสูงขึ้นเพียงเล็กน้อยเช่นกันเนื่องจากการเปลี่ยนรูปน้อย บริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิมากคือบริเวณหน้าแม่พิมพ์และรูแม่พิมพ์ ซึ่งมีการเปลี่ยนรูปมากที่สุด ซึ่งสามารถตรวจสอบบริเวณที่มีการเปลี่ยนรูปมากหรือน้อยได้จากภาพที่ 4-27 ซึ่งแสดงลักษณะการกระจายตัวของความเค้นประสิทธิผล เห็นได้ว่าลักษณะการกระจายตัวของความเค้นประสิทธิผลกับการกระจายอุณหภูมิมีลักษณะคล้ายกัน

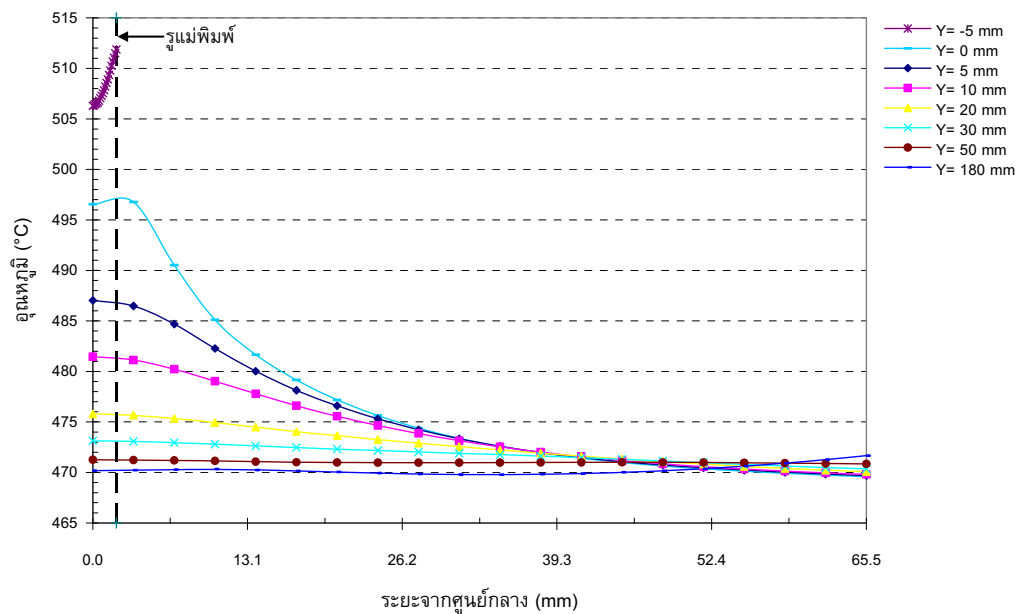


ภาพที่ 4-26 การกระจายอุณหภูมิของการรีดความเครียดระนาบหน้าตัดตำแหน่งศูนย์กลาง



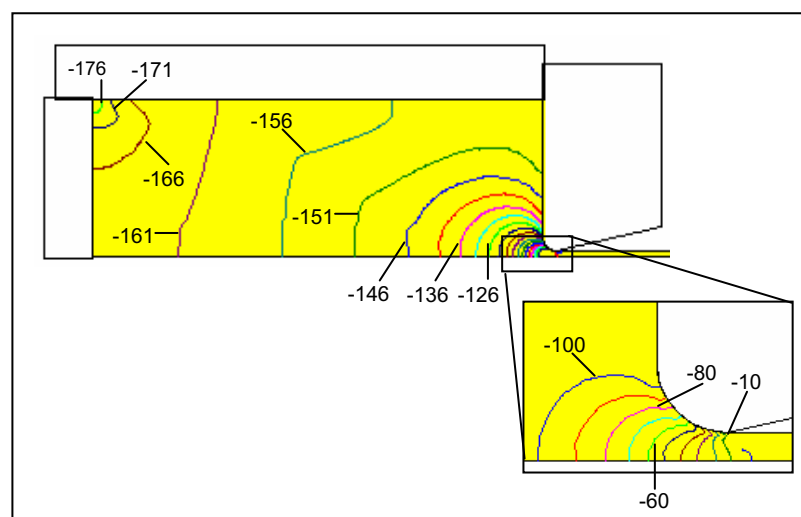
ภาพที่ 4-27 การกระจายของความเค้นประสิทธิผล (MPa) ของการรีดความเครียดระนาบหน้าตัดตำแหน่งศูนย์กลาง

จากลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิในภาพที่ 4-26 เมื่อนำมาแสดงผลในลักษณะของกราฟการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่แนวระดับต่างๆ จะเห็นได้ว่าอุณหภูมิบริเวณกลางจะมีแนวโน้มสูงขึ้นเรื่อยๆ เมื่อเข้าใกล้แม่พิมพ์มากขึ้น โดยที่ระดับพอดีกับหน้าแม่พิมพ์ $Y = 0$ mm ก่อนเข้าสู่รูแม่พิมพ์ส่วนกลางเริ่มมีอุณหภูมิต่ำกว่าบริเวณขอบรูแม่พิมพ์เล็กน้อยและเห็นได้ชัดเจนว่าที่ขอบมีอุณหภูมิสูงกว่ากลางแม่พิมพ์ในช่วงก่อนออกจากแม่พิมพ์ $Y = -5$ mm โดยมีอุณหภูมิสูงกว่า 5.6 °C

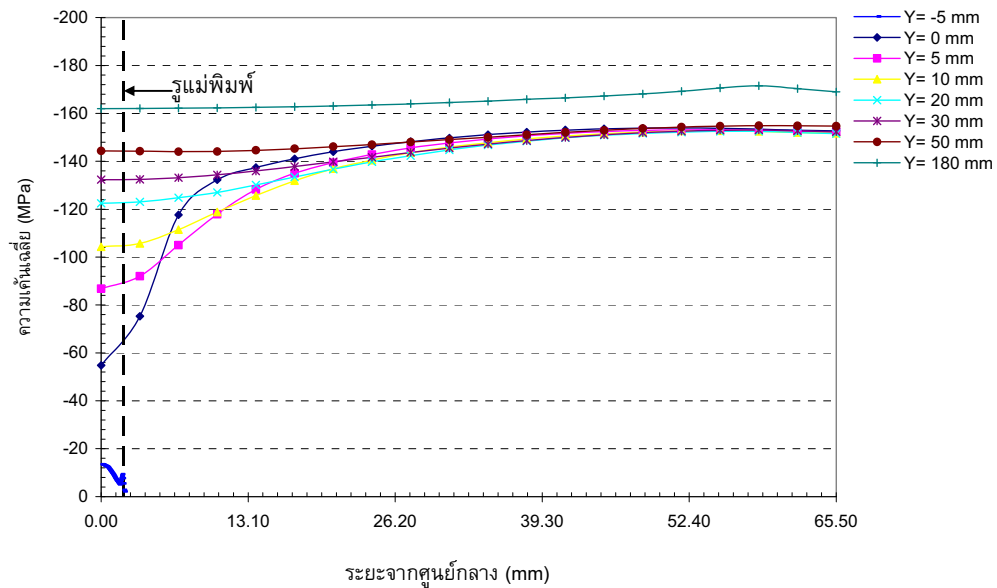


ภาพที่ 4-28 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดความเครียด
ระนาบหน้าตัดตำแหน่งศูนย์กลาง

ภาพที่ 4-29 แสดงการกระจายของความเค้นเฉลี่ย (Mean Stress) โดยค่าติดลบ หมายถึงเป็นความเค้นกดแสดงถึงระดับความดันในอลูมิเนียมเห็นได้ว่าระดับความดันจะลดลงอย่างมากก่อนออกอลูมิเนียมไหลออกจากแม่พิมพ์



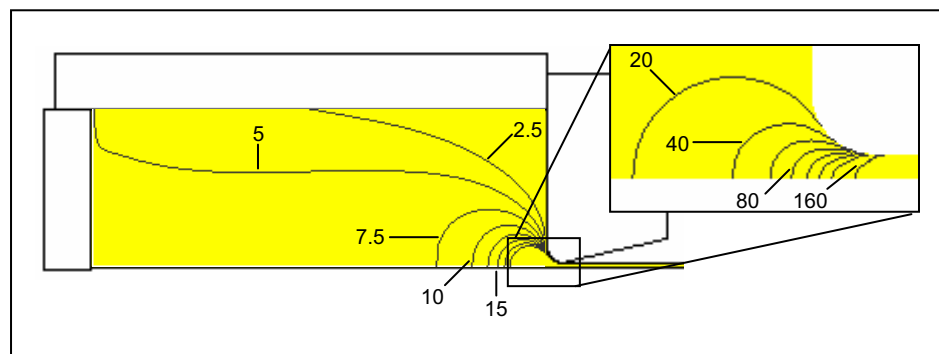
ภาพที่ 4-29 การกระจายของความเค้นเฉลี่ย (MPa) ของการรีดความเครียด
ระนาบหน้าตัดตำแหน่งศูนย์กลาง



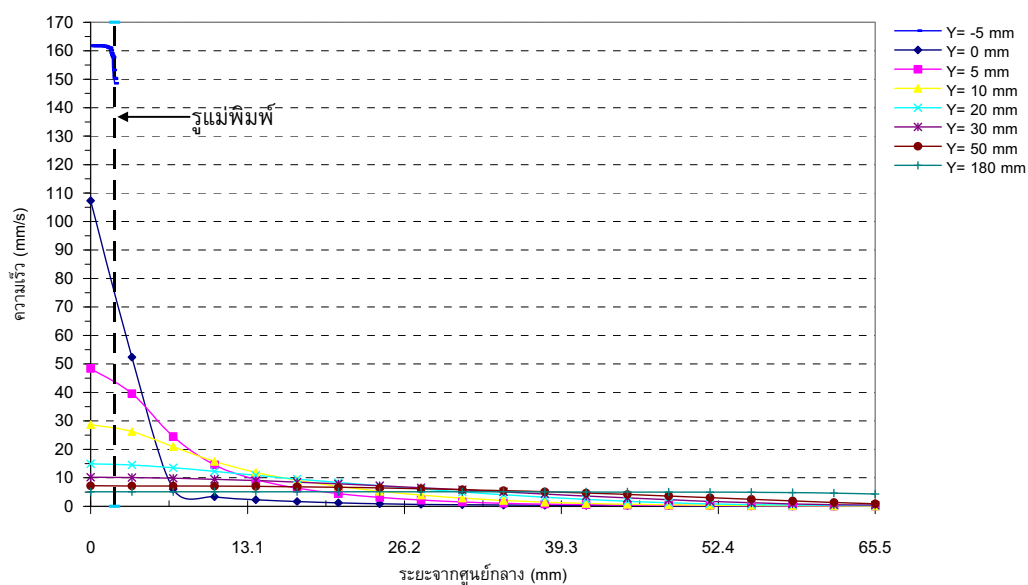
ภาพที่ 4-30 การเปลี่ยนแปลงของความเค้นเฉลี่ยที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดความเครียด ระบายหน้าตัดตำแหน่งศูนย์กลาง

ภาพที่ 4-30 แสดงการเปลี่ยนแปลงของความเค้นเฉลี่ยเห็นได้ว่าค่าความดันบริเวณรอบนอกใกล้ผิวสัมผัสในแต่ละระดับจะไม่ค่อยเปลี่ยนแปลงโดยมีค่าประมาณ -150 MPa

ภาพที่ 4-31 แสดงการกระจายความเร็วไหลของอลูมิเนียม เห็นได้ว่าที่มุมระหว่างหน้าแม่พิมพ์กับคอนเทนเนอร์มีความเร็วต่ำสุดเป็นบริเวณที่เกิดโลหะตาย และความเร็วไหลจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วบริเวณทางออกรูแม่พิมพ์ ภาพที่ 4-32 แสดงความเร็วไหลในรูปของกราฟที่ระดับต่างๆ เห็นได้ว่าที่ทางออก $Y = -5$ mm ความเร็วอลูมิเนียมที่ขอบมีค่า 150 mm/s ขณะที่ศูนย์กลางมีค่า 160 mm/s



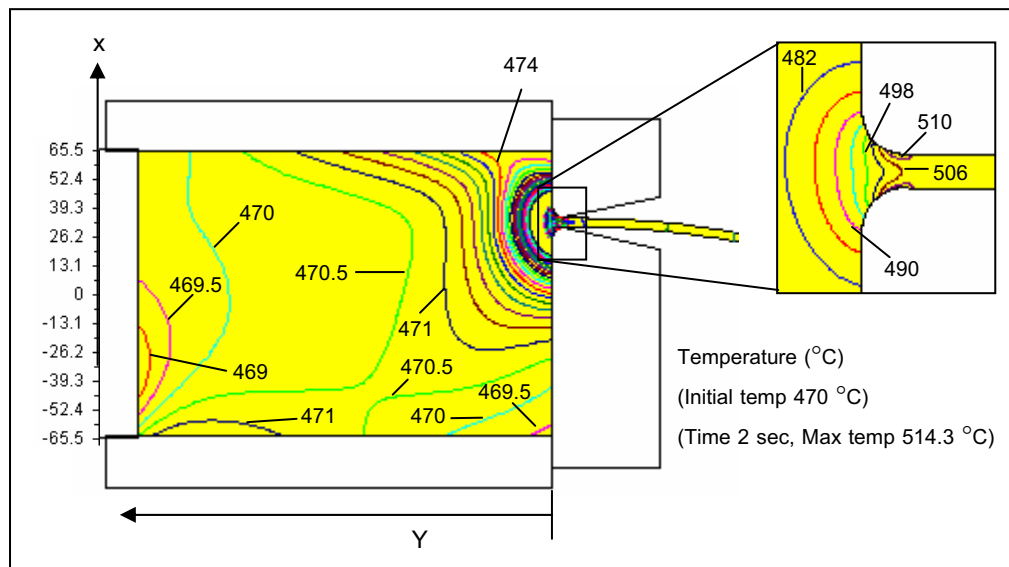
ภาพที่ 4-31 การกระจายของความเร็วไหล (mm/s) ของอลูมิเนียมของการรีดความเครียด ระบายหน้าตัดตำแหน่งศูนย์กลาง



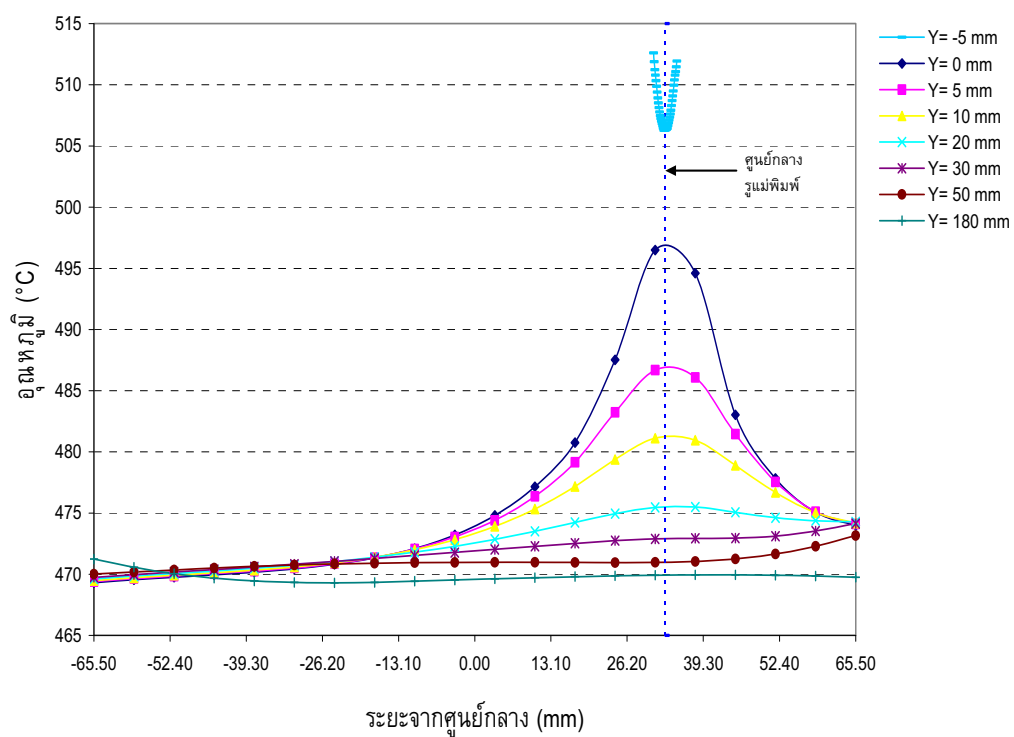
ภาพที่ 4-32 การเปลี่ยนแปลงของความเร็วไหลที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดความเครียด ระบายหน้าตัดตำแหน่งศูนย์กลาง

4.6.2 กรณีแบบจำลองความเครียดระบายหน้าตัดเยื้องศูนย์กลาง

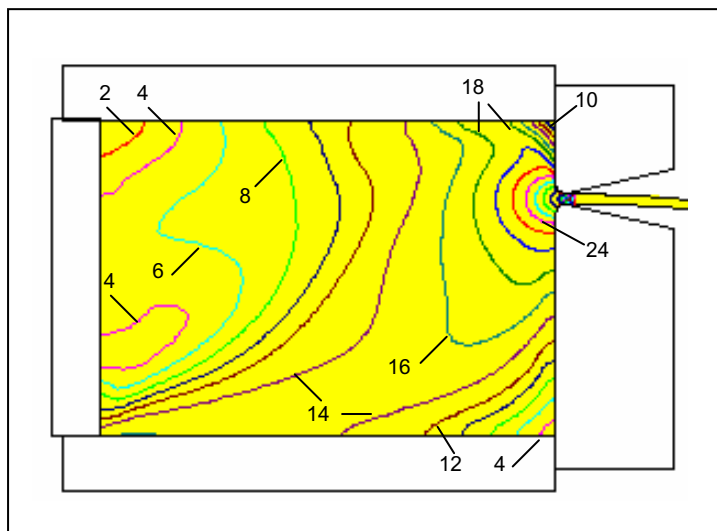
ผลการจำลองการรีดของแบบจำลองหน้าตัดเยื้องศูนย์กลางได้ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิแสดงดังภาพที่ 4-33 และภาพที่ 4-34 แสดงกราฟการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่แนวระดับต่างๆ อุณหภูมิสูงสุดเกิดขึ้น 514.3°C ใกล้เคียงกับกรณีหน้าตัดศูนย์กลาง เห็นได้ว่าอุณหภูมิทางด้านที่ใกล้รูแม่พิมพ์มีอุณหภูมิสูงกว่าด้านไกลรูแม่พิมพ์ โดยที่ระดับหน้าแม่พิมพ์ $Y=0$ ที่มุมระหว่างคอนเทนเนอร์กับแม่พิมพ์ด้านใกล้รูแม่พิมพ์มีอุณหภูมิ 474°C ขณะที่มุมด้านไกลรูแม่พิมพ์มีอุณหภูมิ 469.3°C ซึ่งต่ำกว่าอุณหภูมิเริ่มต้นของอลูมิเนียมแสดงว่าอุณหภูมิลดลงเนื่องจากการถ่ายเทความร้อนไปสู่คอนเทนเนอร์และแม่พิมพ์และบริเวณนี้มีการเปลี่ยนรูปร่างมาก สังเกตได้จากภาพที่ 4-35 ซึ่งแสดงความเค้นประสิทธิผลลักษณะการกระจายตัวของความเค้นประสิทธิผล เห็นได้ชัดเจนว่ามุมด้านใกล้รูแม่พิมพ์มีค่าความเค้นประสิทธิผลต่ำกว่าอีกด้านหนึ่ง และที่บริเวณทางออกอุณหภูมิมีลักษณะเช่นเดียวกับกรณีหน้าตัดตำแหน่งศูนย์กลางแม่พิมพ์ คือที่ส่วนกลางหน้าตัดที่ออกจากแม่พิมพ์มีอุณหภูมิต่ำกว่าที่ขอบผิวทั้งสองประมาณ 6°C เนื่องจากการเปลี่ยนรูปร่าง



ภาพที่ 4-33 การกระจายอุณหภูมิของการรีดความเครียดระนาบหน้าตัดตำแหน่งเยื้องศูนย์กลาง

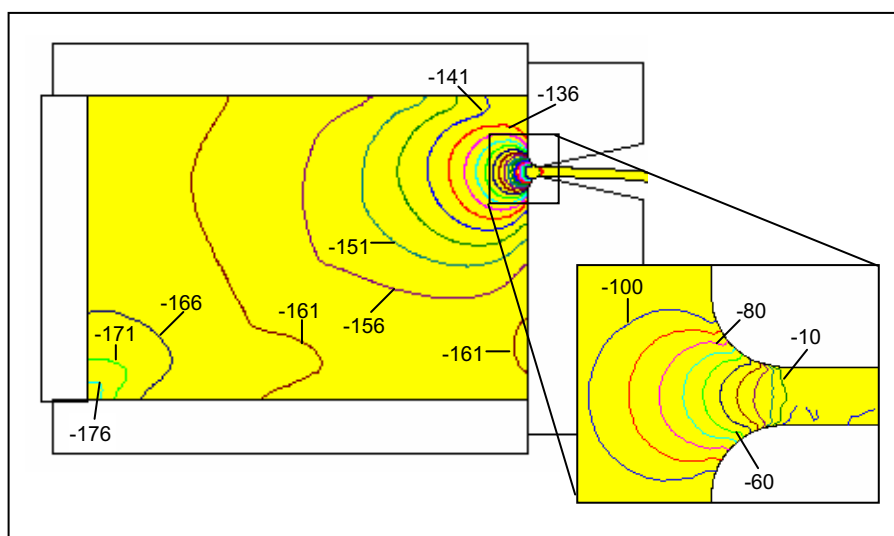


ภาพที่ 4-34 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดความเครียดระนาบหน้าตัดตำแหน่งเยื้องศูนย์กลาง

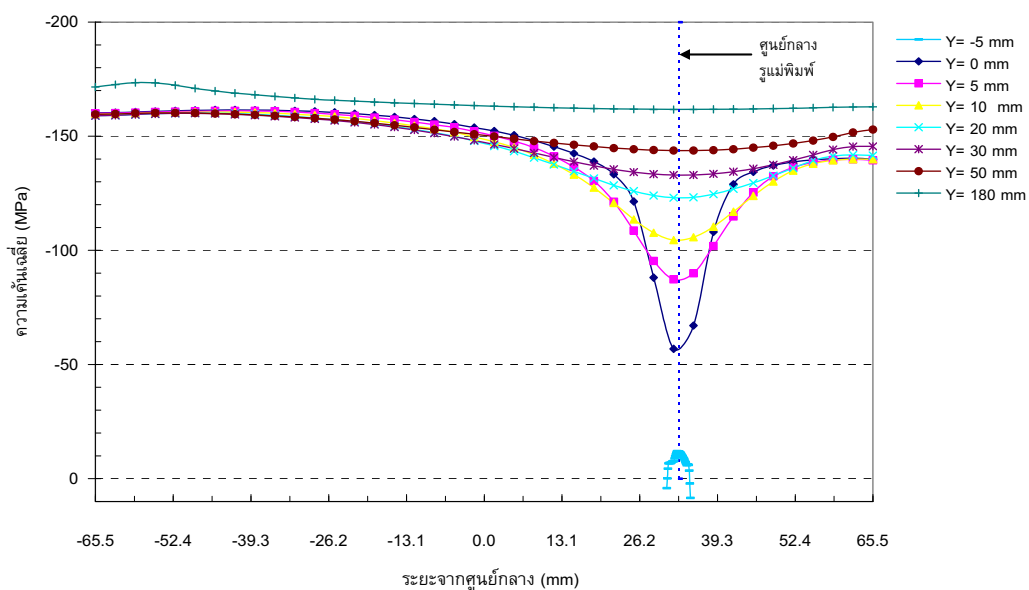


ภาพที่ 4-35 การกระจายของความเค้นประสิทธิผล (MPa) ของการรีดความเครียด
ระนาบหน้าตัดตำแหน่งเยื้องศูนย์กลาง

ภาพที่ 4-36 และภาพที่ 4-37 แสดงถึงความเค้นเฉื่อยเห็นได้ว่าค่าที่ด้านใกล้รูแม่พิมพ์มีความดันสูงกว่าด้านใกล้รูแม่พิมพ์และบริเวณผิวติดกับคอนเทนเนอร์ด้านใกล้รูแม่พิมพ์นั้นมีความเค้นที่ลดลงทุกระดับ ในขณะที่ด้านผิวติดคอนเทนเนอร์ด้านใกล้รูแม่พิมพ์มีความดันลดลงเล็กน้อยเมื่อเข้าใกล้แม่พิมพ์มากขึ้น และบริเวณก่อนไหลออกจากแม่พิมพ์มีความดันลดลงต่ำมาก โดยที่ผิวของหน้าตัดเมื่อออกจากแม่พิมพ์เริ่มมีความเค้นที่มีลักษณะเป็นความเค้นดึง

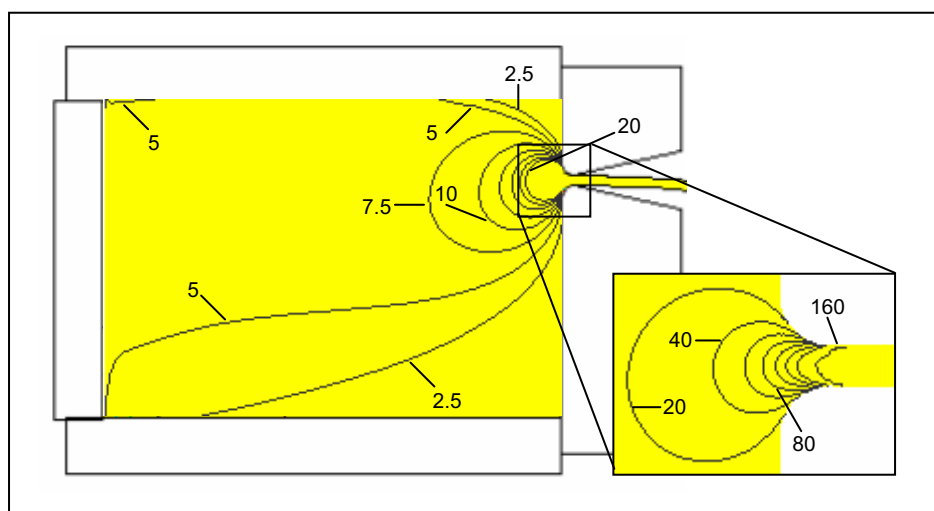


ภาพที่ 4-36 การกระจายความเค้นเฉื่อย (MPa) ของการรีดความเครียดระนาบ
หน้าตัดตำแหน่งเยื้องศูนย์กลาง

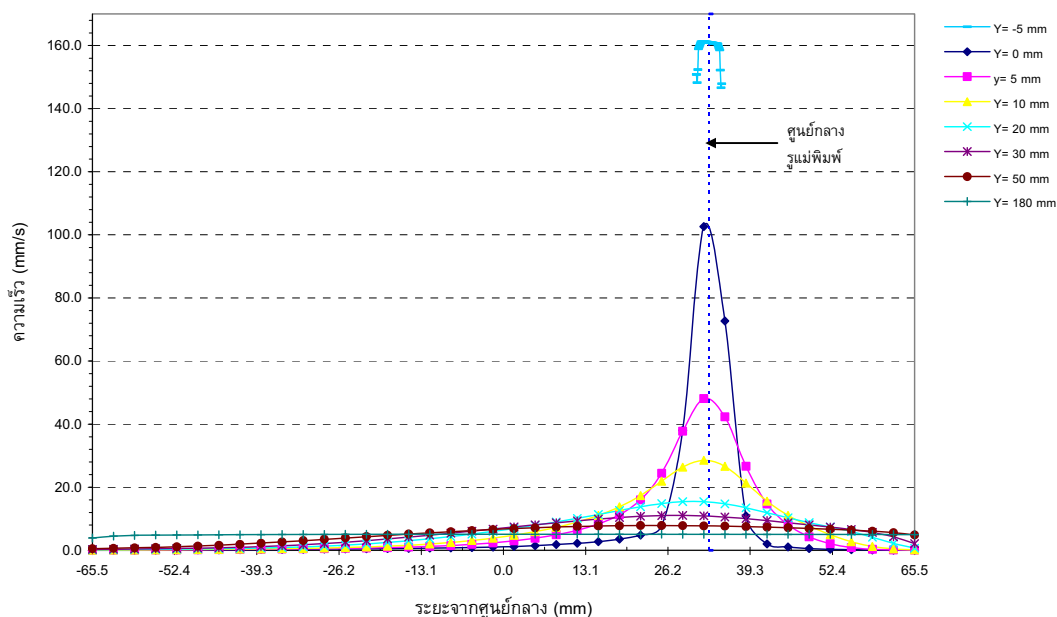


ภาพที่ 4-37 การเปลี่ยนแปลงของความเค้นเฉลี่ยที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดความเครียดระนาบหน้าตัดตำแหน่งเยื้องศูนย์กลาง

ภาพที่ 4-38 ซึ่งแสดงความเร็วไหลของอลูมิเนียมนั้น แสดงถึงแนวโน้มการเกิดโลหะตายในด้านที่ไกลจากรูแม่พิมพ์มีพื้นที่มากกว่าด้านใกล้รูแม่พิมพ์อย่างชัดเจน สังเกตได้จากแนวความเร็ว 2.5 mm/s ของภาพที่ 4-38 เห็นได้ว่าด้านไกลจากรูแม่พิมพ์มีขอบเขตกว้างกว่ามาก ในขณะที่ความเร็วไหลของอลูมิเนียมเพิ่มขึ้นอย่างมากเมื่อเข้าใกล้ทางออกของรูแม่พิมพ์



ภาพที่ 4-38 การกระจายความเร็วไหล (mm/s) ของการรีดความเครียดระนาบหน้าตัดตำแหน่งเยื้องศูนย์กลาง

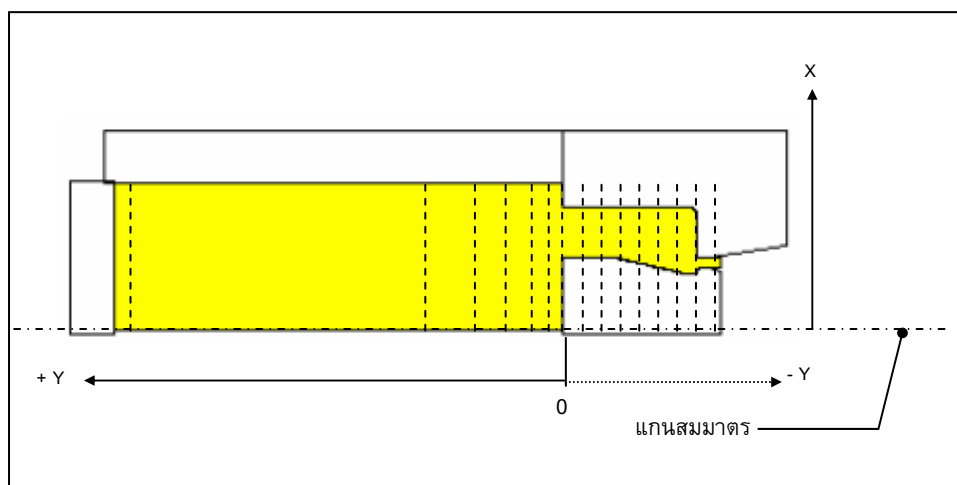


ภาพที่ 4-39 การเปลี่ยนแปลงของความเร็วไหลที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดความเครียด ระบายหน้าตัดตำแหน่งเยื้องศูนย์กลาง

4.7 อิทธิพลของรูปทรงแมนเดิลในการรีดท่อกลมสมมาตรรอบแกน

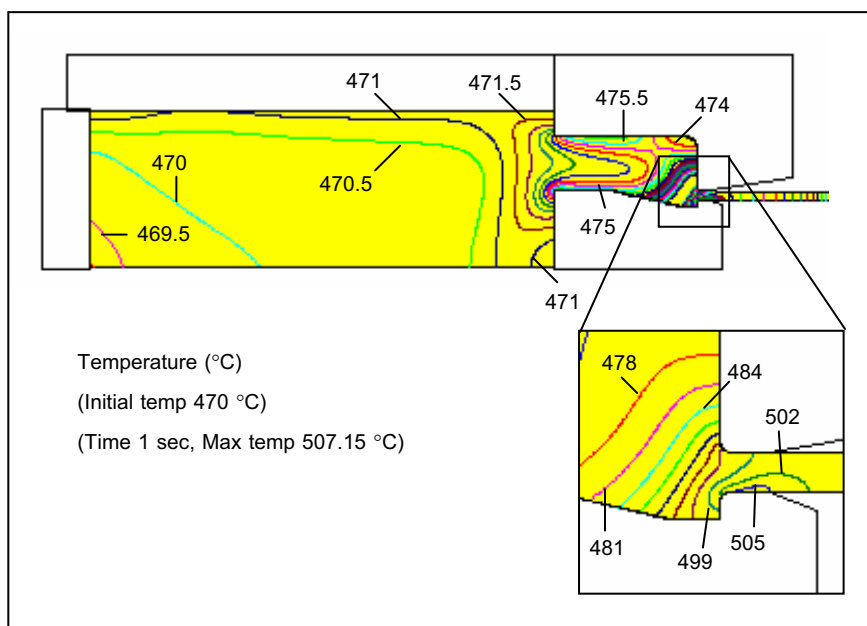
อิทธิพลของรูปทรงแมนเดิลต่อการไหลได้ศึกษาด้วยแบบจำลองการรีดท่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเฉลี่ย (Mean Diameter) 60 mm หนา 4 mm แบบสมมาตรรอบแกนชั้น 4 แบบจำลองที่มีรูปทรงของแมนเดิลที่แตกต่างกันดังภาพที่ 3-4 เนื่องจากแบบจำลองเป็นแบบจำลองชนิด 2 มิติสมมาตรรอบแกนจึงไม่สามารถคำนึงถึงอิทธิพลของการไหลผ่านส่วนขา ยึดแมนเดิลหรือเวป (Web) ได้ การจำลองการรีดใช้คอนเทนเนอร์ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 131 mm ความยาวของอลูมิเนียมที่ 200 mm ความเร็วรีดคงที่ 5 mm/s อลูมิเนียมก่อนการรีดมีอุณหภูมิ 470 °C อุณหภูมิเริ่มต้นแม่พิมพ์ 450 °C อุณหภูมิคอนเทนเนอร์ 430 °C อุณหภูมิตัวมีบล็อกล็อก 350 °C และอุณหภูมิสภาพแวดล้อม 35 °C โดยค่าคงที่ของสมบัติด้านความร้อนกำหนดดังตารางที่ 3-1

ภาพที่ 4-40 แสดงแนวตำแหน่ง 0, 5, 10, 20, 30, 50 และ 180 mm ซึ่งเป็นช่วงก่อนเข้าสู่พอร์ทและช่วง -5, -10, -20, -30, -40, -50, -60 และ -65 mm ซึ่งเป็นช่วงที่อยู่ภายในแม่พิมพ์ ในการพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ, ความดัน และความเร็วไหลที่ตำแหน่งนั้น

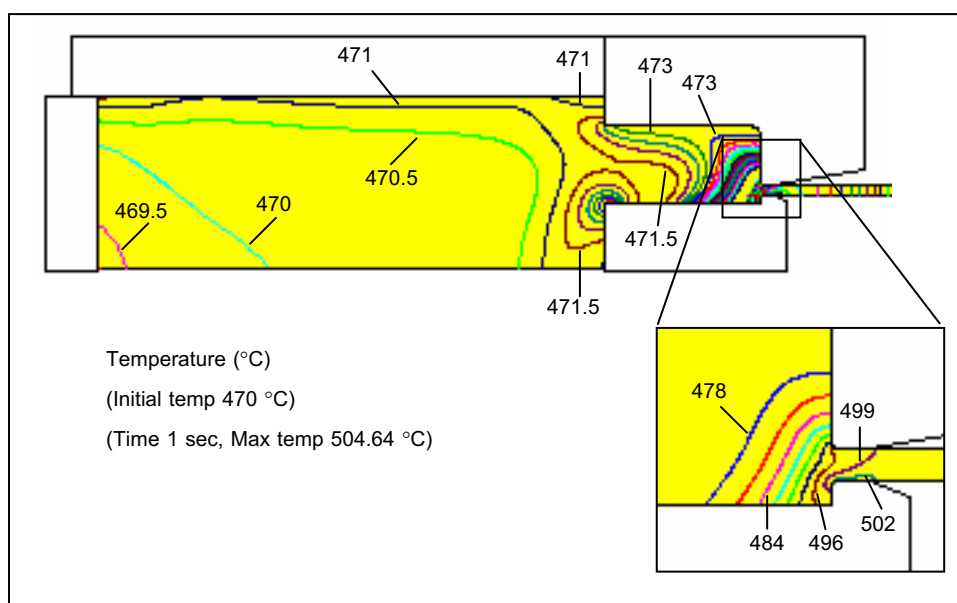


ภาพที่ 4-40 แนวตำแหน่งที่ใช้พิจารณาความเปลี่ยนแปลงสภาวะในแบบจำลองสมมาตรรอบแกนของการรีดท่อกลม

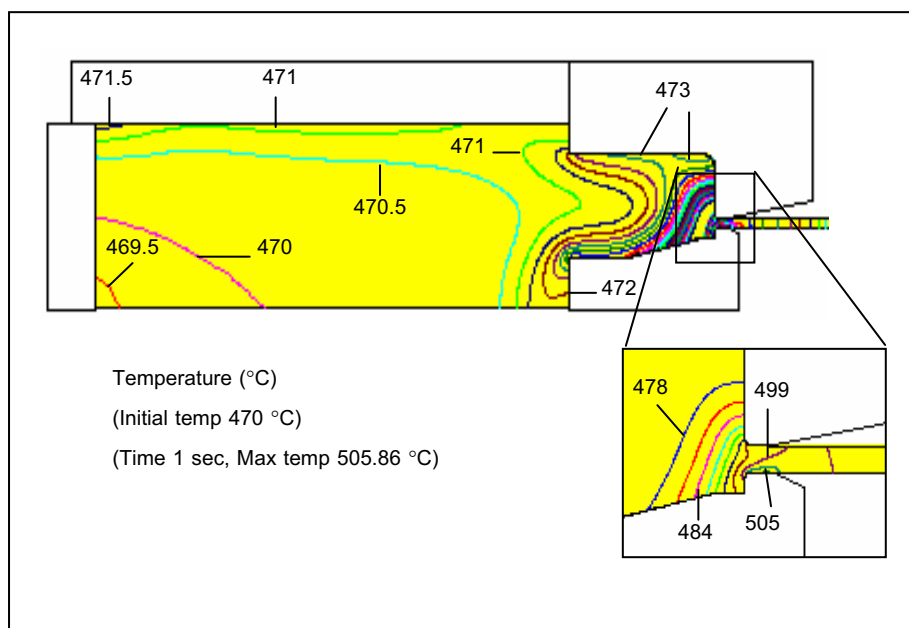
ภาพที่ 4-41 ถึง 4-44 แสดงการกระจายของอุณหภูมิของแบบจำลองทั้ง 4 แบบจำลอง โดยจากการจำลองพบว่าแมนเดลแบบที่ 1 มีอุณหภูมิสูงสุดคือ 507.15°C ในขณะที่แบบจำลองที่ 2, 3 และ 4 โดยมีอุณหภูมิสูงสุดคือ 504.64 , 505.86 และ 505.56°C ตามลำดับ ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิในแบบจำลองทั้ง 4 ในช่วงก่อนเข้าสู่แม่พิมพ์มีลักษณะใกล้เคียงกัน ในขณะที่บริเวณภายในแม่พิมพ์มีการกระจายตัวที่แตกต่างกัน โดยจากภาพที่ 4-45, 4-47, 4-49 และ 4-51 เห็นได้ว่าอุณหภูมิช่วงก่อนเข้าพอร์ทของแบบจำลองที่ 1 มีอุณหภูมิสูงสุดในขณะที่มีค่าต่ำสุดในแบบจำลองที่ 4 ซึ่งมีลักษณะเป็นลักษณะมุมป้านทำให้อลูมิเนียมไหลได้ราบเรียบมากกว่าแบบอื่นซึ่งหักมุมจาก และเห็นความแตกต่างของอุณหภูมิช่วงก่อนเข้าแม่พิมพ์บริเวณมุมระหว่างแม่พิมพ์กับคอนเทนเนอร์ได้ชัดเจนว่าในแมนเดลแบบที่ 1 นั้น อุณหภูมิบริเวณนี้เกือบคงที่ทุกหน้าตัดดังภาพที่ 4-45 ในขณะที่แมนเดลแบบอื่นๆ นั้น อุณหภูมิบริเวณนี้จะลดต่ำลงดังภาพที่ 4-47, 4-49 และ 4-51 ที่มุมแสดงว่าเกิดการอันตัวของอลูมิเนียมที่มุมมากกว่าแบบที่ 1



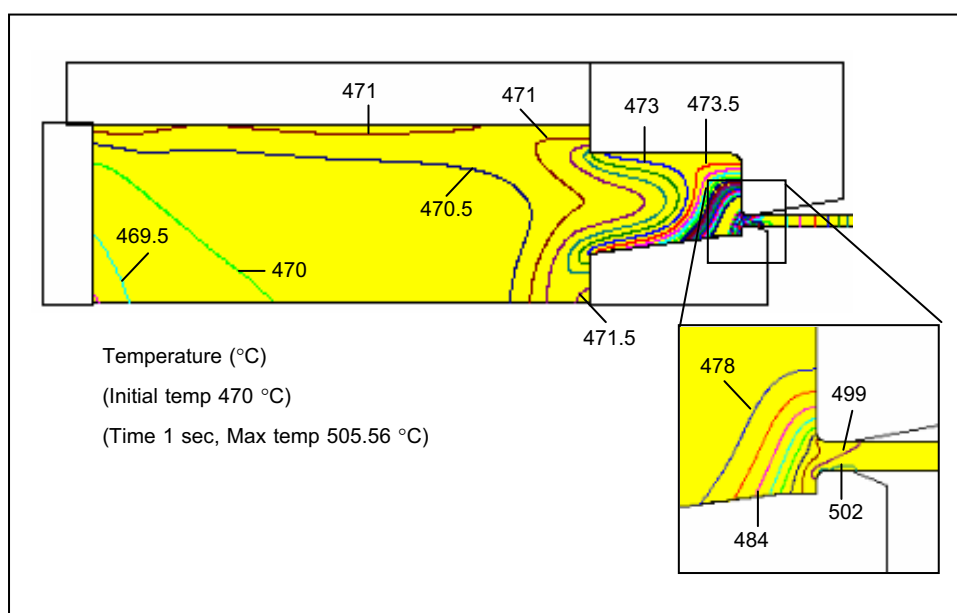
ภาพที่ 4-41 การกระจายอุณหภูมิในแบบจำลองสมมาตรรอบแกนของการรีดท่อกลมรูปทรงแมนเดลแบบที่ 1



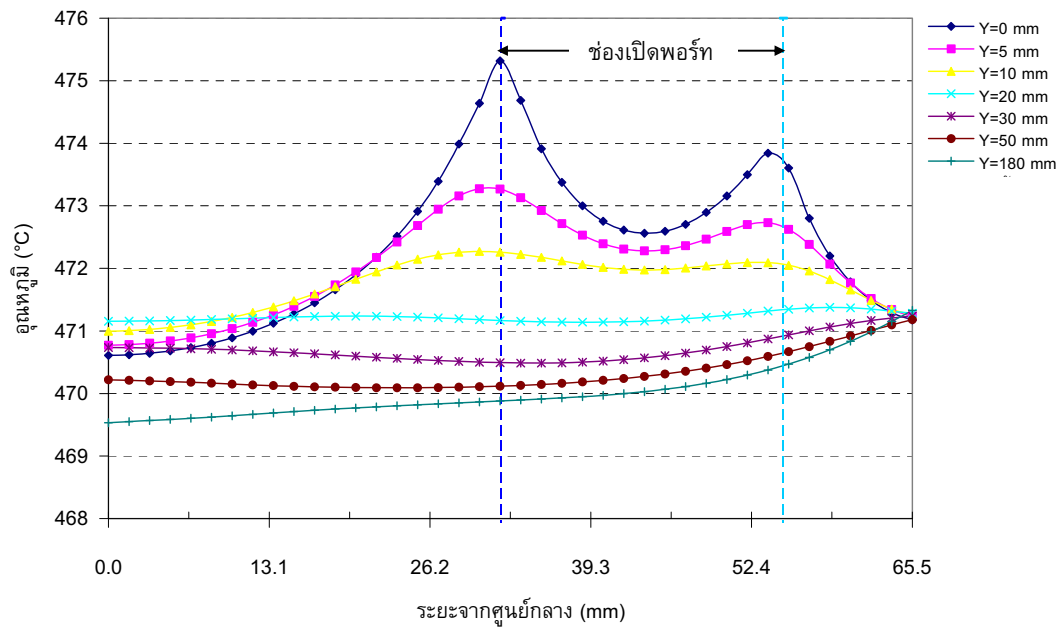
ภาพที่ 4-42 การกระจายอุณหภูมิในแบบจำลองสมมาตรรอบแกนของการรีดท่อกลมรูปทรงแมนเดลแบบที่ 2



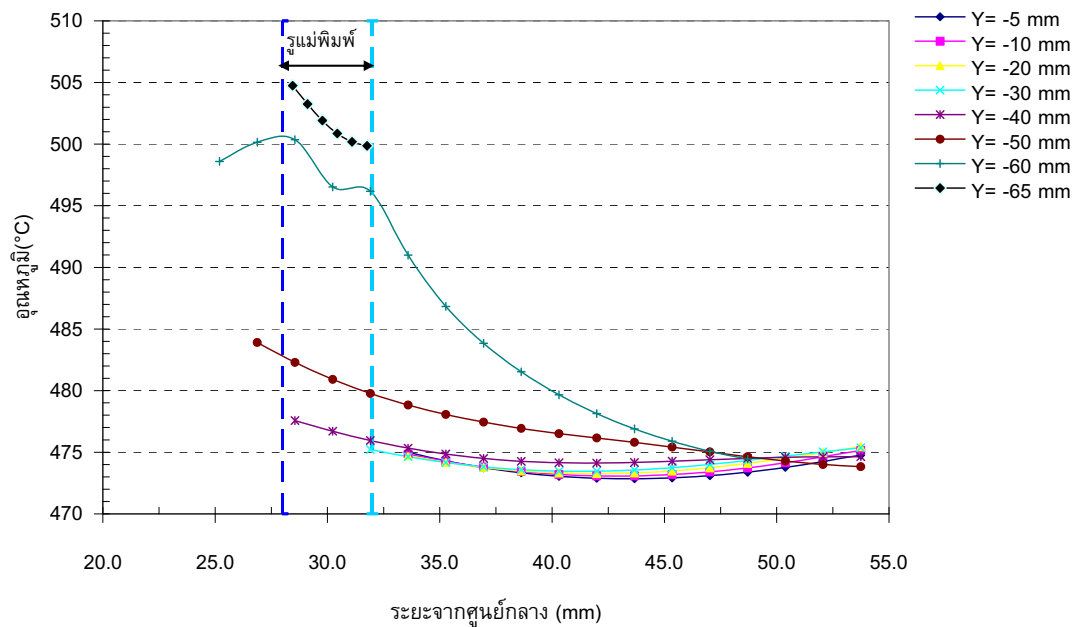
ภาพที่ 4-43 การกระจายอุณหภูมิในแบบจำลองสมมาตรรอบแกนของการรีดท่อกลมรูปทรงแมนเดลแบบที่ 3



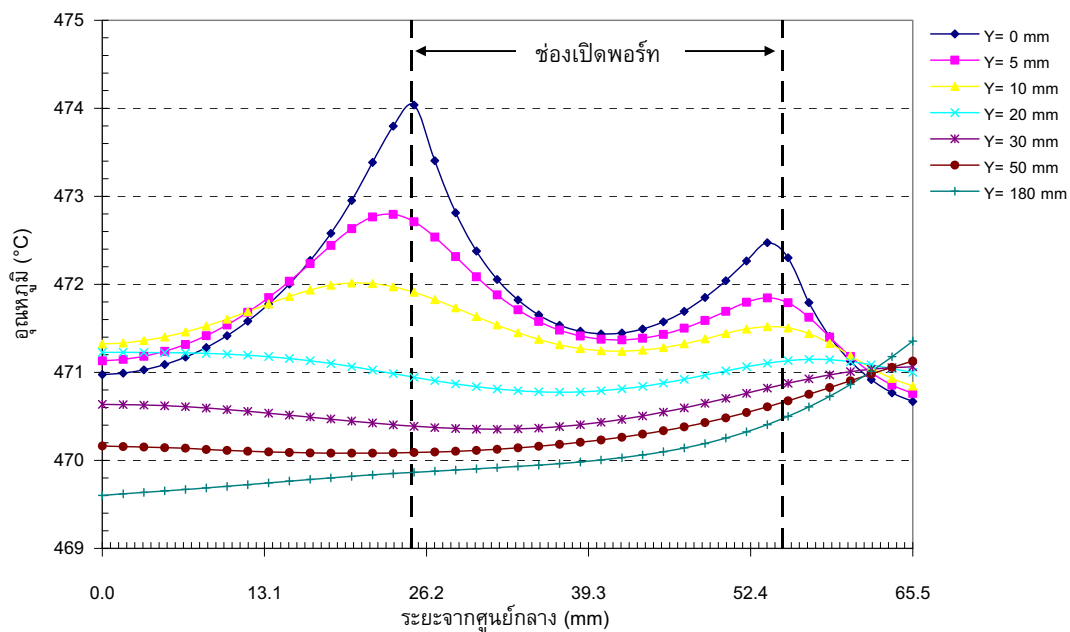
ภาพที่ 4-44 การกระจายอุณหภูมิในแบบจำลองสมมาตรรอบแกนของการรีดท่อกลมรูปทรงแมนเดลแบบที่ 4



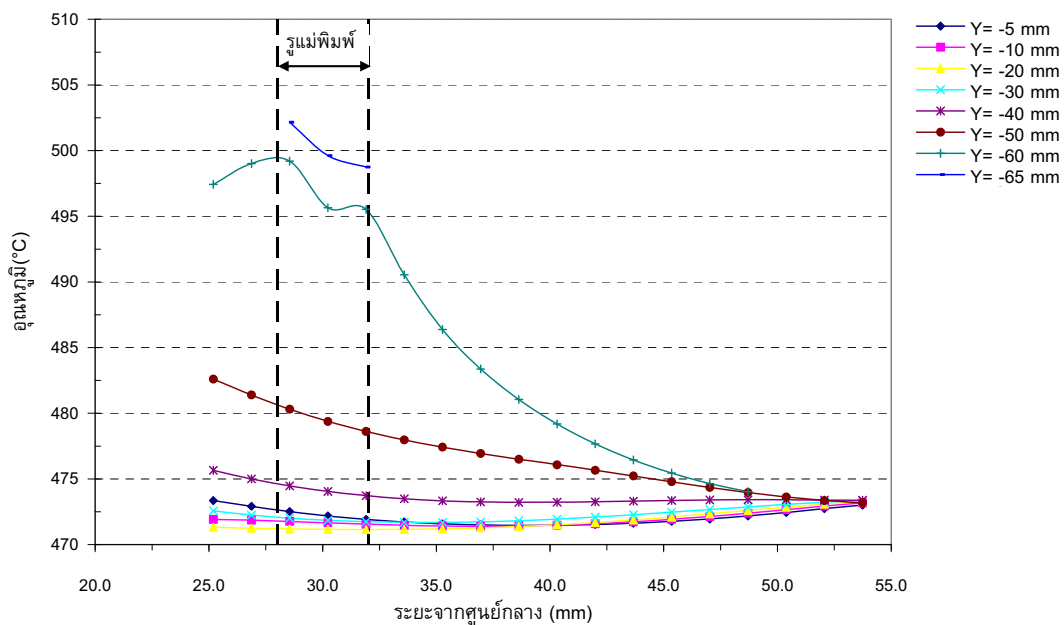
ภาพที่ 4-45 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 1 ช่วงก่อนเข้าแม่พิมพ์



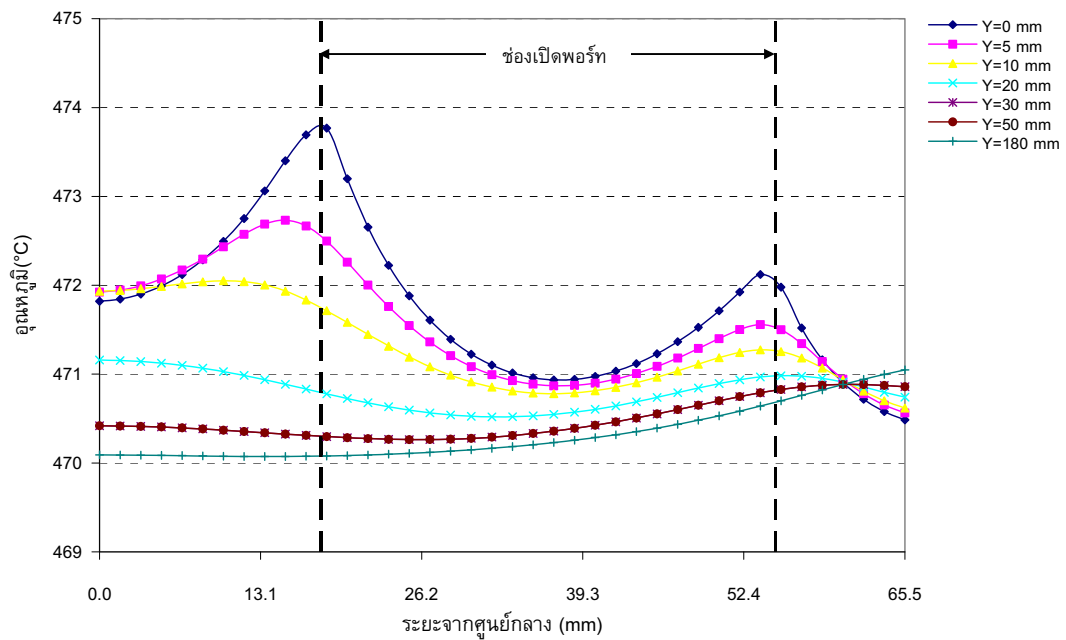
ภาพที่ 4-46 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 1 ช่วงอยู่ในแม่พิมพ์



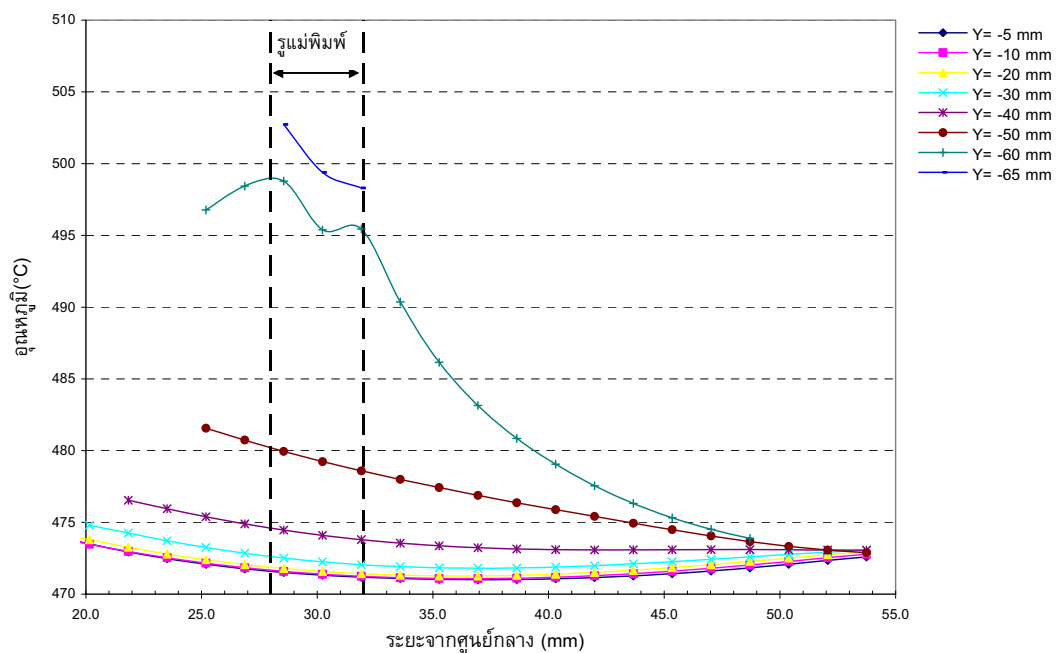
ภาพที่ 4-47 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 2 ช่วงก่อนเข้าแม่พิมพ์



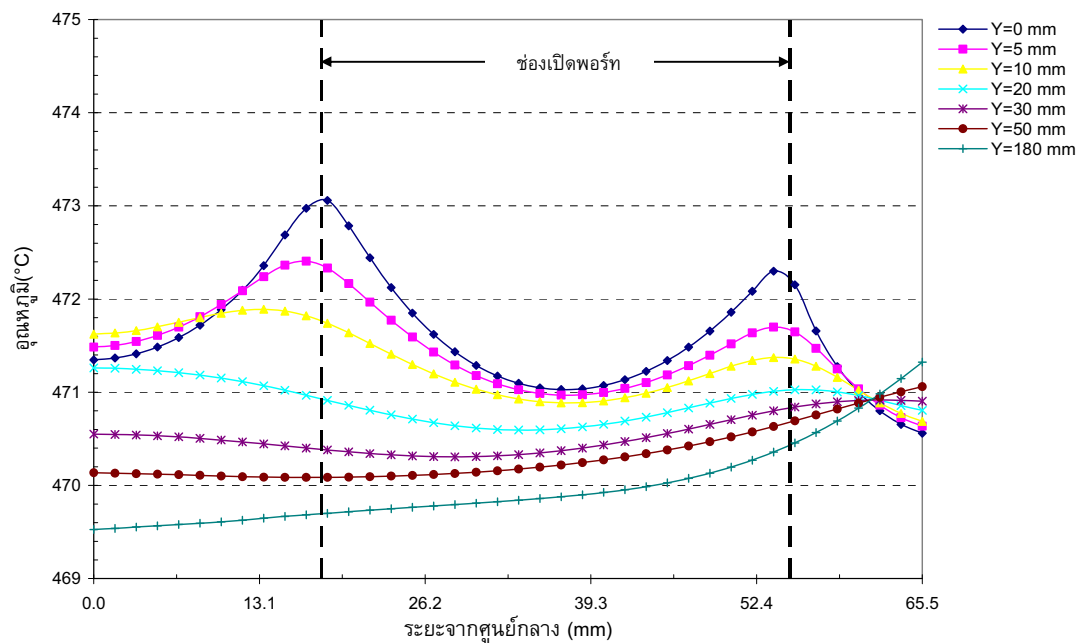
ภาพที่ 4-48 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 2 ช่วงอยู่ในแม่พิมพ์



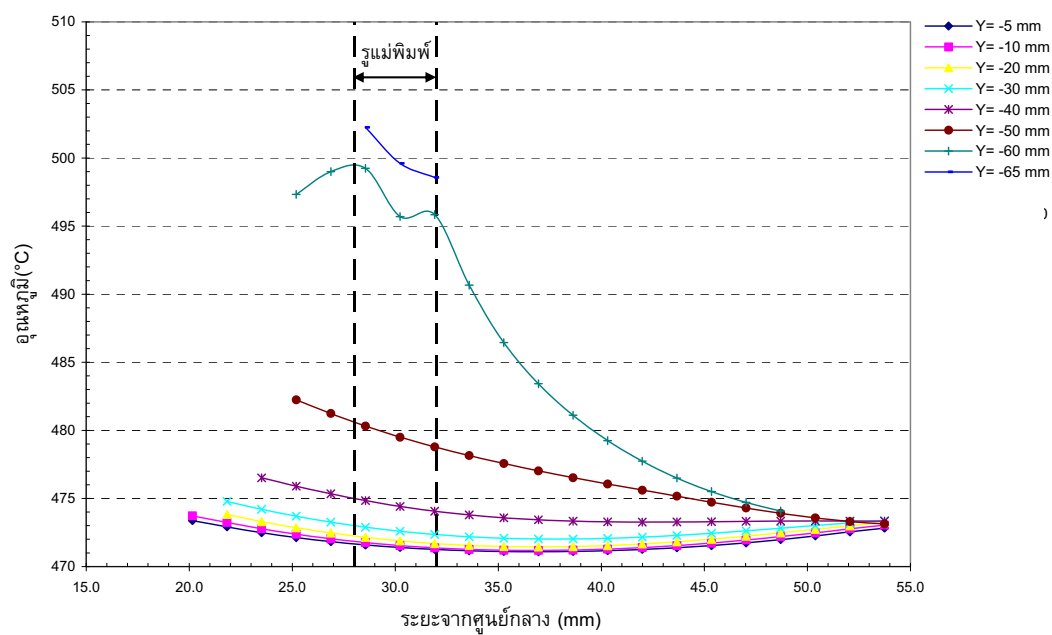
ภาพที่ 4-49 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 3 ช่วงก่อนเข้าแม่พิมพ์



ภาพที่ 4-50 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 3 ช่วงอยู่ในแม่พิมพ์

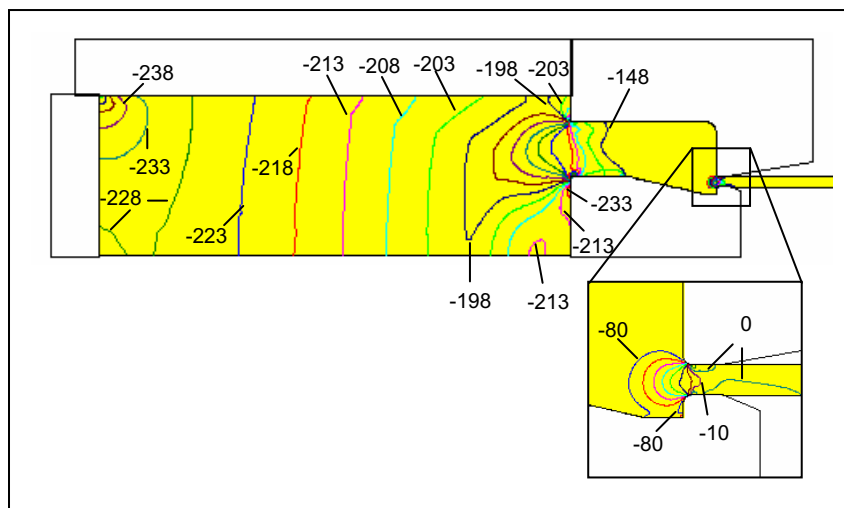


ภาพที่ 4-51 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 4 ช่วงก่อนเข้าแม่พิมพ์

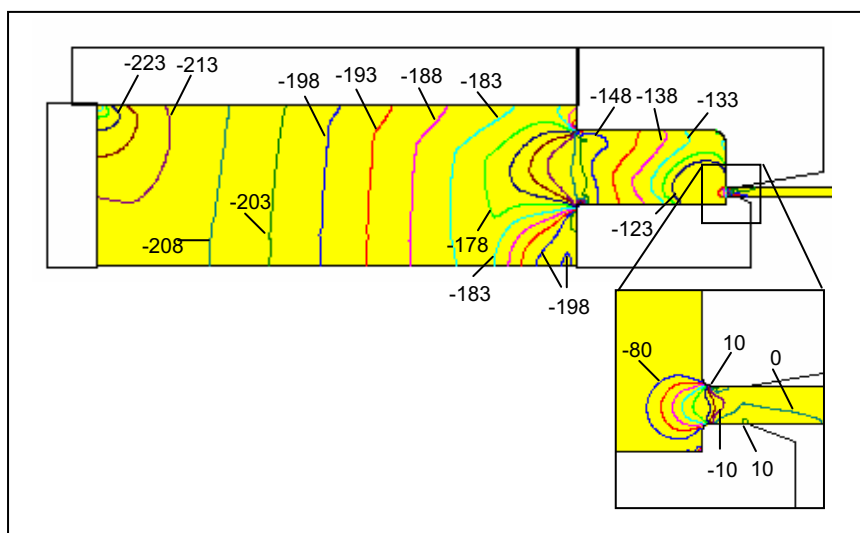


ภาพที่ 4-52 การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 4 ช่วงอยู่ในแม่พิมพ์

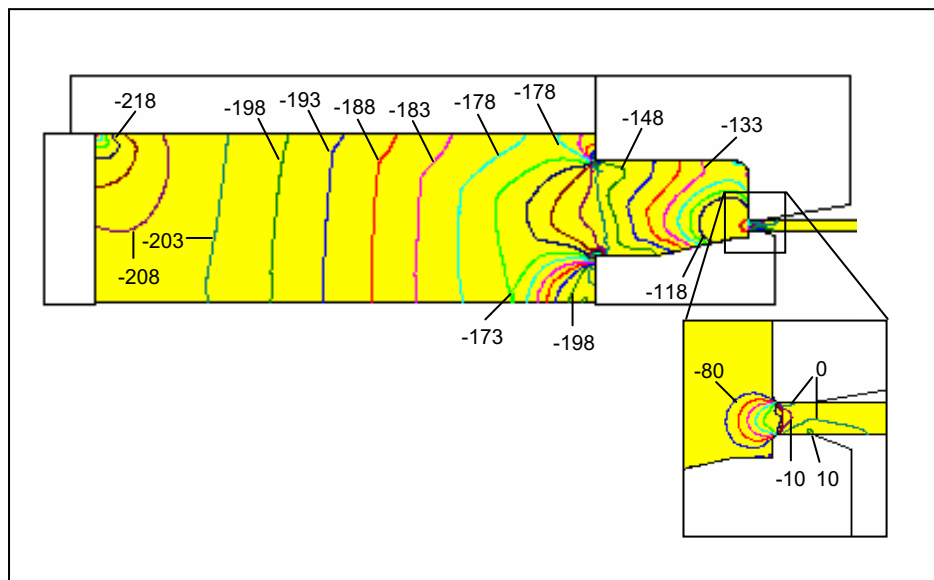
ภาพที่ 4-53 ถึง 4-56 แสดงลักษณะการกระจายตัวของความเค้นเฉื่อยเห็นได้ชัดเจนว่า ในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 1 มีความดันสูงกว่าแบบอื่นเนื่องจากแมนเดลแบบที่มีขนาดใหญ่ที่สุดทำให้พอร์ททางเข้าของอลูมิเนียมเล็กกว่าแบบอื่นๆ โดยทุกแบบจำลองความดันด้านใกล้ดัมมีบล็อกละมากกว่าด้านใกล้แม่พิมพ์สำหรับที่บริเวณทางออกรูแม่พิมพ์นั้นการกระจายความดันมีลักษณะใกล้เคียงกันคือเริ่มเกิดความเค้นดึงที่ขอบผิวอลูมิเนียมที่ออกจากแม่พิมพ์



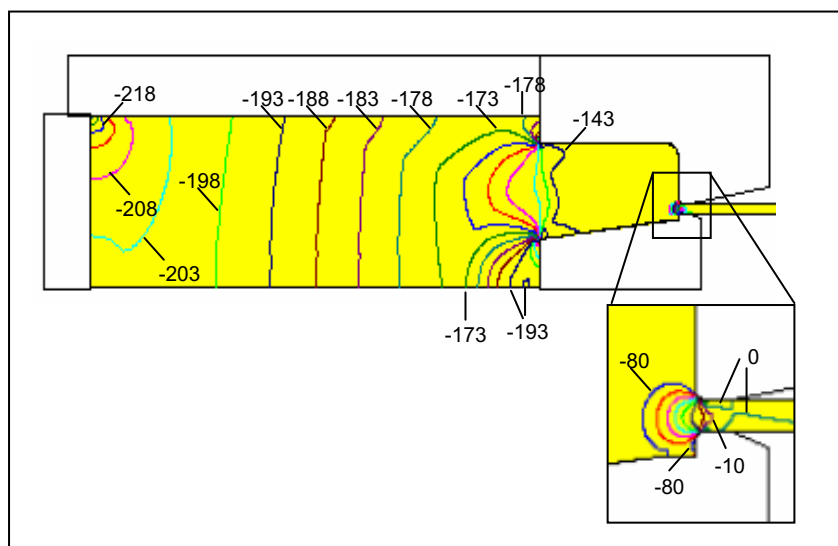
ภาพที่ 4-53 การกระจายความเค้นเฉื่อย (MPa) ในแบบจำลองสมมาตรรอบแกนของการรีดท่อกลมรูปทรงแมนเดลแบบที่ 1



ภาพที่ 4-54 การกระจายความเค้นเฉื่อย (MPa) ในแบบจำลองสมมาตรรอบแกนของการรีดท่อกลมรูปทรงแมนเดลแบบที่ 2



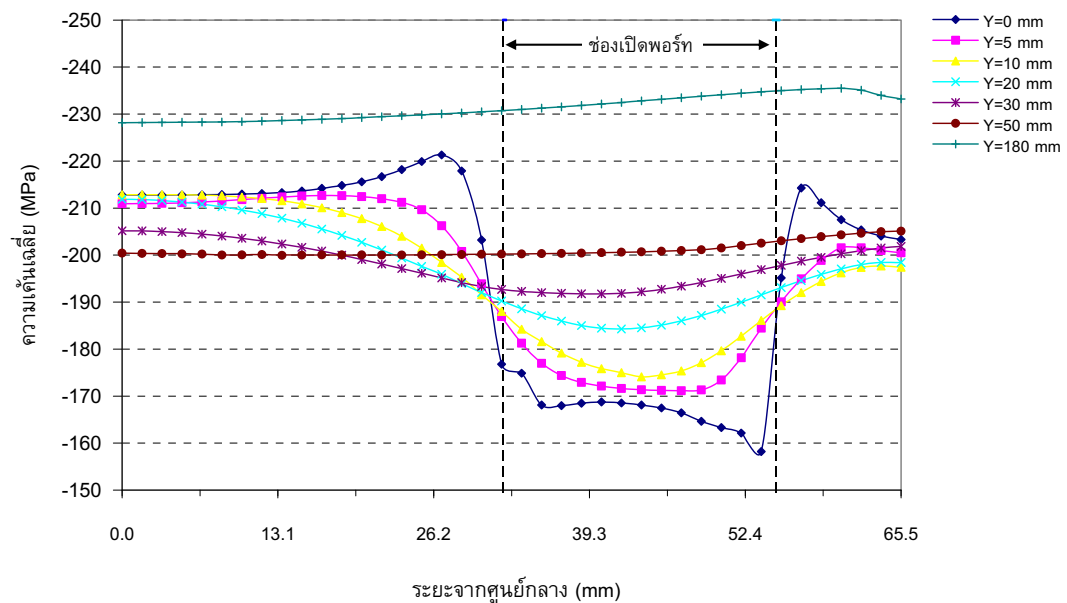
ภาพที่ 4-55 การกระจายความเค้นเฉื่อย (MPa) ในแบบจำลองสมมาตรรอบแกนของการรีด
ท่อกลมรูปทรงแมนเดิลแบบที่ 3



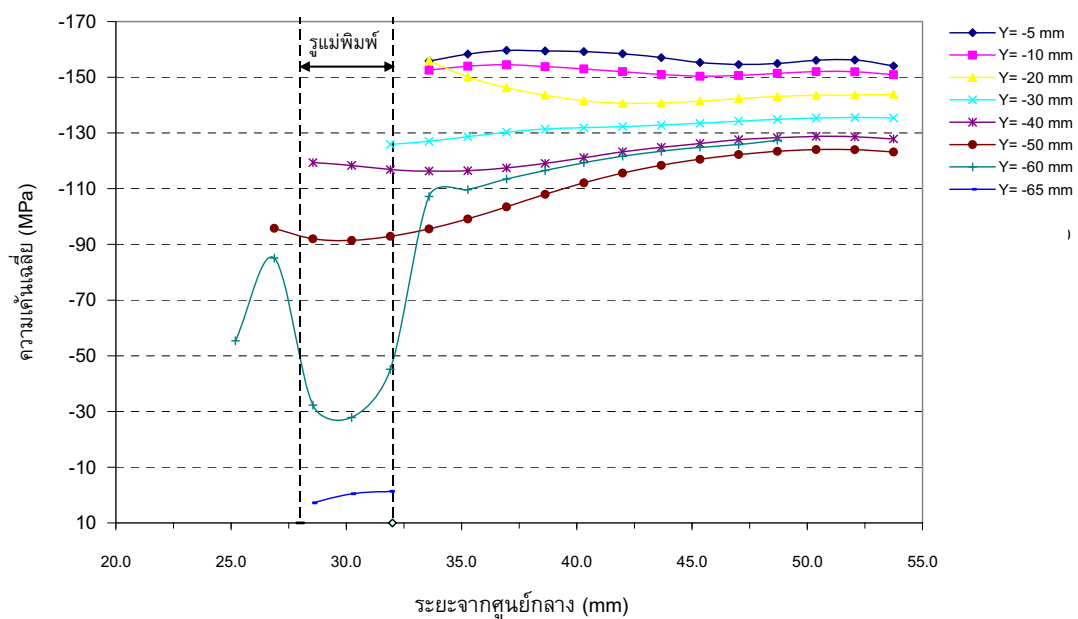
ภาพที่ 4-56 การกระจายความเค้นเฉื่อย (MPa) ในแบบจำลองสมมาตรรอบแกนของการรีด
ท่อกลมรูปทรงแมนเดิลแบบที่ 4

จากภาพที่ 4-57 ถึง 4-64 เห็นได้ชัดเจนถึงลักษณะความดันที่ค่อย ๆ ลดลงเมื่อเข้าใกล้
พอร์ทและที่บริเวณทางออกจากแม่พิมพ์ สำหรับความดันที่ด้านที่เข้าปะทะส่วนแมนเดิลจะมี

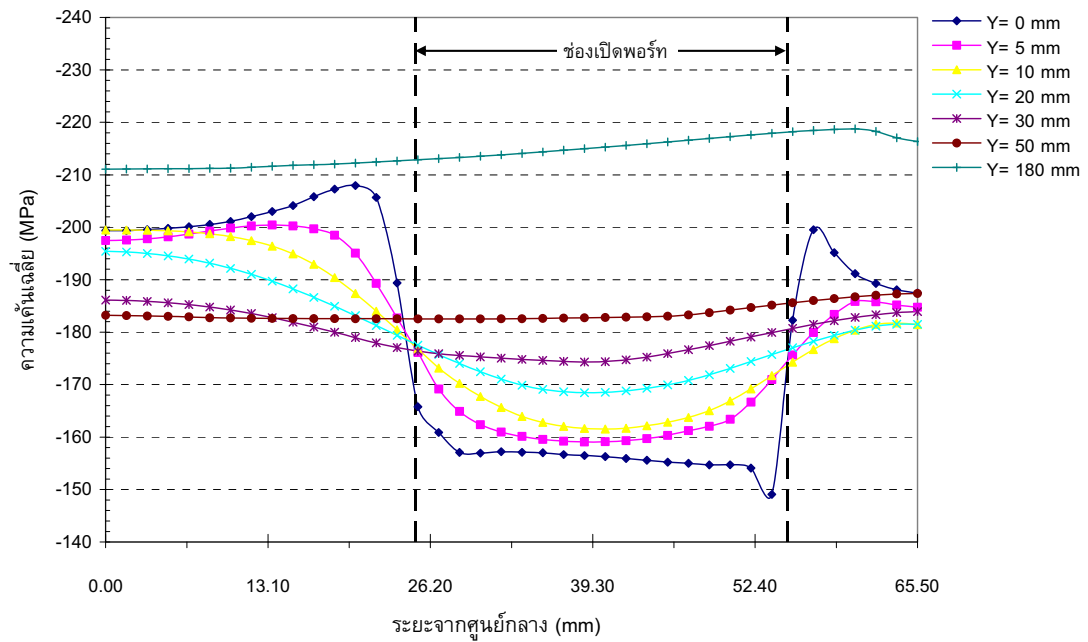
ความดันสูงขึ้นเนื่องจากไม่สามารถไหลต่อไปได้ นอกจากนี้ที่บริเวณมุมระหว่างหน้าแม่พิมพ์กับคอนเทนเนอร์ก็มีความดันสูงขึ้นเล็กน้อย



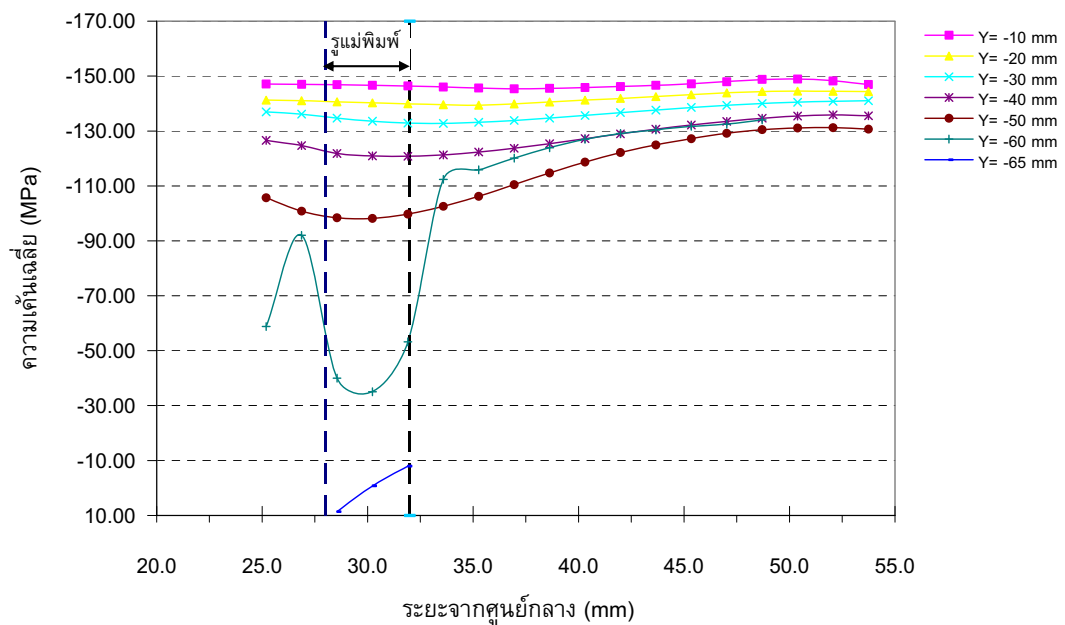
ภาพที่ 4-57 การเปลี่ยนแปลงของความเค้นเฉลี่ยที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดที่อุณหภูมิแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 1 ช่วงก่อนเข้าแม่พิมพ์



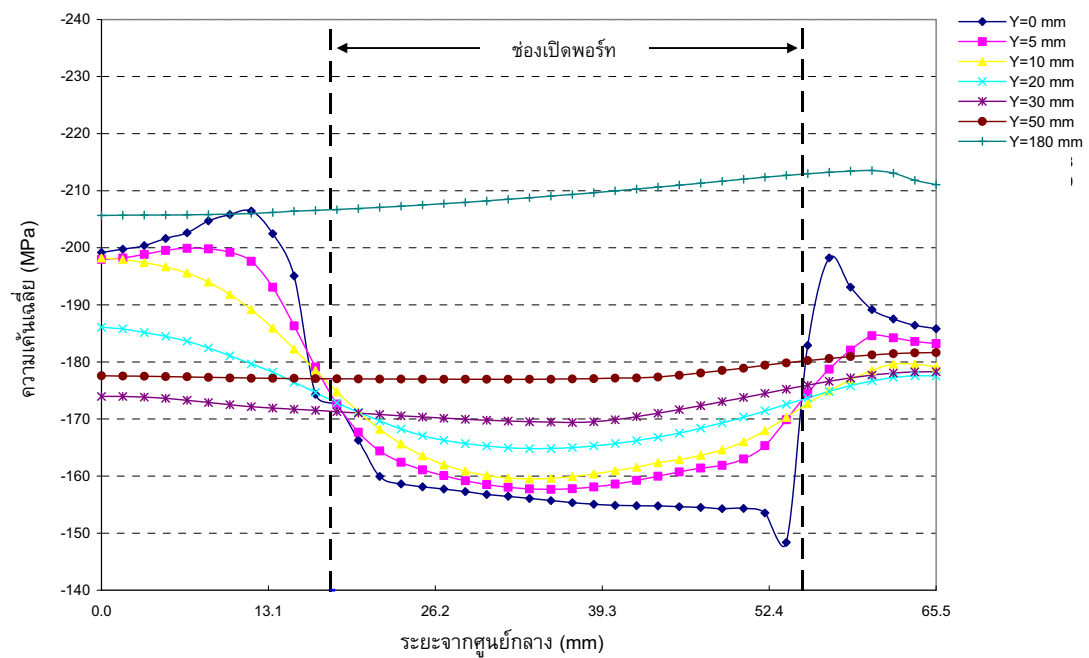
ภาพที่ 4-58 การเปลี่ยนแปลงของความเค้นเฉลี่ยที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดที่อุณหภูมิแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 1 ช่วงอยู่ในแม่พิมพ์



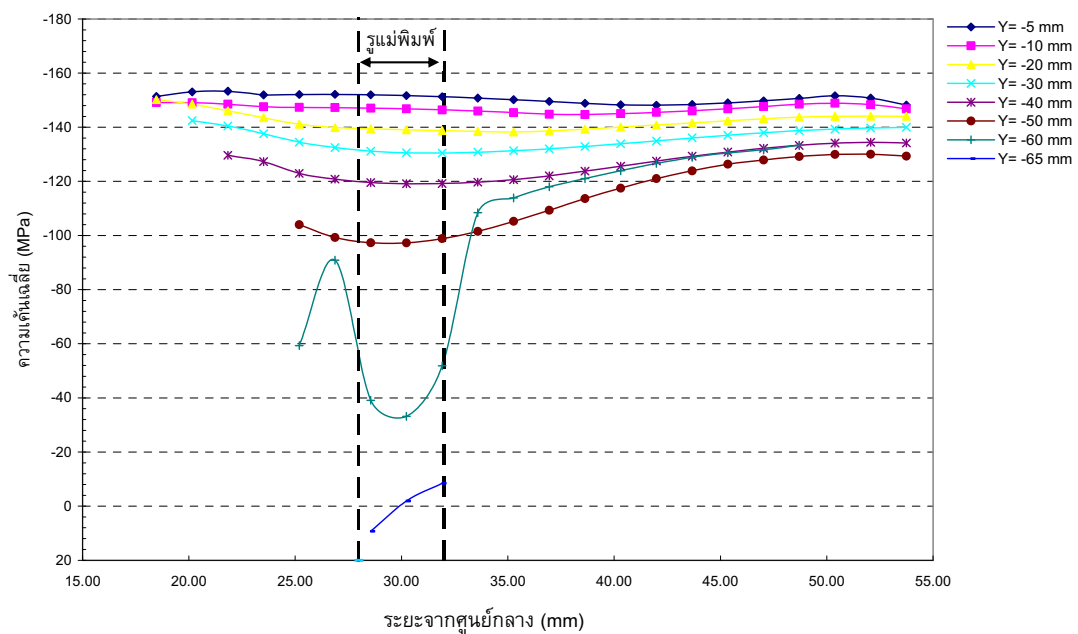
ภาพที่ 4-59 การเปลี่ยนแปลงของความเค้นเฉลี่ยที่แนวระดับต่างๆ ของการรื้อท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 2 ช่วงก่อนเข้าแม่พิมพ์



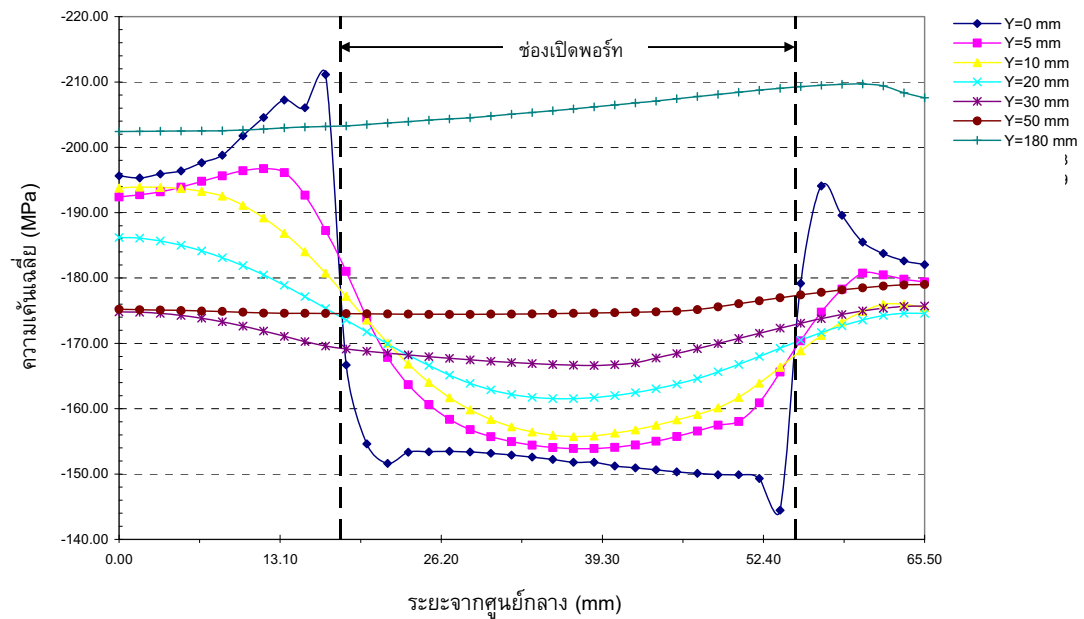
ภาพที่ 4-60 การเปลี่ยนแปลงของความเค้นเฉลี่ยที่แนวระดับต่างๆ ของการรื้อท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 2 ช่วงอยู่ในแม่พิมพ์



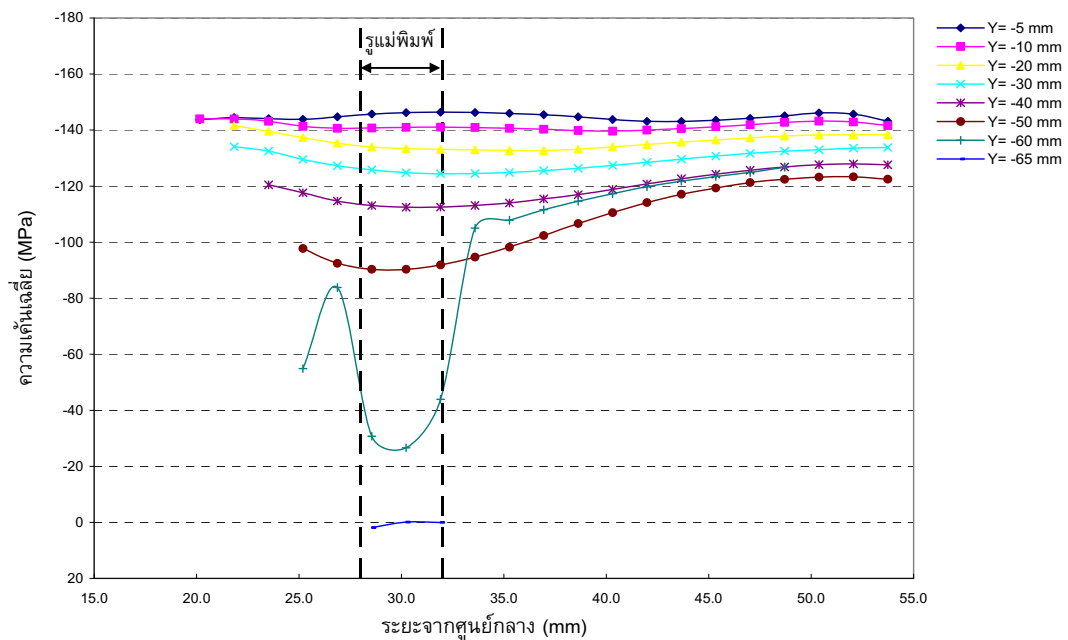
ภาพที่ 4-61 การเปลี่ยนแปลงของความเค้นเฉลี่ยที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 3 ช่วงก่อนเข้าแม่พิมพ์



ภาพที่ 4-62 การเปลี่ยนแปลงของความเค้นเฉลี่ยที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 3 ช่วงอยู่ในแม่พิมพ์

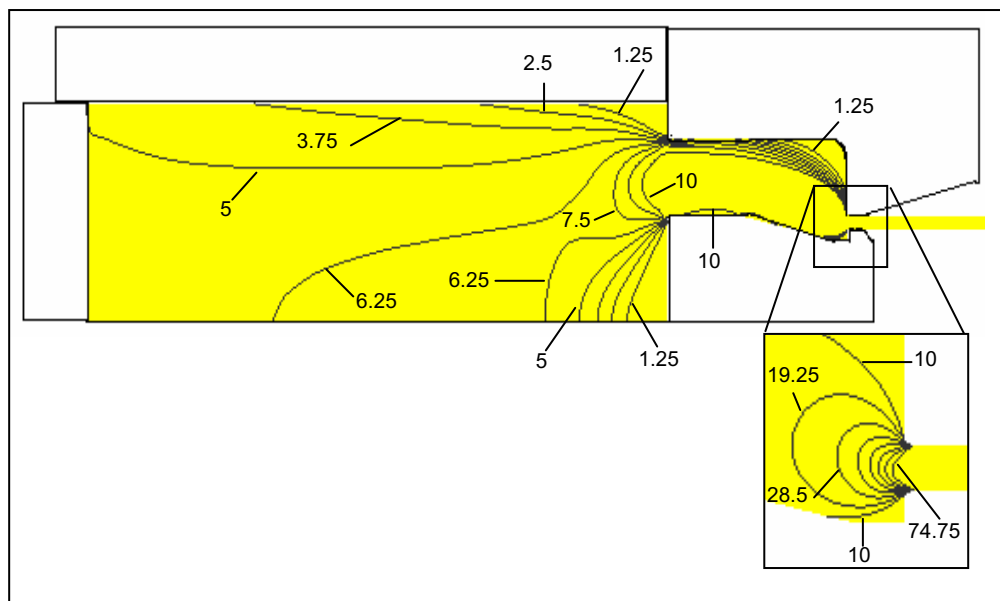


ภาพที่ 4-63 การเปลี่ยนแปลงของความเค้นเฉลี่ยที่แนวระดับต่างๆ ของการรื้อท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 4 ช่วงก่อนเข้าสู่แม่พิมพ์

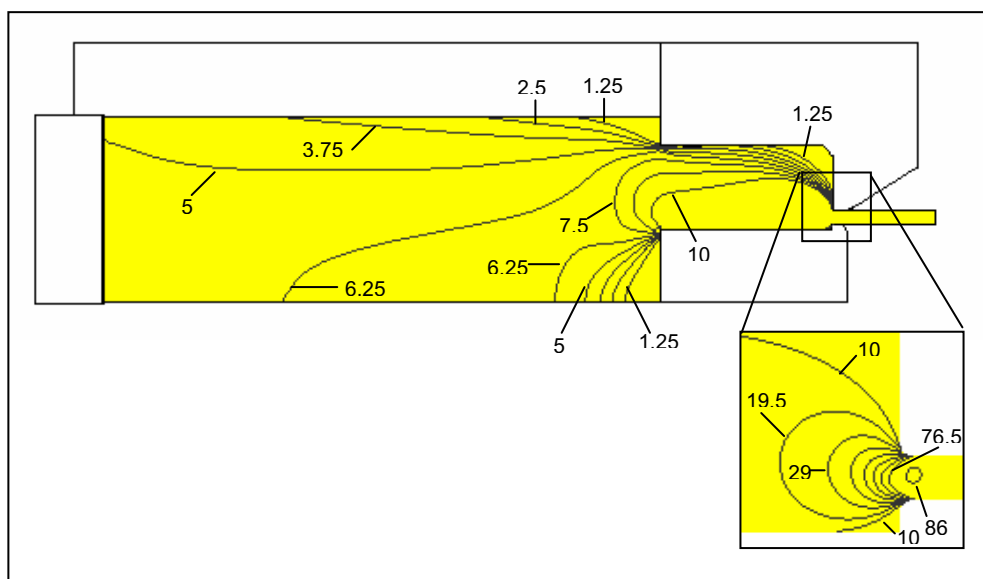


ภาพที่ 4-64 การเปลี่ยนแปลงของความเค้นเฉลี่ยที่แนวระดับต่างๆ ของการรื้อท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 4 ช่วงอยู่ในแม่พิมพ์

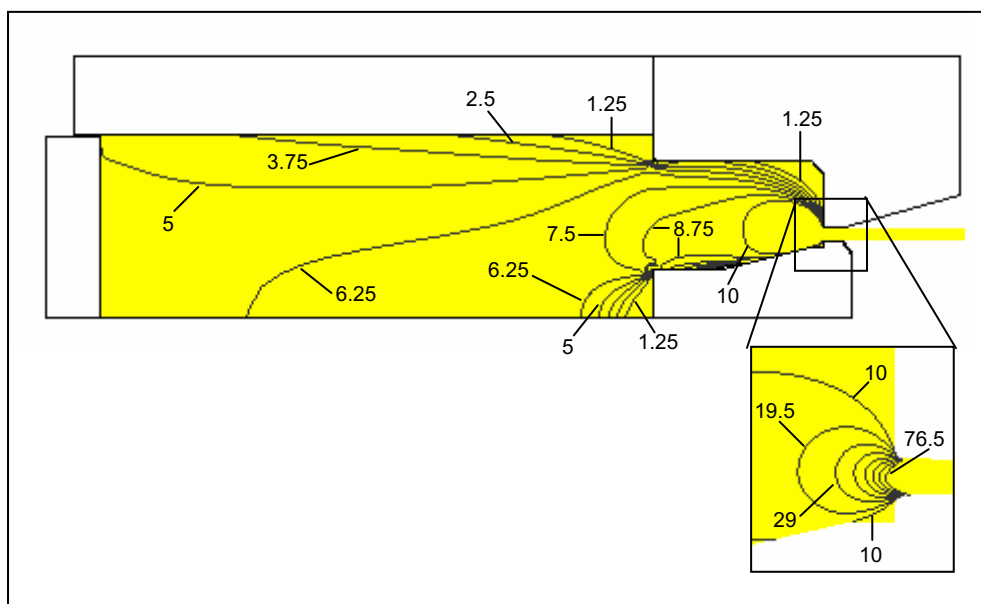
ภาพที่ 4-65 ถึง 4-68 แสดงการกระจายตัวของความเร็วไหล เห็นได้ว่าทุกแบบจำลองมีลักษณะคล้ายกันคือความเร็วไหลช้าที่มุมอับระหว่างคอนเทนเนอร์กับหน้าแม่พิมพ์ และบริเวณส่วนที่ไหลเข้าปะทะแกนแมนเดล อีกข้อสังเกตหนึ่งคือแมนเดลแบบที่ 3 และ 4 ซึ่งมีขนาดเล็กนั้นอนุภาคน้ำที่ไหลเข้าสู่พอร์ทจะมีความเร็วช้ากว่าในแบบที่ 1 และ 2 ส่วนที่บริเวณทางออก รูแม่พิมพ์ความเร็วมีลักษณะใกล้เคียงกัน



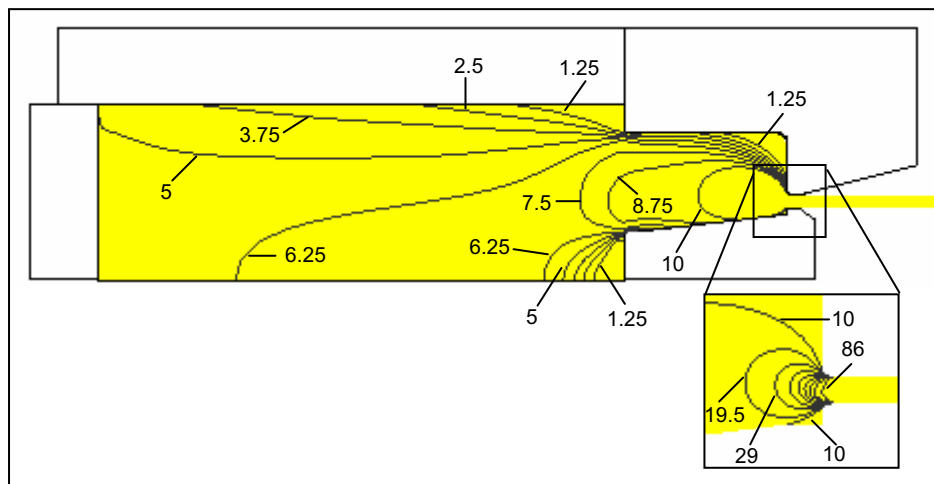
ภาพที่ 4-65 การกระจายความเร็วไหล (mm/s) ในแบบจำลองสมมาตรรอบแกนของการฉีด
ท่อกลมรูปทรงแมนเดลแบบที่ 1



ภาพที่ 4-66 การกระจายความเร็วไหล (mm/s) ในแบบจำลองสมมาตรรอบแกนของการรีด
ท่อกลมรูปทรงแมนเดิลแบบที่ 2

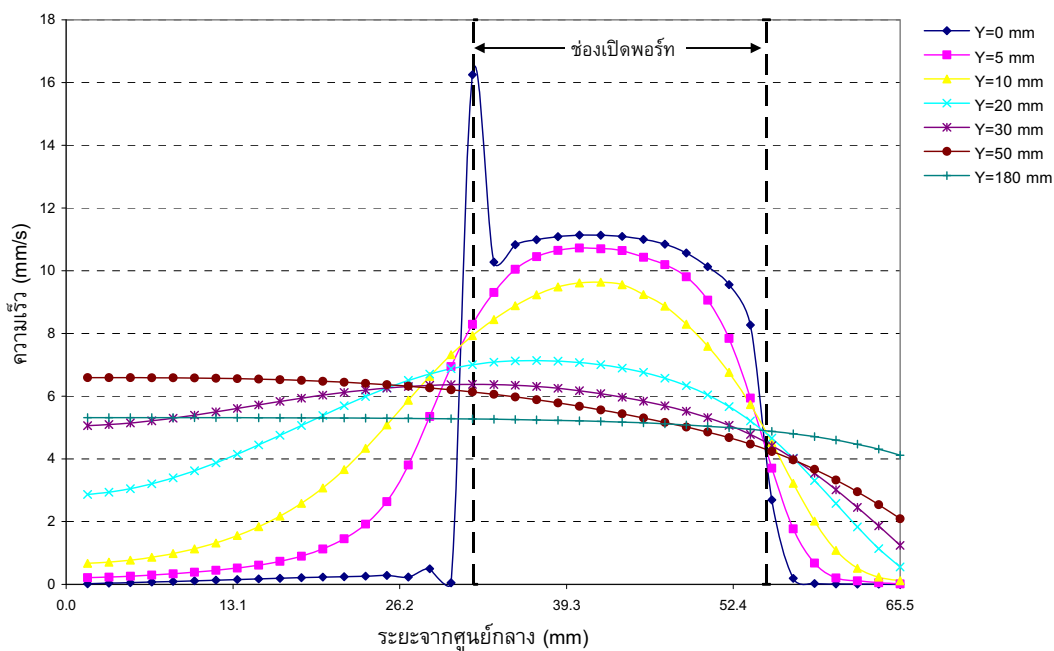


ภาพที่ 4-67 การกระจายความเร็วไหล (mm/s) ในแบบจำลองสมมาตรรอบแกนของการรีด
ท่อกลมรูปทรงแมนเดิลแบบที่ 3

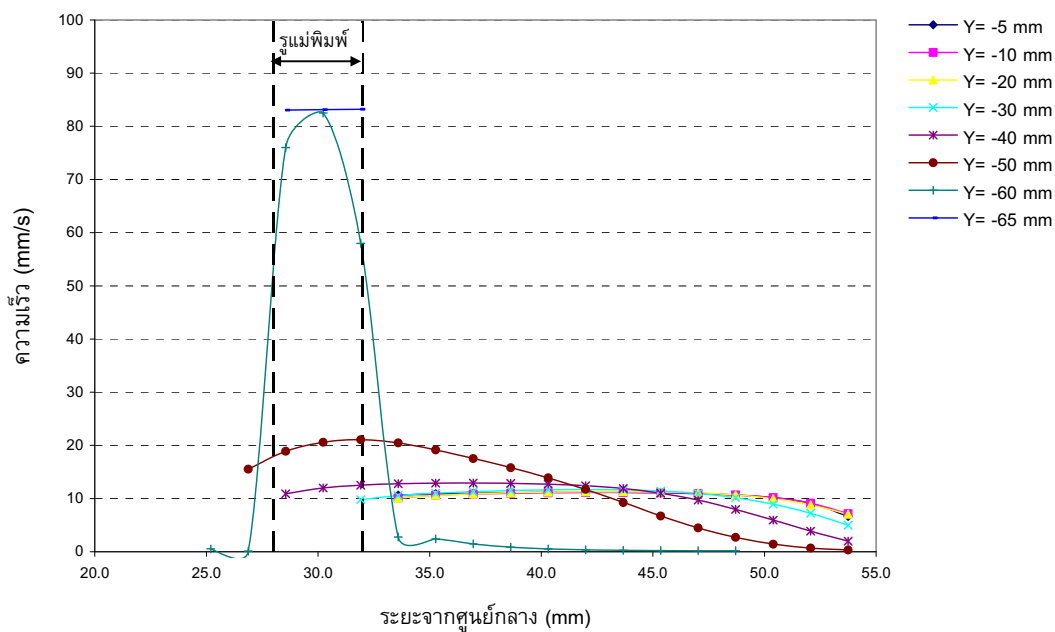


ภาพที่ 4-68 การกระจายความเร็วไหล (mm/s) ในแบบจำลองสมมาตรรอบแกนของการรีดท่อกลมรูปทรงแมนเดลแบบที่ 4

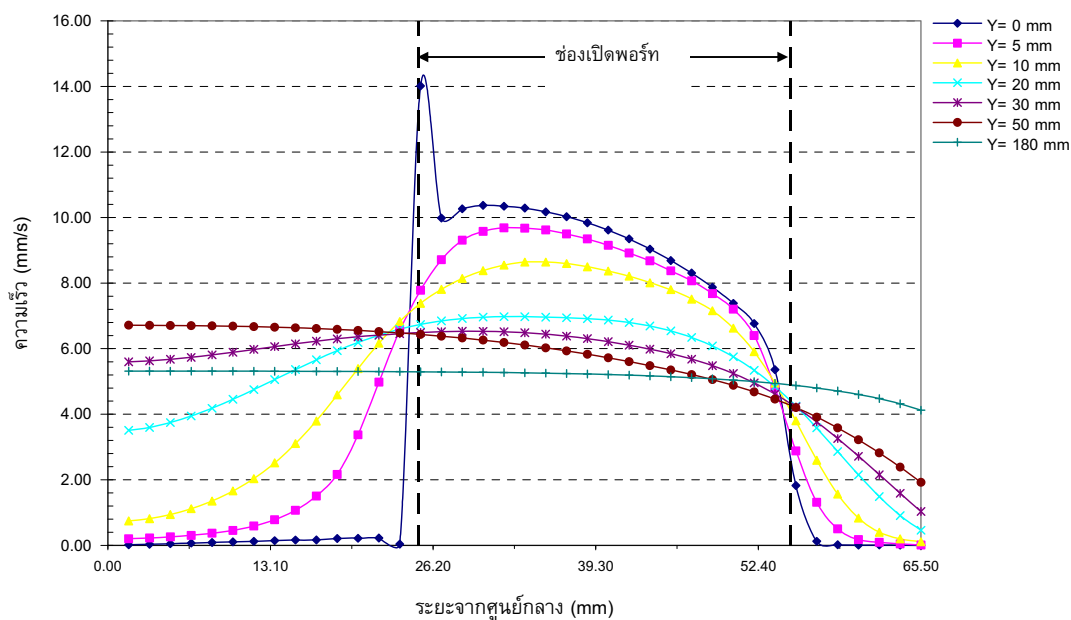
เมื่อพิจารณาภาพที่ 4-69 , 4-71, 4-73 และ 4-75 ซึ่งเป็นช่วงไหลเข้าพอร์ทนั้น เห็นได้ว่ามีความเร็วค่าหนึ่งสูงมากกว่าค่าอื่น ๆ อย่างผิดปกติ เนื่องจากอลูมิเนียมมีการไหลอย่างฉับพลันเป็นมุมฉาก ยกเว้นในภาพที่ 4-75 ซึ่งมีลักษณะเป็นมุมป้าน



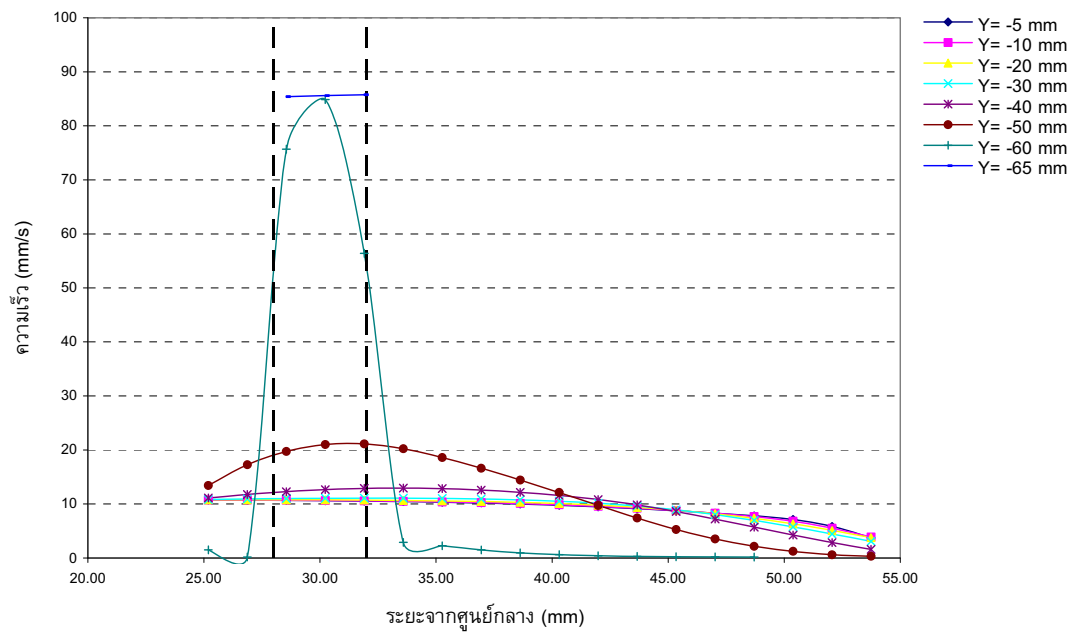
ภาพที่ 4-69 การเปลี่ยนแปลงของความเร็วไหลที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 1 ช่วงก่อนเข้าแม่พิมพ์



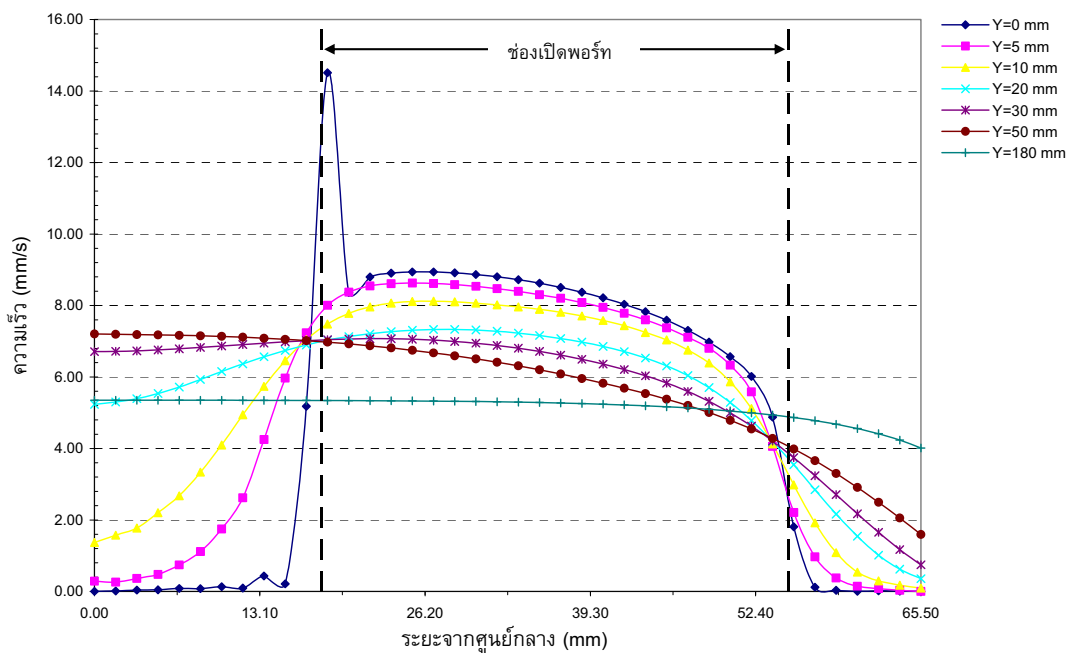
ภาพที่ 4-70 การเปลี่ยนแปลงของความเร็วไหลที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 1 ช่วงอยู่ในแม่พิมพ์



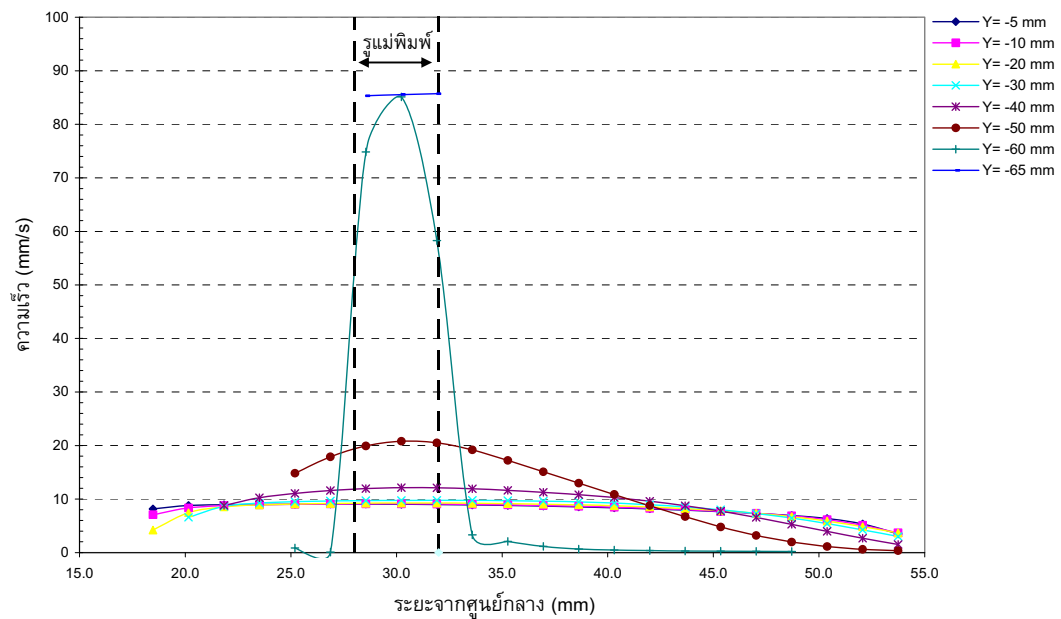
ภาพที่ 4-71 การเปลี่ยนแปลงของความเร็วไหลที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 2 ช่วงก่อนเข้าแม่พิมพ์



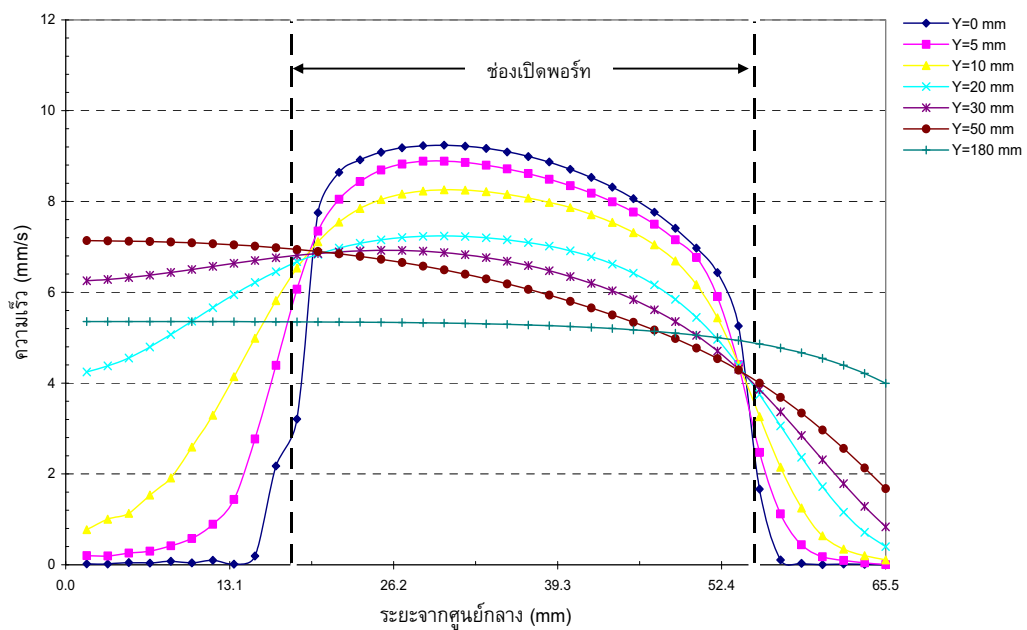
ภาพที่ 4-72 การเปลี่ยนแปลงของความเร็วไหลที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 2 ช่วงอยู่ในแม่พิมพ์



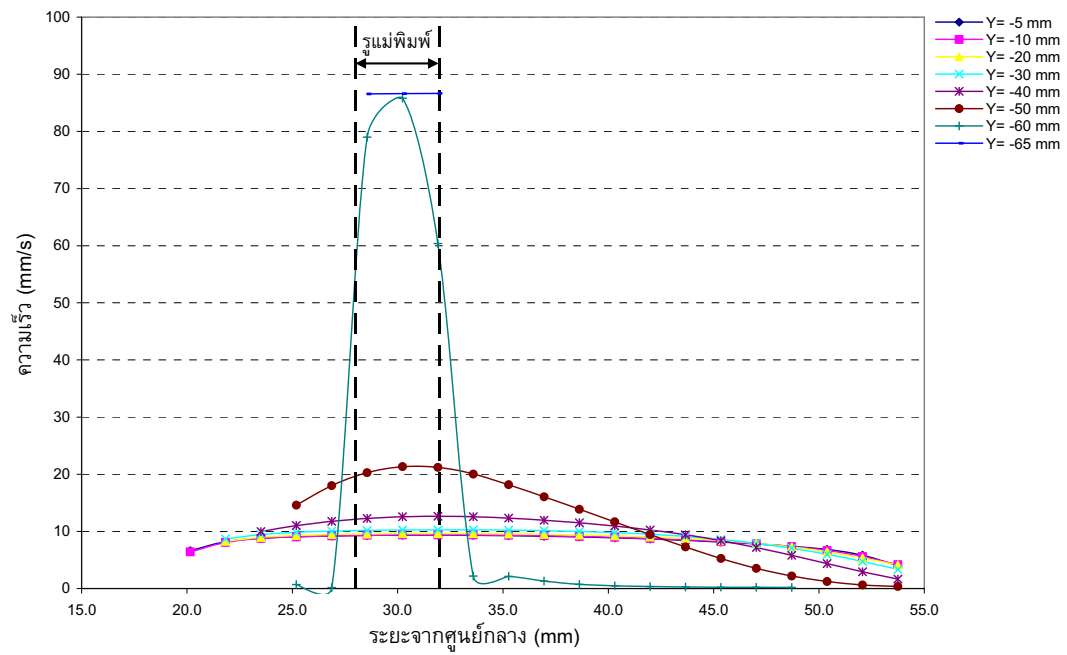
ภาพที่ 4-73 การเปลี่ยนแปลงของความเร็วไหลที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 3 ช่วงก่อนเข้าแม่พิมพ์



ภาพที่ 4-74 การเปลี่ยนแปลงของความเร็วไหลที่แนวระดับต่างๆ ของการฉีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 3 ช่วงอยู่ในแม่พิมพ์



ภาพที่ 4-75 การเปลี่ยนแปลงของความเร็วไหลที่แนวระดับต่างๆ ของการฉีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 4 ช่วงก่อนเข้าแม่พิมพ์



ภาพที่ 4-76 การเปลี่ยนแปลงของความเร็วไหลที่แนวระดับต่างๆ ของการรีดท่อกลมในแบบจำลองแมนเดลแบบที่ 4 ช่วงอยู่ในแม่พิมพ์

บทที่ 5

สรุปผลและข้อเสนอแนะ

5.1 อภิปรายผลการวิจัย

5.1.1 ผลการวิจัยในหัวข้อ 4.1 และ 4.2 พบว่าความดันรีดจากการวิเคราะห์ต่ำกว่าผลจากการรีดจริงในช่วงแรกของการอัดรีด โดยมีผลต่างสูงสุด 11.8% แต่หลังจากการอัดรีดเริ่มเข้าสู่สภาวะเกือบคงตัว พบว่าความดันรีดจากการวิเคราะห์มีค่าสูงกว่าผลการวัดจริง โดยมีผลต่างสูงสุด 13% ผลต่างในช่วงแรกน่าจะเกิดจากการอัดรีดจริงต้องใช้ความดันมากในช่วงเริ่มไหลตัวเมื่อเกิดส่วนของโลหะตาย

5.1.2 ผลการวิจัยในข้อ 4.3 แรงดันที่แม่พิมพ์เกือบคงที่ตลอดการรีด แต่เพิ่มขึ้นในช่วงท้ายการรีดเนื่องจากอลูมิเนียมสัมผัสลงจนการไหลเริ่มเกิดขึ้นในแนวรัศมีมากขึ้น สำหรับแรงดันที่แรมมีค่าใกล้เคียงกับแรงดันที่แม่พิมพ์รวมกับแรงเสียดทานที่คอนเทนเนอร์แรงดันที่แรมจึงเปลี่ยนแปลงตลอดการรีด โดยมีค่าค่อยๆ ลดลงตามแรงเสียดทานระหว่างอลูมิเนียมกับคอนเทนเนอร์ที่ลดลงเนื่องจากการสัมผัสของอลูมิเนียมและจะเพิ่มขึ้นอีกครั้งในช่วงท้ายการรีดเนื่องจากแรงดันที่แม่พิมพ์ที่เพิ่มขึ้น

5.1.3 ผลการวิจัยในข้อ 4.3 แรงเสียดทานมากขึ้นเมื่อเส้นผ่านศูนย์กลางรีดมีขนาดใหญ่ขึ้น สอดคล้องกับภาพที่ 4-10 ซึ่งแสดงการกระจายความเค้นซึ่งพบว่าการรีดหน้าตัดที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางใหญ่ขึ้นความเค้นบริเวณใกล้ผิวสัมผัสระหว่างอลูมิเนียมกับคอนเทนเนอร์มีค่ามากกว่ากรณีที่เส้นผ่านศูนย์กลางเล็กกว่า นอกจากนี้ยังพบว่าการลดลงของแรงเสียดทานที่คอนเทนเนอร์มีแนวโน้มเพิ่มขึ้นเมื่ออลูมิเนียมสัมผัสลง

5.1.4 ผลการวิจัยในหัวข้อ 4.4 การเปรียบเทียบผลการคำนวณความดันที่แม่พิมพ์ระหว่างวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับสมการที่ใช้วิธีขอบเขตบน ด้วยค่าอัตราความเครียดเฉลี่ยของ Feltham พบว่าผลจากไฟไนต์เอลิเมนต์มีค่าต่ำกว่าทุกกรณีที่จำลอง เนื่องจากการคำนวณด้วยวิธีขอบเขตบนใช้การประมาณค่างานที่ใช้ในการเปลี่ยนรูปซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับที่ใช้ในการเปลี่ยนรูปจริง และเมื่ออัตราส่วนการอัดสูงขึ้นความแตกต่างของความดันระหว่างคำนวณด้วยแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์กับสมการจากวิธีขอบเขตบนมีค่ามากขึ้นอย่างเห็นได้ชัดซึ่งอาจเกิดจากค่าอัตราความเครียดเฉลี่ยที่คำนวณจากสมการของ Feltham มีค่าสูงเกินไปเมื่ออัตราส่วนการอัดสูงขึ้น ในขณะที่ความแตกต่างระหว่างคำนวณด้วยแบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์กับสมการจากวิธีขอบเขตบนมีแนวโน้มมากขึ้นเพียงเล็กน้อยเมื่อความเร็วรีดสูงขึ้น

5.1.5 ผลการวิจัยในหัวข้อ 4.4 ความดันที่แม่พิมพ์แปรผันตามค่าลอกการพิมพ์ตามธรรมชาติของอัตราส่วนการอัดและความเร็วรีด

5.1.6 ผลการวิจัยในหัวข้อ 4.5 เมื่ออุณหภูมิเริ่มต้นของอลูมิเนียมสูงขึ้นการเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิหลังการรีดมีแนวโน้มลดลง ในขณะที่เมื่อความเร็วรีดสูงขึ้นการเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิหลังการรีดมีแนวโน้มมากขึ้น

5.1.7 ผลการวิจัยในหัวข้อ 4.6 ในแม่พิมพ์หน้าตัดความเครียดระนาบแบบเยื้องศูนย์อุณหภูมิของอลูมิเนียมขอบทางด้านที่ใกล้รูแม่พิมพ์มีอุณหภูมิสูงกว่าด้านไกลรูแม่พิมพ์ เนื่องจากการเปลี่ยนรูปมากกว่าอีกด้านหนึ่ง

5.1.8 ผลการวิจัยในหัวข้อ 4.7 ในการศึกษาการรีดท่อแบบสมมาตรรอบแกน พบว่าอุณหภูมิผิวท่อทางด้านในมีอุณหภูมิสูงกว่าผิวด้านนอกของแมนเดิลทั้ง 4 รูปทรง และพบว่าแมนเดิลที่มีขนาดเล็กหรือรูปทรงพอร์ทขนาดใหญ่ให้ความเร็วไหลของอลูมิเนียมที่ไหลเข้าสู่พอร์ทจะช้ากว่าแมนเดิลที่มีขนาดใหญ่หรือขนาดพอร์ทที่มีขนาดเล็กกว่า

5.2 สรุปผลการวิจัย

5.2.1 แบบจำลองไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นให้ผลสอดคล้องกับการทดลองจริง โดยมีความคลาดเคลื่อนสูงสุด 13 % ซึ่งอยู่ในระดับที่ยอมรับได้

5.2.2 การจำลองการรีดด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทำให้ทราบถึงอิทธิพลของตัวแปรต่างๆ ที่มีผลต่อกระบวนการอัดรีด โดยสามารถควบคุมตัวแปรต่างๆ ได้อย่างดี ไม่มีการรบกวนจากตัวแปรอื่น ๆ ไม่สูญเสียเวลาทำงานของเครื่องจักรและลดความสิ้นเปลืองวัสดุทดลอง และสามารถทำนายสภาวะที่เกิดขึ้นภายในกระบวนการซึ่งไม่สามารถเห็นได้จากการทดลองรีดจริง

5.3 ข้อจำกัดในการวิจัย

5.3.1 การจำลองการรีดแม่พิมพ์ที่มีหน้าตัดตรง (Flat Face Die) การไหลจะเปลี่ยนแปลงอย่างมาก ทำให้เอลิเมนต์เสียรูปมากทำให้ต้องมีการแบ่งเอลิเมนต์ใหม่ (Remeshing) ซึ่งระหว่างกระบวนการแบ่งเอลิเมนต์ใหม่นั้นจะเกิดความคลาดเคลื่อน (Interpolation Error) ซึ่งทำให้การจำลองมีความแม่นยำลดลง

5.3.2 การทดสอบการรีดด้วยเครื่องจักรในโรงงานยังมีข้อจำกัดในการวัดและควบคุมตัวแปรรีด เช่น การวัดและควบคุมอุณหภูมิของอลูมิเนียม

5.4 ข้อเสนอแนะ

5.4.1 ควรทดลองรีดจริงเพื่อเปรียบเทียบผลกับแบบจำลองเพิ่มเติม และหากต้องการผลการวิเคราะห์ที่แม่นยำขึ้นควรหาค่าคงที่สมบัติของอลูมิเนียมจากอลูมิเนียมที่ทดลองจริง

5.4.2 หากต้องการผลการวิเคราะห์ที่ถูกต้องมากขึ้นควรจำลองการรีดแบบ 3 มิติ

เอกสารอ้างอิง

1. Kaiser Aluminium & Chemical Sales Inc. Aluminium Extrusion Process. 2th ed. 1977.
2. Laue, Kurt. and Stenger, Helmut. Extrusion : Processes, Machinery, Tooling. Translated by Castle, A.F. and Lang, Gernot. Metals Park, Ohio : American Society for Metals, 1981.
3. Sheppard, T. Extrusion of Aluminium Alloys. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999.
4. Rowe, G.W. Principles of Industrial Metalworking Processes. London : Edward Arnold, 1977.
5. Hosford, William F. and Robert M. Caddell. Metal Forming : Mechanics and Metallurgy. 2th ed. Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1983.
6. Wagoner, R. H. and Chenot J. -L. Metal Forming Analysis. USA : Cambridge University Press, 2001.
7. Lof, Joeri. "Developments in Finite Element Simulations of Aluminium Extrusion." Ph.D. Thesis, University of Twente, 2000.
8. Kobayashi, Shiro., Oh, Soo-Ik. and Altan, Taylan. Metal Forming and the Finite Element Method. New York : Oxford University Press, 1989.
9. Abtahi, S. "Interface Mechanisms on the Bearing Surface in Extrusion." Proceedings of the Sixth International Aluminum Extrusion Seminar : Vol.2. Chicago, Illinois, May 1996 : 125-131.
10. ปราโมทย์ เดชะอำไพ. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.
11. เดช พุทธเจริญทอง. การวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์. กรุงเทพฯ : พิมพ์ดี, 2541.
12. Kang, Y.S. and Yang, D.Y. "Rigid-viscoplastic finite element analysis of hot square die extrusion of complicated profiles with flow guides and lands by arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation." Proceedings of the NUMIFORM Conference. Balkema Rotterdam, 1995 : 841-846.

13. Kiuchi, Manabu., Yanagimoto, Jun. and Mendoza, Victor. "Flow of solid metal during extrusion: Three-dimensional simulations by finite element method" Proceedings of the NUMIFORM Conference. Balkema Rotterdam, 1995 : 847-852.
14. Dashwood, R.J., McShane, H.B. and Jackson, A. "Computer Prediction of Extrusion Limit Diagrams" Proceedings of the Sixth International Aluminum Extrusion Seminar : Vol.1. Chicago, Illinois, May 1996 : 331-339.
15. Saha, Pradip K. "Influence of Plastic Strain and Strain Rate on Temperature Rise in Aluminum Extrusion" Proceedings of the Sixth International Aluminum Extrusion Seminar : Vol.1. Chicago, Illinois, May 1996 : 355-359.
16. Lindviksmoen, Paul. and Rystad, Sigurd. "Simulation of Tube Extrusion in a Two Dimensional, Axisymmetric Model" Proceedings of the Sixth International Aluminum Extrusion Seminar : Vol.1. Chicago, Illinois, May 1996 : 369-373.
17. Mooi, H.G., et al. "Simulation of Aluminium Extrusion based on a Finite Element Method (FEM)." Proceedings of the Sixth International Aluminum Extrusion Seminar : Vol.2. Chicago, Illinois, May 1996 : 67-73.
18. Skauvik, I., et al. "Numerical Simulation in Extrusion Die Design" Proceedings of the Sixth International Aluminum Extrusion Seminar : Vol.2. Chicago, Illinois, May 1996 : 79-82.
19. Hanssen, Lars., Lindviksmoen, Paul. and Rystad, Sigurd. "Effect of Blend and Extrusion Parameters on Material Flow" Proceedings of the Sixth International Aluminum Extrusion Seminar : Vol.2. Chicago, Illinois, May 1996 : 83-88.
20. Welo, T., Abtahi, S. and Skauvik, I. "An Experimental and Numerical Investigation of the Thermo-Mechanical Conditions on the Bearing Surface of Extrusion Dies" Proceedings of the Sixth International Aluminum Extrusion Seminar : Vol.2. Chicago, Illinois, May 1996 : 101-106.
21. Nanhai, Hao. and Kezhi, Li. "Numerical design of the die land for shape extrusion" Journal of Material Processing Technology. 101, (2000) : 81-84.
22. Scientific Forming Technologies Corporation (SFTC). DEFORM Help Version 1.1. 1998.
23. Joachim Gasioreczyk and Jan Richert, Lars., "Application of FEM Modeling to Simulate Metal Flow Through Porthole Dies" Proceedings of the Seventh International Aluminum Extrusion Seminar : Vol.2. Chicago, Illinois, May 2000 : 195-2002

ภาคผนวก ก

ทฤษฎีสภาพพลาสติก

สมการสมดุลของระบบ

สมการสมดุลของแรงในระบบพิกัดฉาก x, y และ z เมื่อไม่พิจารณาแรงเนื่องจากคือน้ำหนักวัตถุ คือ

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{ก-1}$$

หรือเขียนในรูปของเทนเซอร์

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad \sigma_{ij,i} = 0\tag{ก-2}$$

สมการสมดุลที่พื้นผิว

ความเค้นตามบริเวณขอบพื้นผิว S สมดุลกับแรงกระทำต่อหนึ่งหน่วยของพื้นที่ผิว F_i ดังสมการ

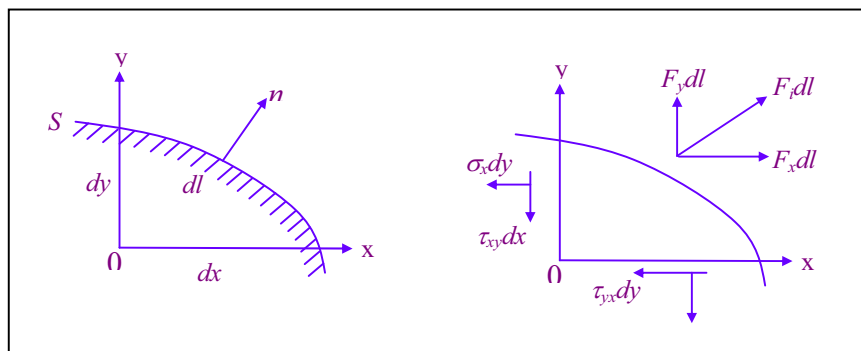
$$F_i = \sigma_{ij} n_j\tag{ก-3}$$

เมื่อ n_j คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับผิว โดยในกรณีของปัญหาสองมิติเขียนได้เป็น

$$F_x = \sigma_x \left(\frac{dy}{dl} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{dx}{dl} \right)\tag{ก-4}$$

$$F_y = \tau_{xy} \left(\frac{dy}{dl} \right) + \sigma_y \left(\frac{dx}{dl} \right)$$

โดย dy/dl และ dx/dl คือ ส่วนประกอบของเวกเตอร์ n_j ดังภาพที่ ก-1



ภาพที่ ก-1 แสดงสภาพสมดุลที่พื้นผิวใน 2 มิติ

หลักการของอัตรางานเสมือน (Virtual Work-Rate Principle)

หลักการของอัตรางานเสมือนคือ “สนามความเค้นที่อยู่ในสมดุลภายในวัตถุและสมดุลกับแรงกระทำที่ผิวนั้นอัตราของงานจากการเปลี่ยนรูปของวัตถุจะเท่ากับอัตราของงานจากแรงกระทำที่ผิวสำหรับสนามความเร็วเสมือน”

ให้ σ_{ij} เป็นสนามความเค้นที่อยู่ในสมดุลและ u_j เป็นสนามความเร็วเสมือน เมื่อ $\dot{\varepsilon}_{ij}$ เป็นอัตราความเครียดโดย $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$$

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) - u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$$

จากสมการที่ (ก-2) ซึ่ง $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0$ ดังนั้น

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) \quad (\text{ก-5})$$

จากทฤษฎีของกรีน-ไดเวอร์เจนซ์ (Green-Divergence Theorem) เมื่อ V เป็นปริมาตรของวัตถุและ S เป็นพื้นผิวจะได้

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_{ij}) dV = \int_S u_j \sigma_{ij} n_i dS \quad (\text{ก-6})$$

และจากสมการที่ (ก-3) สมการ (ก-5) และสมการ (ก-6) จะได้

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dV = \int_S F_j u_j dS \quad (\text{ก-7})$$

สมการที่ (ก-7) คือสมการของอัตรางานเสมือน เนื่องจาก σ_{ij} สมมาตร ดังนั้นสามารถเขียนสมการอัตรางานเสมือน ได้ในอีกรูปหนึ่งคือ

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_S F_j u_j dS \quad (\text{ก-8})$$

เกณฑ์การคราก (Yield Criteria)

การครากคือการที่โลหะเปลี่ยนสภาพจากช่วงยืดหยุ่นเข้าสู่ช่วงเปลี่ยนรูปถาวรหรือที่เรียกว่าสภาพพลาสติก ในสภาพการขึ้นรูปโลหะโดยทั่วไปนั้นความเค้นที่เกิดขึ้นกับวัสดุจะมีหลายลักษณะร่วมกัน เช่น อาจประกอบด้วยความเค้นดึง ความเค้นอัด ความเฉือน เป็นต้น ดังนั้นจึงมีการศึกษาถึงเกณฑ์ที่จะใช้กำหนดว่าการครากจะเกิดขึ้นเมื่อใด สามารถเขียนเกณฑ์การครากในรูปแบบทั่วไปได้ดังสมการ

$$f(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) = \text{constant} \quad (\text{ก-9})$$

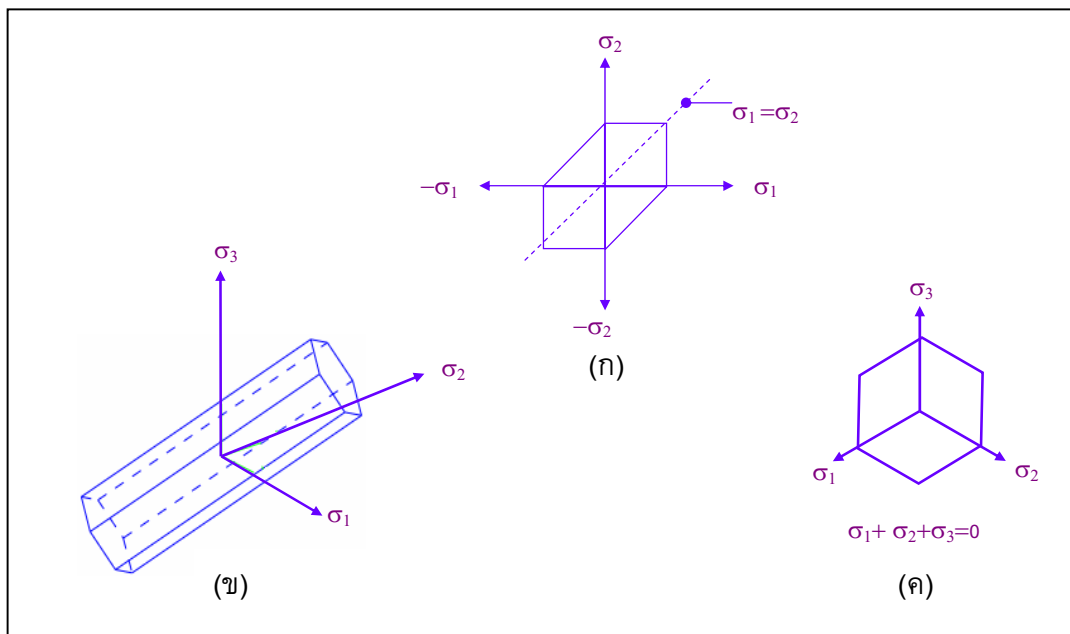
เกณฑ์การครากของเทรสกา (Tresca Yield Criteria) หรือ เกณฑ์ความเค้นเฉือนสูงสุด (Maximum Shear Stress Criteria) กล่าวว่า “การครากจะเกิดขึ้นเมื่อความเค้นเฉือนในชิ้นงานมีค่าเท่ากับความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในชิ้นงานทดสอบแรงดึงของวัสดุชนิดเดียวกัน”

$$2k = \sigma_1 - \sigma_3 = Y \quad (\text{ก-10})$$

เมื่อ k คือ ความเค้นเฉือนครากของวัสดุจากการทดสอบแรงดึง

σ_1 และ σ_3 คือ ความเค้นหลัก โดยที่ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Y คือ ความเค้นครากของวัสดุจากการทดสอบแรงดึง



ภาพที่ ก-2 แสดงเกณฑ์การครากของเทรסקา (ก) โลหะการครากในสองมิติ (ข) ผิวครากในสามมิติ (ค) โลหะการครากบนระนาบ π

เกณฑ์การครากของฟอนมิเชส (Von Mises Yield Criteria) ใช้ทฤษฎีพลังงานเปลี่ยนรูป (Distortion Energy Theory) ซึ่งกล่าวว่า “วัสดุจะเริ่มครากถ้าพลังงานเปลี่ยนรูปในวัสดุมีค่าเท่ากับพลังงานเปลี่ยนรูปจากการทดสอบแรงดึงของวัสดุเดียวกัน”

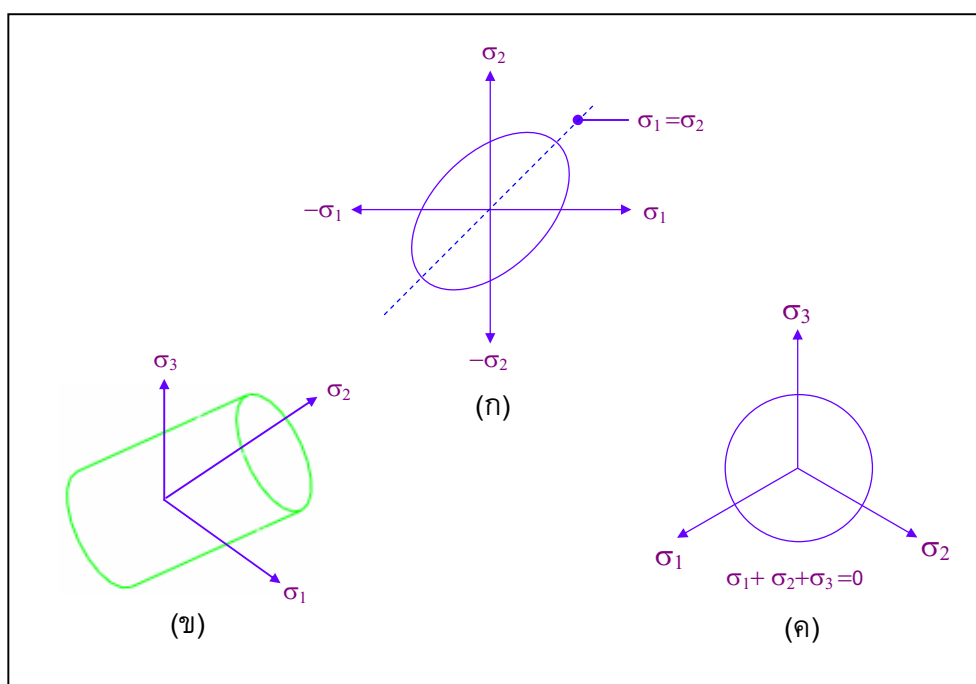
$$Y^2 = \frac{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}{2} \quad (\text{ก-11})$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

ในกรณีปัญหาสองมิติที่ความเค้นเกิดในระนาบ (Plane Stress) แทน $\sigma_3 = 0$ ในสมการที่ (ก-11) จะได้

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = Y^2 \quad (\text{ก-12})$$

สมการที่ (ก-12) เป็นสมการวงรีแสดงดังภาพที่ ก-3(ก) และผิวครากในสามมิติในสมการที่ (ก-11) แสดงในภาพที่ ก-3(ข)



ภาพที่ ก-3 แสดงเกณฑ์การครากของฟอนมิเซสโดย (ก) แสดงโลคัสการในสองมิติ (ข) แสดงผิวครากในสามมิติ (ค) แสดงโลคัสการครากบนระนาบ π

หากเปรียบเทียบเกณฑ์การครากของทฤษฎีทั้งสองแล้วจะพบว่าการคำนวณโดยใช้ทฤษฎีของเทรסקาต่ำกว่าของฟอนมิเซส แต่ทฤษฎีของฟอนมิเซสให้ผลสอดคล้องกับการทดสอบของโลหะเหนียวมากกว่าของเทรסקา ดังนั้นในการวิเคราะห์การขึ้นรูปโลหะโดยทั่วไปจึงนิยมใช้เกณฑ์การครากของฟอนมิเซสมากกว่า

ความเค้นประสิทธิผลและความเครียดประสิทธิผล

ความเค้นประสิทธิผล (Effective Stress, $\bar{\sigma}$)

ความเค้นประสิทธิผลหรือความเค้นสมมูล (Equivalent Stress) กำหนดจากเกณฑ์การครากโดยหากค่าความเค้นประสิทธิผลเท่ากับค่าวิกฤติจะเกิดการคราก

โดยใช้เกณฑ์การครากของฟอนมิเซสจะได้

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ก-13})$$

ความเครียดประสิทธิผล (Effective Strain, $\bar{\varepsilon}$)

ความเครียดประสิทธิผลหรือความเครียดสมมูล (Equivalent Strain, $\bar{\varepsilon}$) กำหนดจากงานส่วนเพิ่มต่อหน่วยปริมาตร

$$dw = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3 \quad (\text{ก-14})$$

จากเกณฑ์การครากของฟอนมิเซส สามารถหาความเครียดประสิทธิผลได้จากสมการ

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon} &= \frac{\sqrt{2}}{3} [(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{2}{3} (d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \bar{\varepsilon} &= \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{ก-15})$$

ศักยภาพพลาสติกและกฎการไหล (Plastic Potential and Flow Rule)

การเปลี่ยนรูปในช่วงพลาสติกนั้นความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดจะไม่เป็นไปตามกฎของฮุก แต่จะใช้กฎการไหล (Flow Rule) ดังนี้

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \dot{f} \quad (\text{ก-16})$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} df$$

เมื่อ g และ h เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ของตัวแปรของความเค้นเบี่ยงเบน และ f เป็นฟังก์ชันการคราก และฟังก์ชัน $g = g(\sigma_{ij})$ เรียกว่าศักยภาพพลาสติก (Plastic Potential)

ถ้าให้ $g = f$ จะได้กฎการไหลที่มีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันการคราก (Flow Rule Associated with Yield Function) จากสมการที่ (ก-16) จะได้

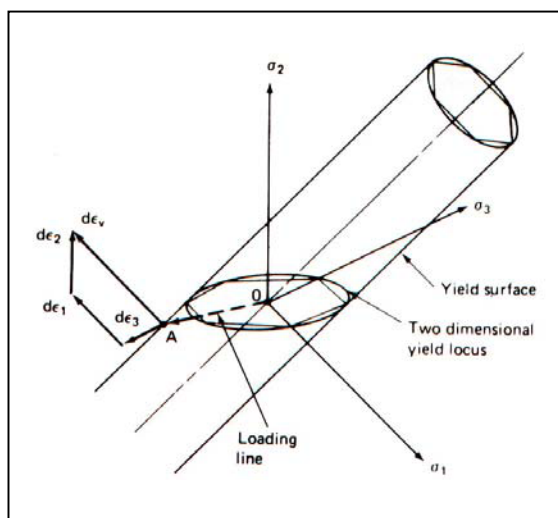
$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \quad (\text{ก-17})$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda$$

เมื่อ $\dot{\lambda}$ และ $d\lambda$ เป็นค่าคงที่มีค่าบวกโดย $\dot{\lambda} = h\dot{f}$ และ $d\lambda = hdf$

หลักการของสภาพตั้งฉาก (Principle of Normality)

จากกฎการไหลสามารถตีความหมายได้อีกอย่างคือผลรวมของเวกเตอร์ความเครียดพลาสติกส่วนเพิ่มจะตั้งฉากกับผิวคราก



ภาพที่ ก-4 แสดงหลักการสภาพตั้งฉากใน 3 มิติ

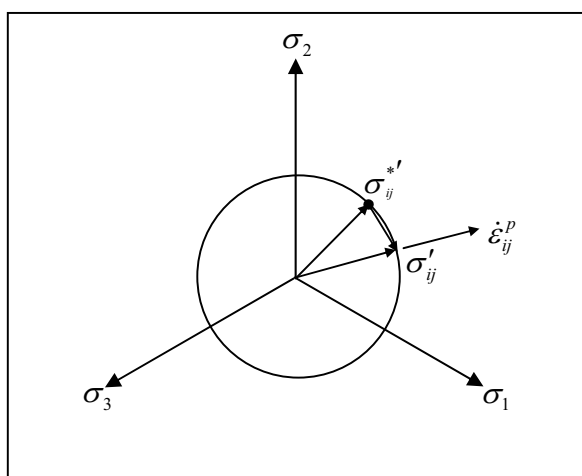
ภาพที่ ก-4 แสดงความเครียดส่วนเพิ่มในรูปของเวกเตอร์โดย $d\varepsilon_v$ ซึ่งเป็นผลรวมของเวกเตอร์ $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$ และ $d\varepsilon_3$ ตั้งฉากกับผิวคราก และสำหรับของแข็งไอโซโทรปิกนั้นทิศของความเค้นหลักและความเครียดจะซ้อนทับกัน

หลักการของงานพลาสติกสูงสุด (Principle of Maximum Plastic Work)

เมื่อใช้หลักการสภาพตั้งฉากและความโค้งงอของโลคัส (Locus) การครากจะได้หลักการของงานพลาสติกสูงสุด

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{ก-18})$$

เมื่อ σ_{ij}^* เป็นสภาวะความเค้นจุดใด ๆ ที่มีตำแหน่งอยู่ภายในหรืออยู่บนผิวคราก ดังภาพที่ ก-5



ภาพที่ ก-5 แสดงสภาพเวกเตอร์ความเค้นและอัตราความเครียด

จากภาพที่ ก-5 จะเห็นได้ว่า $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ นั้นมีทิศออกด้านนอกขนานกับแนวตั้งฉากกับผิวครากที่จุด σ'_{ij} และค่าของ $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ จะมีค่าเท่ากับผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับโลคัสการครากที่จุด σ'_{ij} กับเวกเตอร์จาก σ_{ij}^* ไป σ'_{ij} เนื่องจากโลคัสการครากเป็นโค้งงอทำให้ผลคูณของเวกเตอร์ทั้งสองเป็นบวกเสมอ และจะเห็นได้ว่าผลคูณจะเท่ากับศูนย์ก็ต่อเมื่อ $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^*$

สมการของเลวีมิเชสและแพรนเดิลรูส

สมการของเลวีมิเชส (Levy-Mises Equation) เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดเฉพาะในช่วงพลาสติก เมื่อใช้เกณฑ์การครากของฟอนมิเชสโดยเขียนในรูปความเค้นเบี่ยงเบนจะได้ฟังก์ชันการคราก

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \quad (\text{ก-19})$$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ij}$$

จากกฎการไหลในสมการที่ (ก-17) จะได้

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \sigma'_{ij} \dot{\lambda} \quad (\text{ก-20})$$

สมการของแพรนเดิลรูส (Prandtl-Reuss Equation) พิจารณาความเครียดทั้งในช่วงยืดหยุ่นและช่วงพลาสติก ดังสมการ

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (\text{ก-21})$$

เมื่อ $\dot{\epsilon}_{ij}$ คือ อัตราความเครียดรวม

$\dot{\epsilon}_{ij}^e$ คือ อัตราความเครียดยืดหยุ่น

$\dot{\epsilon}_{ij}^p$ คือ อัตราความเครียดพลาสติก

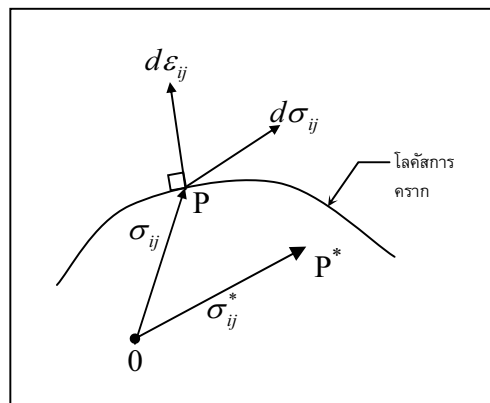
จากสมการของเลวีมิเชสและของแพรนเดิลรูสสรุปได้ว่าสมการของเลวีมิเชสใช้เมื่อพิจารณาวัตถุเป็นแบบแข็งเกร็ง-พลาสติก (Rigid Plastic) ส่วนสมการของแพรนเดิลรูสนั้นใช้เมื่อพิจารณาวัตถุทั้งในช่วงยืดหยุ่นและช่วงพลาสติก (Elastic Plastic)

หลักการของค่าสุดขีด (Extremum Principles)

วัสดุแบบแข็งเกร็งพลาสติกซึ่งเปลี่ยนรูปภายใต้แรงกระทำ F_i ที่ผิว S_F และสภาวะความเร็วที่ผิวที่ผิว S_u ผลเฉลยของปัญหานี้จะต้องพิจารณาถึงสภาวะสมดุลของสนามความเค้น สอดคล้องกับสนามความเร็วและเงื่อนไขขอบ โดยที่สนามความเค้นจะต้องสอดคล้องกับเกณฑ์การคราก

หลักการแรกของค่าสุดขีด (The First Extremum Principle)

ให้ σ_{ij} และ u_i เป็นคำตอบที่สมบูรณ์ของการปัญหาเปลี่ยนรูปพลาสติกของวัตถุแข็งเกร็งพลาสติกภายใต้เงื่อนไขขอบที่กำหนด ให้ σ_{ij}^* เป็นสนามความเค้นที่สมดุลสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบของความเค้นบนผิว S_F และอยู่ภายในหรือบนโลคัสการคราก (เรียกสนามความเค้น σ_{ij}^* นี้ว่า Statically Admissible) ดังภาพที่ ก-6



ภาพที่ ก-6 แสดงสภาวะความเค้น σ_{ij}^* อยู่ภายในหรือบนโลคัสการคราก

ใช้หลักการของอัตรางานเสมือนดังสมการที่ (ก-8) ที่จุด P จะได้

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_S F_i u_i dS \quad (\text{ก-22})$$

และที่จุด P^* จะได้

$$\int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_S F_i^* u_i dS \quad (\text{ก-23})$$

นำสมการที่ (ก-23) ลบออกจากสมการ (ก-22) จะได้

$$\int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_S (F_i - F_i^*) u_i dS \quad (\text{ก-24})$$

จากหลักการของงานพลาสติกสูงสุดสมการที่ (ก-18) จะได้

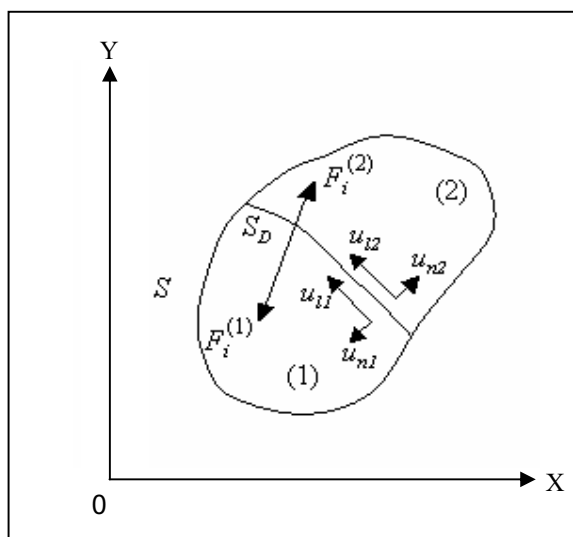
$$\int_S (F_i - F_i^*) u_i dS \geq 0 \quad (\text{ก-25})$$

เนื่องจาก $F_i = F_i^*$ บนพื้นผิว S_F และ $S = S_F + S_u$

$$\int_{S_u} F_i u_i dS \geq \int_{S_u} F_i^* u_i dS \quad (\text{ก-26})$$

สมการที่ (ก-27) คือหลักการแรกของค่าขีดสุดซึ่งกล่าวได้ว่า “อัตราของงานเนื่องจากแรงกระทำที่ผิวที่เกิดขึ้นจริงสามารถหาได้จากสนามความเค้นที่อยู่ในสภาวะ Statically Admissible โดยอัตรางานดังกล่าวจะเป็นค่าขอบเขตต่ำ (Lower Bound)”

ในการไหลของของแข็งแบบแข็งเกร็งพลาสติกอาจเกิดความเร็วไม่ต่อเนื่องขึ้นได้ ดังภาพที่ ก-7



ภาพที่ ก-7 แสดงผิวบริเวณเกิดความเร็วที่ไม่ต่อเนื่อง

สนามความเร็ว u_i ประกอบด้วยผิว S_D เป็นผิวที่มีความเร็วไม่ต่อเนื่องเกิดขึ้น โดยใช้หลักการของอัตรางานเสมือนที่ส่วนที่(1) และส่วนที่(2) จากนั้นใช้เงื่อนไขของสมดุลของแรงกระทำที่ผิว $F_i^{(1)}$ และ $F_i^{(2)}$ ที่ผิวไม่ต่อเนื่อง S_D จะได้

$$\int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{S_D} (k - \tau^*) |\Delta u| dS = \int_S (F_i - F_i^*) u_i dS \quad (ก-27)$$

เมื่อ τ^* เป็นความเค้นเฉือนที่เป็นส่วนประกอบของ σ_{ij}^* และ k เป็นความเค้นเฉือนครากที่ผิว S_D ส่วน $|\Delta u|$ เป็นขนาดของความเร็วในแนวสัมผัสที่ไม่ต่อเนื่องที่ผิว S_D เห็นได้ว่าเทอมที่สองของสมการ (ก-27) เป็นบวกเสมอ เนื่องจาก k มากกว่าหรือเท่ากับ τ^* เสมอ ดังนั้นสมการที่ (ก-25) และสมการ (ก-26) ยังคงใช้ได้

หลักการที่สองของค่าสุดขีด (The Second Extremum Principle)

ให้ u_i^* เป็นสนามความเร็วที่สอดคล้องกับการยึดตัวไม่ได้และเงื่อนไขความเร็วที่ขอบที่ผิว S_u เราเรียกสนามความเร็วนี้ว่า “Kinematically Admissible” จากหลักการของอัตรางานเสมือนจะได้ว่า

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV + \int_{S_D^*} \tau |\Delta u^*| dS = \int_S F_i u_i^* dS \quad (ก-28)$$

เมื่อ τ เป็นความเค้นเฉือนที่เป็นส่วนประกอบของความเค้น σ_{ij} บริเวณผิวไม่ต่อเนื่อง S_D^* ซึ่งมีความเร็วในแนวสัมผัสที่ไม่ต่อเนื่อง $|\Delta u^*|$ ในสนามความเร็ว u_i^* ถ้า u_i^* เป็นผลเฉลยจริง ดังนั้น $\tau = k$ ทำให้ได้

$$k |\Delta u^*| \geq \tau |\Delta u^*| \quad (ก-29)$$

และจะได้ว่า

$$\sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* \geq \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* \quad (ก-30)$$

จากหลักของงานพลาสติกสูงสุด เมื่อ σ_{ij}^* สอดคล้องกับเกณฑ์การครากและ $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ ดังนั้น

$$\int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dV + \int_{S_D^*} k |\Delta u^*| dS \geq \int_S F_i u_i^* dS \quad (ก-31)$$

เนื่องจาก $S = S_F + S_u$ และบนผิว S_u นั้น $u_i^* = u_i$ ดังนั้น

$$\int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dV + \int_{S_D^*} k |\Delta u^*| dS - \int_{S_F} F_i u_i^* dS \geq \int_S F_i u_i dS \quad (\text{ก-32})$$

สมการที่ (ก-32) คือหลักที่สองของค่าสุดขีดและแสดงให้เห็นว่า “ขอบเขตบน (Upper Bound)” ของอัตราของงานที่เกิดขึ้นจริงบนผิว S_u หาได้จากสนามความเร็ว Kinematically Admissible

วิสโคพลาสติคซิตี (Viscoplasticity)

ในทฤษฎีพลาสติคิตีนั้นจะไม่คำนึงถึงผลของเวลาต่อพฤติกรรมของวัสดุ ซึ่งไม่เพียงพอในการวิเคราะห์วัสดุที่มีเวลามีผลต่อพฤติกรรมของวัสดุนั้น โดยในวัสดุที่เวลามีผลต่อพฤติกรรมนั้นอัตราความเครียดจะมีผลต่อความเค้น วิสโคพลาสติคซิตีพิจารณาถึงผลของเวลาต่อพฤติกรรมวัสดุ คือพิจารณาผลของอัตราความเครียดต่อพฤติกรรมของวัสดุ ทฤษฎีวิสโคพลาสติคต่อไปนี้เสนอโดยเพอซีนา (Perzyna) ซึ่งพิจารณาวัสดุแบบแข็งเกร็ง-วิสโคพลาสติค เพอซีนาเสนอฟังก์ชัน $F(\sigma_{ij})$

$$F(\sigma_{ij}) = \frac{\sqrt{(1/2)} \{\sigma_{ij}' \sigma_{ij}'\}^{1/2}}{k} - 1 \quad (\text{ก-33})$$

เมื่อ k คือความเค้นเฉือนคราก พิจารณา $F(\sigma_{ij})$ เป็นฟังก์ชันเช่นเดียวกับศักย์ภาพพลาสติค (Plastic Potential) จะได้

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \gamma'' \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{ก-34})$$

เมื่อ γ'' คือ ค่าความหนืดคงที่ของวัสดุ

$\langle \phi(F) \rangle$ คือ ฟังก์ชันของ F ซึ่ง

$$\langle \phi(F) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{เมื่อ } F \leq 0 \\ \phi(F), & \text{เมื่อ } F > 0 \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \gamma' \left\langle \phi \left(\frac{\bar{\sigma}}{Y} - 1 \right) \right\rangle \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}} \quad (\text{ก-35})$$

เมื่อ $\bar{\sigma} = \sqrt{(3/2)} \{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}\}^{1/2}$ โดยที่ $\bar{\sigma}$ จะแสดงถึงความเค้นครากในการทดสอบดึงแนวแกน และ $Y = \sqrt{3}k$ เป็นความเค้นครากแรงดึง
ยกกำลังสองสมการ(ก-35) ทั้งสองข้าง

$$\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \gamma'^2 \left\langle \phi \left(\frac{\bar{\sigma}}{Y} - 1 \right) \right\rangle^2 \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}^2} \quad (\text{ก-36})$$

เนื่องจาก $\dot{\varepsilon} = \sqrt{(2/3)} \{\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}\}^{1/2}$ จะได้

$$\dot{\varepsilon} = \frac{2}{3} \gamma' \left\langle \phi \left(\frac{\bar{\sigma}}{Y} - 1 \right) \right\rangle \quad (\text{ก-37})$$

จากสมการที่ (ก-35) และ (ก-37) จะได้

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (\text{ก-38})$$

สมการ (ก-38) อยู่ในรูปเดียวกับสมการของเลวีมีเชส โดยที่ความเค้นสมมูล $\bar{\sigma}$ ในสมการขึ้นกับอัตราความเครียดซึ่งขึ้นกับฟังก์ชัน ϕ ที่กำหนดโดยคุณสมบัติของวัสดุ

ตัวอย่างเช่น ถ้าเลือกฟังก์ชัน $\phi = ((\bar{\sigma}/Y) - 1)^{1/m}$ เมื่อ m คือดัชนีความไวของอัตราความเครียดจะได้

$$\bar{\sigma} = Y[1 + (\dot{\varepsilon}/\gamma)^m] \quad (\text{ก-39})$$

ภาคผนวก ก

ทฤษฎีสภาพพลาสติก

สมการสมดุลของระบบ

สมการสมดุลของแรงในระบบพิกัดฉาก x, y และ z เมื่อไม่พิจารณาแรงเนื่องจากคือน้ำหนักวัตถุ คือ

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0\end{aligned}\tag{ก-1}$$

หรือเขียนในรูปของเทนเซอร์

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0, \quad \sigma_{ij,i} = 0\tag{ก-2}$$

สมการสมดุลที่พื้นผิว

ความเค้นตามบริเวณขอบพื้นผิว S สมดุลกับแรงกระทำต่อหนึ่งหน่วยของพื้นที่ผิว F_i ดังสมการ

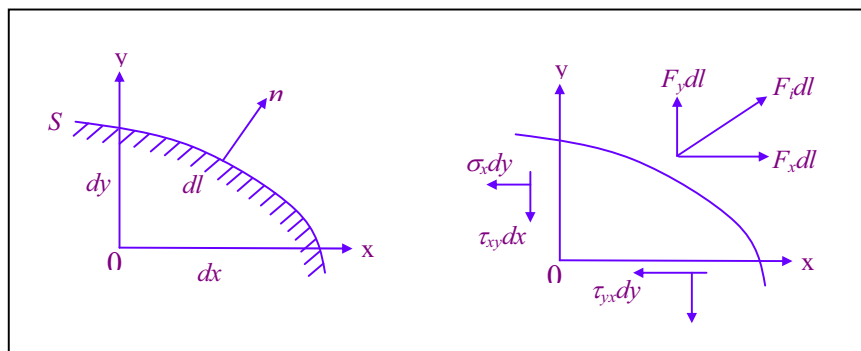
$$F_i = \sigma_{ij} n_j\tag{ก-3}$$

เมื่อ n_j คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับผิว โดยในกรณีของปัญหาสองมิติเขียนได้เป็น

$$F_x = \sigma_x \left(\frac{dy}{dl} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{dx}{dl} \right)\tag{ก-4}$$

$$F_y = \tau_{xy} \left(\frac{dy}{dl} \right) + \sigma_y \left(\frac{dx}{dl} \right)$$

โดย dy/dl และ dx/dl คือ ส่วนประกอบของเวกเตอร์ n_j ดังภาพที่ ก-1



ภาพที่ ก-1 แสดงสภาพสมดุลที่พื้นผิวใน 2 มิติ

หลักการของอัตรางานเสมือน (Virtual Work-Rate Principle)

หลักการของอัตรางานเสมือนคือ “สนามความเค้นที่อยู่ในสมดุลภายในวัตถุและสมดุลกับแรงกระทำที่ผิวนั้นอัตราของงานจากการเปลี่ยนรูปของวัตถุจะเท่ากับอัตราของงานจากแรงกระทำที่ผิวสำหรับสนามความเร็วเสมือน”

ให้ σ_{ij} เป็นสนามความเค้นที่อยู่ในสมดุลและ u_j เป็นสนามความเร็วเสมือน เมื่อ $\dot{\varepsilon}_{ij}$ เป็นอัตราความเครียดโดย $\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) = \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$$

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) - u_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}$$

จากสมการที่ (ก-2) ซึ่ง $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0$ ดังนั้น

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) \quad (\text{ก-5})$$

จากทฤษฎีของกรีน-ไดเวอร์เจนซ์ (Green-Divergence Theorem) เมื่อ V เป็นปริมาตรของวัตถุและ S เป็นพื้นผิวจะได้

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_{ij}) dV = \int_S u_j \sigma_{ij} n_i dS \quad (\text{ก-6})$$

และจากสมการที่ (ก-3) สมการ (ก-5) และสมการ (ก-6) จะได้

$$\int_V \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dV = \int_S F_j u_j dS \quad (\text{ก-7})$$

สมการที่ (ก-7) คือสมการของอัตรางานเสมือน เนื่องจาก σ_{ij} สมมาตร ดังนั้นสามารถเขียนสมการอัตรางานเสมือน ได้ในอีกรูปหนึ่งคือ

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_S F_j u_j dS \quad (\text{ก-8})$$

เกณฑ์การคราก (Yield Criteria)

การครากคือการที่โลหะเปลี่ยนสภาพจากช่วงยืดหยุ่นเข้าสู่ช่วงเปลี่ยนรูปถาวรหรือที่เรียกว่าสภาพพลาสติก ในสภาพการขึ้นรูปโลหะโดยทั่วไปนั้นความเค้นที่เกิดขึ้นกับวัสดุจะมีหลายลักษณะร่วมกัน เช่น อาจประกอบด้วยความเค้นดึง ความเค้นอัด ความเฉือน เป็นต้น ดังนั้นจึงมีการศึกษาถึงเกณฑ์ที่จะใช้กำหนดว่าการครากจะเกิดขึ้นเมื่อใด สามารถเขียนเกณฑ์การครากในรูปแบบทั่วไปได้ดังสมการ

$$f(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) = \text{constant} \quad (\text{ก-9})$$

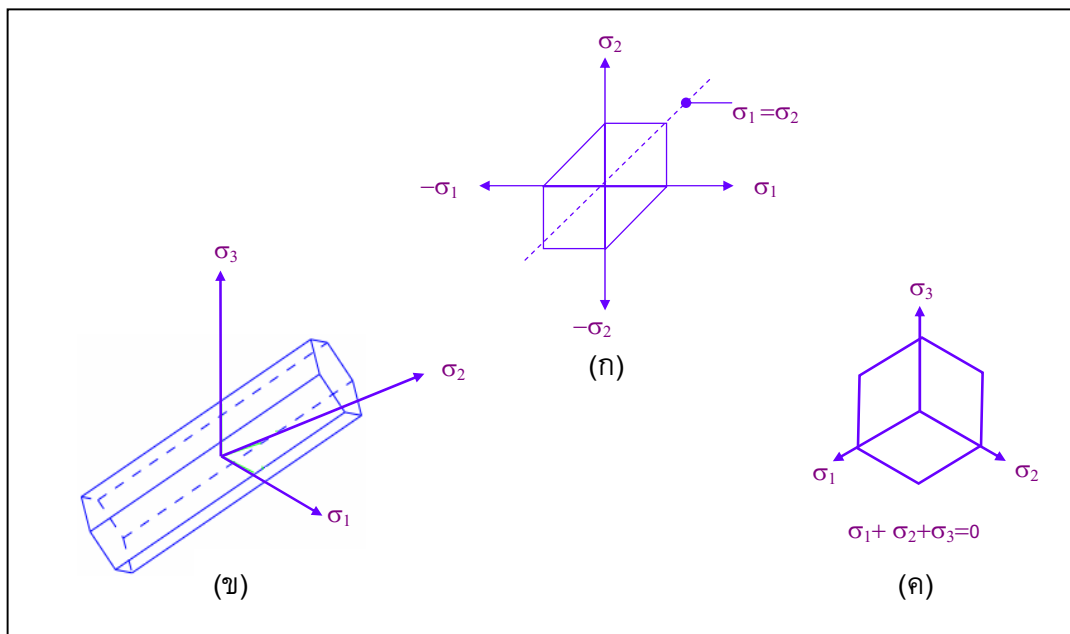
เกณฑ์การครากของเทรสกา (Tresca Yield Criteria) หรือ เกณฑ์ความเค้นเฉือนสูงสุด (Maximum Shear Stress Criteria) กล่าวว่า “การครากจะเกิดขึ้นเมื่อความเค้นเฉือนในชิ้นงานมีค่าเท่ากับความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นในชิ้นงานทดสอบแรงดึงของวัสดุชนิดเดียวกัน”

$$2k = \sigma_1 - \sigma_3 = Y \quad (\text{ก-10})$$

เมื่อ k คือ ความเค้นเฉือนครากของวัสดุจากการทดสอบแรงดึง

σ_1 และ σ_3 คือ ความเค้นหลัก โดยที่ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

Y คือ ความเค้นครากของวัสดุจากการทดสอบแรงดึง



ภาพที่ ก-2 แสดงเกณฑ์การครากของเทรסקา (ก) โลหะการครากในสองมิติ (ข) ผิวครากในสามมิติ (ค) โลหะการครากบนระนาบ π

เกณฑ์การครากของฟอนมิเชส (Von Mises Yield Criteria) ใช้ทฤษฎีพลังงานเปลี่ยนรูป (Distortion Energy Theory) ซึ่งกล่าวว่า “วัสดุจะเริ่มครากถ้าพลังงานเปลี่ยนรูปในวัสดุมีค่าเท่ากับพลังงานเปลี่ยนรูปจากการทดสอบแรงดึงของวัสดุเดียวกัน”

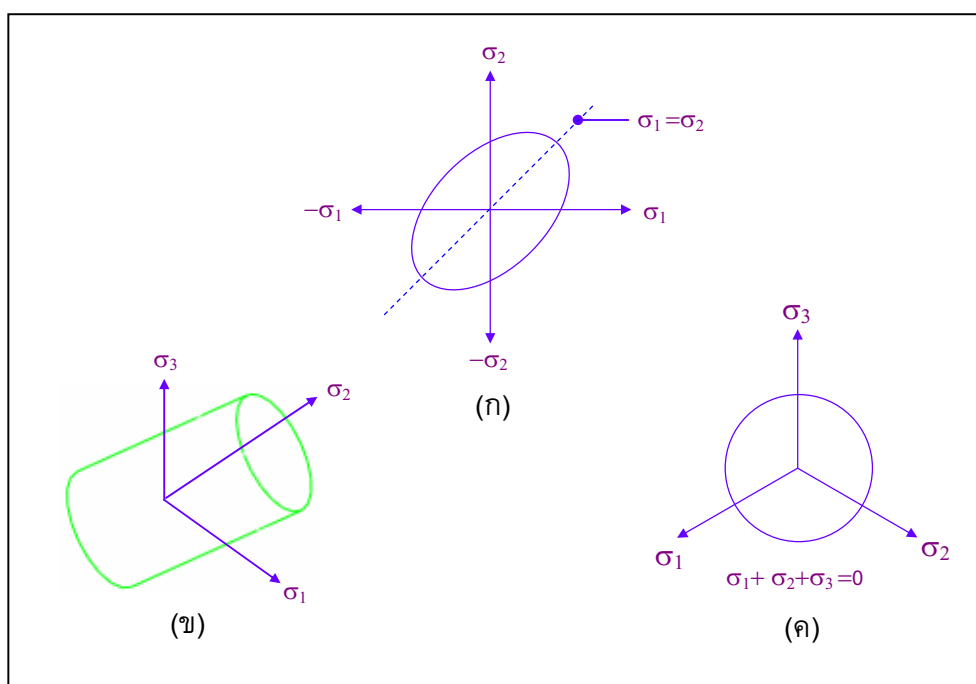
$$Y^2 = \frac{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}{2} \quad (\text{ก-11})$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

ในกรณีปัญหาสองมิติที่ความเค้นเกิดในระนาบ (Plane Stress) แทน $\sigma_3 = 0$ ในสมการที่ (ก-11) จะได้

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = Y^2 \quad (\text{ก-12})$$

สมการที่ (ก-12) เป็นสมการวงรีแสดงดังภาพที่ ก-3(ก) และผิวครากในสามมิติในสมการที่ (ก-11) แสดงในภาพที่ ก-3(ข)



ภาพที่ ก-3 แสดงเกณฑ์การครากของฟอนมิเชสโดย (ก) แสดงโลคัสการในสองมิติ (ข) แสดงผิวครากในสามมิติ (ค) แสดงโลคัสการครากบนระนาบ π

หากเปรียบเทียบเกณฑ์การครากของทฤษฎีทั้งสองแล้วจะพบว่าการคำนวณโดยใช้ทฤษฎีของเทรסקากว่าของฟอนมิเชส แต่ทฤษฎีของฟอนมิเชสให้ผลสอดคล้องกับการทดสอบของโลหะเหนียวมากกว่าของเทรסקา ดังนั้นในการวิเคราะห์การขึ้นรูปโลหะโดยทั่วไปจึงนิยมใช้เกณฑ์การครากของฟอนมิเชสมากกว่า

ความเค้นประสิทธิผลและความเครียดประสิทธิผล

ความเค้นประสิทธิผล (Effective Stress, $\bar{\sigma}$)

ความเค้นประสิทธิผลหรือความเค้นสมมูล (Equivalent Stress) กำหนดจากเกณฑ์การครากโดยหากค่าความเค้นประสิทธิผลเท่ากับค่าวิกฤติจะเกิดการคราก

โดยใช้เกณฑ์การครากของฟอนมิเซสจะได้

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{ก-13})$$

ความเครียดประสิทธิผล (Effective Strain, $\bar{\varepsilon}$)

ความเครียดประสิทธิผลหรือความเครียดสมมูล (Equivalent Strain, $\bar{\varepsilon}$) กำหนดจากงานส่วนเพิ่มต่อหน่วยปริมาตร

$$dw = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon} = \sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2 + \sigma_3 d\varepsilon_3 \quad (\text{ก-14})$$

จากเกณฑ์การครากของฟอนมิเซส สามารถหาความเครียดประสิทธิผลได้จากสมการ

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon} &= \frac{\sqrt{2}}{3} [(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\frac{2}{3} (d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2) \right]^{\frac{1}{2}} \\ \bar{\varepsilon} &= \left[\frac{2}{3} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{ก-15})$$

ศักยภาพพลาสติกและกฎการไหล (Plastic Potential and Flow Rule)

การเปลี่ยนรูปในช่วงพลาสติกนั้นความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดจะไม่เป็นไปตามกฎของฮุก แต่จะใช้กฎการไหล (Flow Rule) ดังนี้

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \dot{f} \quad (\text{ก-16})$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} df$$

เมื่อ g และ h เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ของตัวแปรของความเค้นเบี่ยงเบน และ f เป็นฟังก์ชันการคราก และฟังก์ชัน $g = g(\sigma_{ij})$ เรียกว่าศักยภาพพลาสติก (Plastic Potential)

ถ้าให้ $g=f$ จะได้กฎการไหลที่มีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันการคราก (Flow Rule Associated with Yield Function) จากสมการที่ (ก-16) จะได้

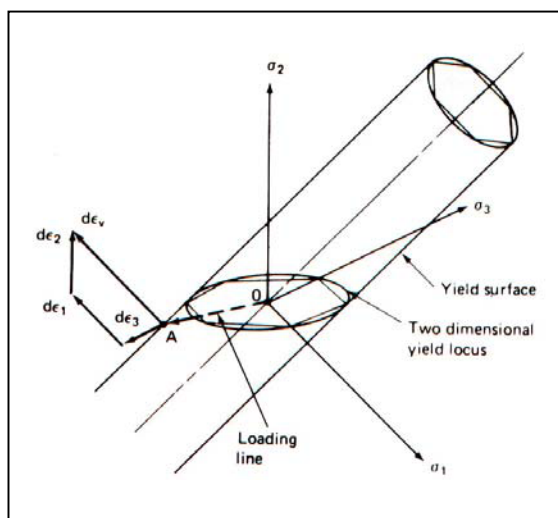
$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} \quad (\text{ก-17})$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda$$

เมื่อ $\dot{\lambda}$ และ $d\lambda$ เป็นค่าคงที่มีค่าบวกโดย $\dot{\lambda} = h\dot{f}$ และ $d\lambda = hdf$

หลักการของสภาพตั้งฉาก (Principle of Normality)

จากกฎการไหลสามารถตีความหมายได้อีกอย่างคือผลรวมของเวกเตอร์ความเครียดพลาสติกส่วนเพิ่มจะตั้งฉากกับผิวคราก



ภาพที่ ก-4 แสดงหลักการสภาพตั้งฉากใน 3 มิติ

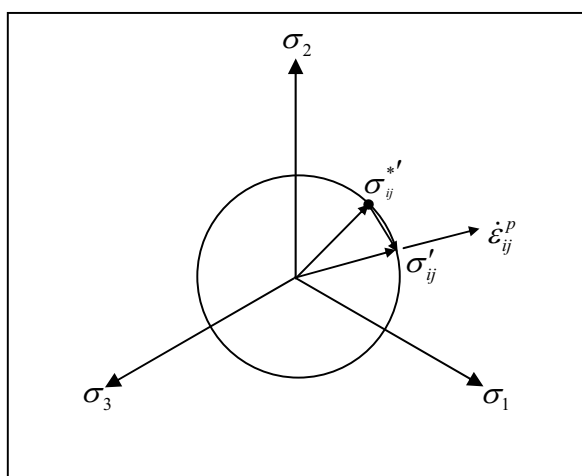
ภาพที่ ก-4 แสดงความเครียดส่วนเพิ่มในรูปของเวกเตอร์โดย $d\varepsilon_v$ ซึ่งเป็นผลรวมของเวกเตอร์ $d\varepsilon_1$, $d\varepsilon_2$ และ $d\varepsilon_3$ ตั้งฉากกับผิวคราก และสำหรับของแข็งไอโซโทรปิกนั้นทิศของความเค้นหลักและความเครียดจะซ้อนทับกัน

หลักการของงานพลาสติกสูงสุด (Principle of Maximum Plastic Work)

เมื่อใช้หลักการสภาพตั้งฉากและความโค้งงอของโลคัส (Locus) การครากจะได้หลักการของงานพลาสติกสูงสุด

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (\text{ก-18})$$

เมื่อ σ_{ij}^* เป็นสภาวะความเค้นจุดใด ๆ ที่มีตำแหน่งอยู่ภายในหรืออยู่บนผิวคราก ดังภาพที่ ก-5



ภาพที่ ก-5 แสดงสภาพเวกเตอร์ความเค้นและอัตราความเครียด

จากภาพที่ ก-5 จะเห็นได้ว่า $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ นั้นมีทิศออกด้านนอกขนานกับแนวตั้งฉากกับผิวครากที่จุด σ'_{ij} และค่าของ $(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\varepsilon}_{ij}^p$ จะมีค่าเท่ากับผลคูณสเกลาร์ของเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับโลคัสการครากที่จุด σ'_{ij} กับเวกเตอร์จาก σ_{ij}^* ไป σ'_{ij} เนื่องจากโลคัสการครากเป็นโค้งงอทำให้ผลคูณของเวกเตอร์ทั้งสองเป็นบวกเสมอ และจะเห็นได้ว่าผลคูณจะเท่ากับศูนย์ก็ต่อเมื่อ $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^*$

สมการของเลวีมิเชสและแพรนเดิลรุส

สมการของเลวีมิเชส (Levy-Mises Equation) เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับความเครียดเฉพาะในช่วงพลาสติก เมื่อใช้เกณฑ์การครากของฟอนมิเชสโดยเขียนในรูปความเค้นเบี่ยงเบนจะได้ฟังก์ชันการคราก

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \quad (\text{ก-19})$$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma'_{ij}$$

จากกฎการไหลในสมการที่ (ก-17) จะได้

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \sigma'_{ij} \dot{\lambda} \quad (\text{ก-20})$$

สมการของแพรนเดิลรุส (Prandtl-Reuss Equation) พิจารณาความเครียดทั้งในช่วงยืดหยุ่นและช่วงพลาสติก ดังสมการ

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (\text{ก-21})$$

เมื่อ $\dot{\varepsilon}_{ij}$ คือ อัตราความเครียดรวม

$\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ คือ อัตราความเครียดยืดหยุ่น

$\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ คือ อัตราความเครียดพลาสติก

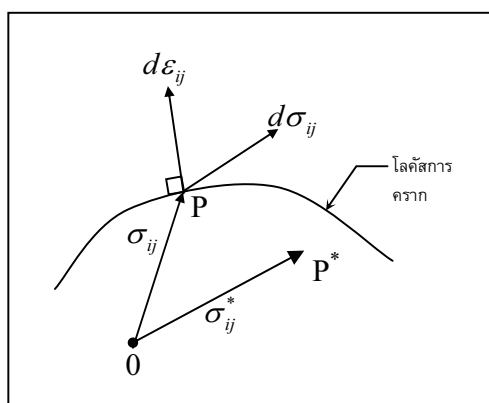
จากสมการของเลวีมิเชสและของแพรนเดิลรุสสรุปได้ว่าสมการของเลวีมิเชสใช้เมื่อพิจารณาวัตถุเป็นแบบแข็งเกร็ง-พลาสติก (Rigid Plastic) ส่วนสมการของแพรนเดิลรุสนั้นใช้เมื่อพิจารณาวัตถุทั้งในช่วงยืดหยุ่นและช่วงพลาสติก (Elastic Plastic)

หลักการของค่าสุดขีด (Extremum Principles)

วัสดุแบบแข็งเกร็งพลาสติกซึ่งเปลี่ยนรูปภายใต้แรงกระทำ F_i ที่ผิว S_F และสภาวะความเร็วที่ผิวที่ผิว S_u ผลเฉลยของปัญหานี้จะต้องพิจารณาถึงสภาวะสมดุลของสนามความเค้น สอดคล้องกับสนามความเร็วและเงื่อนไขขอบ โดยที่สนามความเค้นจะต้องสอดคล้องกับเกณฑ์การคราก

หลักการแรกของค่าสุดขีด (The First Extremum Principle)

ให้ σ_{ij} และ u_i เป็นคำตอบที่สมบูรณ์ของการปัญหาเปลี่ยนรูปพลาสติกของวัตถุแข็งเกร็งพลาสติกภายใต้เงื่อนไขขอบที่กำหนด ให้ σ_{ij}^* เป็นสนามความเค้นที่สมดุลสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบของความเค้นบนผิว S_F และอยู่ภายในหรือบนโลคัสการคราก (เรียกสนามความเค้น σ_{ij}^* นี้ว่า Statically Admissible) ดังภาพที่ ก-6



ภาพที่ ก-6 แสดงสภาวะความเค้น σ_{ij}^* อยู่ภายในหรือบนโลคัสการคราก

ใช้หลักการของอัตรางานเสมือนดังสมการที่ (ก-8) ที่จุด P จะได้

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_S F_i u_i dS \quad (\text{ก-22})$$

และที่จุด P^* จะได้

$$\int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_S F_i^* u_i dS \quad (\text{ก-23})$$

นำสมการที่ (ก-23) ลบออกจากสมการ (ก-22) จะได้

$$\int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_S (F_i - F_i^*) u_i dS \quad (\text{ก-24})$$

จากหลักการของงานพลาสติกสูงสุดสมการที่ (ก-18) จะได้

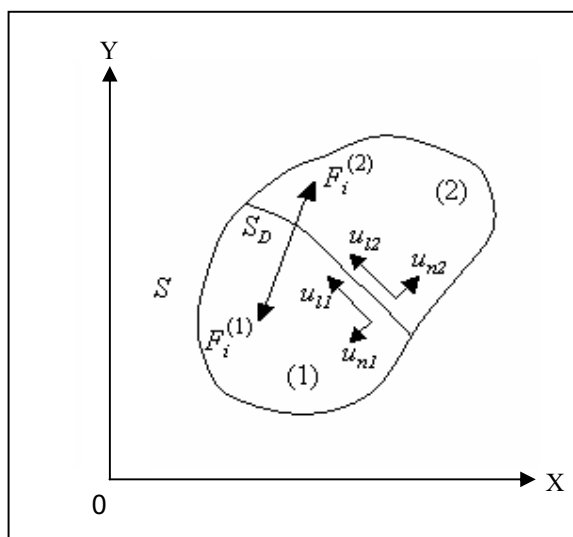
$$\int_S (F_i - F_i^*) u_i dS \geq 0 \quad (\text{ก-25})$$

เนื่องจาก $F_i = F_i^*$ บนพื้นผิว S_F และ $S = S_F + S_u$

$$\int_{S_u} F_i u_i dS \geq \int_{S_u} F_i^* u_i dS \quad (\text{ก-26})$$

สมการที่ (ก-27) คือหลักการแรกของค่าขีดสุดซึ่งกล่าวได้ว่า “อัตราของงานเนื่องจากแรงกระทำที่ผิวที่เกิดขึ้นจริงสามารถหาได้จากสนามความเค้นที่อยู่ในสภาวะ Statically Admissible โดยอัตรางานดังกล่าวจะเป็นค่าขอบเขตต่ำ (Lower Bound)”

ในการไหลของของแข็งแบบแข็งเกร็งพลาสติกอาจเกิดความเร็วไม่ต่อเนื่องขึ้นได้ ดังภาพที่ ก-7



ภาพที่ ก-7 แสดงผิวบริเวณเกิดความเร็วที่ไม่ต่อเนื่อง

สนามความเร็ว u_i ประกอบด้วยผิว S_D เป็นผิวที่มีความเร็วไม่ต่อเนื่องเกิดขึ้น โดยใช้หลักการของอัตรางานเสมือนที่ส่วนที่(1) และส่วนที่(2) จากนั้นใช้เงื่อนไขของสมดุลของแรงกระทำที่ผิว $F_i^{(1)}$ และ $F_i^{(2)}$ ที่ผิวไม่ต่อเนื่อง S_D จะได้

$$\int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{S_D} (k - \tau^*) |\Delta u| dS = \int_S (F_i - F_i^*) u_i dS \quad (ก-27)$$

เมื่อ τ^* เป็นความเค้นเฉือนที่เป็นส่วนประกอบของ σ_{ij}^* และ k เป็นความเค้นเฉือนครากที่ผิว S_D ส่วน $|\Delta u|$ เป็นขนาดของความเร็วในแนวสัมผัสที่ไม่ต่อเนื่องที่ผิว S_D เห็นได้ว่าเทอมที่สองของสมการ (ก-27) เป็นบวกเสมอ เนื่องจาก k มากกว่าหรือเท่ากับ τ^* เสมอ ดังนั้นสมการที่ (ก-25) และสมการ (ก-26) ยังคงใช้ได้

หลักการที่สองของค่าสุดขีด (The Second Extremum Principle)

ให้ u_i^* เป็นสนามความเร็วที่สอดคล้องกับการยึดตัวไม่ได้และเงื่อนไขความเร็วที่ขอบที่ผิว S_u เราเรียกสนามความเร็วนี้ว่า “Kinematically Admissible” จากหลักการของอัตรางานเสมือนจะได้ว่า

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* dV + \int_{S_D^*} \tau |\Delta u^*| dS = \int_S F_i u_i^* dS \quad (ก-28)$$

เมื่อ τ เป็นความเค้นเฉือนที่เป็นส่วนประกอบของความเค้น σ_{ij} บริเวณผิวไม่ต่อเนื่อง S_D^* ซึ่งมีความเร็วในแนวสัมผัสที่ไม่ต่อเนื่อง $|\Delta u^*|$ ในสนามความเร็ว u_i^* ถ้า u_i^* เป็นผลเฉลยจริง ดังนั้น $\tau = k$ ทำให้ได้

$$k |\Delta u^*| \geq \tau |\Delta u^*| \quad (ก-29)$$

และจะได้ว่า

$$\sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* \geq \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^* \quad (ก-30)$$

จากหลักของงานพลาสติกสูงสุด เมื่อ σ_{ij}^* สอดคล้องกับเกณฑ์การครากและ $\dot{\epsilon}_{ij}^*$ ดังนั้น

$$\int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dV + \int_{S_D^*} k |\Delta u^*| dS \geq \int_S F_i u_i^* dS \quad (ก-31)$$

เนื่องจาก $S = S_F + S_u$ และบนผิว S_u นั้น $u_i^* = u_i$ ดังนั้น

$$\int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dV + \int_{S_D^*} k |\Delta u^*| dS - \int_{S_F} F_i u_i^* dS \geq \int_S F_i u_i dS \quad (\text{ก-32})$$

สมการที่ (ก-32) คือหลักที่สองของค่าสุดขีดและแสดงให้เห็นว่า “ขอบเขตบน (Upper Bound)” ของอัตราของงานที่เกิดขึ้นจริงบนผิว S_u หาได้จากสนามความเร็ว Kinematically Admissible

วิสโคพลาสติคซิตี (Viscoplasticity)

ในทฤษฎีพลาสติคิตีนั้นจะไม่คำนึงถึงผลของเวลาต่อพฤติกรรมของวัสดุ ซึ่งไม่เพียงพอในการวิเคราะห์วัสดุที่มีเวลามีผลต่อพฤติกรรมของวัสดุนั้น โดยในวัสดุที่เวลามีผลต่อพฤติกรรมนั้นอัตราความเครียดจะมีผลต่อความเค้น วิสโคพลาสติคซิตีพิจารณาถึงผลของเวลาต่อพฤติกรรมวัสดุ คือพิจารณาผลของอัตราความเครียดต่อพฤติกรรมของวัสดุ ทฤษฎีวิสโคพลาสติคต่อไปนี้เสนอโดยเพอซีนา (Perzyna) ซึ่งพิจารณาวัสดุแบบแข็งเกร็ง-วิสโคพลาสติค เพอซีนาเสนอฟังก์ชัน $F(\sigma_{ij})$

$$F(\sigma_{ij}) = \frac{\sqrt{(1/2)} \{\sigma_{ij}' \sigma_{ij}'\}^{1/2}}{k} - 1 \quad (\text{ก-33})$$

เมื่อ k คือความเค้นเฉือนคราก พิจารณา $F(\sigma_{ij})$ เป็นฟังก์ชันเช่นเดียวกับศักย์ภาพพลาสติค (Plastic Potential) จะได้

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \gamma'' \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{ก-34})$$

เมื่อ γ'' คือ ค่าความหนืดคงที่ของวัสดุ

$\langle \phi(F) \rangle$ คือ ฟังก์ชันของ F ซึ่ง

$$\langle \phi(F) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{เมื่อ } F \leq 0 \\ \phi(F), & \text{เมื่อ } F > 0 \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \gamma' \left\langle \phi \left(\frac{\bar{\sigma}}{Y} - 1 \right) \right\rangle \frac{\sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}} \quad (\text{ก-35})$$

เมื่อ $\bar{\sigma} = \sqrt{(3/2)} \{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}\}^{1/2}$ โดยที่ $\bar{\sigma}$ จะแสดงถึงความเค้นครากในการทดสอบดึงแนวแกน และ $Y = \sqrt{3}k$ เป็นความเค้นครากแรงดึง
ยกกำลังสองสมการ(ก-35) ทั้งสองข้าง

$$\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \gamma'^2 \left\langle \phi \left(\frac{\bar{\sigma}}{Y} - 1 \right) \right\rangle^2 \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}^2} \quad (\text{ก-36})$$

เนื่องจาก $\dot{\varepsilon} = \sqrt{(2/3)} \{\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}\}^{1/2}$ จะได้

$$\dot{\varepsilon} = \frac{2}{3} \gamma' \left\langle \phi \left(\frac{\bar{\sigma}}{Y} - 1 \right) \right\rangle \quad (\text{ก-37})$$

จากสมการที่ (ก-35) และ (ก-37) จะได้

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \quad (\text{ก-38})$$

สมการ (ก-38) อยู่ในรูปเดียวกับสมการของเลวีมีเชส โดยที่ความเค้นสมมูล $\bar{\sigma}$ ในสมการขึ้นกับอัตราความเครียดซึ่งขึ้นกับฟังก์ชัน ϕ ที่กำหนดโดยคุณสมบัติของวัสดุ

ตัวอย่างเช่น ถ้าเลือกฟังก์ชัน $\phi = ((\bar{\sigma}/Y) - 1)^{1/m}$ เมื่อ m คือดัชนีความไวของอัตราความเครียดจะได้

$$\bar{\sigma} = Y[1 + (\dot{\varepsilon}/\gamma)^m] \quad (\text{ก-39})$$

ภาคผนวก ข
ทฤษฎีทางไฟไนต์เอลิเมนต์กับการขึ้นรูปโลหะ

การวิเคราะห์การอัดรีด

การวิเคราะห์การวิเคราะห์การอัดรูปอลูมิเนียมใช้หลักการวิเคราะห์การขึ้นรูปโลหะและทฤษฎีสภาพพลาสติก ซึ่งสามารถทำได้หลายวิธี ดังนี้

1. วิธีโอพลาสติคซิตี (Visioplasticity) ใช้การทดลองการขึ้นรูปโดยอาจใช้วัสดุจริงหรือวัสดุจำลองแทนวัสดุจริง ประกอบกับการใช้เทคนิคในการสร้างโครงข่ายบนวัสดุทำให้สามารถเห็นการเปลี่ยนรูปที่เกิดขึ้นกับวัสดุหลังจากการขึ้นรูป และใช้โครงข่ายที่เปลี่ยนรูปในการคำนวณสนามความเร็ว และจากสนามความเร็วสามารถใช้ในการคำนวณสนามอัตราความเครียด และสามารถคำนวณหาสนามความเค้นได้จากสนามอัตราความเครียด โดยการคำนวณนั้นอาศัยด้วยทฤษฎีทางสภาพพลาสติก

2. วิธีงานเปลี่ยนรูปอุดมคติหรือพลังงานสม่ำเสมอ (Ideal Work or Uniform Energy Method) ใช้หลักการ ของสมมูลงานหรือพลังงานโดยงานที่ใช้ในการขึ้นรูปจะเท่ากับงานที่ใช้ในการเปลี่ยนรูปเพียงอย่างเดียวเท่านั้นไม่มีผลของความเสียดทานและการเปลี่ยนรูปที่ไม่เอกพันธ์

3. วิธีสแลบ (Slab Method) ใช้หลักการสมมูลของแรงบนโลหะที่เปลี่ยนรูป ผลของความเสียดทานระหว่างโลหะกับเครื่องมือสามารถกำหนดในสมการสมมูลของแรงได้ และการเปลี่ยนรูปเป็นแบบเอกพันธ์

4. วิธีขอบเขตบน (Upper Bound Method) ใช้หลักการของค่าสุดขีดในการหาขอบเขตบนของการเปลี่ยนรูปโดยการสร้างสนามความเร็วที่ยอมรับได้ (Admissible Velocity Fields) ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขการคงที่ของปริมาตร โดยการเลือกสนามความเร็วที่ดีที่สุดด้วยการหาค่าต่ำสุดของพลังงานทั้งหมดที่ใช้ในการเปลี่ยนรูป ค่าแรงที่คำนวณได้เป็นค่าขอบเขตบนคือเป็นค่าที่มากกว่าหรือเท่ากับแรงที่ต้องใช้ในการขึ้นรูปจริง

5. วิธีสนามสลิปไลน์ (Slip-Line Field Method) ใช้ในการวิเคราะห์การขึ้นรูปแบบความเครียดระนาบ โดยสร้างสนามการเลื่อนไหล (Slip-Line Field) ขึ้นซึ่งเป็นโครงข่ายของเส้นที่ตั้งฉากกันซึ่งเป็นระนาบที่เกิดความเค้นเฉือนสูงสุด

6. วิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) เช่น วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (Finite Difference Method), วิธีไฟไนต์โวลุ่ม (Finite Volume Method) และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) เป็นต้น

หลักการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

โดยทั่วไปปัญหาทางฟิสิกส์และวิศวกรรมศาสตร์มักสามารถอธิบายได้ด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ซึ่งมักอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ การแก้ปัญหามักใช้วิธีการวิเคราะห์ (Analytical Method) โดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์นั้นประกอบกับเงื่อนไขขอบของปัญหานั้น ผลเฉลยที่ได้จากวิธีดังกล่าวจึงเป็นผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution)

เนื่องจากปัญหาทางวิศวกรรมส่วนใหญ่มีความซับซ้อนการหาผลเฉลยแม่นยำตรงนั้นทำได้ยากหรือไม่สามารถทำได้ จึงใช้วิธีหาผลเฉลยโดยประมาณ (Approximate Solution) ด้วยวิธีทางตัวเลข (Numerical Method) วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งโดยใช้การแบ่งขอบเขตของปัญหาที่ต่อเนื่องออกเป็นส่วนย่อย ๆ เรียกว่าเอลิเมนต์ (Elements) โดยแต่ละเอลิเมนต์เชื่อมต่อกันที่จุดต่อ (Nodes)

อาจแบ่งขั้นตอนในการแก้ปัญหด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ 7 ขั้นตอนคือ

1. การกำหนดปัญหา (Identification of the problem)
2. การแบ่งและกำหนดเอลิเมนต์ (Discretize and defined elements)
3. การสร้างสมการในแต่ละเอลิเมนต์ (Derive the element equations)
4. การรวมสมการของแต่ละเอลิเมนต์ (Assemble the element equations) เป็นระบบสมการรวม (Global equations)
5. การกำหนดเงื่อนไขขอบของปัญหา (Apply Boundary Condition)
6. การแก้ระบบสมการ (Solve the global equations)
7. การหาค่าตัวแปรที่ต้องการทราบค่า เช่น ความเค้น ความเครียด อุณหภูมิ เป็นต้น

การสร้างสมการของเอลิเมนต์ (element equations) สามารถทำได้หลายวิธี ดังนี้วิธีโดยตรง (Direct approach) วิธีแปรผัน (Variational method) และวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals)

วิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์กับการวิเคราะห์การขึ้นรูปโลหะ

การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์การขึ้นรูปโลหะนั้นสามารถทำได้หลายวิธี ในที่นี้จะแสดงถึงเฉพาะวิธีสร้างสมการในรูปของตัวแปรความเร็ว

1. สมการนำ (Governing Equation) สามารถหาได้จากหลักการแปรผันในอัตรางานเสมือน จะได้

$$\pi = \int_V \bar{\sigma} \dot{\epsilon} dV - \int_{S_F} F_i u_i dS \quad (\text{ข-1})$$

$$\delta \pi = \int_V \bar{\sigma} \delta \dot{\epsilon} dV - \int_{S_F} F_i \delta u_i dS = 0 \quad (\text{ข-2})$$

ด้วยเงื่อนไขปริมาตรในการขึ้นรูปคงที่ $\dot{\varepsilon}_v = 0$ โดยกำหนดค่า K คือ เป็นค่าคงที่บวกที่มีค่ามากซึ่งเรียกว่าค่าคงที่เพนัลตี้(Penalty Constant)

$$\delta\pi = \int_V \bar{\sigma} \delta \dot{\varepsilon} dV + K \int_V \dot{\varepsilon}_v \delta \dot{\varepsilon}_v dV - \int_{S_F} F_i \delta u_i dS = 0 \quad (\text{ข-3})$$

การกำหนดค่าคงที่เพนัลตี้ (K) นั้นต้องพิจารณาค่าที่เหมาะสม โดยค่า K ที่มากนั้นอัตราความเครียดปริมาตรจะเข้าใกล้ศูนย์มากแต่หากมากเกินไปจะทำให้ยากต่อการรู้เข้าหาคำตอบได้ หากน้อยไปจะทำให้มีอัตราความเครียดปริมาตรสูงเกินกว่าที่จะยอมรับได้ จากการทดสอบเชิงตัวเลข (Numerical Test) แสดงให้เห็นว่าค่าที่เหมาะสมจะอยู่ในช่วง 0.0001-0.001 เท่าของค่าอัตราความเครียดประสิทธิผลเฉลี่ย

2. เอลิเมนต์และฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์(Element and Shape Functions)
เอลิเมนต์ชนิด 4 เหลี่ยม 4 จุดต่อแบบไอโซพาราเมตริก (Linear Quadrilateral Isoparametric Elements) ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์กำหนดโดย

$$q_\alpha(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_\alpha \xi)(1 + \eta_\alpha \eta) \quad (\text{ข-4})$$

เมื่อ $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$ คือตำแหน่งในระบบพิกัดธรรมชาติ (natural coordinates) ของจุดต่อแต่ละมุม
สนามความเร็วสามารถกำหนดจากส่วนประกอบของความเร็วที่จุดต่อ

$$\begin{aligned} u_x(\xi, \eta) &= \sum_\alpha q_\alpha(\xi, \eta) u_\alpha^{(x)} \\ u_y(\xi, \eta) &= \sum_\alpha q_\alpha(\xi, \eta) u_\alpha^{(y)} \end{aligned} \quad (\text{ข-5})$$

เมื่อ $(u_\alpha^{(x)}, u_\alpha^{(y)})$ เป็นความเร็วที่จุดต่ออัลฟา (α) และการรวมนั้นทำทั้งสี่จุดต่อ

เนื่องไอโซพาราเมตริกเอลิเมนต์ใช้การแปลงระบบพิกัดแบบเดียวกับฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ในสมการที่(ข-4) การแปลงระบบพิกัดจากระบบพิกัดธรรมชาติเป็นระบบพิกัดรวม(Global Coordinates)ในแกน x-y กำหนดโดยสมการ

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_\alpha q_\alpha(\xi, \eta) x_\alpha \\ y(\xi, \eta) &= \sum_\alpha q_\alpha(\xi, \eta) y_\alpha \end{aligned} \quad (\text{ข-6})$$

เมื่อ (x_α, y_α) เป็นตำแหน่งของจุดต่อที่อัลฟา(α)ในระบบพิกัดรวม

3. เมตริกซ์ของอัตราความเครียดของเอลิเมนต์ (Element Strain-Rate Matrix)

จากหัวข้อที่ 2 สนามความเร็วของเอลิเมนต์สามารถเขียนได้ในรูปของ

$$u_i = \sum_\alpha q_\alpha u_i^{(\alpha)} \quad (\text{ข-7})$$

อัตราความเครียดกำหนดโดย

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{ข-8})$$

แทนสมการที่ (ข-7) ลงในสมการ (3-8)

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x_j} u_i^{(\alpha)} + \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x_i} u_j^{(\alpha)} \right) \quad (\text{ข-9})$$

กำหนดให้

$$X_{\alpha} = \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial x}, \quad Y_{\alpha} = \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial y}, \quad Z_{\alpha} = \frac{\partial q_{\alpha}}{\partial z} \quad (\text{ข-10})$$

ดังนั้นส่วนประกอบของอัตราความเครียดในสมการที่(ข-8) สามารถขยายในระบบพิกัด x, y และ z ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \sum X_{\alpha} u_x^{(\alpha)}, & \dot{\varepsilon}_y &= \sum Y_{\alpha} u_y^{(\alpha)}, & \dot{\varepsilon}_z &= \sum Z_{\alpha} u_z^{(\alpha)} \\ \dot{\varepsilon}_{xy} &= \frac{1}{2} \sum (Y_{\alpha} u_x^{(\alpha)} + X_{\alpha} u_y^{(\alpha)}) \\ \dot{\varepsilon}_{yz} &= \frac{1}{2} \sum (Z_{\alpha} u_y^{(\alpha)} + Y_{\alpha} u_z^{(\alpha)}) \\ \dot{\varepsilon}_{zx} &= \frac{1}{2} \sum (X_{\alpha} u_z^{(\alpha)} + Z_{\alpha} u_x^{(\alpha)}) \end{aligned} \quad (\text{ข-11})$$

ส่วนประกอบของอัตราความเครียดสามารถจัดอยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้ ดังนี้
ในกรณีของความเค้นในระนาบ

$$\dot{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{ข-12})$$

ในกรณีของความเครียดในระนาบ

$$\dot{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\varepsilon}_y \\ \dot{\varepsilon}_z \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ 0 \\ -\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{ข-13})$$

ในกรณีสมมาตรรอบแกน

$$\dot{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_r \\ \dot{\epsilon}_z \\ \dot{\epsilon}_\theta \\ \dot{\gamma}_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{u_r}{r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (ข-14)$$

แทนค่าสมการที่ (ข-10) ในสมการ(ข-12) สมการ(ข-13) และสมการ(ข-14) แล้วเขียนสมการทั้งสามในรูปแบบเดียวจะได้

$$\dot{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_1 \\ \dot{\epsilon}_2 \\ \dot{\epsilon}_3 \\ \dot{\epsilon}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum X_\alpha u_1^{(\alpha)} \\ \sum Y_\alpha u_2^{(\alpha)} \\ \sum P_\alpha u_1^{(\alpha)} \\ \sum (X_\alpha u_2^{(\alpha)} + Y_\alpha u_1^{(\alpha)}) \end{Bmatrix} \quad (ข-15)$$

สามารถเขียนได้ในรูปของเมตริกซ์

$$\dot{\epsilon} = Bv \quad (ข-16)$$

เมื่อ B เรียกว่าเมตริกซ์อัตราความเครียด (Strain Rate Matrix) ซึ่งอยู่ในรูป

$$B = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & X_2 & 0 & X_3 & 0 & X_4 & 0 & \dots \\ 0 & Y_1 & 0 & Y_2 & 0 & Y_3 & 0 & Y_4 & \dots \\ P_1 & 0 & P_2 & 0 & P_3 & 0 & P_4 & 0 & \dots \\ Y_1 & X_1 & Y_2 & X_2 & Y_3 & X_3 & Y_4 & X_4 & \dots \end{bmatrix} \quad (ข-17)$$

จำนวนของหลักของเมตริกซ์ B ขึ้นอยู่กับจำนวนขององศาอิสระ (Degree of Freedom) ของเอลิเมนต์

การหาเมตริกซ์อัตราความเครียด หรือค่าของ X_α, Y_α และ Z_α นี้จะต้องหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันการประมาณภายใน เทียบกับระบบพิกัดรวม แต่เนื่องจากฟังก์ชันการประมาณภายในอยู่ในระบบพิกัดธรรมชาติ จึงต้องแปลงอนุพันธ์ในระบบพิกัดรวมให้อยู่ในรูปของระบบพิกัดธรรมชาติ โดยใช้กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

$$\begin{Bmatrix} \partial q_\alpha / \partial \xi \\ \partial q_\alpha / \partial \eta \\ \partial q_\alpha / \partial \zeta \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \partial q_\alpha / \partial x \\ \partial q_\alpha / \partial y \\ \partial q_\alpha / \partial z \end{Bmatrix} \quad (ข-18)$$

เมื่อ J เป็นเมตริกซ์จาโคเบียนของการแปลงระบบพิกัดซึ่งกำหนดโดย

$$J = \begin{Bmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial y / \partial \xi & \partial z / \partial \xi \\ \partial x / \partial \eta & \partial y / \partial \eta & \partial z / \partial \eta \\ \partial x / \partial \zeta & \partial y / \partial \zeta & \partial z / \partial \zeta \end{Bmatrix} \quad (\text{ข-19})$$

ทำให้สมการที่ (3-10) สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$\begin{Bmatrix} X_\alpha \\ Y_\alpha \\ Z_\alpha \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial q_\alpha / \partial x \\ \partial q_\alpha / \partial y \\ \partial q_\alpha / \partial z \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \partial q_\alpha / \partial \xi \\ \partial q_\alpha / \partial \eta \\ \partial q_\alpha / \partial \zeta \end{Bmatrix} \quad (\text{ข-20})$$

เมื่อ J^{-1} คือเมตริกซ์ผกผันของ J

4. เมตริกซ์ของอัตราความเครียดประสิทธิผลและอัตราความเครียดปริมาตร
อัตราความเครียดประสิทธิผล(Effective Strain-rate) กำหนดดังสมการ

$$\dot{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3}} \{ \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \}^{1/2} \quad (\text{ข-21})$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์

$$(\dot{\epsilon})^2 = \dot{\epsilon}^T D \dot{\epsilon} \quad (\text{ข-22})$$

โดยเมตริกซ์ D อยู่ในรูปแบบที่ค่าที่แตกต่างกันขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา เช่น ค่าอัตราความเครียดประสิทธิผลในปัญหาความเครียดในระนาบจะแตกต่างจากปัญหาความเค้นในระนาบ เมื่อแทนสมการที่ (ข-16) ลงใน (ข-22) จะได้

$$(\dot{\epsilon})^2 = v^T B^T D B v = v^T P v \quad (\text{ข-23})$$

เมื่อ $P = B^T D B$

อัตราความเครียดเชิงปริมาตร (Volumetric strain-rate, $\dot{\epsilon}_v$) กำหนดโดย

$$\dot{\epsilon}_v = \dot{\epsilon}_{kk} = \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y + \dot{\epsilon}_z \quad (\text{ข-24})$$

สามารถเขียนในรูปของ

$$\dot{\epsilon}_v = C^T v = C_I v_I \quad (\text{ข-25})$$

โดยที่ $C_I = B_{1I} + B_{2I} + B_{3I}$

เมื่อ B_{IJ} เป็นเอลิเมนต์ของเมตริกซ์อัตราความเครียด B ตามสมการที่ (ข-17)

5. เงื่อนไขขอบ (Boundary Condition)

พื้นผิวขอบชิ้นงาน(boundary surface , S) สามารถแบ่งออกได้ 3 ส่วนคือ

$$S = S_u + S_F + S_C \quad (\text{ข-26})$$

เมื่อ S_u คือ พื้นผิวขอบซึ่งความเร็วเป็นเงื่อนไขขอบ

S_F คือ พื้นผิวขอบซึ่งแรงเป็นเงื่อนไขขอบ

S_C คือ พื้นผิวขอบที่สัมผัสระหว่างชิ้นงานกับเครื่องมือ

ที่ผิวสัมผัสระหว่างชิ้นงานกับเครื่องมือ S_c จะเกิดความเค้นเสียดทานดังสมการ

$$f_s = mkl \cong mk \left\{ \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{|u_s|}{u_0} \right) \right\} l \quad (\text{ข-27})$$

เมื่อ f_s คือ ความเค้นเสียดทาน(friction stress)

m คือ แฟกเตอร์คงที่ของความเสียดทานเฉือน

k คือ ความเค้นเฉือนคราก

l คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งมีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางความเร็วเลื่อนสัมผัสระหว่างชิ้นงานกับเครื่องมือ

u_s คือ ความเร็วเลื่อนสัมผัสระหว่างชิ้นงานกับเครื่องมือ

u_0 คือ ค่าบวกค่าน้อยเมื่อเทียบกับ u_s

การประมาณค่าของความเค้นเสียดทานในสมการที่ (ข-27) ช่วยลดการเปลี่ยนแปลงอย่างฉับพลันของความเค้นเสียดทานที่บริเวณใกล้จุดกลาง(Neutral Point)ซึ่งเป็นจุดหรือบริเวณที่ความเร็วสัมผัสระหว่างชิ้นงานกับเครื่องมือเป็นศูนย์

6. การกำหนดบริเวณที่แข็งเกร็ง (Treatment of a Rigid Region)

บริเวณที่มีอัตราความเครียดน้อยมากเมื่อเทียบกับบริเวณที่เปลี่ยนรูปทั้งหมด ไม่สามารถกำหนดค่าของความเค้นประสิทธิผลในบริเวณนี้ได้ทำให้ไม่สามารถหาค่าพจน์แรกของสมการ (ข-3) ได้ จึงต้องกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นกับอัตราความเครียดในบริเวณเกือบแข็งเกร็งนี้ ด้วยการกำหนดขีดจำกัดของอัตราความเครียด $\dot{\epsilon}_0$ ขึ้น โดยหากอัตราความเครียดมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับค่านี้จะถือว่าเป็นบริเวณเกือบแข็งเกร็ง โดยใช้ความสัมพันธ์ในลักษณะเดียวกับสมการ (ข-38) ดังนี้

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}_0}{\bar{\sigma}_0} \sigma'_{ij} \quad (\text{ข-28})$$

เมื่อ $\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}(\bar{\epsilon}, \dot{\epsilon}_0)$ สำหรับบริเวณที่ $\dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_0$

ในบริเวณเกือบแข็งเกร็งนี้พจน์แรกของสมการ (ข-3) สำหรับบริเวณที่ $\dot{\epsilon} \leq \dot{\epsilon}_0$ จึงแทนได้ด้วยสมการ

$$\int \left(\frac{\bar{\sigma}_0}{\dot{\epsilon}_0} \right) \dot{\epsilon} d\dot{\epsilon} dV \quad (\text{ข-29})$$

การกำหนดขีดจำกัดของอัตราความเครียด ($\dot{\epsilon}_0$) ต้องเลือกค่าที่เหมาะสมไม่มากหรือน้อยเกินไป โดยหากใช้ค่าที่มากเกินไปจะทำให้บริเวณแข็งเกร็งมีมากเกินไปจนรับไม่ได้ ในทางตรงกันข้ามหากใช้ค่าน้อยไปจะทำให้ยากต่อเข้าสู่หาค่าตอบเช่นกัน จากการทดสอบเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าค่าที่เหมาะสมนั้นควรมีค่า 0.01 เท่าของค่าอัตราความเครียดประสิทธิผลเฉลี่ย

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ใช้สมการที่ (ข-3) เป็นพื้นฐานประกอบกับสมการ (ข-27) สำหรับบริเวณขอบที่มีการสัมผัสกับเครื่องมือและใช้สมการ (ข-29) สำหรับบริเวณที่พิจารณาว่าเกือบแข็งเกร็ง

การหาผลเฉลยในสมการทั้งสามหาได้จากสนามความเร็ว (Admissible Velocity Fields) โดยการแบ่งชิ้นงานออกเป็นเอลิเมนต์ โดยสนามความเร็วที่ต่อเนื่องจะกำหนดในรูปของความเร็วที่จุดต่อ (Nodal Point Velocity) โดยสามารถเขียนชุด (set) ของความเร็วที่จุดต่อในรูปเวกเตอร์

$$\mathbf{v}^T = \{v_1, v_2, \dots, v_N\} \quad (\text{ข-30})$$

เมื่อ T แสดงถึงการทรานสโพสท์ N = จำนวนจุดต่อทั้งหมดจำนวนของศาความอิสระของแต่ละจุดต่อ

การยอมรับได้ของสนามความเร็วจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบความเร็วสำหรับผิวที่มีความเร็วเป็นเงื่อนไขขอบ S_u ด้วยการกำหนดค่าความเร็วที่เป็นเงื่อนไขขอบบนจุดต่อที่อยู่บนผิว S_u

สมการที่ (ข-3) จึงขยายออกในรูปของความเร็วที่จุดต่อ $\mathbf{v}$ และการแปรผันของความเร็ว $\delta \mathbf{v}$

$$\frac{\partial \pi}{\partial v_I} = \sum_j \left(\frac{\partial \pi}{\partial v_I} \right)_{(j)} = 0 \quad (\text{ข-31})$$

สมการที่ (ข-31) หาได้จากการหาค่า $\partial \pi / \partial v_I$ ที่ระดับเอลิเมนต์และรวมสมการเข้าด้วยกันเป็นระบบสมการรวม (Global Equation) ในการขึ้นรูปโลหะสมการ (ข-31) เป็นสมการไม่เชิงเส้น การแก้สมการทำได้ด้วยการวนรอบซ้ำ (Iteration) ด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson)

ขั้นตอนของวิธีนิวตัน-ราฟสันประกอบด้วย การทำให้เป็นเชิงเส้น (Linearization) และการกำหนดเกณฑ์การลู่เข้า (Convergence Criteria) การทำให้เป็นเชิงเส้นทำได้โดยการขยายอนุกรมเทเลอร์ (Taylor Expansion) ที่จุดเดาเริ่มต้น (Initial Guess) $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0$

$$\left[\frac{\partial \pi}{\partial v_I} \right]_{\mathbf{V}=\mathbf{V}_0} + \left[\frac{\partial^2 \pi}{\partial v_I \partial v_J} \right]_{\mathbf{V}=\mathbf{V}_0} v_J = 0 \quad (\text{ข-32})$$

ทำให้สามารถสมการ (ข-32) เขียนในรูปของระบบสมการเชิงเส้น

$$\mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (\text{ข-33})$$

เมื่อ $\mathbf{K}$ คือสทิฟเนสเมตริก (Stiffness Metrix) และ $\mathbf{f}$ คือเวกเตอร์ของแรงดัดค้ำของแรงที่จุดต่อ การหาคำตอบของสมการ (ข-33) สามารถทำได้ด้วยวิธีการกำจัดแบบเกาส์เซียน (Gaussian Elimination) จะได้พจน์ของความเร็วปรับแก้ (Velocity Correction Term, $\mathbf{v}$) ความเร็วแก้ไขหรือความเร็วที่คลาดเคลื่อนนี้ใช้ในการพิจารณาการลู่เข้าโดยกำหนดในรูปของ

$\|v\|/\|v\|$ เมื่อกำหนดให้ $\|v\|=(v^T v)^{1/2}$ หากค่า $\|v\|/\|v\|$ ยังเกินกว่าเกณฑ์ที่กำหนดจะต้องปรับค่าความเร็วใหม่เป็น $v_0 + \alpha v$ เมื่อ α เป็นค่าคงที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 เรียกว่าสัมประสิทธิ์ของความหน่วง (Deceleration Coefficient) แล้วเริ่มแก้สมการ (ข-33) ใหม่ โดยการวนรอบซ้ำจนกว่า $\|v\|/\|v\|$ มีค่าน้อยกว่าค่าที่กำหนดจะถือว่าได้คำตอบของสมการ

กระบวนการทำซ้ำแบบนิวตัน-ราฟสันดังกล่าวข้างต้นนี้จะลู่เข้าถ้าค่าความเร็วคาดเดาเริ่มต้นใกล้เคียงกับคำตอบจริง ในกระบวนการเปลี่ยนรูปอย่างง่ายนั้นการกำหนดค่าความเร็วคาดเดาเริ่มต้นอาจกำหนดด้วยวิธีขอบเขตบน (Upper Bound Method) ส่วนในกรณีที่เป็นกรณีนี้อาจเป็นการเปลี่ยนรูปที่ซับซ้อนการกำหนดค่าคาดเดาเริ่มต้นกำหนดได้โดยวิธีทำซ้ำโดยตรง (Direct Iteration Method)

7. สมการสทิงเฟนเนสของเอลิเมนต์

การหาสมการสทิงเฟนเนสเมตริกซ์ที่ระดับเอลิเมนต์สามารถหาได้จากการใช้สมการ (ข-32) ที่ระดับเอลิเมนต์และสามารถแยกพจน์อินทิเกรต (Integrate) ของ $\partial\pi$ ในรูปของความเร็วที่จุดต่อ ได้ดังสมการ

$$\frac{\partial\pi}{\partial v_I} = \frac{\partial\pi_D}{\partial v_I} + \frac{\partial\pi_P}{\partial v_I} + \frac{\partial\pi_{S_F}}{\partial v_I} \quad (\text{ข-34})$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} \frac{\partial\pi_D}{\partial v_I} &= \int_V \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\epsilon}} P_{IJ} v_J dV \\ \frac{\partial\pi_P}{\partial v_I} &= \int_V K C_J v_J C_I dV \\ \frac{\partial\pi_{S_F}}{\partial v_I} &= - \int_{S_F} F_J N_{JI} dS \end{aligned} \quad (\text{ข-35})$$

อนุพันธ์อันดับสองของ π จะได้

$$\frac{\partial^2\pi}{\partial v_I \partial v_J} = \int_V \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\epsilon}} P_{IJ} dV + \int_V \left(\frac{1}{\dot{\epsilon}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \dot{\epsilon}} - \frac{\bar{\sigma}}{\dot{\epsilon}^2} \right) \frac{1}{\dot{\epsilon}} P_{IK} v_K v_M P_{MJ} dV + \int_V K C_J C_I dV \quad (\text{ข-36})$$

หากอัตราความเครียดมีค่าเข้าใกล้ศูนย์คือน้อยกว่าขีดจำกัดของอัตราความเครียด $\dot{\epsilon}_0$ จากสมการ (ข-29) จะได้

$$\delta\pi_D = \int_V \bar{\sigma} \delta \dot{\epsilon} dV = \int_V \frac{\bar{\sigma}_0}{\dot{\epsilon}_0} \dot{\epsilon} \delta \dot{\epsilon} dV \quad (\text{ข-37})$$

โดย $\bar{\sigma}_0/\dot{\epsilon}_0$ เป็นค่าคงที่ ดังนั้นอนุพันธ์อันดับสองตามสมการ (ข-36) สำหรับบริเวณที่เกือบแข็งเกร็งได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_D}{\partial v_I} &= \int_V \frac{\bar{\sigma}_0}{\dot{\epsilon}_0} P_{IJ} V_J dV \\ \frac{\partial^2 \pi_D}{\partial v_I \partial v_J} &= \int_V \frac{\bar{\sigma}_0}{\dot{\epsilon}_0} P_{IJ} dV\end{aligned}\quad (ข-38)$$

8. การอินทิกรัลเชิงตัวเลข

การอินทิกรัลเชิงตัวเลขเป็นขั้นตอนที่สำคัญอย่างหนึ่งของไฟไนต์เอลิเมนต์ เนื่องจากเมื่อแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์แล้ว ที่ระดับเอลิเมนต์สมการยังคงติดอยู่ในรูปการอินทิเกรตไม่ว่าจะเป็นแบบพื้นผิวหรือปริมาตร การอินทิกรัลเชิงตัวเลขหาได้โดยใช้ค่าของจุดที่กำหนดจำนวนหนึ่งซึ่งเรียกว่าจุดอินทิเกรต (Integration Points) ประกอบกับขอบเขตของการอินทิเกรต การกำหนดจำนวนจุดอินทิเกรตนั้นสามารถกำหนดให้ลดลงได้ขณะที่ยังคงรักษาระดับความถูกต้องไว้ โดยการเลือกตำแหน่งจุดอินทิเกรตที่เหมาะสม สูตรของเกาส์เซียนควอดดราเจอร์ (Gaussian Quadrature Formula) เป็นวิธีการอินทิกรัลเชิงตัวเลขที่ใช้จำนวนจุดอินทิเกรตน้อยที่สุดจึงเป็นที่นิยมใช้ในการอินทิกรัลเชิงตัวเลข

ในกรณีของฟังก์ชันหนึ่งมิติสเกลาร์ $f(x)$ ที่กำหนดอยู่ในช่วง $-1 \leq x \leq 1$ การหาค่าอินทิกรัลหาได้โดย

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_I^n w_I f(x_I) \quad (ข-39)$$

เมื่อ x_I เป็นตำแหน่งของจุดอินทิเกรต w_I เป็นส่วนประกอบถ่วงน้ำหนัก (Weight Factor)

ในกรณีฟังก์ชัน $f(\xi, \eta)$ ซึ่งกำหนดอยู่ในพิกัดธรรมชาติสองมิติ ($-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1$) สามารถหาอินทิกรัลได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \int_{-1}^1 \left[\sum_I^n f(\xi_I, \eta) w_I \right] d\eta \\ &= \sum_J^m \sum_I^n w_I w_J f(\xi_I, \eta_J)\end{aligned}\quad (ข-30)$$

ในกรณีสามมิติที่กำหนดในช่วง ($-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1, -1 \leq \zeta \leq 1$)

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_K^l \sum_J^m \sum_I^n w_I w_J w_K f(\xi_I, \eta_J, \zeta_K) \quad (ข-31)$$

สำหรับฟังก์ชัน $f(x, y)$ ในเอลิเมนต์แบบไอโซพาราเมตริกนั้นค่าอินทิกรัลของ $f(x, y)$ หาได้โดย

$$\begin{aligned}\int_A f(x, y) dA &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \\ &= \sum_J^m \sum_I^n w_I w_J f(\xi_I, \eta_J) |J(\xi_I, \eta_J)|\end{aligned}\quad (ข-32)$$

เมื่อ $|J(\xi, \eta)|$ เป็นดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์จาโคเบียนของการแปลงระบบพิกัด

สำหรับฟังก์ชัน $f(r,z)$ ในเอลิเมนต์แบบไอโซพาราเมตริกแบบสมมาตรรอบแกน นั้นค่าอินทิกรัลพื้นที่ใน 1 เรเดียนของ $f(r,z)$ หาได้โดย

$$\begin{aligned} \int_V f(r,z) dA &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi,\eta) |J(\xi,\eta)| r(\xi,\eta) d\xi d\eta \\ &= \sum_J^m \sum_I^n w_I w_J f(\xi_I, \eta_J) |J(\xi_I, \eta_J)| r(\xi_I, \eta_J) \end{aligned} \quad (ข-33)$$

เมื่อ $r(\xi_I, \eta_J)$ เป็นตำแหน่งของจุดอินทีเกรตในแนวกว้าง

ภาคผนวก ค
สรุปโครงการวิจัย

สรุปโครงการวิจัย

สัญญาเลขที่ RDG5/0050/2544 ชื่อโครงการ การวิเคราะห์การอัดรีดอลูมิเนียมด้วยวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์
หัวหน้าโครงการ ผศ.ดร.สุเทพ บุตรดี สถาบัน เทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
ที่อยู่ 1518 ถนนพิบูลสงคราม บางซื่อ กรุงเทพฯ 10800
โทรศัพท์...(02) 913-2500 ต่อ 8210 E-mail : stb@kmitnb.ac.th

ความสำคัญ / ความเป็นมา

ในการผลิตอลูมิเนียมเส้นด้วยการอัดรีดนั้นมักต้องทำการปรับแก้ลองผิดลองถูกด้วยประสบการณ์ของผู้ปฏิบัติงาน โดยใช้การปรับแก้พารามิเตอร์ในการรีดหรืออาจต้องแก้ไขแม่พิมพ์ การนำโปรแกรมทางไฟไนต์เอลิเมนต์มาช่วยในการวิเคราะห์และจำลองกระบวนการอัดรีด เช่นลักษณะไหลของอลูมิเนียมในการอัดรีด การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ การบิดตัวและความเค้นในแม่พิมพ์ที่เกิดจากแรงดันในการอัดรีด เป็นต้น ซึ่งสิ่งเหล่านี้เป็นตัวแปรที่มีผลต่อคุณภาพของอลูมิเนียม โดยจะทำการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ จากนั้นทำการทดสอบจริงเพื่อเปรียบเทียบผล

วัตถุประสงค์โครงการ

1. นำโปรแกรมทางไฟไนต์เอลิเมนต์ช่วยวิเคราะห์ การออกแบบแม่พิมพ์และการปรับตั้งพารามิเตอร์การรีดให้เหมาะสม และจำลองการไหลของอลูมิเนียม
2. เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์จากโปรแกรมทางไฟไนต์เอลิเมนต์กับการทดลองจริง

ผลที่ได้รับ	บรรลุมติประสงค์ข้อที่	โดยทำให้
ข้อมูลจากการจำลองการรีดซึ่งเป็นอิทธิพลของพารามิเตอร์ในการรีดที่มีผลต่อกระบวนการอัดรีดอลูมิเนียม	1	มีความเข้าใจในอิทธิพลของพารามิเตอร์ในการรีดที่มีต่อกระบวนการอัดรีดอลูมิเนียมมากขึ้น
ข้อมูลเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์กับผลจากการทดลองจริง	2	เป็นการตรวจสอบความน่าเชื่อถือของการจำลองการรีดด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อยืนยันผลการวิเคราะห์จากโปรแกรมเทียบกับผลการรีดจริง

การนำผลงานวิจัยไปใช้ประโยชน์

ข้อมูลที่ได้จากการศึกษาการนำโปรแกรมทางไฟไนต์เอลิเมนต์วิเคราะห์กระบวนการอัดรีดอลูมิเนียมที่ได้เป็นข้อมูลที่ใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาการออกแบบแม่พิมพ์โดยใช้คอมพิวเตอร์ช่วยวิเคราะห์กระบวนการที่เกิดขึ้นขณะรีด รวมถึงอิทธิพลของพารามิเตอร์การรีดที่มีผลต่อการรีด นอกจากนี้ข้อมูลผลเปรียบเทียบกับผลการรีดจริงภายในโรงงานทำให้ได้ทราบถึงระดับของถูกต้องในการจำลองการรีดด้วยโปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์

การประชาสัมพันธ์

เข้าร่วมงานสัมมนาทางวิชาการ PCMM (Pacific Conference Manufacturing and Management) โดยสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือเป็นเจ้าภาพ วันที่ 27-29 พฤศจิกายน 2545 ณ โรงแรมสยามซิตี้