



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การศึกษาผลของรูปร่าง การจัดเรียงของอนุภาค และรูปแบบอิเล็กทรอนิกส์ ที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรง

โดย บุญชัย เตชะอำนาจ

สิงหาคม 2551

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การศึกษาผลของรูปร่าง การจัดเรียงของอนุภาค และรูปแบบอิเล็กโตรด ที่มีต่อสนามไฟฟ้าและ
แรง

บุญชัย เตชะอำนาจ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สนับสนุนโดยสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา
และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกอ. และ สกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

สารบัญ

หัวข้อ	หน้าที่
บทคัดย่อ(ไทย)	3
บทคัดย่อ(อังกฤษ)	5
Executive Summary	7
1. ความสำคัญและที่มาของปัญหา	8
2. วัตถุประสงค์ของโครงการ	10
3. ผลการศึกษา	11
4. สรุปผลการศึกษาที่ได้	88
5. รายการเอกสารอ้างอิง	89
6. Output ที่ได้จากการวิจัยในโครงการ	92
ภาคผนวก	93

บทคัดย่อ

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาลักษณะสมบัติของสนามไฟฟ้า และแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากสนามไฟฟ้า ตั้งแต่ระดับอนุภาคเดี่ยวภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก ระดับอนุภาคเดี่ยวภายในระบบอิเล็กทรอนิกส์ที่มีชั้นผิวฉนวน ไปจนถึง ระดับกลุ่มอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก. ผลการศึกษามีดังต่อไปนี้

- โครงการนี้ได้พัฒนาวิธีคำนวณสนามไฟฟ้าในระบบสองมิติ โดยใช้หลักการของเงามัลติโพลในการทำให้เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องเป็นจริง และได้นำเสนอสมการเงามัลติโพลสำหรับวัตถุตัวนำหรือฉนวนที่มีขอบเขตเป็นทรงกระบอกหรือเป็นระนาบ. การคำนวณใช้การกระจายมัลติโพลใหม่ 3 ชนิด ซึ่งทำให้สามารถใช้กระบวนการวางเงามัลติโพลได้. ข้อดีของวิธีนี้เหนือวิธีเงาประจุทั่วไปก็คือวิธีที่นำเสนอนี้สามารถใช้ได้การรูปแบบที่ซับซ้อน มีวัตถุมากกว่าสองตัวในระบบได้. นอกจากนี้ วิธีคำนวณนี้ สามารถประยุกต์ใช้ประมาณสนามไฟฟ้าและแรง ในกรณีของอนุภาคที่มีลักษณะแหลมยาวได้.
- การศึกษาในระดับอนุภาคเดี่ยว ได้พิจารณากรณีของทรงกลมติดกัน และกรณีของอนุภาคทรงคล้ายทรงกลมแป้นข้างหรือแป้นหัว. สำหรับอนุภาครูปทรงกลมติดกัน ผู้วิจัยได้นำเสนอการประยุกต์ใช้วิธีเงามัลติโพลในการคำนวณสนามไฟฟ้า. วิธีที่นำเสนอนี้สามารถใช้ได้กับกรณีของอนุภาคตัวนำที่ต่อลงดิน หรือไม่ต่อลงดิน หรือได้รับการป้องกันภัยไฟฟ้าคงที่ค่าหนึ่งได้. ผู้วิจัยได้แสดงตัวอย่างการคำนวณสำหรับตัวนำทรงกลมติดกันที่ต่อลงดิน ทั้งในกรณีที่ตัวนำทรงกลมมีรัศมีเท่ากัน และกรณีที่มีรัศมีต่างกัน. ผลการคำนวณสอดคล้องกับขีดจำกัดเมื่อทรงกลมทั้งสองซ้อนทับกันพอดี. สำหรับกรณีของทรงกลมรัศมีต่างกัน ผลการคำนวณเชิงตัวเลขแสดงว่า วิธีนี้สามารถใช้ได้เมื่อระดับของมุมตัดไม่สูงเกินไป.
- การศึกษาอนุภาคทรงคล้ายทรงกลมแบบมีชั้นผิวฉนวน ได้วิเคราะห์แรงดันที่ตกคร่อมชั้นผิวฉนวนและตัวประกอบโพลาริเซชัน โดยใช้โมเดลแมนย่ำแบบที่ชั้นผิวฉนวนมีความหนาคงที่. วิธีวิเคราะห์มีพื้นฐานจากการกระจายฮาร์มอนิกในระบบพิกัดทรงคล้ายทรงกลม และหาคำตอบโดยพิจารณาปฏิกริยาระหว่างแต่ละองค์ประกอบฮาร์มอนิก. ผลการศึกษาทำให้เข้าใจความแตกต่างของแรงดันที่ตกคร่อมชั้นผิวฉนวนและตัวประกอบโพลาริเซชันที่ได้จากการใช้โมเดลแมนย่ำ เมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้เมื่อใช้โมเดลประมาณที่มีความหนาของชั้นฉนวนไม่คงที่.
- ในการศึกษาสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคในระบบอิเล็กทรอนิกส์ที่มีชั้นผิวฉนวน เมื่อชั้นฉนวนมีความหนาถึงอนันต์ ผู้วิจัยได้ใช้วิธีเงาประจุในการคำนวณสนามไฟฟ้า โดยวางอนุกรมอนันต์ของเงาประจุและเงาไดโพล. สนามไฟฟ้ามีค่าสูงสุด ณ จุดสัมผัสระหว่างอนุภาคกับชั้นฉนวน. ทั้งสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส และแรงที่ทำกับอนุภาคเพิ่มขึ้นตามสภาพยอมของของแข็ง. แรงที่ได้ดึงให้อนุภาคทรงกลมอยู่ติดกับชั้นฉนวนแข็ง. ผลการศึกษาทำให้ได้สมการง่ายๆ สำหรับประมาณสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส และแรงที่ทำกับอนุภาค โดยมีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 3% เมื่อฉนวนแข็งมีสภาพยอมไม่เกิน 32 และ 64 เท่าของสภาพยอมของตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบ ตามลำดับ.
- ในการจัดเรียงของอนุภาคและตัวนำระนาบที่มีชั้นผิวฉนวนความหนาจำกัด สนามไฟฟ้าถูกคำนวณโดยใช้วิธีเงามัลติโพล โดยมีกระบวนการคำนวณแบบทำซ้ำที่ถูกนำเสนอขึ้นโดยเฉพาะ. ผลการคำนวณแสดงว่าสนามไฟฟ้าเพิ่มขึ้นจากกรณีที่ไม่มีชั้นผิวฉนวน. อย่างไรก็ตาม ถ้าอนุภาคอยู่ห่างจากผิวฉนวนประมาณระยะเท่ากับรัศมีของอนุภาค ผลของชั้นผิวฉนวนก็สามารถละเลยได้. ภายในชั้นผิวฉนวน สนามไฟฟ้าบนแกนสมมาตรจะมีความสม่ำเสมอมากขึ้น และสนามไฟฟ้าเฉลี่ยจะ

สูงขึ้น เมื่อความหนาของชั้นผิวฉนวนลดลง. สำหรับกรณีนี้ชั้นผิวฉนวนมีความบางเพียงพอ ผู้วิจัยได้พบว่า เราสามารถประมาณค่าสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส และแรงบนอนุภาคตัวนำได้ เป็นฟังก์ชันกำลังของอัตราส่วนสภาพยอมของชั้นฉนวนแข็งต่อสภาพยอมของตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบ.

- การศึกษาพฤติกรรมของระบบอนุภาคทำกับระบบของไหลออร์ โดยใช้โมเดลแบบมัลติโพล ซึ่งรวมปฏิกิริยาอันดับที่สูงกว่าโมเดลแบบไดโพลที่ใช้กันอยู่ทั่วไป. โมเดลแบบมัลติโพลใช้หลักการกระจายมัลติโพล และวิธีเงาประจุในการคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาค. ผู้วิจัยได้เลือกอันดับของมัลติโพล และจำนวนรอบในการทำซ้ำที่เหมาะสม เพื่อให้ได้ค่าแรงที่แม่นยำสูงขึ้น โดยที่ไม่ใช้เวลาในการคำนวณนานเกินไป. การศึกษาในกรณีของอนุภาคสองตัวแสดงว่า แรงที่ได้เพิ่มขึ้นอย่างไม่เป็นเชิงเส้นกับอันดับของมัลติโพลและจำนวนรอบการทำซ้ำที่ใช้. จากนั้น ได้ทำการจำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาคจำนวน 20 และ 67 อนุภาค และเปรียบเทียบผลการจำลองที่ได้ กับผลที่ได้เมื่อใช้โมเดลแบบไดโพล. ผลการศึกษาแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างอย่างมาก เมื่อปรับปรุงการจำลองด้วยการใช้โมเดลมัลติโพล.

Abstract

This research has studied the characteristics of electric field and force induced by the field for (1) a single particle under an applied electric field, (2) an isolated particle in a system of dielectric barrier, and (3) a system of particles under an external field. Results of the studies may be summarized as follows:

- We have presented the method of images for calculating electric field in two-dimensional arrangements. The method utilizes multipoles as the images to satisfy boundary conditions. The images are given for planar or cylindrical boundaries between two dielectrics and for those between a dielectric and a conductor. We introduce the use of three kinds of multipole re-expansions, which enables the calculation of images in complicated arrangements. The method has a clear advantage over using only line charges or line dipoles when the arrangement under consideration consists of more than two objects. In addition, the proposed method is also applicable to the estimation of the electric field and force on a very long particle.
- For the level of a single particle, the research is focused on (1) intersecting spherical particle and (2) spheroid particle. In arrangements of intersecting conducting spheres, the application of the method of images to the calculation of electric field is presented. The method is applicable for cases of electrically floating, grounded, or energized conducting spheres that intersect each other. Examples are given for two grounded intersecting spheres of equal radii and those of different radii, respectively, under an external uniform field. The results for the spheres of equal radii agree well with the analytical solutions for the case of completely overlapped spheres and touching spheres, respectively. For the spheres of different radii, the numerical results show that the method may also be used when the degree of intersection is not too high.
- For an isolated spheroidal particle with insulating membrane, we have analyzed the membrane voltage and the polarization factor using a precise model, by which the membrane has a uniform thickness. The analytical method is based on the harmonic expansion of the field, to include the condition of the uniform membrane thickness as a series expansion of the geometrical factor, and to solve the field problem as an interaction of the harmonic components. The results clarified the effects of the applied model on the membrane voltage and the polarization factor of the particle.
- For an arrangement of a conducting sphere lying on a dielectric solid under a uniform field, we have applied the analytical method of successively placing three infinite sequences of point and dipole charges (zero- or first-order multipoles). The electric field is highest at the contact point. Both the contact-point field and the force increase with the permittivity ratio of the solid to that of the surrounding medium. The resulting force always attracts the sphere to the solid. We have given very simple formulae for approximating the contact-

point field and the force which agree with the precise values within a difference of 3% for permittivity ratios up to 32 and 64, respectively.

- In an arrangement consisting of an uncharged conducting sphere and a plane electrode with a dielectric barrier, the electric field is calculated by using the method of multipole images using an iterative algorithm proposed for calculating the images of the dielectric barrier of finite thickness. The calculation results show electric field intensification due to the presence of the dielectric barrier having higher permittivity than that of the surrounding medium; however, if the barrier is separated from the conducting sphere by at least the sphere radius, its influence is negligible. Inside the dielectric barrier, the electric field on the axis of symmetry becomes more uniform and the average field significantly increases with decreasing its thickness. For a case where dielectric barrier is sufficiently thin, the electric field at the contact point and the force on the conducting sphere vary approximately as power functions of the permittivity ratio.
- Studies on the system of particles have been done for an electrorheological (ER) fluid system by using a multipole model that includes multipolar interactions between particles. The model uses the multipole re-expansion and the method of images for calculating electric field and force. The highest order of multipoles and the number of iterations used in the method of images can be chosen for the accuracy of the force approximation and the simulation time required. Study of a two-particle configuration shows that the force does not increase linearly with increasing the order of multipoles and the number of iterations. We have performed the simulation of a system of 20 and 67 particles, and compared the formulation of particle chains with that obtained using the dipole model. The results indicate significant difference when the multipole model is used in simulation.

Executive Summary

This research has studied the characteristics of electric field and force induced by the field for (1) a single particle under an applied electric field, (2) an isolated particle in a system of dielectric barrier, and (3) a system of particles under an external field. Results of the studies may be summarized as follows:

- A novel calculation method based on multipole images has been developed for two dimensional problems. This method is capable of estimating electric field and force for the cases of long particles.
- The study of single particle includes the analysis of a) a intersecting spherical particle and b) a spheroidal particle. For the case of intersecting spheres, the analysis is applicable for an arbitrary angle of intersection between the spheres. For the case of a spheroidal particle, we have determined the polarization factor at various frequencies, and demonstrated the difference obtained by using a precise model for which the insulating membrane thickness is uniform, independent of azimuth angle.
- For the study of an isolated particle in a system of dielectric barrier, we have applied the method of images and the method of multipole images to the potential problems in order to achieve high accuracy of the results. Results of the study illustrate field intensification at a small gap between the particle and the dielectric barrier or at the contact point between the particle and the barrier. In addition, we are able to determine simple empirical formulae for estimating the electric field and force in such systems.
- Simulation of a system of particle under an externally applied electric field has been performed for an electrorheological (ER) fluid. We have utilized more accurate model (multipole model) in the calculation of force acting on particles for the simulation. The simulation results show significant difference compared with those obtained by the conventional dipole model. The time of chain formulation is shorter, and the appearance of chains becomes more consistent by the use of the multipole model. Furthermore, we have also demonstrated that it may be improper to use the MSD as a parameter to indicate the steady state of chain formation in practice.

1. ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ในปัจจุบันมีการใช้งานฉนวนและตัวนำไฟฟ้าในรูปแบบของอนุภาคอยู่มากมาย. ตัวอย่างของการใช้ประโยชน์ที่สำคัญได้แก่ เครื่องถ่ายภาพเอกซเรย์ เครื่องพ่นสีแบบใช้ไฟฟ้า เครื่องเคลือบวัสดุต่างๆ [1]. (เอกซเรย์กำลังแสดงอยู่ในตอนท้ายของหัวข้อที่ 6.) ในระบบฉนวนไฟฟ้าแรงสูง ก็มีการเติมอนุภาคขนาดเล็กหรือฟิลเลอร์ (filler) ชนิดต่างๆ เพื่อปรับปรุงลักษณะสมบัติทางไฟฟ้าของวัสดุฉนวน ได้แก่ สภาพนำหรือค่าคงตัวไดอิเล็กตริก[2]. ในอีกด้านหนึ่ง มักมีการปรากฏอยู่ของอนุภาคฉนวนหรืออนุภาคตัวนำโดยไม่ได้ตั้งใจ เนื่องจากระบวนการผลิต กระบวนการประกอบอุปกรณ์ไฟฟ้าแรงสูง. ตัวอย่างการใช้ประโยชน์ที่สำคัญซึ่งได้รับความสนใจมากในปัจจุบันอีกชนิดหนึ่งก็คือ ของไหล ER [3, 4] (electrorheological fluid). ของไหล ER เป็นฉนวนไฟฟ้าเหลวที่มีอนุภาคขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางในช่วง 1 ถึง 50 ไมโครเมตรอยู่ภายใน. เมื่อป้อนสนามไฟฟ้าที่มีขนาดสูงพอให้กับของไหล ER ของไหล ER จะมีความหนืดจำเพาะเพิ่มขึ้นอย่างฉับพลัน. ความหนืดจำเพาะของของไหลจะกลับคืนสู่สภาพเดิม เมื่อตัดสนามไฟฟ้าที่ป้อนออกไป. เวลาที่ใช้ในการเปลี่ยนแปลงความหนืดนี้อยู่ในช่วงมิลลิวินาที ซึ่งถือว่ามีความเร็วมาก. ของไหล ER มีแนวทางการใช้งานในอุตสาหกรรมได้หลายด้านเช่น คลัตช์ อุปกรณ์ควบคุมการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์ อุปกรณ์รับแรงกระแทก (shock absorber) เป็นต้น.

ในการใช้ประโยชน์อนุภาคฉนวนหรืออนุภาคตัวนำที่ได้กล่าวมาข้างต้นนี้ ลักษณะสมบัติของสนามไฟฟ้าหรือแรงบนอนุภาคมีความสำคัญอย่างยิ่งต่อความสามารถในการใช้งาน. สำหรับการใช้งานทางไฟฟ้าสถิตทั่วไปแรงที่เกิดขึ้นมีผลต่อตำแหน่ง การเคลื่อนที่ และเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของอนุภาค. ในกรณีที่อนุภาคฉนวนเป็นฟิลเลอร์ ลักษณะสมบัติของวัสดุโดยรวมขึ้นอยู่กับปฏิกิริยาการกระจายของฟิลเลอร์ และลักษณะสมบัติทางไฟฟ้าของฟิลเลอร์. ในระบบไฟฟ้าแรงสูงที่มีการฉนวนด้วยก๊าซ อนุภาคฉนวนหรือตัวนำทำให้ความสามารถในการฉนวนของอุปกรณ์ต่ำกว่าที่ได้ออกแบบไว้ เนื่องจากเมื่อได้รับแรงจากสนามไฟฟ้า อนุภาคมีโอกาสเคลื่อนที่ไปสัมผัสอิเล็กโทรด ทำให้เกิดดีสชาร์จบางส่วนหรือเบรกดาวน์ขึ้นในระบบฉนวนได้.

เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงความหนืดของของไหล ER เกิดจากการที่อนุภาคฉนวนภายในของไหลเรียงตัวกันเมื่อได้รับสนามไฟฟ้าและเกิดแรงทางไฟฟ้าระหว่างอนุภาคขึ้น การคำนวณหาแรงระหว่างอนุภาคที่อยู่ภายในจึงเป็นสิ่งที่สำคัญในการศึกษาสมบัติของของไหล ER. ในขณะที่ของไหลหยุดนิ่ง การเรียงตัวของอนุภาคนั้นจะเป็นไปในแนวของสนามไฟฟ้า แรงที่เกิดขึ้นระหว่างอนุภาคฉนวนนี้ขึ้นกับความเครียดสนามไฟฟ้าที่ผิวของอนุภาค. จนถึงปัจจุบัน ได้มีการศึกษาองค์ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับแรงที่เกิดขึ้นกับอนุภาคในแง่ต่างๆ มากมาย. แต่งานเกือบทั้งหมดเป็นการศึกษาที่พิจารณาอนุภาครูปทรงกลม ภายใต้สนามไฟฟ้าแบบสม่ำเสมอเท่านั้น. นอกจากนี้ งานวิจัยที่วิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงบนผิวอนุภาคที่มีอยู่เกือบทั้งหมดไม่ได้พิจารณาถึงผลของอิเล็กโทรด.

ในทางปฏิบัติ ลักษณะรูปร่างของอนุภาคไม่เป็นทรงกลมโดยสมบูรณ์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในระบบฉนวนไฟฟ้าแรงสูง อนุภาคลักษณะแหลมยาว มีแนวโน้มที่จะทำให้เกิดปัญหาในระบบมากกว่า. อีกทั้ง บางครั้งก็มีการเคลือบหรือวางชั้นฉนวนคั่น (dielectric barrier) บนผิวของอิเล็กโทรดเพื่อป้องกันไม่ให้อนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโทรดโดยตรง.

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะมุ่งเน้นที่กรณีของอนุภาคที่ไม่เป็นทรงกลม กรณีที่มีชั้นฉนวนบางเคลือบอยู่บนอิเล็กโทรด และกรณีที่มืออนุภาคจำนวนมากกว่าสองชิ้นไปอยู่ในระบบ. การวิเคราะห์คำนวณหาสนามไฟฟ้าและแรงสำหรับกรณีเหล่านี้ ทำได้ยาก เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงสนามไฟฟ้าบนผิวหรือรอยต่อระหว่างตัวกลางอย่างมาก. เพื่อให้สามารถคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้าและแรงออกมาได้อย่างแม่นยำ ผู้วิจัยจะใช้สองวิธีการในการศึกษานี้ คือ

(ก) วิธีสมการเชิงวิเคราะห์

(ข) วิธีเชิงเลข ในงานวิจัยนี้ จะใช้วิธีชั้นประกอบขอบเขต (boundary element method).

ในส่วนของวิธีสมการเชิงวิเคราะห์ ผู้วิจัยจะพยายามขยายความสามารถวิธีเงามัลติโพล (the method of multipole images) ซึ่งเป็นวิธีที่สามารถคำนวณสนามไฟฟ้าได้อย่างแม่นยำสูงในกรณีที่รูปแบบปัญหาเป็นแบบไม่ซับซ้อน. วิธีเชิงเลขจะถูกนำมาตรวจสอบความแม่นยำ และคำนวณหาสนามไฟฟ้าบนโซ่อนุภาคที่มีจำนวนมากกว่าสองอนุภาค. วิธีเชิงเลขนี้จะใช้เทคนิคฟาสต์มัลติโพล เพื่อให้สามารถคำนวณปัญหาได้อย่างละเอียดและแม่นยำได้ในกรณีหลายอนุภาค ซึ่งวิธีเชิงวิเคราะห์ใช้เวลานานมากในการคำนวณ.

องค์ความรู้พื้นฐานที่ได้จากงานวิจัยนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อไปในการศึกษาพฤติกรรมของอนุภาค ที่มีปรากฏอยู่ในอุปกรณ์ทางไฟฟ้าสถิตต่างๆ ซึ่งรวมถึงของไหล ER ด้วย. ในกรณีของระบบฉนวนไฟฟ้าแรงสูง ความเข้าใจในพฤติกรรมของอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้า จะเป็นประโยชน์ต่อการออกแบบระบบกับดักอนุภาคในอุปกรณ์ต่างๆ เพื่อป้องกันไม่ได้อนุภาคเคลื่อนที่ไปกระตุ้นให้เกิดดีสชาร์จภายในระบบได้. นอกจากนี้ ก็ยังมีการประยุกต์ใช้งานในระบบของเซลล์สังเคราะห์ชีวภาพ ซึ่งเป็นลักษณะของอนุภาคตัวนำ ที่มีชั้นฉนวนบางเคลือบอยู่.

2. วัตถุประสงค์

โครงการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาลักษณะสมบัติของแรงและ สนามไฟฟ้าบนอนุภาคในหลายระดับ ตั้งแต่

(ก) กรณีของอนุภาคเดี่ยว (หรือกรณีอนุภาคอยู่ห่างจากอนุภาคอื่นมากเพียงพอ จนสามารถละเลยปฏิสัมพันธ์ระหว่างอนุภาคได้) ที่อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอกแบบสม่ำเสมอ ในกรณีผู้วิจัยจะเน้นในกรณีของอนุภาคที่ไม่เป็นทรงกลม.

(ข) กรณีของอนุภาคเดี่ยว ที่อยู่ในระบบอิเล็กทรอนิกส์ชั้นสอง เป็นแบบที่มีชั้นฉนวนกั้นอยู่ระหว่างอิเล็กโตรดกับอนุภาค ซึ่งเป็นรูปแบบของการเกิดดีสชาร์จเงียบ (Silent discharge or dielectric barrier discharge)

(ค) กรณีของกลุ่มอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ โดยจะศึกษาลักษณะของการก่อตัวเป็นโซ่อนุภาค และเวลาที่ใช้ในการเกิดโซ่

3. ผลการศึกษา

3.1 การวิเคราะห์อนุภาคที่ไม่เป็นทรงกลม

ในกรณีของอนุภาคที่ไม่เป็นทรงกลมนี้ ผู้วิจัยได้วิเคราะห์อนุภาคแบบทรงกลมตัดกัน และอนุภาคแบบทรงรี ซึ่งอนุภาคทั้งสองกรณีนี้มีความเกี่ยวข้องกับการหลอมหรือการเชื่อมอนุภาค. นอกจากนี้ ยังได้พัฒนาวิธีวิเคราะห์สนามไฟฟ้าแบบสองมิติ ซึ่งจะสามารถนำมาใช้สำหรับประมาณหาค่าแรงหรือสนามไฟฟ้าได้ เมื่ออนุภาคมีลักษณะเป็นแท่งยาว.

3.1.1 วิเคราะห์สนามไฟฟ้าบนอนุภาคที่มีลักษณะไม่เป็นทรงกลม

การศึกษาศักย์ไฟฟ้าในระบบทรงกลมตัดกัน มีความสำคัญในการใช้งานที่เกี่ยวข้องกับการหลอมหรือการรวมตัวของอนุภาค. วิธีเชิงวิเคราะห์ที่ถูกนำเสนออยู่ในปัจจุบัน อาศัยหลักการเงาประจวบระบบพิกัดแปลงแบบส่วนกลับเรขาคณิต (geometrical inversion) [1, 2] หรืออาศัยการแปลงแบบเคลวิน (Kelvin transformation) [3]. อย่างไรก็ตาม วิธีการเหล่านี้สามารถใช้ได้จำกัดเฉพาะในกรณีที่ทรงกลมทั้งสองตัดกันเป็นมุมเท่ากับ $180/n$ (n เป็นจำนวนเต็ม) เท่านั้น. นอกจากนี้ ทรงกลมทั้งสองที่พิจารณา ต้องมีขนาดเท่ากันอีกด้วย. แม้ว่า จะมีการนำเสนอวิธีการวิเคราะห์สำหรับทรงกลมที่ตัดกันเป็นมุมทั่วไปใดๆ [4 – 9] แต่การคำนวณต้องใช้อินทิกรัลของอนุกรมอนันต์ ทำให้การคำนวณซับซ้อนมาก แม้เราจะพิจารณาในกรณีง่ายๆ ของทรงกลมภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก.

หัวข้ออธิบายการใช้วิธีเงาสมมติโพล และเทคนิคการกระจายมัลติโพล เพื่อคำนวณสนามไฟฟ้าในกรณีทั่วไปของทรงกลมตัวนำที่ตัดกัน ภายใต้ศักย์ไฟฟ้าภายนอก. วิธีที่นำเสนอในที่นี้ เป็นการขยายต่อจากวิธีที่ได้นำเสนอไว้แล้ว สำหรับกรณีของทรงกลมที่อยู่ห่างหรือสัมผัสกัน (นั่นคือ ไม่ตัดกันนั่นเอง) [10, 11]. วิธีนี้ มีความสามารถในการใช้ได้ทั่วไปมากกว่าการแปลงแบบส่วนกลับเรขาคณิต หรือการแปลงแบบเคลวิน เนื่องจากสามารถใช้ได้กับทรงกลมที่มีขนาดไม่เท่ากัน ซึ่งตัดกันเป็นมุมใดๆ ได้. เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีเชิงวิเคราะห์ที่ใช้อินทิกรัลของอนุกรมอนันต์ วิธีที่นำเสนอนี้ไม่ซับซ้อน เนื่องจากไม่มีการใช้อินทิกรัลมาเกี่ยวข้องกับการคำนวณโดยตรงแต่อย่างใด.

3.1.1.1 รูปแบบการจัดเรียงทางกายภาพ

รูปที่ 3.1.1.1 แสดงรูปแบบการจัดเรียงของตัวนำทรงกลมสองตัวที่ตัดกันอยู่ โดยทรงกลมทั้งสองเรียงตัวอยู่ตามแนวแกน z . ทรงกลมล่างและทรงกลมบนมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\mathbf{p}(0, 0, z_p)$ และ $\mathbf{q}(0, 0, z_q)$ ตามลำดับ และมีรัศมีเท่ากับ a และ b . ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางทั้งสองเท่ากับ $D = z_q - z_p$. ในที่นี้เราพิจารณากรณีที่ทรงกลมต่อลงดิน มีศักย์ไฟฟ้าเป็นศูนย์. กรณีที่ตัวนำทรงกลมไม่ต่อลงดิน ก็สามารถวิเคราะห์ได้ด้วยหลักการเดียวกัน โดยอาศัยเงื่อนไขของประจุรวมเท่ากับศูนย์.

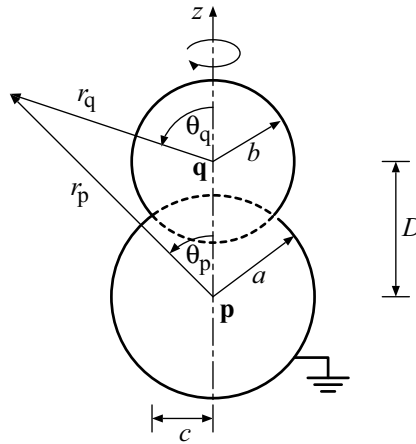
กำหนดให้ทรงกลมบนมีขนาดเท่ากับหรือเล็กกว่าทรงกลมล่าง. เราสามารถแสดงได้ว่า พิกัด z_i บนเส้นรอยตัด(วงกลม)ระหว่างผิวของทรงกลมทั้งสอง เป็นไปตามสมการ

$$z_i - z_p = \frac{D^2 + (a^2 - b^2)}{2D} \quad (3.1.1.1)$$

และรัศมี c ของวงกลมรอยตัดนี้มีค่าเป็น

$$c = \sqrt{a^2 - (z_i - z_p)^2} \quad (3.1.1.2)$$

การอธิบายต่อจากนี้จะใช้สัญลักษณ์ (r_x, θ_x) แสดง พิกัดทรงกลมที่มีจุด \mathbf{x} เป็นจุดกำเนิด. ดังแสดงตัวอย่าง เป็นพิกัด (r_p, θ_p) และพิกัด (r_q, θ_q) ในรูปที่ 3.1.1.1. สังเกตว่า ถ้าศักย์ไฟฟ้าในการจัดเรียงที่พิจารณา มี ลักษณะการกระจายที่สมมาตรรอบแกนหมุน พิกัดที่สาม (มุมบนระนาบ x - y) ของระบบพิกัดทรงกลมจะไม่ เกี่ยวข้องกับการคำนวณ.



รูปที่ 3.1.1.1 ทรงกลมตัดรัศมีเท่ากับ a และ b .

3.1.1.2 วิธีคำนวณ

เมื่อทรงกลมในการจัดเรียงตามรูปที่ 3.1.1.1 อยู่ภายใต้ศักย์ไฟฟ้าภายนอก ϕ^E จะมีประจุถูกเหนี่ยวนำขึ้นที่ ผิวของทรงกลม. ในที่นี้ สมมติให้ศักย์ไฟฟ้าภายนอกมีลักษณะสมมาตรรอบแกนหมุน เพื่อลดความซับซ้อน ของสมการ. ประจุที่ถูกเหนี่ยวนำขึ้นที่ผิวจะทำให้ศักย์ไฟฟ้าลัพธ์ของระบบเปลี่ยนแปลงไป. วิธีการคำนวณที่ จะกล่าวต่อไปนี้ อธิบายกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จะประยุกต์ใช้กับศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากประจุเหล่านี้ สำหรับคำนวณหาศักย์ไฟฟ้าลัพธ์ของระบบ.

ก. สมการของศักย์ไฟฟ้าสำหรับวิธีเงามัลติโพล

เราจะเริ่มจากการพิจารณาเฉพาะประจุ σ^A บนผิว A ของทรงกลมล่าง โดยละเลยประจุของทรงกลมบน. พื้นผิว A แสดงด้วยเส้นทึบในรูปที่ 3.1.1.2. ประจุ σ^B บนผิวของผิวของทรงกลมบน ก็พิจารณาด้วย หลักการเดียวกัน. ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจาก σ^A อาจเขียนในรูปของศักย์ไฟฟ้า ψ_p^A เนื่องจากมัลติโพล ซึ่ง กระจายรอบจุดศูนย์กลาง \mathbf{p} ของทรงกลมได้เป็น

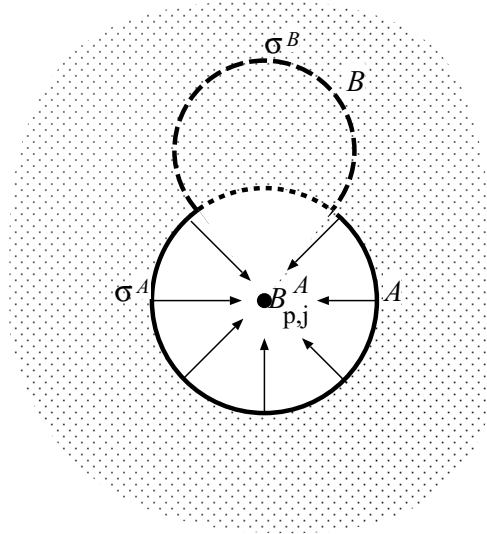
$$\psi_p^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_{p,j}^A}{r_p^{j+1}} P_j(\cos \theta_p) \quad (3.1.1.3)$$

เมื่อ P_j เป็นพหุนามเลอจองดร์อันดับที่ j . สังเกตว่า การแสดงสมการศักย์ไฟฟ้าในที่นี้ จะใช้ดัชนีล่างแสดงจุดศูนย์กลางของการกระจาย และใช้ดัชนีบนแสดงตำแหน่งของประจุที่ทำให้เกิดศักย์นั้น. ในสมการที่ (3.1.1.3) $B_{p,j}^A$ เป็นมัลติโพลอันดับที่ j ซึ่งอยู่ ณ ตำแหน่ง \mathbf{p} . นิยามของขนาด(โมเมนต์)ของมัลติโพลในที่นี้ แตกต่างจากนิยามทั่วไปเล็กน้อย เพื่อให้สมการของศักย์ไฟฟ้าอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น. ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลในสมการที่ (3.1.1.3) มีค่าลู่เข้า ภายในบริเวณเปิดที่แสดงในรูปที่ 3.1.1.2. นั่นคือ ภายนอกทรงกลมจุดศูนย์กลาง \mathbf{p} รัศมี a .

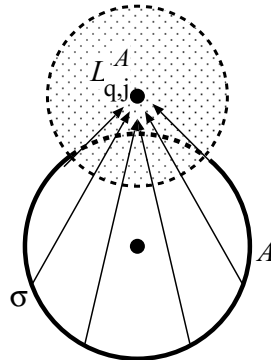
ในอีกด้านหนึ่ง ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจาก σ^A ยังสามารถกระจายรอบจุด \mathbf{q} ของทรงกลมบนได้ (ดูรูปที่ 3.1.1.3). สำหรับกรณีนี้ ศักย์ไฟฟ้าอยู่ในรูปแบบการกระจายเฉพาะที่ หรือการกระจายแบบเทย์เลอร์ เป็น

$$\varphi_q^A = \sum_{j=0}^{\infty} L_{q,j}^A r_q^j P_j(\cos \theta_p) \quad (3.1.1.4)$$

เมื่อ φ_q^A เป็นศักย์ไฟฟ้าที่ถูกกระจายเฉพาะที่รอบจุด \mathbf{q} และ $L_{q,j}^A$ เป็นสัมประสิทธิ์อันดับที่ j ของศักย์ไฟฟ้า. ศักย์ไฟฟ้า φ_q^A มีค่าลู่เข้า สำหรับจุดในบริเวณเปิดที่แสดงในรูปที่ 3.1.1.3. นั่นคือ ภายในทรงกลมจุดศูนย์กลาง \mathbf{q} รัศมี b . สังเกตว่า ในที่นี้ สัญลักษณ์ φ ถูกใช้แสดงศักย์ไฟฟ้าที่กระจายแบบเฉพาะที่ เพื่อให้แตกต่างกับศักย์ไฟฟ้า ψ เนื่องจากมัลติโพลในสมการที่ (3.1.1.3).



รูปที่ 3.1.1.2 ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากประจุ σ^A บนพื้นผิว A สามารถกระจายเป็นศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพล $B_{p,j}^A$ ณ จุด \mathbf{p} ได้.



รูปที่ 3.1.1.3 ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากประจุ σ^A บนพื้นผิว A สามารถกระจายแบบเฉพาะที่ รอบจุด \mathbf{q} ได้.

ข. การกระจายศักย์ไฟฟ้ารอบจุดศูนย์กลางใหม่

ศักย์ไฟฟ้าในรูปของมัลติโพลในสมการที่ (3.1.1.3) หรือในรูปการกระจายเฉพาะที่ในสมการที่ (3.1.1.4) สามารถกระจายซ้ำใหม่ รอบจุดศูนย์กลางการกระจายอื่นได้. ในที่นี้ เราจะจำกัดจุดศูนย์กลางใหม่ของการกระจาย ให้เป็นจุดบนแกน z เท่านั้น เนื่องจากเพียงพอต่อการคำนวณในที่นี้. การกระจายศักย์ไฟฟ้าใหม่ที่เป็นต่อการคำนวณ มีอยู่สองแบบดังต่อไปนี้.

1. การกระจายศักย์ไฟฟ้าแบบมัลติโพลไปเป็นแบบเฉพาะที่

ด้วยการกระจายแบบนี้ ศักย์ไฟฟ้าของมัลติโพลในสมการที่ (3.1.1.3) จะถูกกระจายซ้ำรอบจุดศูนย์กลางใหม่ และมีรูปแบบของการกระจายเป็นตามสมการที่ (3.1.1.4). กำหนดให้ $\mathbf{u}(0,0,z_u)$ เป็นจุดศูนย์กลางใหม่ของการกระจายศักย์ไฟฟ้า. ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลอันดับที่ n ในสมการที่ (3.1.1.3) สามารถเขียนได้เป็น

$$\psi_{p,n}^A = \frac{B_{p,n}^A}{r_p^{n+1}} P_n(\cos \theta_p) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{u,j}^A = \sum_{j=0}^{\infty} L_{u,j}^A r_u^j P_j(\cos \theta_u) \quad (3.1.1.5)$$

สัมประสิทธิ์ $L_{u,j}^A$ ของศักย์ไฟฟ้า สัมพันธ์กับ $B_{p,n}^A$ ด้วยสมการต่อไปนี้ [10, 12]

เมื่อ $z_u > z_p$

$$L_{u,j}^A = (-1)^j \frac{(n+j)!}{n!j!} \frac{B_{p,n}^A}{d^{n+1+1}} \quad (3.1.1.6)$$

และเมื่อ $z_u < z_p$

$$L_{u,j}^A = (-1)^n \frac{(n+j)!}{n!j!} \frac{B_{p,n}^A}{d^{n+1+1}} \quad (3.1.1.7)$$

โดยที่ $d = |z_u - z_p|$. หลังจากการกระจายศักย์ไฟฟ้า รัศมีการลู่อเข้าของศักย์ไฟฟ้าเท่ากับระยะที่ต่ำที่สุดระหว่าง \mathbf{u} และขอบเขตของบริเวณที่แรงในรูปแบบที่ 3.1.1.2. เห็นได้ชัดเจนว่า การกระจายศักย์ไฟฟ้าใหม่จะทำได้ ถ้า \mathbf{u} อยู่ภายในบริเวณที่ไม่ได้แรงในรูปแบบ.

2. การกระจายศักย์ไฟฟ้าแบบเฉพาะที่ไปยังจุดศูนย์กลางใหม่

พิจารณาศักย์ไฟฟ้าอันดับที่ n ของสมการที่ (3.1.1.4) และให้ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางการกระจายศักย์ไฟฟ้าใหม่อยู่ที่ \mathbf{u} . การกระจายศักย์ไฟฟ้าใหม่แบบนี้ให้รูปแบบของศักย์ไฟฟ้าเป็น [13]

$$\varphi_{q,n}^A = L_{q,n}^A r_q^n P_n(\cos \theta_q) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{u,j}^A = \sum_{j=0}^{\infty} L_{u,j}^A r_u^j P_j(\cos \theta_u) \quad (3.1.1.8)$$

เมื่อ

$$L_{u,j}^A = \frac{n!}{(n-j)!j!} d^{n-j} L_{q,n}^A \quad (3.1.1.9)$$

สำหรับ $z_u > z_p$ และ

$$L_{u,j}^A = (-1)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)!j!} d^{n-j} L_{q,n}^A \quad (3.1.1.10)$$

สำหรับ $z_u < z_p$.

หลังจากการกระจายศักย์ไฟฟ้า รัศมีของการลู่อ้อมมีขนาดเท่ากับระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่าง \mathbf{u} และขอบเขตของบริเวณที่แรงในรูปที่ 3.1.1.3.

ค. คำตอบของศักย์ไฟฟ้าสำหรับทรงกลมที่ติดกัน

ด้วยวิธีการกระจายศักย์ไฟฟ้าที่ได้กล่าวมาแล้ว เราสามารถหาคำตอบของศักย์ไฟฟ้าในการจัดเรียงตามรูปที่ 3.1.1.1 ได้. พิจารณาประจุ σ^A และ σ^B บนทรงกลมทั้งสอง ที่ถูกเหนี่ยวนำโดยศักย์ไฟฟ้าภายนอก ϕ^E . ศักย์ไฟฟ้า ϕ ณ จุดใดๆ ภายนอกทรงกลม เป็นผลของการทับซ้อน. นั่นคือ

$$\phi = \phi^E + \psi_p^A + \psi_q^B \quad (3.1.1.11)$$

เมื่อ ψ_p^A และ ψ_q^B เป็นศักย์ไฟฟ้าในรูปมัลติโพลเนื่องจาก σ^A และ σ^B ที่กระจายรอบจุด \mathbf{p} และจุด \mathbf{q} ตามลำดับ. เพื่อให้ได้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์ (เนื่องจากสมมติว่าตัวนำทั้งสองต่อลงดิน) เป็นจริง เราจะได้แสดงสมการของศักย์ไฟฟ้าแยกเป็นแต่ละทรงกลม ในรูปของฟังก์ชันที่กระจายรอบจุดศูนย์กลางของทรงกลมนั้นๆ

สำหรับทรงกลมล่าง ศักย์ไฟฟ้าเป็น

$$\phi = \phi_p^E + \psi_p^A + \phi_p^B \quad (3.1.1.12)$$

และสำหรับทรงกลมบน ศักย์ไฟฟ้าเป็น

$$\phi = \phi_q^E + \phi_q^A + \psi_q^B \quad (3.1.1.13)$$

เมื่อ ϕ_p^B และ ϕ_q^A เป็นศักย์ไฟฟ้าเนื่องจาก σ^B และ σ^A ที่กระจายแบบเฉพาะที่รอบจุด \mathbf{p} และจุด \mathbf{q} ตามลำดับ. สังเกตว่า ศักย์ไฟฟ้าภายนอกในสมการทั้งสอง ก็เขียนอยู่ในรูปของการกระจายเฉพาะที่เช่นเดียวกัน. ถ้าศักย์ไฟฟ้าภายนอกเป็นศักย์เนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอก \mathbf{E}_0 ในทิศทาง z เราจะได้

$$\phi_p^E = -z_p E_0 - E_0 r_p P_1(\cos \theta_p) \quad (3.1.1.14)$$

และ

$$\phi_q^E = -z_q E_0 - E_0 r_q P_1(\cos \theta_q) \quad (3.1.1.15)$$

ซึ่งกระจายเฉพาะที่รอบจุด \mathbf{p} และ \mathbf{q} ตามลำดับ.

สมมติว่าเราต้องการคำตอบของศักย์ไฟฟ้า โดยมีอันดับของสัมประสิทธิ์ศักย์ไฟฟ้า j จาก 0 ถึง N . ดังนั้นสัมประสิทธิ์ศักย์ไฟฟ้า ($B_{p,j}^A, B_{q,j}^B, L_{q,j}^A$ และ $L_{p,j}^B$) ที่ไม่ทราบค่า มีจำนวนเท่ากับ $4(N+1)$. สัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าเหล่านี้สามารถคำนวณได้จากการตั้งระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยสมการที่ได้จากกระบวนการต่อไปนี้

1. ทำให้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าของทรงกลมเป็นจริง. นั่นคือ เมื่อเราพิจารณาแต่ละอันดับ j เราได้ความสัมพันธ์

$$\phi_{p,j}^E + \psi_{p,j}^A + \phi_{p,j}^B = 0 \quad (3.1.1.16)$$

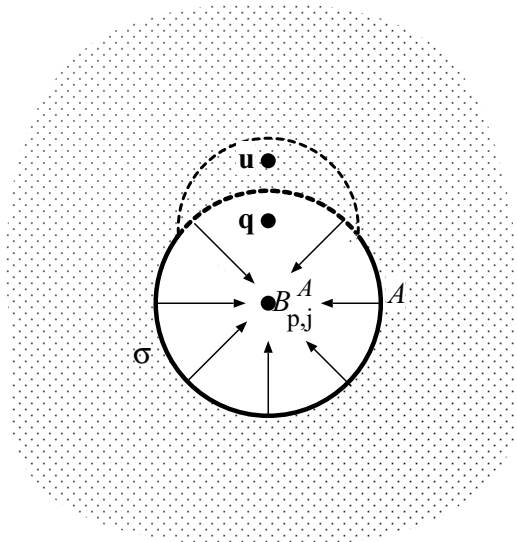
บนผิวของทรงกลมล่าง ($r_p = a$) และ

$$\phi_{q,j}^E + \phi_{q,j}^A + \psi_{q,j}^B = 0 \quad (3.1.1.17)$$

บนผิวของทรงกลมบน ($r_q = b$). ดังนั้น เราได้สมการจำนวน $2(N+1)$ สมการ จากเงื่อนไข ศักย์ไฟฟ้าทั้งสอง.

1. ทำให้ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากประจุจุดเดียวกัน ที่เขียนอยู่ในรูปต่างกัน มีขนาดเท่ากัน. นั่นคือ $\psi_p^A = \varphi_q^A$ และ $\psi_q^B = \varphi_p^B$. เพื่อให้ได้เงื่อนไขนี้เป็นจริง ศักย์ไฟฟ้าแต่ละคู่ต้องถูกกระจายอยู่รอบจุดเดียวกัน. ดังนั้น เราจะสามารถจับคู่ความเท่ากันของศักย์ไฟฟ้าแต่ละอันดับ j ได้. เงื่อนไขที่ดูจะเป็นธรรมชาติที่สุดสำหรับการกระจายก็คือ การใช้การกระจายใหม่แบบมัลติโพล เป็นแบบเฉพาะที่กับ ψ_p^A รอบจุด \mathbf{q} และกับ ψ_q^B รอบจุด \mathbf{p} เนื่องจากศักย์ไฟฟ้าสามารถจับคู่กับ φ_q^A และ φ_p^B ได้โดยตรง. อย่างไรก็ตาม เราสังเกตได้ว่า ศักย์ไฟฟ้าจะไม่มีค่าลู่อเข้า ถ้า $D < a$. รูปที่ 2.2.1.4 แสดงสถานะที่การกระจายใหม่ของ ψ_p^A ไปยัง \mathbf{q} ไม่ลู่อเข้า เพราะว่า \mathbf{q} อยู่ภายนอกบริเวณที่แรงในรูป. ดังนั้น ตัวเลือกที่ดีกว่าสำหรับการกระจายศักย์ไฟฟ้า คือการกระจายศักย์ไฟฟ้า ψ_p^A และ φ_q^A ไปยังจุดใดๆ จุดหนึ่งในบริเวณแรงของทรงกลมบน (เช่น จุด \mathbf{u} ในรูปที่ 2.2.1.4). หลักการเดียวกันก็จะถูกใช้กับคู่ศักย์ ψ_q^B และ φ_p^B . หลังการกระจายศักย์ไฟฟ้าใหม่ เราสามารถจับคู่สัมประสิทธิ์ของศักย์ไฟฟ้าสำหรับแต่ละอันดับ j และได้สมการจำนวน $2(N+1)$ สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่ต้องการ.

เมื่อสร้างระบบสมการเชิงเส้นได้แล้ว เราสามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ทั้งหมดที่ไม่ทราบค่าออกมาได้. จากการทดลองคำนวณเชิงเลขในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยพบว่า วิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบทำซ้ำไม่เหมาะสมสำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่ได้ เนื่องจากอาจได้คำตอบที่มีความแม่นยำไม่เพียงพอ.



รูปที่ 3.1.1.4 การกระจายศักย์ไฟฟ้า ψ_p^A ใหม่รอบจุด \mathbf{q} ไม่ลู่อเข้า เนื่องจากจุด \mathbf{q} ไม่อยู่ในบริเวณแรงในรูป.

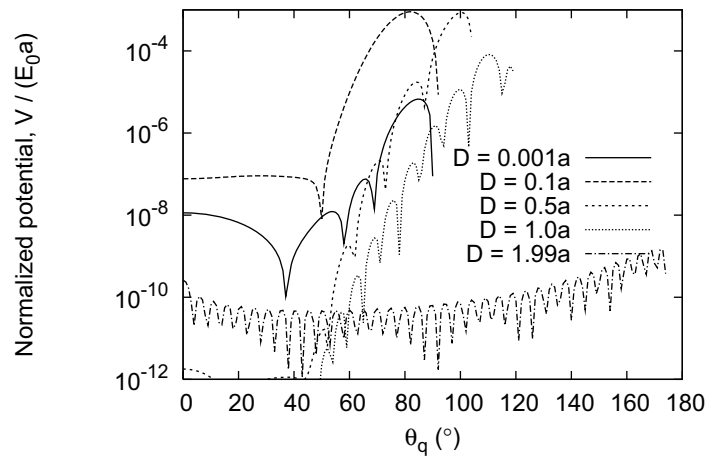
3.1.1.3 ตัวอย่างการคำนวณ

ก. ทรงกลมขนาดเท่ากัน

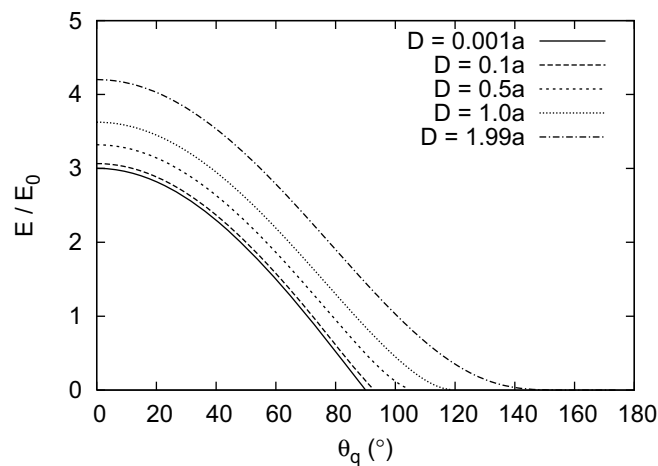
กรณีของทรงกลมขนาดเท่ากัน ($a=b=1$) ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ E_0 เป็นตัวอย่างแรกของการคำนวณในที่นี้. การคำนวณทำในกรณีที่ $D=0.001a$ ถึง $1.99a$. เราสามารถเห็นได้ชัดเจนว่า สำหรับกรณีของทรงกลมขนาดเท่ากัน การคำนวณสามารถลดรูปให้ง่ายขึ้น ด้วยความสมมาตรของศักย์ไฟฟ้าของทรงกลมทั้งสอง. อย่างไรก็ตาม เราใช้กรณีในการตรวจสอบความถูกต้อง และความสามารถใช้ได้ของวิธีที่นำเสนอในที่นี้ เมื่อทรงกลมทั้งสองเกือบจะซ้อนทับกันโดยสมบูรณ์ $D/a \rightarrow 0$. รูปที่ 3.1.1.5 แสดงศักย์ไฟฟ้าตกค้างที่หาค่าบนผิวของทรงกลมด้วยสมการที่ (3.1.1.11). รูปนี้ยืนยันความสามารถในการคำนวณของวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ สำหรับช่วงค่าของ D/a . อันดับสูงสุด N ของศักย์ไฟฟ้าในการกระจายพจน์ เท่ากับ 35 สำหรับทุกๆ กรณีในการคำนวณในรูปที่ 3.1.1.5. แม้ว่าอันดับ N ที่สูงขึ้นควรจะให้คำตอบที่ถูกต้องมากขึ้นตามทฤษฎี ผู้วิจัยพบว่า การแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่ได้ให้แม่นยำ ทำได้ยากขึ้น. สังเกตว่า สำหรับกรณีพิเศษที่ทรงกลมขนาดเท่ากันเกือบจะซ้อนทับกันโดยสมบูรณ์ ค่า N ต่ำๆ สามารถใช้ในการคำนวณได้. นอกจากนี้ ผู้วิจัยยังได้พบจากการทดลองคำนวณเชิงเลขว่า $B_{p,j}^A = (-1)^{j+1} B_{q,j}^B$ และ $B_{p,j}^A = B_{q,j}^B \approx 0$ สำหรับอันดับเลขที่ $j \neq 1$ เมื่อ $D/a \rightarrow 0$.

ในอีกด้านหนึ่ง การคำนวณเชิงเลขยากขึ้น เมื่อ D เล็กกว่า a แต่ไม่ใกล้กับศูนย์ ซึ่งเราสามารถสังเกตได้จากค่าศักย์ไฟฟ้าตกค้างที่สูงขึ้นในรูปที่ 3.1.1.5 เมื่อ $D=0.1a$ และ $D=0.5a$. ความคลาดเคลื่อนเชิงเลขนี้เกิดจากการใช้อันดับ N ที่จำกัด และเกิดจากบริเวณของการลู่เข้าที่เล็กของศักย์ไฟฟ้าหลังจากการกระจายใหม่ ซึ่งส่งผลให้การแก้ระบบสมการเชิงเส้นอย่างแม่นยำสูง ทำได้ยาก. นอกจากนี้ สำหรับทุกๆ ค่า D ในรูปที่ 3.1.1.5 เราจะเห็นความคลาดเคลื่อนของคำตอบที่ได้สูง ในบริเวณใกล้กับแนวเส้นตัดของทรงกลมทั้งสอง.

รูปที่ 3.1.1.6 แสดงสนามไฟฟ้าบนผิวของทรงกลมบน. เราสามารถเห็นได้จากรูปว่า สนามไฟฟ้าสูงสุดที่ $\theta_q = 0$ และลดลงเป็นศูนย์ที่แนวเส้นตัดระหว่างทรงกลม สำหรับทุกค่าของ D . ขนาดของสนามไฟฟ้าสูงสุดบนผิวทรงกลมลดลง เมื่อ D ลดลง (ระดับของการซ้อนทับเพิ่มขึ้น). นอกจากนี้ เรายังสังเกตได้ว่า เมื่อ D เข้าใกล้ศูนย์ สนามไฟฟ้าที่ $\theta_q = 0$ มีค่าเข้าใกล้ $3E_0$ ซึ่งเป็นคำตอบจริงของกรณีตัวนำทรงกลมเดี่ยวภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ. สำหรับกรณีที่ $D=2a$ รูปการจัดเรียงมีสนามไฟฟ้าเท่ากับกรณีของตัวนำทรงกลมที่สัมผัสกับระนาบต่อลงดิน ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ. กรณีนี้ สนามไฟฟ้าสูงสุดบนผิวทรงกลมเท่ากับ $4.207E_0$ [14]. สนามไฟฟ้าสูงสุดที่ได้จากการคำนวณเชิงเลข ด้วยวิธีที่ใช้ในงานวิจัยนี้ มีค่าเท่ากับ $4.202E_0$ เมื่อ $D=1.99a$. นอกจากนี้ เมื่อเปรียบเทียบกับคำตอบของประจุบนผิวตัวนำทรงกลมในสภาวะนี้ ซึ่งเท่ากับ $(2/3)\pi^3 \epsilon a^2 E_0^2$ ทางทฤษฎี เราได้ความคลาดเคลื่อนของค่าประจุเพียง 0.03% ที่ $D=1.99a$.



รูปที่ 3.1.1.5 ศักย์ไฟฟ้าตกค้างบนผิวทรงกลมที่ได้จากการคำนวณเชิงเลข สำหรับทรงกลมขนาดเท่ากัน.

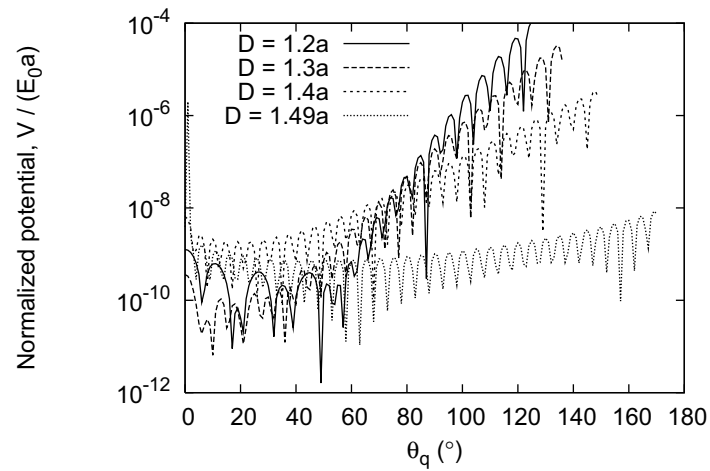


รูปที่ 3.1.1.6 สนามไฟฟ้าบนผิวทรงกลม ในกรณีที่ทรงกลมทั้งสองมีขนาดเท่ากัน.

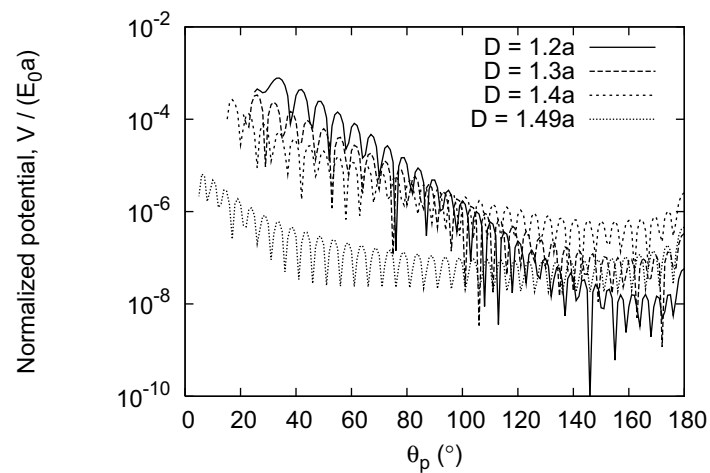
ข. ทรงกลมขนาดต่างกัน

ผู้วิจัยได้ทดลองคำนวณกรณีของตัวนำทรงกลมขนาดต่างกัน เมื่อ $a = 2b$ โดยใช้ $N = 35$. ศักย์ไฟฟ้าตกค้างที่คำนวณจากสมการที่ (3.1.1.11) บนผิวทรงกลมบนและทรงกลมล่าง แสดงอยู่ในรูปที่ 3.1.1.7 และ 3.1.1.8 ตามลำดับ. ระดับของการทับซ้อนที่ใช้ในการคำนวณคือ $D/a = 1.2 - 1.49$. จากรูปทั้งสอง เราสามารถเห็นแนวโน้มของผลการคำนวณในลักษณะเดียวกับแนวโน้มในรูปที่ 3.1.1.5. ความคลาดเคลื่อนของคำตอบเชิงเลขที่ได้ มีค่าสูงขึ้น เมื่อ D/a ลดลง (ระดับการทับซ้อนเพิ่มมากขึ้น). ศักย์ไฟฟ้าต่อเนื่องที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานมีค่าต่ำกว่า 10^{-3} สำหรับ $D/a \geq 1.2$. เมื่อระดับการทับซ้อนเพิ่มขึ้นมากกว่านี้ เราไม่สามารถคำนวณให้ได้คำตอบที่มีความแม่นยำสูงได้. ในกรณีที่ปราศจากความสมมาตร $a = b$ เราต้องใช้ค่า

N สูงในการคำนวณตามสมการที่ 3.1.1.5 เมื่อ D/a มีค่าต่ำ. นอกจากนี้ รูปที่ 3.1.1.7 และ 3.1.1.8 ยังแสดงว่า ความคลาดเคลื่อนที่ได้มีค่าสูงกว่าบนทรงกลมล่าง ซึ่งมีขนาดสูงกว่า. สำหรับสนามไฟฟ้าบนผิวทรงกลม ผู้วิจัยได้ตรวจสอบและพบว่าสนามไฟฟ้ามีค่าลดลงสู่ศูนย์ที่แนวตติระหว่งตัวนำทั้งสอง สำหรับ $D/a \geq 1.2$ แม้ว่าจะไม่ได้แสดงรูปผลลัพธ์ไว้ในที่นี้.



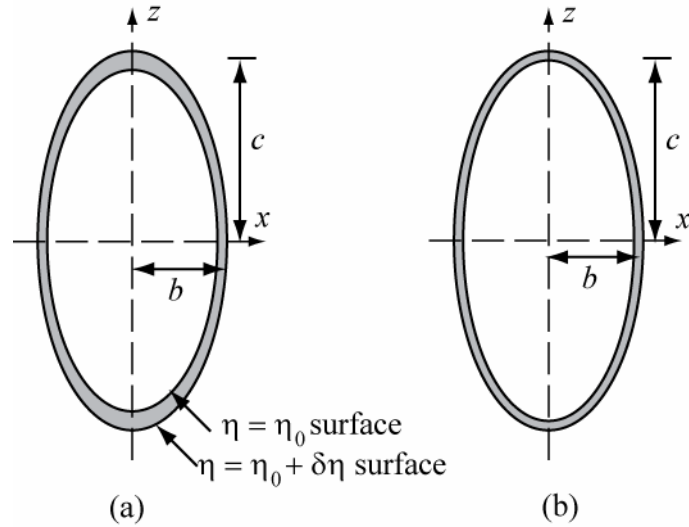
รูปที่ 3.1.1.7 ศักย์ไฟฟ้าตกค้างบนผิวทรงกลมบน ในกรณีที่ $a = 2b$.



รูปที่ 3.1.1.8 ศักย์ไฟฟ้าตกค้างบนผิวทรงกลมล่าง ในกรณีที่ $a = 2b$.

3.1.2 อนุภาคทรงรีแบบมีชั้นฉนวน

อนุภาครูปทรงรีที่ศึกษาในโครงการนี้ เป็นแบบที่มีชั้นฉนวนอยู่บนพื้นผิว ดังแสดงในรูปที่ 3.1.2.1(b). ตัวอย่างของการใช้งานของอนุภาคแบบนี้อย่างหนึ่งก็คือ เซลล์สิ่งมีชีวิต [16-20]. ในกรณีนี้ เรามักจะสนใจค่า polarization ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่เราสามารถนำมาใช้ประมาณค่าสนามไฟฟ้า แรง และการเกิดพังทลายของชั้นผิวฉนวนได้. คำตอบแม่นยำของอนุภาคแบบมีผิวฉนวนนั้น ทราบดีอยู่สำหรับกรณีของอนุภาคทรงกลม. อย่างไรก็ตาม สำหรับอนุภาคทรงรี งานศึกษาที่มีอยู่ถึงในปัจจุบัน มักจะประมาณโดยอาศัยฟังก์ชันทรงรี โดยให้ชั้นผิวฉนวนมีฟังก์ชันอยู่ที่ η_0 และ $\eta_0 + d\eta$ ดังนั้น ฉนวนจะมีความหนาไม่สม่ำเสมอ ขึ้นอยู่กับตำแหน่งบนพื้นผิวที่พิจารณา (รูปที่ 3.1.2.1(a)). นอกจากนี้ แม้ว่า Wagner กับ Gimsa หรือกลุ่มนักวิจัยอื่น ได้ศึกษาอนุภาคทรงรีที่มีผิวฉนวนความหนาคงที่ก็ตาม แต่ก็ใช้วิธีทางวงจรไฟฟ้า ซึ่งมีความแม่นยำต่ำ [21-25].



รูปที่ 3.1.2.1 ความแตกต่างของโมเดลสองแบบ (a) แบบตามฟังก์ชันทรงรี มีความหนาของชั้นผิวไม่คงที่ และ (b) แบบที่มีความหนาของชั้นผิวคงที่ ซึ่งตรงกับลักษณะของอนุภาคจริง.

3.1.2.1 หลักการกระจายฮาร์มอนิกส์

เราทำการวิเคราะห์โดยเริ่มจากกรณีของทรงคล้ายทรงกลมแบนข้าง (Prolate spheroid). ฟังก์ชัน (η, θ, φ) ของทรงคล้ายทรงกลมแบนข้างสัมพันธ์กับพิกัดคาร์ทีเซียน ตามสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x &= a \sinh \eta \sin \theta \cos \varphi \\ y &= a \sinh \eta \sin \theta \sin \varphi \\ z &= a \cosh \eta \cos \theta \end{aligned} \quad (3.1.2.1)$$

โดยที่พื้นผิว $\eta = \eta_0$ นั้น เป็นผิวของทรงคล้ายทรงกลมแบนข้างที่มีสมมาตรรอบแกน z . นั่นคือ

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.1.2.2)$$

เมื่อ

$$b = a \sinh \eta_0; \quad c = a \cosh \eta_0 \quad (3.1.2.3)$$

และ

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (3.1.2.4)$$

ถ้าหากเราใช้ความเยื้องศูนย์กลาง (Eccentricity; e) เป็นพารามิเตอร์ เราจะเขียนได้ว่า

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{c}\right)^2} = \frac{a}{c}; \quad 0 \leq e \leq 1 \quad (3.1.2.5)$$

และสมการที่ (3.1.2.3) แสดงได้เป็น

$$\cosh \eta_0 = 1/e; \quad \sinh \eta_0 = \sqrt{(1/e)^2 - 1} \quad (3.1.2.6)$$

คำตอบของสมการลาปลาซในระบบพิกัดทรงคล้ายทรงกลมแบนข้างคือ [26]

$$\phi = \left\{ \begin{matrix} P_{n,m}(\cosh \eta) \\ Q_{n,m}(\cosh \eta) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} P_{n,m}(\cos \theta) \\ Q_{n,m}(\sin \theta) \end{matrix} \right\} {}^{cs} m \varphi \quad (3.1.2.7)$$

โดยที่ cs คือ \cos หรือ \sin , P_n^m และ Q_n^m เป็นฟังก์ชันเลอจองด์ร์ชนิดที่หนึ่ง และชนิดที่สองตามลำดับ.

ฟังก์ชันแรกมีภาวะเอกฐานที่ค่าอนันต์ และฟังก์ชันที่สองมีภาวะเอกฐานที่ $+1$ หรือ -1 .

ภายใต้อิทธิพลของศักย์ไฟฟ้าภายนอก

$$\phi_{app} = - \sum_{n,m} E_{n,m} a^n P_{n,m}(\cosh \eta) P_{n,m}(\cos \theta) {}^{cs} m \varphi \quad (3.1.2.8)$$

ศักย์ไฟฟ้าภายในและภายนอกของอนุภาคสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \phi_{out} &= \phi_{app} + \phi_{ind} \\ &= \phi_{app} + \sum_{n,m} C_{n,m} Q_{n,m}(\cosh \eta) P_{n,m}(\cos \theta) {}^{cs} m \varphi \end{aligned} \quad (3.1.2.9)$$

และ

$$\phi_{in} = - \sum_{n,m} A_{n,m} a^n P_{n,m}(\cosh \eta) P_{n,m}(\cos \theta) {}^{cs} m \varphi \quad (3.1.2.10)$$

3.1.2.2 เงื่อนไขขอบเขต

นิยามให้ค่าสภาพยอมเชิงซ้อนเท่ากับ

$$\varepsilon^* = \varepsilon + \frac{\mu}{j\omega} = \frac{\mu}{j\omega} (1 + j\omega\tau) \quad (3.1.2.11)$$

เมื่อ ε และ μ เป็นสภาพยอมและสภาพนำ, ω เป็นความถี่เชิงมุม, $j^2 = -1$ และ

$$\tau = \varepsilon / \mu \quad (3.1.2.12)$$

เวลาคงตัว τ จะสั้นมากสำหรับตัวกลางทางชีววิทยา เช่น อาจสั้นถึง 50 ms สำหรับสารละลาย KCL ความเข้มข้น 1mM. ความยาวของพัลส์ที่ใช้สำหรับการทำอิเล็กโตรพอเรซิส หรือการเชื่อมเซลล์ด้วยไฟฟ้านั้นจะมากกว่าค่านี้มาก. ดังนั้น ในทางปฏิบัติ $\omega\tau \ll 1$ และเราสามารถละเลยผลของสภาพยอมที่มีต่อ ε^* ได้. ในอีกด้านหนึ่ง วัสดุของเมมเบรนของเซลล์เป็นฉนวนที่ดี เราจึงสามารถละเลยผลของสภาพนำได้.

สมมติให้เมมเบรนของอนุภาคเซลล์อยู่ที่ $\eta = \eta_0$ และมีความหนาน้อยมาก. เราจะแทนเมมเบรนนี้ด้วยชั้นผิวของไดโพล. ภายใต้เงื่อนไขนี้ เงื่อนไขขอบเขตที่ $\eta = \eta_0$ ก็คือ [27-28]

$$\phi_{out} - \phi_{in} = \frac{\sigma}{C_m} \quad (3.1.2.13)$$

$$\mu_{out} E_{out} = \mu_{in} E_{in}$$

และการอัดประจุของเมมเบรนเป็นไปตามความสัมพันธ์

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\mu_{out} E_{out} = -\mu_{in} E_{in} \quad (3.1.2.14)$$

เมื่อ C_m เป็นค่าความเก็บประจุจำเพาะต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่, σ เป็นความหนาแน่นประจุไดโพลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่บนเมมเบรน (มีขั้วบวกที่ด้านนอก และลบที่ด้านใน) และสนามไฟฟ้าบนผิวเขียนได้เป็น

$$E_{out} = -\frac{1}{g_\eta} \frac{\partial \phi_{out}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0}, \quad E_{in} = -\frac{1}{g_\eta} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_0} \quad (3.1.2.15)$$

โดย g_η เป็นสัมประสิทธิ์ทางเรขาคณิต เท่ากับ

$$g_\eta = a\sqrt{\sinh^2 \eta_0 + \sin^2 \theta} = a\sqrt{\cosh^2 \eta_0 + \cos^2 \theta} = c\sqrt{1 - (\cos \theta / \cosh \eta_0)} \quad (3.1.2.16)$$

สังเกตว่า จากสมการข้างบนเหล่านี้

$$\phi_{out} - \phi_{in} = \frac{1}{C_m} \int_{\eta_0} \frac{1}{g_\eta} \frac{\partial \phi_{out}}{\partial \eta} dt \quad (3.1.2.17)$$

ดังนั้น สำหรับค่าความเก็บประจุ C_m คงที่, การที่ g_η ขึ้นกับมุม θ หมายความว่า จะต้องมีความสัมพันธ์ระหว่างอันดับฮาร์มอนิกส์ n ต่างกัน ของสมการที่ (3.1.2.9) และ (3.1.2.10) แต่จะไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างลำดับที่ m . ปฏิสัมพันธ์เหล่านี้ ทำให้เกิดฮาร์มอนิกส์อันดับที่สูงขึ้น แม้ว่าอนุภาคจะอยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ ($n=1$) ก็ตาม.

สำหรับโมเดลที่มีความหนาของเมมเบรนแปรตามมุม θ โดยที่

$$C_m = \varepsilon_m / (g_\eta d\eta) \quad (3.1.2.18)$$

เมื่อ ε_m เป็นสภาพยอมของเมมเบรน และ $g_\eta d\eta$ เป็นความหนาของเมมเบรน (อ้างอิงรูปที่ 3.1.2.1a) ค่าพารามิเตอร์ g_η จะไม่ขึ้นกับ θ อีกต่อไป และทำให้ไม่มีปฏิสัมพันธ์ระหว่างอันดับ n ที่ต่างกัน. ในกรณีนี้ พื้นที่นิยามโดย $\eta = \eta_0 + d\eta$ จะทำให้สมการต่อไปนี้จริง

$$\frac{x^2}{b^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1 \quad (3.1.2.19)$$

เมื่อ

$$\xi = 2bc \cdot d\eta \quad (3.1.2.20)$$

และความหนาบนแกน x และ z เป็น

$$\delta_x = cd\eta \quad \text{and} \quad \delta_z = bd\eta \quad (3.1.2.21)$$

ดังนั้น สำหรับโมเดลทั่วไปที่มีความเก็บประจุแปรตามมุม ก็คือการที่ละลาย g_η ในสมการที่ (3.1.2.15) และหาคำตอบของสมการในกรณีของสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก โดยพิจารณา $n = 1$ เท่านั้น.

3.1.2.3 การหาคำตอบของปัญหาเงื่อนไขขอบเขต

คำตอบของศักย์ไฟฟ้าได้จากการกระจายความหนาแน่นประจุไดโพล σ ในรูปของฟังก์ชันเลอจองด์ร์เป็น

$$\sigma = \sum_{n,m} S_{n,m} P_{n,m}(\cos \theta) \text{csm}\varphi \quad (3.1.2.22)$$

ซึ่งเราจะได้สัมประสิทธิ์ของศักย์ไฟฟ้าในสมการที่ (3.1.2.9) และ (3.1.2.10) ในรูปของสัมประสิทธิ์ $S_{n,m}$ ของประจุ และสัมประสิทธิ์ $E_{n,m}$ ของสนามไฟฟ้าภายนอกเป็น

$$A_{n,m} = \frac{Q'_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)} \frac{S_{n,m}}{C_m} - \frac{H_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)} a^n E_{n,m} \quad (3.1.2.23)$$

$$C_{n,m} = \kappa_\mu \frac{P'_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)} \frac{S_{n,m}}{C_m} + (\kappa_\mu - 1) \frac{P_{n,m}(1/e)P'_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)} a^n E_{n,m} \quad (3.1.2.24)$$

เมื่อเราให้

$$\kappa_\mu = \mu_{in} / \mu_{out} \quad (3.1.2.25)$$

$$P'_{n,m}(1/e) = \left. \frac{d}{d\eta} P_{n,m}(\cos \eta) \right|_{\eta=\eta_0} \quad \text{และ} \quad Q'_{n,m}(1/e) = \left. \frac{d}{d\eta} Q_{n,m}(\cos \eta) \right|_{\eta=\eta_0} \quad (3.1.2.26)$$

$$G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e) = \kappa_\mu Q_{n,m}(1/e)P'_{n,m}(1/e) - P_{n,m}(1/e)Q'_{n,m}(1/e) \quad (3.1.2.27)$$

$$H_{n,m}(1/e) = Q_{n,m}(1/e)P'_{n,m}(1/e) - P_{n,m}(1/e)Q'_{n,m}(1/e) \quad (3.1.2.28)$$

การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของความหนาแน่นประจุไดโพลของชั้นเมมเบรนจะแสดงได้เป็น

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mu_{in} g_\eta^{-1} \left. \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_0} \quad (3.1.2.29)$$

$$= \frac{\mu_{in}}{c\sqrt{1-(e\cos\theta)^2}} \sum_{n,m} A_{n,m} P'_{n,m}(1/e) P_{n,m}(\cos \theta) \text{csm}\varphi$$

3.1.2.4 การจัดการกับพารามิเตอร์ g_η

g_η เป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญในการคำนวณ เนื่องจากเป็นตัวเชื่อมความสัมพันธ์ระหว่างอันดับของฮาร์มอนิกส์ของสนามไฟฟ้า. เรากระจายพจน์ c/g_η ในรูปของ $\cos \theta$ เป็น

$$\frac{1}{\sqrt{1-(e\cos\theta)^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} (e\cos\theta)^{2k} \quad (3.1.2.30)$$

อนุกรมนี้มีค่าลู่ออกเนื่องจากว่า

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad \text{and} \quad e \leq 1 \quad (3.1.2.31)$$

สมการที่ (3.1.2.29) จะเขียนได้ในรูปของ

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\mu_{in}}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} (e\cos\theta)^{2k} \sum_{n,m} A_{n,m} P'_{n,m}(1/e) P_{n,m}(\cos \theta) \text{csm}\varphi \quad (3.1.2.32)$$

สมการนี้มีพจน์ของ $(\cos \theta)^{2k} P_{n,m}(\cos \theta)$ ซึ่งสามารถกระจายพจน์ใหม่ในรูปของอนุกรมฮาร์มอนิกส์ โดยอาศัยกฎของฟังก์ชันเลอจองด์ร์

$$xP_{n,m}(u) = \frac{n+m}{2n+1}P_{n-1,m}(u) + \frac{n-m+1}{2n+1}P_{n+1,m}(u) \quad (3.1.2.33)$$

สังเกตว่า การกระจายพจน์ใหม่นี้ ทำให้ได้ ที่มีอันดับ n ต่างกันขึ้น (แต่มีลำดับ m คงเดิม). ดังนั้น เราจะอธิบายต่อไป โดยพิจารณาที่ค่า m ค่าหนึ่งๆ.

ในรูปของเมตริกซ์ เราจะเขียนสมการที่ (3.1.2.33) ได้เป็น

$$x \begin{bmatrix} P_{0,m}(x) \\ P_{1,m}(x) \\ \vdots \\ P_{n-1,m}(x) \\ P_{n,m}(x) \\ P_{n+1,m}(x) \\ \vdots \end{bmatrix} = [\mathbf{D}_1] \begin{bmatrix} P_{0,m}(x) \\ P_{1,m}(x) \\ \vdots \\ P_{n-1,m}(x) \\ P_{n,m}(x) \\ P_{n+1,m}(x) \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad x^{2k} \begin{bmatrix} P_{0,m}(x) \\ P_{1,m}(x) \\ \vdots \\ P_{n-1,m}(x) \\ P_{n,m}(x) \\ P_{n+1,m}(x) \\ \vdots \end{bmatrix} = [\mathbf{D}_1]^{2k} \begin{bmatrix} P_{0,m}(x) \\ P_{1,m}(x) \\ \vdots \\ P_{n-1,m}(x) \\ P_{n,m}(x) \\ P_{n+1,m}(x) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.1.2.34)$$

โดยที่

$$[\mathbf{D}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1-m & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{(m+1)}{3} & 0 & \frac{(2-m)}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(n+m)}{(2n+1)} & 0 & \frac{(n-m+1)}{(2n+1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & \cdots & & & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1.2.35)$$

เมื่อนิยามให้

$$[\mathbf{s}] = \begin{bmatrix} S_{0,m} \\ S_{1,m} \\ \vdots \\ S_{n,m} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad [P_{nm}] = \begin{bmatrix} P_{0,m}(\cos \theta) \operatorname{csm} \varphi \\ P_{1,m}(\cos \theta) \operatorname{csm} \varphi \\ \vdots \\ P_{n,m}(\cos \theta) \operatorname{csm} \varphi \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} A_{0,m} \\ A_{1,m} \\ \vdots \\ A_{n,m} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.1.2.36)$$

สมการที่ (3.1.2.32) จะอยู่ในรูปของ

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{s}] = \frac{\mu_{\text{in}}}{c}[\mathbf{D}^p][\mathbf{a}] \quad (3.1.2.37)$$

เมื่อ

$$[\mathbf{D}^p] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} e^{2k} P'_{n,m}(1/e) [\mathbf{D}_1^T]^{2k} \quad (3.1.2.38)$$

และมีดัชนีบน P ที่ว่าเป็นกรณีของทรงคล้ายทรงกลมแบนข้าง (prolate spheroid) และ T ระบุการสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์.

ในอีกทางหนึ่ง จากสมการที่ (3.1.2.23) เราจะได้

$$[\mathbf{a}] = \frac{1}{C_m} [\mathbf{M}^P][\mathbf{s}] - [\mathbf{N}^P][\mathbf{e}] \quad (3.1.2.39)$$

เมื่อ $[\mathbf{e}]$ เป็นเวกเตอร์ของสัมประสิทธิ์ของสนามไฟฟ้าภายนอก $E_{n,m}$, \mathbf{M}^P และ \mathbf{N}^P เป็นเมตริกซ์แนวทแยง ซึ่งมีสมาชิกเป็น

$$M_n^P = \frac{Q'_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)}, \quad N_n^P = a^n \frac{H_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)} \quad (3.1.2.40)$$

เมื่อแทนสมการที่ (3.1.2.39) ลงในสมการที่ (3.1.2.37) จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{s}] = \frac{\mu_{in}}{cC_m} [\mathbf{D}^P][\mathbf{M}^P][\mathbf{s}] - \frac{\mu_{in}}{c} [\mathbf{D}^P][\mathbf{N}^P][\mathbf{e}] \quad (3.1.2.41)$$

สมการนี้ เป็นสมการหลักสำหรับคำนวณการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของแต่ละฮาร์มอนิกส์ของประจุที่อยู่บนพื้นผิวของเมมเบรน.

สำหรับ $n=1$ และ $m=0$ หรือ , เมื่อให้สนามไฟฟ้าภายนอกเป็นแบบสม่ำเสมอ. นั่นคือ

$$\begin{aligned} E_{n,m} &= E_1, \quad n=1 \\ E_{n,m} &= 0, \quad n>1 \end{aligned} \quad (3.1.2.42)$$

สมการที่ (3.1.2.41) ที่เมื่อ e เข้าสู่ศูนย์ จะกลายเป็น

$$\frac{d}{dt}s_1 = \frac{2}{cC_m} \frac{\mu_{in}\mu_{out}}{\mu_{in} + 2\mu_{out}} s_1 - \frac{3\mu_{in}\mu_{out}}{\mu_{in} + 2\mu_{out}} E_1 \quad (3.1.2.43)$$

ซึ่งลดรูปลงเป็นคำตอบของความต่างศักย์เมมเบรน V_m ของทรงกลมรัศมีเท่ากับ

$$V_m = \frac{s_1}{C_m} = \frac{3}{2} cE_1 (1 - \exp[-t/\tau_1]) \quad (3.1.2.44)$$

เมื่อ

$$\tau_1 = cC_m \left(\frac{1}{\mu_{in}} + \frac{1}{2\mu_{out}} \right) \quad (3.1.2.45)$$

คำตอบในกรณีของทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว (oblate spheroid) ก็สามารถหาได้ในลักษณะเดียวกัน โดยมีรายละเอียดแสดงในหัวข้อที่ 3.1.2.7.

3.1.2.5 โพลาริเซชันเนื่องจากสนามไฟฟ้า

สมมติสนามไฟฟ้าภายนอกเปลี่ยนแปลงตามเวลา และสามารถแทนด้วยเฟสเซอร์ $\exp[j\omega t]$ จากสมการที่ (3.1.2.41) เราจะได้ว่า

$$j\omega[\mathbf{s}] = \frac{\mu_{out}}{cC_m} [\mathbf{D}^i][\kappa_\mu \mathbf{M}^i][\mathbf{s}] - \frac{\mu_{out}}{c} [\mathbf{D}^i][\kappa_\mu \mathbf{N}^i][\mathbf{e}] \quad (3.1.2.46)$$

โดยที่ดัชนี i แสดงกรณีของทรงคล้ายทรงกลมแบนข้าง P หรือทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว O . ดังนั้น ความหนาแน่นของประจุไดโพลสามารถหาจากสนามไฟฟ้าภายนอกได้ตามสมการ

$$\begin{aligned} [\mathbf{s}] &= C_m \left([\mathbf{D}^i][\kappa_\mu \mathbf{M}^i] - I\omega\tau[\mathbf{U}] \right)^{-1} [\mathbf{D}^i][\kappa_\mu \mathbf{N}^i][\mathbf{e}] \\ &\stackrel{\text{write}}{=} C_m [\mathbf{L}][\mathbf{D}^i][\kappa_\mu \mathbf{N}^i][\mathbf{e}] \end{aligned} \quad (3.1.2.47)$$

ซึ่งมีค่าคงตัวเวลาเป็น

$$\tau = cC_m / \mu_{out} \quad (3.1.2.48)$$

ในอีกด้านหนึ่ง สมการที่ (3.1.2.24) สามารถจัดรูปได้เป็น

$$[\mathbf{c}] = \frac{\kappa_\mu}{C_m} [\mathbf{S}^i][\mathbf{s}] + (\kappa_\mu - 1)[\mathbf{T}^i][\mathbf{e}] \quad (3.1.2.49)$$

เมื่อ $[\mathbf{c}]$ เป็นเวกเตอร์ของ $C_{m,n}$, \mathbf{S}^i และ \mathbf{T}^i เป็นเมตริกซ์แนวทแยงซึ่งมีสมาชิกเป็น

$$\text{Prolate: } S_n^P = \frac{P'_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)}, \quad T_n^P = a^n \frac{P_{n,m}(1/e)P'_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)} \quad (3.1.2.50)$$

$$\text{Oblate: } S_n^O = \frac{(-1)^n j^{n+1} P'_{n,m}(j \sinh \eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0)}, \quad T_n^O = a^n \frac{j P_{n,m}(j \sinh \eta_0) P'_{n,m}(j \sinh \eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0)} \quad (3.1.2.51)$$

เมื่อแทนสมการที่ (3.1.2.47) ลงในสมการที่ (3.1.2.49) เราจะได้

$$[\mathbf{c}] = (\kappa_\mu [\mathbf{S}^i][\mathbf{L}^i][\mathbf{D}^i][\mathbf{N}^i] + (\kappa_\mu - 1)[\mathbf{T}^i])[\mathbf{e}] \quad (3.1.2.52)$$

สมการนี้ สามารถใช้หาโพลาริเซชันของทรงคล้ายทรงกลมได้.

ในโครงการวิจัยหัวข้อนี้ ผู้วิจัยจำกัดความสนใจอยู่ที่ไดโพล. ในกรณีนี้ เราจะสังเกตว่า เมื่อ r ลู่เข้าสู่อินฟินิตี้ จะได้

$$Q_{1,0}(\cosh \eta) \approx \frac{1}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2, \quad Q_{1,1}(\cosh \eta) \approx -\frac{2}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \quad (3.1.2.53)$$

$$Q_{1,0}(j \sinh \eta) \approx -\frac{1}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2, \quad Q_{1,1}(j \sinh \eta) \approx \frac{2}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \quad (3.1.2.54)$$

ดังนั้น โมเมนต์ไดโพลจะเขียนได้เป็น

$$\text{Prolate: } d_z^P = \frac{4}{3} \pi \epsilon_{out} a^2 C_{1,0}^P, \quad d_x^P = -\frac{8}{3} \pi \epsilon_{out} a^2 C_{1,1}^P \quad (3.1.2.55)$$

$$\text{Oblate: } d_z^O = -\frac{4}{3} \pi \epsilon_{out} a^2 C_{1,0}^O, \quad d_x^O = \frac{8}{3} \pi \epsilon_{out} a^2 C_{1,1}^O \quad (3.1.2.56)$$

และได้ตัวประกอบโพลาริเซชันต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรเท่ากับ

$$P_m^i = \frac{\frac{4}{3} \pi \epsilon_{out} a^2 f_m C_{1,m}^i}{\frac{4}{3} \pi b^2 c} \quad (3.1.2.57)$$

เมื่อ $m = 0$ สำหรับไดโพลในแนว z และ $m = 1$ สำหรับในแนว x . $f_0 = 1$ และ $f_1 = 2$.

3.1.2.6 ตัวอย่างการคำนวณ

เราจะแสดงตัวอย่างเป็นตัวเลขของคำตอบของสมการ

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{s}] = \frac{\mu_{in}}{cC_m} [\mathbf{D}^i][\mathbf{M}^i][\mathbf{s}] - \frac{\mu_{in}}{c} [\mathbf{D}^i][\mathbf{N}^i][\mathbf{e}] \quad (3.1.2.58)$$

เมื่อ i แสดงกรณีของทรงกลายทรงกลมแหลม P หรือทรงกลายทรงกลมแบน O . เนื่องจากว่า ในทางปฏิบัติ แล้ว $\mu_{in} \rightarrow \mu_{out}$ เราจะทำให้เวลาเป็นบรรทัดฐานด้วยค่าคงตัวเวลา τ ในสมการที่ (3.1.2.48). นั่นคือ

$$t = t_n \tau \quad (3.1.2.59)$$

ดังนั้น แรงดันของเมมเบรน

$$[v_m] = \frac{1}{C_m} [s] \quad (3.1.2.60)$$

จะเปลี่ยนแปลงตามสมการ

$$\frac{d}{dt} [v_m] = [D^i] [\kappa_\mu \mathbf{M}^i] [v_m] - [D^i] [\kappa_\mu \mathbf{N}^i] [e] \quad (3.1.2.61)$$

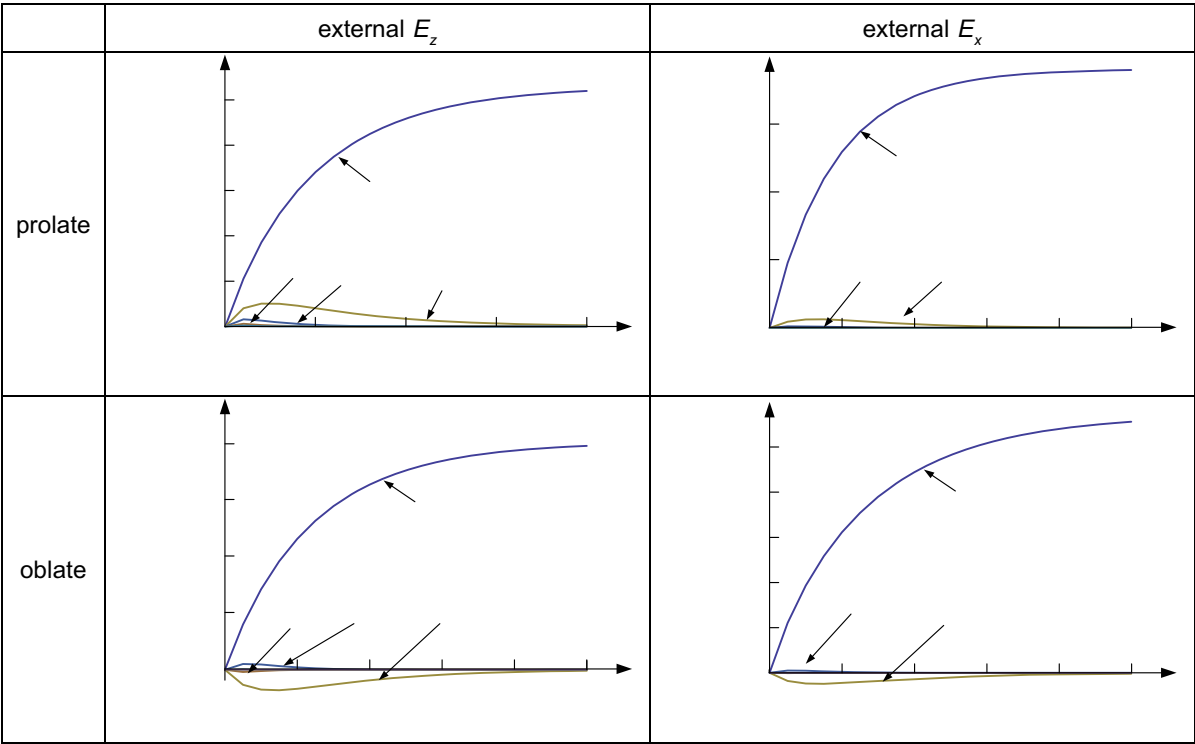
ผู้วิจัยได้ทดลองคำนวณตัวอย่างเชิงเลขสำหรับกรณีของสนามไฟฟ้า E_0 แบบสม่ำเสมอ ในแนวแกน z และ แกน x ตามลำดับ เมื่อ $R = 5$ (นั่นคือ $c/b = 5$ สำหรับทรงกลายทรงกลมแบนข้าง และ $b/c = 5$ สำหรับทรงกลายทรงกลมแบนหัว) และ $\kappa_\mu = 10$. การคำนวณใช้อันดับฮาร์มอนิกส์จนถึง $n_{\max} = 200$ ซึ่งจะได้ความคลาดเคลื่อนของการกระจายพจน์แบบอนุกรมน้อยกว่า 0.4%.

รูปที่ 3.1.2.2 แสดงการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของแต่ละองค์ประกอบฮาร์มอนิกส์ v_n ที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย cE_0 ตั้งแต่เวลา $t_n = 0$ ถึง t_{\max} . t_{\max} ถูกเลือกให้ครอบคลุมช่วงเวลาประมาณ 4 เท่าของเวลาคงตัวของฮาร์มอนิกส์ที่หนึ่ง. เราสามารถเห็นได้จากรูปว่า ฮาร์มอนิกส์อันดับสูงลดทลายลงอย่างรวดเร็ว เมื่อค่า n เพิ่มขึ้น และมีผลสำคัญต่อการตอบสนองในช่วงเริ่มต้นของทรานเซียนต์เท่านั้น.

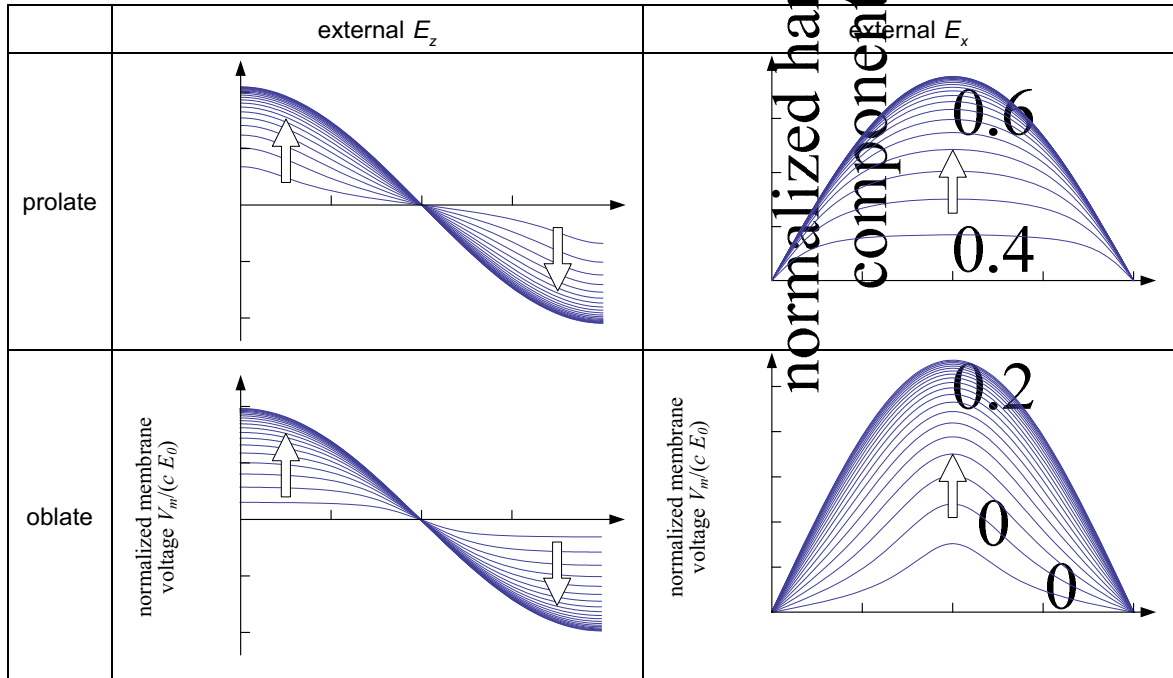
รูปที่ 3.1.2.3 เป็นการสร้างแรงดันเมมเบรนตามเวลา (ผลรวมของทุกฮาร์มอนิกส์) เป็นฟังก์ชันของมุม θ โดยแสดงเป็นลำดับขั้นเวลา $t_{\max}/20$. รูปที่ 3.1.2.3 แสดงแรงดันเมมเบรนเช่นเดียวกัน แต่เป็นค่าที่ได้เมื่อประมาณด้วยโมเดลแบบที่มีความหนาของเมมเบรนไม่คงที่ (นั่นคือ ใช้ $n = 0$ ในสมการที่ (3.1.2.29)). ด้วยโมเดลแบบแม่นยำที่ใช้ในโครงการวิจัยนี้ เราจะเห็นการสร้างแรงดันเมมเบรนที่ตำแหน่งซึ่งมีสนามไฟฟ้าความเข้มสูง ซึ่งก็คือที่ $\theta = 0$ สำหรับทรงกลายทรงกลมแหลมภายใต้สนามไฟฟ้า E_z และที่ $\theta = \pi/2$ สำหรับทรงกลายทรงกลมแบนภายใต้สนามไฟฟ้า E_x . เมื่อเวลาผ่านไป การกระจายของแรงดันเมมเบรนก็จะเข้าสู่รูปร่างฟังก์ชันไซน์ และค่าที่สภาวะคงตัวของทั้งสองโมเดลมีขนาดเท่ากัน.

จากผลการคำนวณที่ผ่านมา เราจะเห็นได้ว่าฮาร์มอนิกส์อันดับสูงจะมีบทบาทสำคัญ ณ ช่วงเริ่มต้นของทรานเซียนต์. ดังนั้น เราสามารถคาดได้ว่า ผลของโมเดลแบบแม่นยำจะแสดงให้เห็นต่อโพลาริเซชันที่ความถี่สูงๆ. ในรูปที่ 3.1.2.5 ผู้วิจัยแสดงตัวประกอบโพลาริเซชัน (หารด้วย \mathcal{E}_{out}) สำหรับ $\kappa_\mu = 10$ และ $R = 5$. เราสามารถเห็นได้จากรูปนี้ว่า มีการเลื่อนของสเปกตรัม เมื่อเปรียบเทียบระหว่างเส้นทึบและเส้นประในรูป. การเปลี่ยนแปลงนี้ เห็นได้ชัดเจนในกรณีที่เกิดสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอสูง เนื่องจากการเหนี่ยวนำของอนุภาค.

ข้อสังเกตประการหนึ่งก็คือ วิธีที่ใช้ในที่นี้มีความเร็วในการคำนวณสูงกว่าวิธีเชิงตัวเลขต่างๆ เช่นวิธีที่มีพื้นฐานบนวิธีชั้นประกอบขอบเขต [28] โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่สนามไฟฟ้าภายนอกตั้งฉากกับแกนหลังของทรงกลายทรงกลม ซึ่งจะทำให้การคำนวณเป็นแบบสามมิติ.



รูปที่ 3.1.2.2 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของแต่ละฮาร์โมนิกของแรงดันเมมเบรน.



รูปที่ 3.1.2.3 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของผลรวมทุกฮาร์โมนิกของแรงดันเมมเบรน.

normalized harmonic component v_n

1.0

0.8

0.6

0.4

0.2

0

0

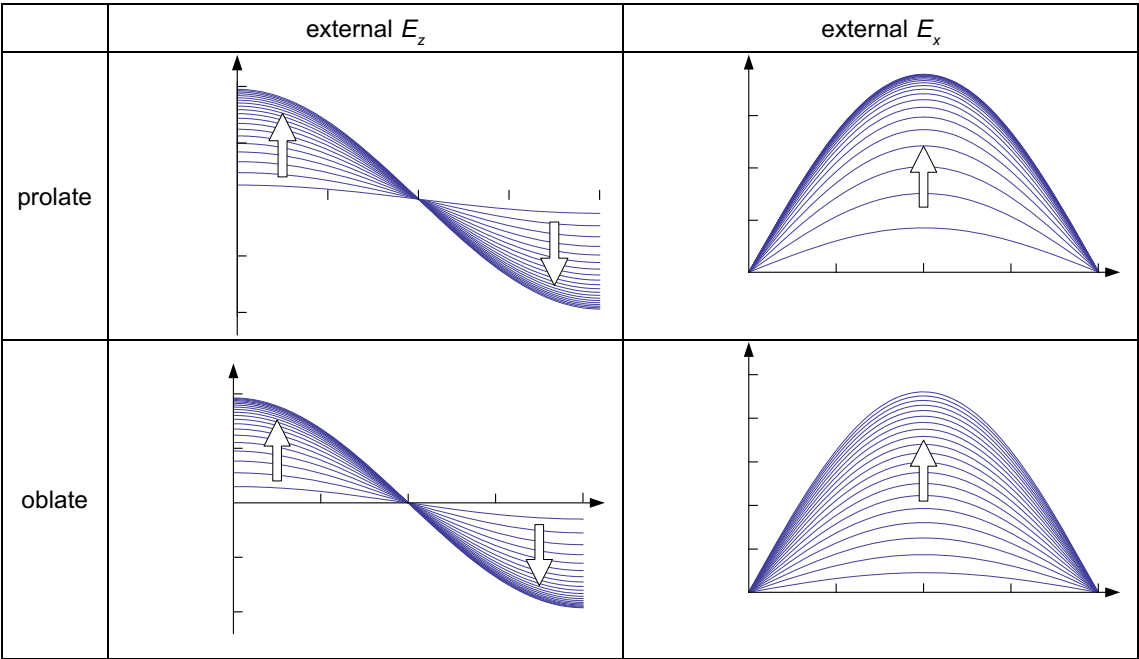
monic v_n

4.0

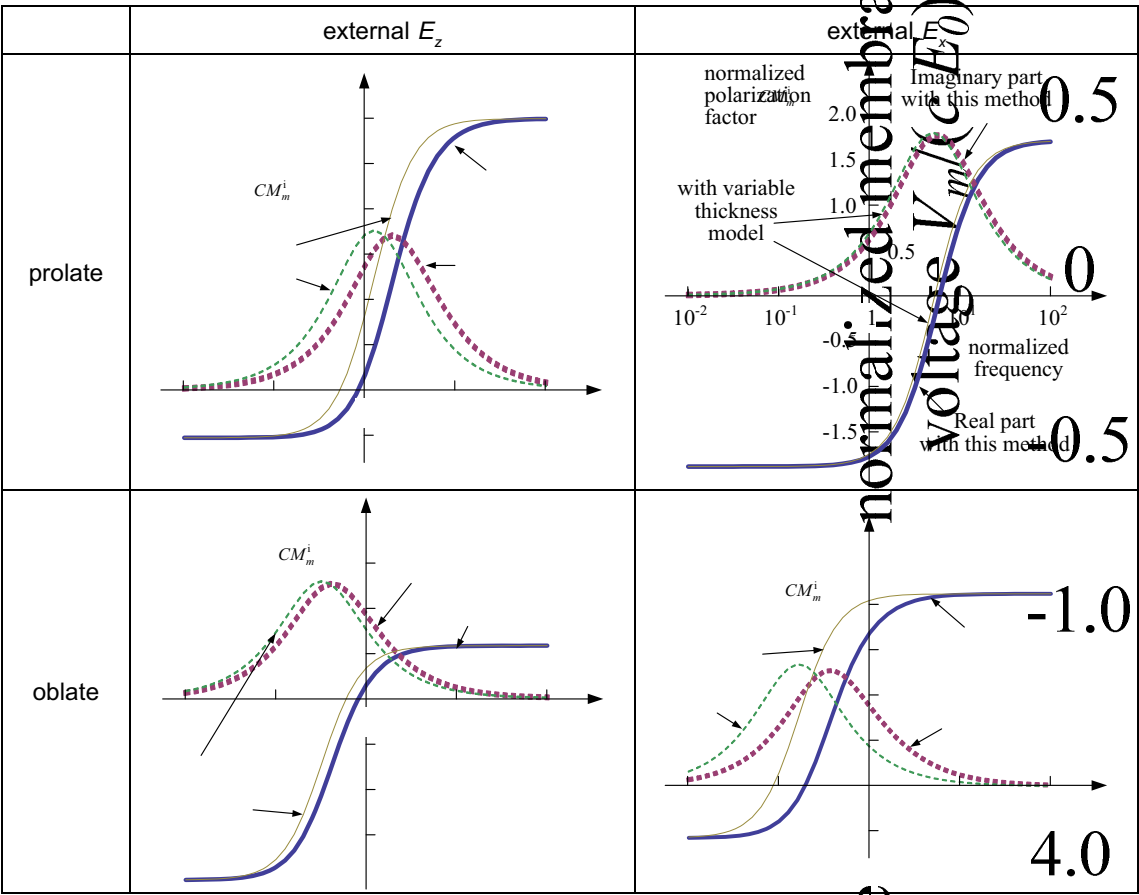
3.0

$n = 7$

0.5



รูปที่ 3.1.2.4 การเปลี่ยนแปลงแรงดันเมมเบรน เมื่อประมาณด้วยโมเดลแบบที่ความหนาของเมมเบรนไม่คงที่.



รูปที่ 3.1.2.5 ตัวประกอบโพลาริเซชันที่ได้จากการใช้โมเดลแบบแม่นยำ และเมื่อประมาณด้วยโมเดลแบบที่ความหนาของเมมเบรนไม่คงที่.

3.1.2.7 สมการสำหรับกรณีของทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว

ในระบบพิกัด (η, θ, φ) ของทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว พิกัดทั้งสามสัมพันธ์กับพิกัดคาร์ทีเซียนตามสมการด้านล่าง

$$\begin{aligned}x &= a \cosh(\eta) \sin \theta \cos \phi \\y &= a \cosh(\eta) \sin \theta \sin \phi \\z &= a \sinh(\eta) \cos \theta\end{aligned}\tag{3.1.2.62}$$

เมื่อพื้นผิว $\eta = \eta_0$ เป็นทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\tag{3.1.2.63}$$

โดยที่

$$b = a \cosh \eta_0; \quad c = a \sinh \eta_0\tag{3.1.2.64}$$

และ

$$a = \sqrt{b^2 - c^2}\tag{3.1.2.65}$$

เมื่อใช้ความเยื้องศูนย์กลาง e เป็นพารามิเตอร์

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{b}\right)^2} = \frac{a}{b}; \quad 0 \leq e \leq 1\tag{3.1.2.66}$$

เราจะได้สมการความสัมพันธ์ระหว่าง $\cosh \eta_0$ และ $\sinh \eta_0$ เป็น

$$\cosh \eta_0 = 1/e; \quad \sinh \eta_0 = \sqrt{(1/e)^2 - 1}\tag{3.1.2.67}$$

คำตอบของสมการลาปลาซสำหรับระบบพิกัดนี้เป็น

$$\phi = \left\{ \begin{matrix} P_{n,m}(j \sinh \eta) \\ Q_{n,m}(j \sinh \eta) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} P_{n,m}(\cos \theta) \\ Q_{n,m}(\sin \theta) \end{matrix} \right\} \cos m\varphi\tag{3.1.2.68}$$

ศักย์ไฟฟ้าภายในและภายนอกทรงคล้ายทรงกลมแบน สามารถเขียนได้ในรูปของ

$$\begin{aligned}\phi_{out} &= \phi_{app} + \phi_{ind} \\&= \sum_{n,m} E_{n,m} a^n j^n P_{n,m}(j \sinh \eta) P_{n,m}(\cos \theta) \cos m\varphi \\&\quad + \sum_{n,m} C_{n,m} j^{n-1} Q_{n,m}(j \sinh \eta) P_{n,m}(\cos \theta) \cos m\varphi\end{aligned}\tag{3.1.2.69}$$

และ

$$\phi_{in} = \sum_{n,m} A_{n,m} j^n P_{n,m}(j \sinh \eta) P_{n,m}(\cos \theta) \cos m\varphi\tag{3.1.2.70}$$

ในสมการด้านบนนี้ เราเพิ่มพจน์ของจำนวนจินตภาพ j เพื่อให้สัมประสิทธิ์ของศักย์ไฟฟ้าที่เกี่ยวข้องมีค่าเป็นจำนวนจริง.

ถ้าเรากระจายความหนาแน่นประจุไดโพล σ ในรูปของฮาร์มอนิกส์ตั้งสมการที่ (3.1.2.22) และประยุกต์ใช้สมการเงื่อนไขขอบเขต เราจะได้ว่า

$$A_{n,m} = \frac{(-j)^n Q'_{n,m}(j \sinh \eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0)} \frac{S_{n,m}}{C_m} - \frac{H_{n,m}(j \sinh \eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0)} a^n E_{n,m} \quad (3.1.2.71)$$

และ

$$C_{n,m} = \kappa_\mu \frac{(-1)^n j^{n+1} P'_{n,m}(j \sinh \eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0)} \frac{S_{n,m}}{C_m} + j(\kappa_\mu - 1) \frac{P_{n,m}(j \sinh \eta_0) P'_{n,m}(j \sinh \eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0)} a^n E_{n,m} \quad (3.1.2.72)$$

เมื่อ

$$P'_{n,m}(j \sinh \eta_0) = \left. \frac{d}{d\eta} P_{n,m}(j \sinh \eta) \right|_{\eta=\eta_0} \quad (3.1.2.73)$$

$$Q'_{n,m}(j \sinh \eta_0) = \left. \frac{d}{d\eta} Q_{n,m}(j \sinh \eta) \right|_{\eta=\eta_0} \quad (3.1.2.74)$$

$$G_{n,m}(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0) = \kappa_\mu Q_{n,m}(j \sinh \eta_0) P'_{n,m}(j \sinh \eta_0) - P_{n,m}(j \sinh \eta_0) Q'_{n,m}(j \sinh \eta_0) \quad (3.1.2.75)$$

$$H_{n,m}(j \sinh \eta_0) = Q_{n,m}(j \sinh \eta_0) P'_{n,m}(j \sinh \eta_0) - P_{n,m}(j \sinh \eta_0) Q'_{n,m}(j \sinh \eta_0) \quad (3.1.2.76)$$

การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของประจุบนเมมเบรน จะเป็นไปตามสมการ

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mu_{in} g_\eta^{-1} \left. \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_0} \quad (3.1.2.77)$$

$$= \frac{\mu_{in}}{c \sqrt{1 - (e \sin \theta)^2}} \sum_{n,m} A_{n,m} \tanh \eta_0 P'_{n,m}(j \sinh \eta_0) P_{n,m}(\cos \theta) \csc m \varphi$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ทางเรขาคณิต g_η มีค่าเป็น

$$g_\eta = a \sqrt{\sinh^2 \eta_0 + \cos^2 \theta} = a \sqrt{\cosh^2 \eta_0 + \sin^2 \theta} = \frac{c}{\tanh \eta_0} \sqrt{1 - (\sin \theta / \cosh \eta_0)^2}$$

และสามารถกระจายพจน์ได้ดังนี้

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (e \sin \theta)^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} (e \sin \theta)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(e^2 [1 - \cos^2 \theta] \right)^k \quad (3.1.2.78)$$

ดังนั้น สมการที่ (3.1.2.77) จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{\mu_{in}}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(e^2 [1 - \cos^2 \theta] \right)^k \\ &\quad \times \sum_{n,m} A_{n,m} \tanh \eta_0 P'_{n,m}(j \sinh \eta_0) P_{n,m}(\cos \theta) \csc m \varphi \end{aligned} \quad (3.1.2.79)$$

สมการนี้มีพจน์ของ $(\cos \theta)^{2k} P_{n,m}(\cos \theta)$ ซึ่งสามารถกระจายพจน์ใหม่เป็นอนุกรมของฮาร์มอนิกสเฟียร์ฟังก์ชัน
เลอจองด์ร์ โดยใช้

$$[\mathbf{D}_2^T] = [\mathbf{D}_1^T]^2 \quad (3.1.2.80)$$

และ

$$[\mathbf{D}^O] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} e^{2k \tanh \eta_0} P'_{n,m}(j \sinh \eta_0) [\mathbf{U} - \mathbf{D}_2^T]^k \quad (3.1.2.81)$$

เมื่อดัชนีบน O แสดงว่าสมการนี้ ใช้สำหรับทรงคล้ายทรงกลมแบบแป้น, และ \mathbf{U} เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์.
ดังนั้น เราจะได้

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{s}] = \frac{\mu_{in}}{cC_m} [\mathbf{D}^O][\mathbf{M}^O][\mathbf{s}] - \frac{\mu_{in}}{c} [\mathbf{D}^O][\mathbf{N}^O][\mathbf{e}] \quad (3.1.2.82)$$

เมื่อ \mathbf{M}^O และ \mathbf{N}^O เป็นเมทริกซ์แนวทแยงที่มีสมาชิกเป็น

$$M_n^O = \frac{(-j)^n Q'_{n,m}(j \sinh \eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0)}, \quad N_n^P = a^n \frac{H_{n,m}(j \sinh \eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0)} \quad (3.1.2.83)$$

3.1.3 วิธีคำนวณสนามไฟฟ้าแบบสองมิติ

งานวิจัยในส่วนนี้เกี่ยวข้องกับการคำนวณสนามไฟฟ้าในบริเวณสองมิติด้วยวิธีเงาหมัลติโพล. ดังที่ได้กล่าวมาในหัวข้อก่อนหน้านี้ว่า การวิเคราะห์สนามไฟฟ้ามีความสำคัญในการศึกษาระบบฉนวนและการใช้งานอื่นๆ ของวัสดุฉนวนไฟฟ้าอย่างมาก. ในหลายกรณี การจัดเรียงทางกายภาพที่สนใจ อาจสามารถลดรูปลงเป็นการประมาณแบบสองมิติได้ เพื่อให้ปัญหามีความซับซ้อนน้อยลง. การจัดเรียงสองมิตียังมีประโยชน์สำหรับศึกษา ลักษณะสมบัติพื้นฐานของสนามไฟฟ้าอีกด้วย. ตัวอย่างเช่น การจัดเรียงแบบสองมิติถูกใช้สำหรับวิเคราะห์สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสระหว่างตัวนำและฉนวนแข็ง [29-30]. โดยปกติแล้ว เราสามารถคำนวณสนามไฟฟ้าในการจัดเรียงแบบสองมิติได้โดยง่าย โดยใช้เทคนิคการคำนวณสนามไฟฟ้าเชิงเลขต่างๆ เช่น วิธีชั้นไฟไนต์เอลิเมนต์ หรือวิธีชั้นประกอบขอบเขต. อย่างไรก็ตาม การคำนวณด้วยวิธีเชิงเลขจะให้ความแม่นยำต่ำ ในกรณีที่สนามไฟฟ้าเป็นแบบไม่สม่ำเสมอสูง.

วิธีเชิงวิเคราะห์จึงเป็นทางเลือกประการหนึ่ง สำหรับคำนวณสนามไฟฟ้า ถ้าหากการจัดเรียงทางกายภาพไม่ซับซ้อนมากเกินไป. ดังเป็นที่ทราบกันดีแล้วว่า วิธีเงาประจุ (ซึ่งเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์) สามารถใช้ได้กับการจัดเรียงที่ประกอบด้วยวัตถุที่มีรูปทรงง่ายๆ เช่น ทรงกระบอก หรือระนาบ[31-32]. ทว่า วิธีนี้ไม่เหมาะกับการใช้งานในทางปฏิบัติ ถ้ามีจำนวนวัตถุมากกว่าสองชิ้นขึ้นไป. ทั้งนี้ เนื่องจากว่า การคำนวณตำแหน่งของเงา และการพิจารณาปฏิสัมพันธ์ระหว่างวัตถุยุ่งยากขึ้นมาก. เร็วๆ นี้ Giordano ได้เสนอการวิเคราะห์สนามไฟฟ้าในวัสดุที่มีโครงสร้างเป็นเส้นใย โดยใช้หมัลติโพลคำนวณในบริเวณสองมิติ[33]. ในงานชิ้นนี้ ศักย์ไฟฟ้าถูกแสดงเป็นอนุกรมฮาร์มอนิกส์ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์คำนวณได้จากการแก้ระบบสมการเชิงเส้น. ลักษณะการหาสัมประสิทธิ์นี้ถูกใช้ในการคำนวณสนามบนบริเวณสามมิติด้วย [12,34].

งานวิจัยในส่วนนี้ได้พัฒนาวิธีเชิงวิเคราะห์ โดยมีพื้นฐานจากวิธีเงาประจุ สำหรับการคำนวณสนามในระบบสองมิติ. วิธีที่พัฒนาขึ้นนี้คล้ายคลึงกับที่ได้นำเสนอสำหรับบริเวณสมมาตรรอบแกนหมุน[34] และบริเวณสามมิติ[35]. ผู้วิจัยใช้การกระจายหมัลติโพลใหม่ เพื่อให้ระบบการวางเงา(หมัลติโพล)ง่ายขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้วิธีเงาประจุทั่วไป. สำหรับวิธีคำนวณที่ได้พัฒนาขึ้นในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยยังได้ประยุกต์ใช้การกระจายหมัลติโพลใหม่ทั้งสามชนิด เพื่อให้วิธีที่นำเสนอสามารถใช้ได้กับปัญหาที่มีรูปแบบหลากหลายมากขึ้น. รายละเอียดของวิธีเงาหมัลติโพลสำหรับบริเวณสองมิติจะแสดงอยู่ในหัวข้อย่อยต่อไปนี้.

3.1.3.1 การแสดงศักย์ไฟฟ้าในบริเวณสองมิติด้วยจำนวนเชิงซ้อน

สำหรับการวิเคราะห์สนามไฟฟ้าบนบริเวณสองมิติ เราจะใช้ระนาบเชิงซ้อน z แทนบริเวณสองมิติจริงทางกายภาพ. นั่นคือ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน $z_0 = x_0 + iy_0$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ แทนพิกัด (x_0, y_0) จริงของปัญหา. จากทฤษฎีของฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน[35] เราทราบว่า ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของฟังก์ชันวิเคราะห์ Φ ของ z ทำให้สมการลาปลาซในบริเวณสองมิติเป็นจริง. ฟังก์ชัน Φ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ได้ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขของ Cauchy-Riemann เป็นจริง:

$$\frac{\partial}{\partial x} \text{Re}\{\Phi\} = \frac{\partial}{\partial y} \text{Im}\{\Phi\} \quad (3.1.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \text{Re}\{\Phi\} = -\frac{\partial}{\partial x} \text{Im}\{\Phi\} \quad (3.1.3.2)$$

ในงานวิจัยนี้ คำตอบศักย์ไฟฟ้า ϕ คำนวณหาเป็นส่วนจริงของฟังก์ชันวิเคราะห์ Φ ซึ่งเราจะเรียกต่อไปว่าเป็น “ศักย์เชิงซ้อน”. ศักย์เชิงซ้อน Φ นี้ สามารถแสดงสำหรับจุด z บนบนระนาบเชิงซ้อนได้ ในรูปแบบทั่วไป ซึ่งเป็นอนุกรมอนันต์รอบจุดศูนย์กลางการกระจายที่ $z_0 = x_0 + iy_0$ เป็น

$$\Phi = \Phi_B + \Phi_L \quad (3.1.3.3)$$

เมื่อ Φ_B เป็นศักย์ในรูปมัลติโพล (ซึ่งต่อไปนี้จะเรียกสั้นๆ ว่าศักย์มัลติโพล)

$$\Phi_B = B_0 \ln(z - z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^n} \quad (3.1.3.4)$$

และ Φ_L เป็นศักย์ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ (ซึ่งต่อไปนี้จะเรียกสั้นๆ ว่าศักย์เฉพาะที่)

$$\Phi_L = \sum_{n=0}^{\infty} L_n (z - z_0)^n \quad (3.1.3.5)$$

ในสมการที่ (3.1.3.4) และ (3.1.3.5) B_n และ L_n เป็นสัมประสิทธิ์จำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเราจะคำนวณหาออกมา เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับปัญหาเป็นจริง. ในสมการที่ (3.1.3.4) ศักย์มัลติโพล ซึ่งมีค่าเป็นเอกฐานที่จุด z_0 เป็นศักย์ที่เกิดจากแหล่งกำเนิดภายในวงกลมรัศมี $|z - z_0|$ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ z_0 บนระนาบเชิงซ้อน. นอกจากนี้ เราสามารถมองได้ว่า สำหรับประสิทธิ์ B_n ในสมการที่ (3.1.3.4) เป็นขนาดของมัลติโพลอันดับที่ n ซึ่งอยู่ที่ z_0 และมีศักย์ไฟฟ้าเป็นเอกฐานที่ z_0 . ยกตัวอย่างเช่น ถ้าหากมีเส้นประจุความยาวอนันต์ ที่มีความหนาแน่นประจุเท่ากับ q_0 อยู่ที่ (x_0, y_0) ในบริเวณจริง ซึ่งมีสภาพยอมเท่ากับ ϵ ประจุนี้จะถูกแสดงด้วยโมโนโพล(มัลติโพลอันดับศูนย์) โดย $B_0 = -q_0 / 2\pi\epsilon$ ที่ z_0 บนระนาบเชิงซ้อน.

3.1.3.2 การกระจายพจน์ใหม่แบบต่าง ๆ ของศักย์ไฟฟ้า

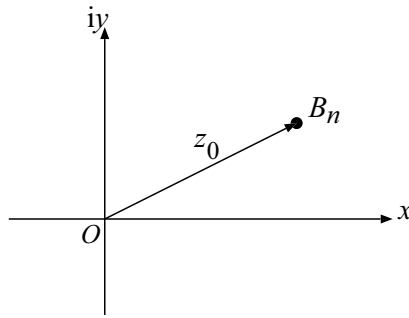
หัวข้อนี้อธิบายการกระจายพจน์ใหม่สามชนิด สำหรับศักย์เชิงซ้อนในสมการที่ (3.1.3.4) และ (3.1.3.5). ในที่นี้ เรานิยาม การกระจายพจน์ใหม่ ว่าเป็นกระบวนการที่กระจายฟังก์ชัน Φ รอบจุดศูนย์กลางจุดใหม่ ในรูปแบบของศักย์มัลติโพลในสมการที่ (3.1.3.4) หรือศักย์เฉพาะที่ในสมการที่ (3.1.3.5). การกระจายพจน์ใหม่สองชนิดแรกเพียงแต่ย้ายจุดศูนย์กลางการกระจายของศักย์ โดยที่ยังคงรูปแบบการกระจายเป็นแบบเดิมอยู่. การกระจายพจน์ใหม่ชนิดสุดท้าย เป็นการย้ายจุดศูนย์กลางกระจาย พร้อมทั้งเปลี่ยนรูปแบบการกระจายของศักย์ไฟฟ้าจากแบบมัลติโพล มาเป็นแบบเฉพาะที่. การใช้ประโยชน์การกระจายพจน์ใหม่สามชนิดนี้ ทำให้การคำนวณด้วยวิธีเงาโมโนโพลบนปัญหารูปแบบหลากหลายต่างๆ เป็นไปได้.

การย้ายจุดศูนย์กลางการกระจายของศักย์มัลติโพล (M2M)

พิจารณา มัลติโพล B_n อันดับที่ n ซึ่งอยู่ที่ $z_0 = x_0 + iy_0$ บนระนาบเชิงซ้อน ดังแสดงในรูปที่ 3.1.3.1. ศักย์เชิงซ้อน Φ_{Bn} เนื่องจากมัลติโพลนี้เท่ากับ $B_0 \ln(z - z_0)$ เมื่อ $n=0$ และเท่ากับ $B_n / (z - z_0)^n$ เมื่อ $n \geq 1$. เราสามารถย้ายจุดศูนย์กลางการกระจายของศักย์ไฟฟ้านี้ ไปยังจุดกำเนิด O โดยที่สมการศักย์เชิงซ้อนใหม่ใช้ได้บนบริเวณที่ $|z| > |z_0|$. นั่นคือ ภายนอกวงกลมรัศมี $|z_0|$ จุดศูนย์กลางที่ O . การกระจายพจน์ใหม่ได้ศักย์ในรูปของ

$$\Phi_{Bn} = \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{Cj} \quad (3.1.3.6)$$

เมื่อ C_j ($j = n, n+1, \dots$) เป็นมัลติโพลซึ่งอยู่ที่ O .



รูปที่ 3.1.3.1 มัลติโพล B_n ที่ตำแหน่ง z_0 บนระนาบเชิงซ้อน.

นั่นคือ $\Phi_{C_0} = C_0 \ln z$ และ $\Phi_{C_j} = C_j / z^j$ สำหรับ $j \geq 1$. มัลติโพลชุดใหม่ C_j คำนวณหาจาก B_n เมื่อ $(j \geq n)$ ดังสมการความสัมพันธ์ต่อไปนี้.

สำหรับ $j = 0$

$$C_0 = B_0 \quad (3.1.3.7)$$

สำหรับ $j \geq 1$

$$C_j = -\frac{z_0^j B_0}{j} \quad \text{เมื่อ } n = 0 \text{ และ} \quad (3.1.3.8)$$

$$C_j = z_0^{j-n} \frac{(j-1)!}{(j-n)!(n-1)!} B_n \quad \text{เมื่อ } n \neq 0 \quad (3.1.3.9)$$

การกระจายศักย์เชิงซ้อนใหม่แบบนี้จะเรียกสั้นๆ ต่อไปว่าเป็น การกระจายแบบ M2M

การย้ายจุดศูนย์กลางการกระจายของศักย์เฉพาะที่ (L2L)

ให้ $\Phi_{L_n} = L_n (z - z_0)^n$ เป็นศักย์เชิงซ้อนอันดับที่ n ที่กระจายรอบจุด z_0 ในรูปแบบเฉพาะที่. เราสามารถย้ายจุดศูนย์กลางการกระจายของศักย์เชิงซ้อนนี้ ไปยังจุดกำเนิด O และเขียน Φ_{L_n} ใหม่ได้เป็น

$$\Phi_{L_n} = \sum_{j=0}^n \Phi_{M_j} \quad (3.1.3.10)$$

$$\Phi_{M_j} = M_j z^j \quad (3.1.3.11)$$

เมื่อ M_j ($j = 0, 1, \dots, n$) เป็นสัมประสิทธิ์จำนวนเชิงซ้อน. เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง M_j และ L_n ($n \geq j$) โดยใช้ทฤษฎีการกระจายพหุนาม ได้เป็น

$$M_j = (-z_0)^{n-j} \frac{n!}{j!(n-j)!} L_n \quad (3.1.3.12)$$

การกระจายศักย์เชิงซ้อนใหม่แบบนี้จะเรียกสั้นๆ ต่อไปว่าเป็น การกระจายแบบ L2L

การย้ายจุดศูนย์กลางการกระจายของศักย์มัลติโพลและเขียนเป็นศักย์เฉพาะที่ (M2L)

พิจารณา มัลติโพลตัวเดิมในรูปที่ 3.1.3.1. เราสามารถเขียนศักย์เชิงซ้อน Φ_{B_n} ใหม่ ในรูปแบบของอนุกรมเทย์เลอร์โดยมีจุดศูนย์กลางการกระจายที่ O สำหรับจุด $|z| < |z_0|$ ได้. (นั่นคือ ศักย์เชิงซ้อนใหม่นี้ใช้ได้กับบริเวณภายในทรงกลมรัศมี $|z_0|$ และจุดศูนย์กลางที่ O .) ศักย์ไฟฟ้าหลังการกระจายพจน์ใหม่เขียนได้เป็น

$$\Phi_{Bn} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{Mj} \quad (3.1.3.13)$$

เมื่อ M_j โดย $j = 0, 1, \dots$ เป็นสัมประสิทธิ์ที่ก่อกำเนิดจากการกระจายพจน์ใหม่. สังเกตว่า ซีดจำกัด $|z| < |z_0|$ ของสมการที่ (3.1.3.13) มีที่มาจากทฤษฎีของเทย์เลอร์[35]. สัมประสิทธิ์ M_j คำนวณจาก B_n ได้จากความสัมพันธ์ต่อไปนี้.[36, 37]

สำหรับ $j = 0$

$$M_0 = B_0 \ln(-z_0) \quad \text{ถ้า } n = 0 \quad \text{และ} \quad (3.1.3.14)$$

$$M_0 = B_n / (-z_0)^n \quad \text{ถ้า } n \neq 0 \quad (3.1.3.15)$$

สำหรับ $j \geq 1$

$$M_j = -B_n / j z_0^j \quad \text{ถ้า } n = 0 \quad \text{และ} \quad (3.1.3.16)$$

$$M_j = (-1)^n \frac{B_n}{z_0^{n+j}} \frac{(j+n-1)!}{j!(n-1)!} \quad \text{ถ้า } n \neq 0 \quad (3.1.3.17)$$

การกระจายตักย์เชิงซ้อนใหม่แบบนี้จะเรียกสั้นๆ ต่อไปว่าเป็น การกระจายแบบ M2L

3.1.3.3 เงามัลติโพลสำหรับการจัดเรียงพื้นฐาน

หัวข้อนี้กล่าวถึงเงามัลติโพลสำหรับการจัดเรียงพื้นฐานที่ประกอบด้วยวัตถุภายในเพียงหนึ่งชั้น โดยมีผิวขอบเขตของวัตถุเป็นทรงกระบอกหรือระนาบ. เงามัลติโพลซึ่งทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนวัตถุนั้นๆ เป็นจริงได้ จะถูกนำมาใช้ในการคำนวณแบบทำซ้ำ เมื่อบริเวณของปัญหาประกอบด้วยวัตถุมากกว่าหนึ่งชนิด.

เงาที่เกิดจากระนาบตัวนำต่อลงดิน

พิจารณาเงามัลติโพล B_n ที่ตำแหน่ง $z_0 = x_0 + iy_0$ เหนือระนาบตัวนำต่อลงดินที่อยู่บนแกนจริงของระนาบ z ดังแสดงในรูปที่ 3.1.3.2. เงื่อนไขขอบเขตที่ต้องทำให้เป็นจริงในที่นี้ก็คือ เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์บนระนาบตัวนำ ซึ่งทำได้โดยวางเงามัลติโพล B'_n เป็นเงาของ B_n ณ ตำแหน่ง $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$. นั่นคือ บนแกนจริง ($y = 0$) ของระนาบ z

$$\text{Re}\{\Phi_{Bn} + \Phi_{B'n'}\} = 0 \quad (3.1.3.18)$$

เนื่องจาก Φ_{Bn} และ $\Phi_{B'n'}$ เป็นฟังก์ชันลอการิทึมของ z ถ้า $n = 0$ แต่เป็นฟังก์ชันกำลังถ้า $n \geq 1$ เราจึงพิจารณาค่าเงา แยกเป็นสองกรณีคือ เมื่อ $n = 0$ และเมื่อ $n \geq 1$.

ถ้า $n = 0$

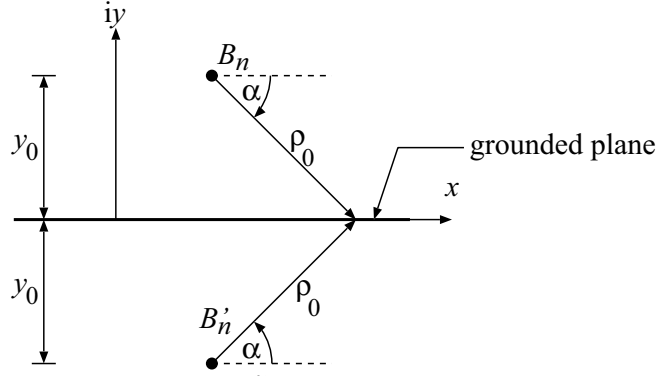
$$\Phi_{B0} + \Phi_{B'0} = B_0 (\ln \rho_0 - i\alpha) + B'_0 (\ln \rho_0 + i\alpha) \quad (3.1.3.19)$$

โดย $(\rho_0, -\alpha)$ เป็นพิกัดเชิงขั้วของจุดบนระนาบตัวนำ ที่มี $z_0 = x_0 + iy_0$ เป็นจุดกำเนิด.

นั่นคือ $z - z_0 = \rho_0 \exp(-i\alpha)$. เนื่องจากสมการที่ (3.1.3.19) ต้องเป็นจริงที่มุม α ใดๆ เราได้ว่า

$$B'_0 = -\bar{B}_0 \quad (3.1.3.20)$$

โดย \bar{B}_0 เป็นสังยุคของ B_0 .



รูปที่ 3.1.3.2 มัลติโพล B_n และเงา B'_n ที่เกิดขึ้นระนาบตัวนำต่อลงดินที่แกนจริงของระนาบเชิงซ้อน.

ถ้า $n \geq 1$ สมการเงื่อนไขขอบเขต (3.1.3.18) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\Phi_{B_n} + \Phi_{B'_n} = \frac{B_n}{\rho_0^n} \exp(in\alpha) + \frac{B'_n}{\rho_0^n} \exp(-in\alpha) \quad (3.1.3.21)$$

ซึ่งทำให้ได้ความสัมพันธ์ในลักษณะเดียวกับ (3.1.3.20). ดังนั้น เราสรุปได้ว่า

$$B'_n = -\bar{B}_n \quad (3.1.3.22)$$

สำหรับทุกค่า n .

เงาที่เกิดจากระนาบฉนวนความหนาที่กึ่งอนันต์

พิจารณาการจัดเรียงในรูปที่ 3.1.3.2 แต่คราวนี้ให้ระนาบตัวนำถูกแทนด้วยฉนวนแข็งที่มีความหนาที่กึ่งอนันต์. สภาพยอมของฉนวนแข็งและตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบแทนด้วยสัญลักษณ์ ϵ_I และ ϵ_E ตามลำดับ. เราสามารถใช้มัลติโพลสองตัว คือ B'_n ที่ \bar{z}_0 และ B''_n ที่ z_0 ทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนรอยต่อระหว่างตัวกลางที่ $y=0$ เป็นจริงได้. ในบริเวณตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบ ศักย์เชิงซ้อน Φ_E เป็นผลจากมัลติโพล B_n และ B'_n และสามารถเขียนได้เป็น

$$\Phi_E = \Phi_{B_n} + \Phi_{B'_n} \quad (3.1.3.23)$$

ภายในฉนวนแข็ง ศักย์เชิงซ้อน Φ_I เกิดจากมัลติโพล B''_n และเขียนได้เป็น

$$\Phi_I = \Phi_{B''_n} \quad (3.1.3.24)$$

สำหรับสภาวะที่กำลังพิจารณาอยู่นี้ เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องคือ เงื่อนไขความต่อเนื่องของศักย์ไฟฟ้า(จริง) และฟลักซ์ไฟฟ้าในแนวตั้งฉากบนรอยต่อระหว่างตัวกลาง. เพื่อหาค่าของ B'_n และ B''_n เราแสดงเงื่อนไขขอบเขตในรูปของศักย์เชิงซ้อนได้เป็น

$$\text{Re}\{\Phi_I\} = \text{Re}\{\Phi_E\} \quad (3.1.3.25)$$

$$\Gamma \frac{\partial}{\partial y} \text{Re}\{\Phi_I\} = \frac{\partial}{\partial y} \text{Re}\{\Phi_E\} \quad (3.1.3.26)$$

โดย $\Gamma = \epsilon_I / \epsilon_E$ เป็นอัตราส่วนของสภาพยอม. จากสมการเงื่อนไขขอบเขตทั้งสองนี้ และเงื่อนไขของ Cauchy-Riemann เราสามารถสรุปได้ว่า

$$B'_n = -\frac{\Gamma-1}{\Gamma+1} \bar{B}_n \quad (3.1.3.27)$$

$$B''_n = \frac{2}{\Gamma+1} B_n \quad (3.1.3.28)$$

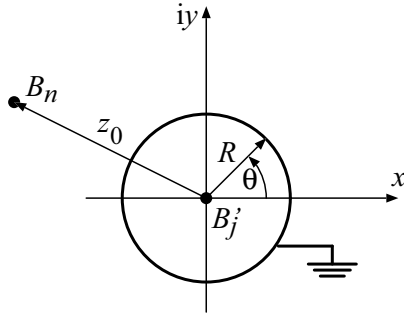
สังเกตว่า เงามัลติโพลที่ได้อธิบายในที่นี้ สามารถใช้ได้กับกรณีทั่วไป ซึ่งตัวกลางสองชนิดมีรอยต่อเป็นแบบระนาบ โดยสภาพยอม ε_I และ ε_E แทนตัวกลางในด้านของมัลติโพล B_n และในอีกด้านหนึ่งตามลำดับ.

เงาที่เกิดจากตัวนำทรงกระบอกต่อลงดิน

ต่อไป พิจารณาตัวนำทรงกระบอกที่ถูกต่อลงดินอยู่ (มีศักย์ไฟฟ้าจริงคงที่เท่ากับศูนย์) โดยทรงกระบอกมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของระนาบเชิงซ้อน และมีรัศมีเท่ากับ R ดังแสดงในรูปที่ 3.1.3.3. ให้แหล่งกำเนิดสนามเป็นมัลติโพล B_n ที่ตำแหน่ง z_0 ซึ่งอยู่ภายนอกทรงกระบอก ($|z_0| > R$). โดยใช้วิธีการกระจายพจน์ใหม่แบบ M2L กับศักย์เชิงซ้อนเนื่องจาก B_n เราสามารถเขียนศักย์ในรูปเฉพาะที่ได้ สำหรับจุด $|z| < |z_0|$ เป็น

$$\Phi_{Bn} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{Mj} \quad (3.1.3.29)$$

โดย M_j คำนวณหาได้จากสมการที่ (3.1.3.14) ถึง (3.1.3.17).



รูปที่ 3.1.3.3 มัลติโพล B_n และตัวนำทรงกระบอกต่อลงดิน. B'_j เป็นเงาของ B_n ที่เหนี่ยวนำให้เกิดขึ้นโดยทรงกระบอกตัวนำ.

เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์ไฟฟ้า(เท่ากับศูนย์)บนผิวของทรงกระบอกเป็นจริง เราใช้มัลติโพลจำนวนอนันต์ B'_j โดย $j = 0, 1, \dots$ วางที่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก เป็นเงาของ B_n . เมื่อจับคู่ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากสัมประสิทธิ์ทั้งสอง เราสามารถทำให้ได้

$$\text{Re}\{\Phi_{Mj} + \Phi_{B'_j}\} = 0 \quad (3.1.3.30)$$

สำหรับแต่ละค่าของ j . เช่นเดียวกับในหัวข้อที่แล้ว เราจะแยกพิจารณาเงาเป็นสองกรณีคือ $j = 0$ และ $j \geq 1$.

ถ้า $j = 0$ สมการเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$B'_{0,r} \ln R - B'_{0,i} \theta + M_{0,r} = 0 \quad (3.1.3.31)$$

เมื่อ $R(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นผิวของทรงกระบอก. จากสมการที่ (3.1.3.31) ความสัมพันธ์ระหว่างเงามัลติโพลกับแหล่งกำเนิดเป็น

$$B'_0 = -\text{Re}\left\{\frac{M_0}{\ln R}\right\} \quad (3.1.3.32)$$

สำหรับ $j \geq 1$ สมการเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\text{Re}\left\{\frac{B'_j \exp(-ij\theta)}{R^j} + M_j R^j \exp(ij\theta)\right\} = 0 \quad (3.1.3.33)$$

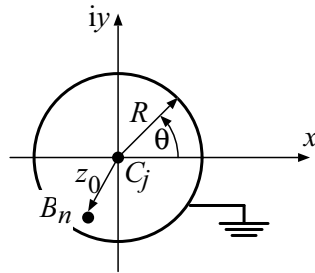
จากสมการนี้ เราสามารถสรุปได้ว่า

$$B'_j = -R^{2j} \overline{M}_j \text{ เมื่อ } j \geq 1. \quad (3.1.3.34)$$

ต่อมา เราจะพิจารณาสภาวะตรงกันข้ามกับที่ได้กล่าวมาแล้ว. นั่นคือ มัลติโพล B_n อยู่ที่ z_0 ภายในตัวนำทรงกลมกลวงที่มีรัศมี R และมีจุดศูนย์กลางอยู่จุดกำเนิด ($|z_0| < R$) ดังแสดงในรูปที่ 3.1.3.4. เพื่อให้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์บนผิวทรงกระบอก $|z| = R$ เป็นจริง เราใช้การกระจายพจน์ใหม่แบบ M2M กับศักย์เชิงซ้อนเนื่องจาก B_n รอบจุดศูนย์กลางของทรงกลม ($z = 0$). ดังนั้น ศักย์เชิงซ้อน Φ_{Bn} สามารถเขียนได้สำหรับ $|z| > z_0$ เป็น

$$\Phi_{Bn} = \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{Cj} \quad (3.1.3.35)$$

โดยที่ C_j ($j = n, n+1, \dots$) เป็นมัลติโพล ณ จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก ที่ได้จากการกระจายพจน์ใหม่. สังเกตว่า Φ_{Bn} ถูกกระจายพจน์ใหม่แบบ M2L ในกรณีแรก ($|z_0| > R$) และแบบ M2M ในกรณีนี้ ($|z_0| < R$).



รูปที่ 3.1.3.4 สภาวะที่มัลติโพล B_n อยู่ที่จุด z_0 ซึ่งอยู่ภายในทรงกระบอกกลวงที่ต่อลงดิน.

ศักย์เชิงซ้อนลัพท์ที่เกิดขึ้น เป็นผลรวมของ Φ_{Bn} และศักย์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากประจุที่ถูกเหนี่ยวนำขึ้นบนผิวของตัวนำทรงกระบอก. ถ้าให้ศักย์ตัวหลังแทนด้วย Φ_{Mj} ซึ่งอยู่ในรูปเฉพาะที่ เราจะเขียนศักย์ลัพท์ภายในทรงกระบอกกลวงนี้ได้เป็น

$$\Phi = \Phi_{Bn} + \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{Mj} = \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{Cj} + \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{Mj} \quad (3.1.3.36)$$

โดย $\Phi_{Mj} = M_j z^j$. เงื่อนไขศักย์เท่ากับศูนย์บนผิวของทรงกระบอกเป็นจริงได้เมื่อ

$$M_0 = -C_0 \ln R \quad (3.1.3.37)$$

และ

$$M_j = -\frac{\overline{C}_j}{R^{2j}} \text{ เมื่อ } j \geq 1 \quad (3.1.3.38)$$

เงาที่เกิดจากฉนวนทรงกระบอก

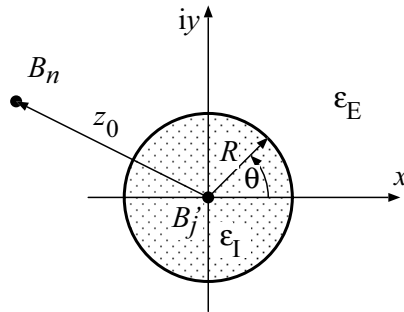
พิจารณาการจัดเรียงในรูปที่ 3.1.3.5. ฉนวนทรงกระบอกมีรัศมีเท่ากับ R และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของระนาบเชิงซ้อน. แหล่งกำเนิดศักย์เป็นมัลติโพล B_n ที่ตำแหน่ง z_0 ซึ่งอยู่นอกทรงกระบอก ($|z_0| > R$). ให้สภาพยอมของทรงกระบอกและตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบแทนด้วยสัญลักษณ์ ϵ_I และ ϵ_E ตามลำดับ.

สำหรับการจัดเรียงแบบนี้ เราแยกเขียนศักย์เชิงซ้อน Φ_I สำหรับบริเวณภายในทรงกระบอก และศักย์เชิงซ้อน Φ_E สำหรับบริเวณภายนอกทรงกระบอก. ศักย์ทั้งสองจะถูกหาออกมาให้ได้เงื่อนไขขอบเขต

$$\operatorname{Re}\{\Phi_I\} = \operatorname{Re}\{\Phi_E\} \quad (3.1.3.39)$$

และ
$$\Gamma \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Re}\{\Phi_I\} = \frac{\partial}{\partial \rho} \operatorname{Re}\{\Phi_E\} \quad (3.1.3.40)$$

เป็นจริง.



รูปที่ 3.1.3.5 มัลติโพล B_n และฉนวนทรงกระบอก. B'_j เป็นเงาของ B_n ที่เหนี่ยวนำให้เกิดขึ้นโดยฉนวนทรงกระบอก.

สนามไฟฟ้าเนื่องจาก B_n เหนี่ยวนำให้เกิดโพลาริเซชันในทรงกระบอกฉนวน เป็นผลให้เกิดประจุบนผิวของทรงกระบอกขึ้น เว้นแต่ $\Gamma = 1$. ดังนั้น ศักย์ภายในทรงกระบอกเป็นผลของมัลติโพล B_n และประจุเหนี่ยวนำบนผิวของทรงกระบอก. ศักย์เชิงซ้อนลัพธ์ Φ_I ภายในทรงกระบอกจึงสามารถเขียนได้ในรูปการกระจายเฉพาะที่ รอบจุดศูนย์กลางของทรงกระบอก

$$\Phi_I = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{L_j} \quad (3.1.3.41)$$

เมื่อ L_j ($j = 0, 1, \dots$) เป็นสัมประสิทธิ์ศักย์ที่จะคำนวณหาออกมา.

ในทำนองเดียวกัน ศักย์ Φ_E ภายนอกทรงกระบอกฉนวนก็เกิดจากมัลติโพล B_n และประจุเหนี่ยวนำบนผิวทรงกระบอก. เราใช้เงามัลติโพล B'_j โดย $j = 1, 2, \dots$ ที่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก เพื่อแสดงศักย์ไฟฟ้าในบริเวณภายนอก ที่เกิดจากประจุเหนี่ยวนำบนผิวทรงกระบอก. ดังนั้น สำหรับจุดที่ $|z| \geq R$ ศักย์เชิงซ้อน Φ_E เขียนได้เป็น

$$\Phi_E = \Phi_{B_n} + \Phi_{B'} = \Phi_{B_n} + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{B'_j} \quad (3.1.3.42)$$

เมื่อทำการกระจายพจน์ใหม่แบบ M2L กับ Φ_{B_n} ดังสมการที่ (3.1.3.29) เราสามารถเขียน Φ_{B_n} สำหรับ $R \leq |z| < |z_0|$ ได้เป็น

$$\Phi_E = + \sum_{j=0}^{\infty} (\Phi_{M_j} + \Phi_{B'_j}) \quad (3.1.3.43)$$

สังเกตว่า ข้อจำกัด $|z| < |z_0|$ เกิดขึ้นจากการกระจายพจน์ซ้ำของ Φ_{B_n} เป็น Φ_{M_j} .

จากเงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ (3.1.3.39) และ (3.1.3.40) ความสัมพันธ์ระหว่าง L_j และ B'_j กับ M_j สามารถเขียนได้เป็น

$$L_0 = \operatorname{Re}\{M_0\} \quad (3.1.3.44)$$

$$B'_0 = 0 \quad (3.1.3.45)$$

และเมื่อ $j \geq 1$

$$L_j = \frac{2}{\Gamma+1} M_j \quad (3.1.3.46)$$

$$B'_j = -\frac{\Gamma-1}{\Gamma+1} R^{2j} \overline{M}_j \quad (3.1.3.47)$$

เช่นเดียวกับในการจัดเรียงของตัวนำทรงกระบอก เราจะพิจารณาภาวะตรงกันข้าม นั่นคือ สภาวะที่ B_n อยู่ภายในฉนวนทรงกระบอก. พิจารณามัลติโพล B_n ในรูปที่ 3.1.3.4 แต่ให้ทรงกระบอกเป็นฉนวนที่มีสภาพยอมเท่ากับ ϵ_I . หลังจากการใช้วิธีกระจายพจน์ศักย์ใหม่แบบ M2M เราได้ศักย์ไฟฟ้าในรูปของสมการที่ (3.1.3.35). ศักย์เชิงซ้อนัลฟ์ในกรณีเป็น

$$\Phi_I = \Phi_{Bn} + \Phi_M = \sum_{j=0}^{\infty} (\Phi_{Cj} + \Phi_{Mj}) \quad (3.1.3.48)$$

ภายในทรงกระบอก โดยที่ $\Phi_M = M_j z^j$ และเป็น

$$\Phi_E = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{Cj} \quad (3.1.3.49)$$

ภายนอกทรงกระบอก โดยที่ C'_j เป็นแอมัลติโพล. สัมประสิทธิ์ M_j และ C'_j ของศักย์ หาได้จาก C_j เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตเป็นจริงได้ดังนี้.

$$C'_0 = \Gamma C_0 \quad (3.1.3.50)$$

$$M_0 = (\Gamma-1)C_0 \ln R \quad (3.1.3.51)$$

และสำหรับ $j \geq 1$

$$C'_j = \frac{2\Gamma}{\Gamma+1} C_j \quad (3.1.3.52)$$

$$M_j = \frac{\Gamma-1}{\Gamma+1} \overline{C}_j R^{2j} \quad (3.1.3.53)$$

3.1.3.4 ค่าเริ่มต้นของศักย์ไฟฟ้าเชิงซ้อนสำหรับเริ่มต้นคำนวณ

โดยปกติแล้ว การคำนวณด้วยวิธีเงาประจุ(หรือวิธีแอมัลติโพลในที่นี้) เริ่มต้นจากศักย์ไฟฟ้าเชิงซ้อนซึ่งทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนวัตถุหนึ่งในบริเวณที่เราพิจารณาเป็นจริง. ตัวอย่างเช่น เงื่อนไขเริ่มต้นนี้อาจเป็นเงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเท่ากับผิวดำนำ หรืออาจเป็นเงื่อนไขของศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก. ในกรณีที่บริเวณที่เราสนใจมีจำนวนวัตถุมากกว่าหนึ่ง การคำนวณสนามจะเป็นแบบทำซ้ำ โดยอาศัยค่าศักย์เริ่มต้นนี้. หัวข้อนี้กล่าวถึงการตั้งค่าศักย์เชิงซ้อนสำหรับเริ่มต้นคำนวณด้วยวิธีแอมัลติโพล.

ตัวนำทรงกระบอกที่มีศักย์ไฟฟ้าทราบค่า

สมมติให้มีตัวนำทรงกระบอกจุดศูนย์กลาง (x_0, y_0) รัศมี R_0 ศักย์ไฟฟ้า ϕ_0 . ในระนาบเชิงซ้อนที่ใช้แทนบริเวณสองมิตินี้ เราสามารถวางมัลติโพล B_0 อันดับศูนย์ ที่จุด $z_0 = x_0 + iy_0$ เพื่อให้ได้ $\text{Re}\{\Phi_{B0}\} = \phi_0$ ณ จุด z ใดๆ บนผิวดำทรงกระบอก ($|z - z_0| = R_0$). จากสมการที่ (3.1.3.4) เป็นที่ชัดเจนว่า B_0 สามารถคำนวณหาได้เป็น

$$B_0 = \phi_0 / \ln R_0 \quad (3.1.3.54)$$

ศักย์เชิงซ้อนเริ่มต้นจึงเขียนได้เป็น

$$\Phi = B_0 \ln(z - z_0) \quad (3.1.3.55)$$

ตัวนำทรงกระบอกที่ทราบค่าศักย์ไฟฟ้าและระนาบตัวนำต่อลงดิน

สมมติให้มีตัวนำทรงกระบอกที่มีศักย์ไฟฟ้า ϕ_0 รัศมี R_0 และจุดศูนย์กลางที่ (x_0, y_0) อยู่เหนือระนาบอิเล็กโทรดต่อลงดินที่ $y = 0$ ดังแสดงในรูปที่ 3.1.3.6. บนระนาบเชิงซ้อนที่ตรงกันกับการจัดเรียงแบบนี้ เราใช้เงาเพื่อให้ได้ศักย์ไฟฟ้าเชิงซ้อนที่ทำให้เงื่อนไขสองประการเป็นจริง คือ (1) $\text{Re}\{\Phi\} = \phi_0$ ที่จุด z ใดๆ ซึ่ง $|z - z_0| = R_0$ และ (2) $\text{Re}\{\Phi\} = 0$ บนแกนจริง. เงามัลติโพลอันดับที่สองที่ศูนย์กลางสองตัว B_0 และ $-B_0$ ถูกวางที่ $z_B = x_0 + iy_B$ และ \bar{z}_B ตามลำดับ. ความสูง y_B สามารถคำนวณได้จาก y_0 และรัศมี R_0 ของทรงกระบอกตามสมการ[38]

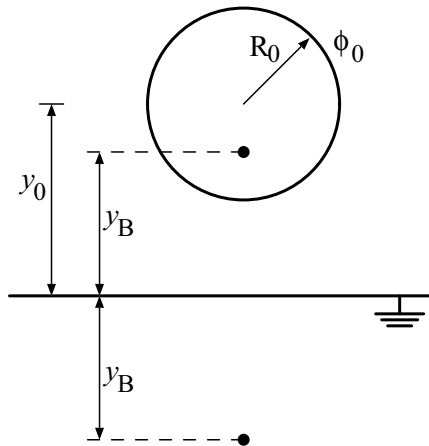
$$y_B = \sqrt{y_0^2 - R_0^2} \quad (3.1.3.56)$$

ศักย์เชิงซ้อนเนื่องจากมัลติโพลสองตัวนี้ ณ จุด z มีค่าเท่ากับ

$$\Phi = B_0 \ln\left(\frac{z - z_B}{z - \bar{z}_B}\right) \quad (3.1.3.57)$$

ดังนั้น ขนาดของมัลติโพลคำนวณจากศักย์ ϕ_0 ได้เป็น

$$B_0 = \frac{\phi_0}{\ln\left[R_0 / (y_0 + \sqrt{y_0^2 - R_0^2})\right]} \quad (3.1.3.58)$$



รูปที่ 3.1.3.6 ตัวนำทรงกระบอกที่ได้รับค่าศักย์ไฟฟ้า ϕ_0 อยู่เหนือระนาบตัวนำต่อลงดินเป็นระยะห่าง y_0 .

สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก

ถ้าหากการจัดเรียงทางกายภาพที่กำลังพิจารณาได้รับสนามไฟฟ้าภายนอก เราจะใช้ศักย์เชิงซ้อนเนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอกเป็นค่าเริ่มต้นในการคำนวณ. สมมติให้มีสนามไฟฟ้า E_y ปรากฏอยู่ในแนวตั้งทิศพุ่งลงด้านล่าง ($-y$). ศักย์จริง ϕ_{Ey} เนื่องจากสนามไฟฟ้านี้ ที่จุด (x, y) มีค่าเท่ากับ

$$\phi_{Ey} = \phi_0 + yE_y \quad (3.1.3.59)$$

เมื่อ ϕ_0 เป็นศักย์ไฟฟ้าอ้างอิง ณ จุดกำเนิด. ศักย์เชิงซ้อนสามารถเขียนได้ ในรูปการกระจายเฉพาะที่เป็น

$$\Phi_{Ey} = M_0 + M_1 z \quad (3.1.3.60)$$

เมื่อ $M_0 = \phi_0$ และ $M_1 = -iE_y$.

ถ้าหากสนามไฟฟ้าภายนอกอยู่ในแนว x ในทิศจากซ้ายไปขวา (+x) ศักย์จริง ϕ_{Ex} ที่จุด (x, y) เท่ากับ

$$\phi_{Ey} = \phi_0 - xE_x \quad (3.1.3.61)$$

และศักย์เชิงซ้อน Φ_{Ex} เนื่องจากสนามไฟฟ้านี้ยังคงอยู่ในรูปของสมการที่ (3.1.3.60) โดยมี

$$M_0 = \phi_0 \text{ และ } M_1 = -E_x.$$

3.1.3.5 ขั้นตอนการคำนวณ

วิธีเจามัลติโพลเริ่มต้นด้วยศักย์เชิงซ้อนที่ทำให้เงื่อนไขขอบเขตหนึ่งภายในบริเวณที่พิจารณาเป็นจริง ดังที่ได้อธิบายในหัวข้อที่ผ่านมา. จากศักย์เริ่มต้น เราวางเจามัลติโพลที่เกิดจากวัตถุแต่ละตัวภายในการจัดเรียง เพื่อจัดการกับเงื่อนไขขอบเขตบนวัตถุอื่นๆ โดยใช้เงาที่ได้อธิบายมาแล้ว. อย่างไรก็ตาม ถ้าหากการจัดเรียงประกอบด้วยวัตถุมากกว่าหนึ่งชิ้น การวางเจามัลติโพลของวัตถุชิ้นหนึ่งจะทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนวัตถุชิ้นอื่นไม่เป็นจริง. ดังนั้น การคำนวณต้องใช้เจามัลติโพลในลักษณะทำซ้ำ จนกระทั่งค่าคำตอบที่ได้เข้าสู่ค่าตอบจริง. ตัวอย่างรายละเอียดของวิธีทำซ้ำได้ถูกอธิบายไว้แล้วในเอกสารอ้างอิง [10,11,39]. การใช้การกระจายพจน์ศักย์ไฟฟ้าใหม่ในลักษณะเดียวกัน กับปัญหาบริเวณสามมิติ ก็ได้มีการนำเสนอใน[40].

ข้อควรสังเกตประการหนึ่งที่สำคัญในที่นี้ก็คือ การปรากฏอยู่ของตัวนำทรงกระบอกที่ได้รับการให้พลังงาน (ป้อนศักย์ไฟฟ้าหรืออัดประจุ) อาจทำให้เกิดปัญหาเชิงเลขในการคำนวณ. ทั้งนี้ เนื่องจากว่า ศักย์เนื่องจากมัลติโพล B_j โดย $j \geq 1$ มีค่าเข้าสู่ศูนย์เมื่อ $|z| \rightarrow \infty$ แต่ศักย์เนื่องจากโมนโพล B_0 มีค่าเป็นเอกฐาน. ลักษณะสมบัตินี้นำไปสู่ความไม่มีเสถียรภาพเชิงเลข เมื่อคำนวณด้วยการกระจายพจน์ใหม่และการใช้เจามัลติโพล. ในที่นี้ ผู้วิจัยสังเกตว่า $|\phi_{B0}|$ มีค่าลดลงเข้าสู่ศูนย์ ขณะที่ $|z|$ เพิ่มขึ้นจากศูนย์ถึงหนึ่ง. ดังนั้น วิธีการแก้ปัญหาเสถียรภาพเชิงเลขทำได้โดยการจำกัดขนาดมิติของปัญหา ให้มีค่าต่ำกว่าหนึ่ง. (การจัดเรียงทางกายภาพจริงที่มีขนาดใหญ่กว่านี้ สามารถสเกลมิติให้อยู่ในช่วงต่ำกว่าหนึ่งสำหรับการคำนวณได้.) อย่างไรก็ตาม การแก้ไขด้วยวิธีนี้ก็ยังคงมีผลเสียตามมาประการหนึ่ง นั่นคือ อันดับของมัลติโพลที่สามารถใช้ได้ในการคำนวณลดลง เนื่องจากการหารค่าด้วย z^j ในสมการการกระจายพจน์ซ้ำ ด้วย z ค่าเล็กๆมากๆ อาจนำไปสู่ปัญหาเชิงเลขอื่นได้.

3.1.3.6 ตัวอย่างการคำนวณ

หัวข้อนี้นำเสนอตัวอย่างการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเงาสมัลติโพล ในปัญหาศักย์ไฟฟ้าสี่ข้อที่แตกต่างกัน โดยมีรายละเอียดดังแสดงในหัวข้อย่อยต่อไปนี้.

ตัวอย่างที่ 1: ตัวนำทรงกระบอกลอยภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

การจัดเรียงประกอบด้วยตัวนำทรงกระบอกลอย ซึ่งมีรัศมีเท่ากับ R และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $z_0 = x_0 + iy_0$ ภายใต้สนามไฟฟ้า $E_0 = -iE_y$. เราเริ่มการคำนวณด้วยศักย์เชิงซ้อนภายนอก Φ_{Ey} ตามที่ได้อธิบายในสมการที่ (3.1.3.60)

$$\Phi_{Ey} = \Phi_M = M_0 + M_1(z - z_0) \quad (3.1.3.62)$$

โดย M_0 เป็นศักย์ที่จุด z_0 และ $M_1 = -iE_y$. สังเกตว่า ในสมการนี้ ศักย์เชิงซ้อนเขียนในรูปฟังก์ชันที่กระจายรอบ z_0 . ต่อไป วางเงาสมัลติโพล B'_j โดย $j = 0$ และ 1 ที่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขต $\Phi_{Ey} = \Phi_M = M_0 + M_1(z - z_0)$

$$\text{Re}\{\Phi\} = \text{const} \quad (3.1.3.63)$$

เป็นจริงบนผิวทรงกระบอก โดยที่

$$\Phi = \Phi_M + \Phi_{B'} = \sum_{j=0}^1 (\Phi_{Mj} + \Phi_{Bj'}) \quad (3.1.3.64)$$

เนื่องจากตัวนำทรงกระบอกไม่ได้ติดอยู่กับแหล่งจ่ายพลังงาน จึงมีประจุลัพท์บนตัวมันเท่ากับศูนย์. นั่นคือ

$$B'_0 = 0 \quad (3.1.3.65)$$

เมื่อเราใช้สมการที่ (3.1.3.34) จะได้

$$B'_1 = -iR^2 E_y \quad (3.1.3.66)$$

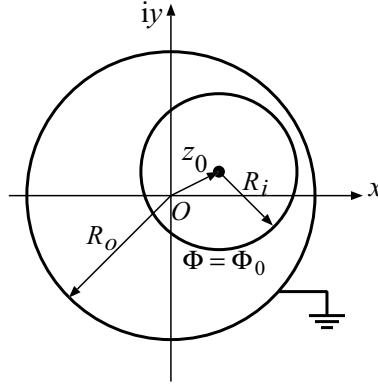
ดังนั้น คำตอบของศักย์จริง ϕ สามารถเขียนได้เป็น

$$\phi = \text{Re}\{\Phi\} = \phi_0 + \left(\rho - \frac{R^2}{\rho} \right) E_y \sin \theta \quad (3.1.3.67)$$

เมื่อ ϕ_0 เป็นศักย์ไฟฟ้าที่ (x_0, y_0) และ (ρ, θ) เป็นพิกัดเชิงขั้วที่มีจุดศูนย์กลางของทรงกระบอกเป็นจุดกำเนิด. สมการที่ (3.1.3.67) เป็นคำตอบที่เราทราบกันดีของการจัดเรียงนี้ ซึ่งปรากฏอยู่ในหนังสือทางสนามแม่เหล็กไฟฟ้าทั่วไป.

ตัวอย่างที่ 2: ตัวนำทรงกระบอกซ้อนที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน

ตัวอย่างที่จะอธิบายต่อไป เป็นตัวเก็บประจุที่ประกอบขึ้นด้วยทรงกระบอกซ้อนสองตัว ที่มีจุดศูนย์กลางต่างตำแหน่งกัน. ตัวนำทรงกระบอกด้านในมีรัศมี R_i และถูกกระตุ้นให้มีศักย์เท่ากับ ϕ_0 โดยที่ตัวนำทรงกระบอกด้านนอกมีรัศมี R_o และถูกต่อลงดิน. รูปที่ 3.1.3.7 แสดงการจัดเรียงนี้บนระนาบเชิงซ้อน โดยเราให้จุดกำเนิด O และจุด z_0 ($|z_0| + R_i < R_o$) เป็นจุดศูนย์กลางของตัวนำทรงกระบอกด้านนอกและด้านใน ตามลำดับ. แม้ว่าการจัดเรียงแบบนี้สามารถหาคำตอบของศักย์ได้ ด้วยระบบพิกัดทรงกระบอกคู่[26] วิธีที่ได้นำเสนอในที่นี้มีข้อดีตรงที่ สามารถใช้ได้กับปัญหาทั่วไป ที่ประกอบด้วยทรงกระบอกมากกว่าสองตัวได้.



รูปที่ 3.1.3.7 ตัวทรงกระบอกซ้อนที่มีจุดศูนย์กลางต่างตำแหน่งกัน และมีความต่างศักย์ ϕ_0 .

ขั้นตอนวิธีการทำซ้ำ เพื่อให้ได้คำตอบของการจัดเรียงในรูปที่ 3.1.3.7 สามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้ โดยมีดัชนีบน (i) แสดงขั้นตอนของการทำซ้ำ

(1) วางมัลติโพลเริ่มต้น $B^{(1)}$ ที่ z_0 เพื่อให้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้า ϕ_0 บนผิวของตัวนำด้านในเป็นจริง. จากสมการที่ (3.1.3.4) เราได้

$$B_0^{(1)} = \frac{\phi_0}{\ln R_i} \quad (3.1.3.68)$$

และ $B_j^{(1)} = 0$ สำหรับ $j \geq 1$. ศักย์ Φ ระหว่างตัวนำทรงกระบอกแสดงได้เป็น

$$\Phi = \Phi_{B(1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{Bj(1)} \quad (3.1.3.69)$$

(2) ย้ายมัลติโพล $B^{(1)}$ ที่ z_0 ไปเป็นมัลติโพล $C_j^{(1)}$ ที่ O ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของทรงกระบอกด้านนอก โดยอาศัยการกระจายพจน์ใหม่แบบ M2M ในสมการที่ (3.1.3.6) ถึง (3.1.3.9). เราได้

$$\Phi_{B(1)} = \Phi_{C(1)} \quad (3.1.3.70)$$

เมื่อ $\Phi_{C(1)}$ เป็นศักย์รวมเนื่องจาก $C_j^{(1)}$ ทั้งหมด.

(3) ใช้ศักย์ $\Phi_{Mj(1)}$ ในรูปการกระจายแบบเฉพาะที่รอบจุด O เพื่อหักล้างกับศักย์เนื่องจาก $C_j^{(1)}$ แต่ละตัว. นั่นคือ บนผิวของทรงกระบอกด้านนอก

$$\Phi = \Phi^{(1)} = \Phi_{C(1)} + \Phi_{M(1)} = 0 \quad (3.1.3.71)$$

$$\Phi_{Cj(1)} + \Phi_{Mj(1)} = 0 \quad (3.1.3.72)$$

ในที่นี้ $\Phi_{M(1)}$ เป็นศักย์เนื่องจากประจุที่ถูกเหนี่ยวนำขึ้นบนผิวของตัวนำทรงกระบอกด้านนอก. สัมประสิทธิ์ของศักย์นี้คำนวณหาจาก $C^{(1)}$ โดยใช้สมการที่ (3.1.3.37) และ (3.1.3.38).

(4) ย้ายจุดศูนย์กลางการกระจายของ $\Phi_{M(1)}$ มายัง z_0 เป็นแบบ L2L และ ให้ศักย์ที่ได้ใหม่เป็น $\Phi_{M'(1)}$. เราจะได้ว่า

$$\Phi_{M'(1)} = \Phi_{M(1)} \quad (3.1.3.73)$$

เมื่อ $M'^{(1)}$ เป็นสัมประสิทธิ์ที่คำนวณได้จาก $M^{(1)}$ โดยใช้สมการที่ (3.1.3.10) และ (3.1.3.12).

(5) เนื่องจาก $\Phi_{M'(1)}$ มีผลต่อศักย์บนผิวของตัวนำทรงกระบอกตันใน เราต้องวางเงาผลิตีโพล $B^{(2)}$ ที่จุด z_0 เพื่อหักล้างกับศักย์ $\Phi_{M'(1)}$ บนผิวทรงกระบอกนี้. ศักย์ไฟฟ้าบนผิวตัวนำในจึงเป็น

$$\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi_{B(2)} = \Phi_0 \quad (3.1.3.74)$$

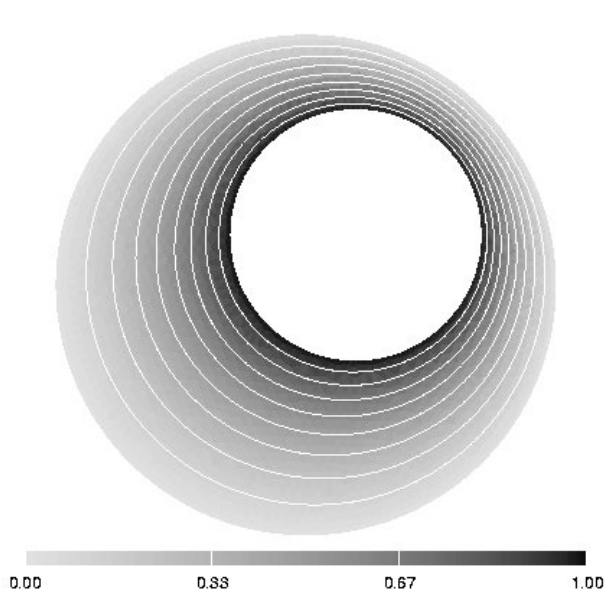
หรือ

$$\Phi_{M'j(1)} + \Phi_{Bj(2)} = 0 \quad (3.1.3.75)$$

เมื่อ $B_j^{(2)}$ สัมพันธ์กับ $M_j'^{(1)}$ ด้วยสมการที่ (3.1.3.32) และ (3.1.3.34).

(6) ทำขั้นตอนที่ 2 ถึง 5 ซ้ำ จนกระทั่งศักย์ Φ ลู่เข้าสู่คำตอบ.

รูปที่ 3.1.3.8 แสดงผลการคำนวณที่ได้เมื่อ $R_i = 0.5R_o$ และ $z_0 = (0.2R_o, 0.2R_o)$. ศักย์ไฟฟ้าที่แสดง ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย ϕ_0 . การคำนวณนี้ใช้อันดับมัลติโพลสูงสุดถึงอันดับที่แปด และลู่เข้าสู่คำตอบที่ ประมาณ 20 รอบการทำซ้ำ โดยให้ระดับความคลาดเคลื่อน $\varepsilon = 10^{-5} \%$ ของค่าศักย์ขั้นสุดท้าย.

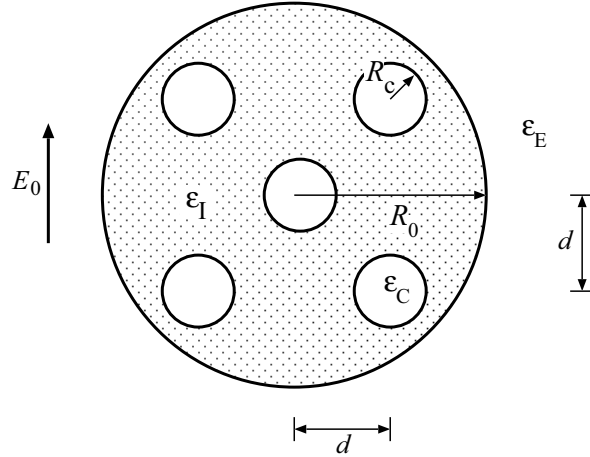


รูปที่ 3.1.3.8 การกระจายศักย์ที่ได้ภายในตัวนำทรงกระบอกซ้อนในรูปที่ 3.1.3.7 เมื่อ $R_i = 0.5R_o$ และ $z_0 = (0.2R_o, 0.2R_o)$.

ตัวอย่างที่ 3: ฉนวนทรงกระบอกแบบหลายแกนภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

ตัวอย่างนี้ (รูปที่ 3.1.3.9) เป็นรูปแบบง่ายของวัสดุที่มีโครงสร้างเป็นเส้นใย. ในรูป ฉนวนทรงกระบอกรัศมี R_o ประกอบด้วยฉนวนที่มีสภาพยอม ε_i และแกนกลางจำนวน 5 แกนที่มีรัศมีเท่ากับ R_c . แกนจำนวนสี่ แกนวางตัวอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของทรงกระบอกภายนอก เป็นระยะห่างเท่ากับ d ทั้งในแนวระดับและแนวตั้ง. ฉนวนทรงกระบอกทั้งหมดถูกวางอยู่ในตัวกลางที่มีสภาพยอม ε_e และได้รับสนามไฟฟ้าภายนอกในแนวตั้งขนาดสม่ำเสมอเท่ากับ E_0 . ผู้วิจัยได้คำนวณสนามไฟฟ้าในการจัดเรียงนี้ โดยมีค่า

$R_c = 0.2R_0$, $d = 0.5R_0$ และ $\varepsilon_I / \varepsilon_E = 4$. แกนภายในทรงกระบอกฉนวนถูกพิจารณาเป็นสองกรณีที่แตกต่างกันคือ (a) แกนในเป็นฉนวนที่มีสภาพยอม $\varepsilon_C = \varepsilon_E$ และ (b) แกนในเป็นตัวนำไฟฟ้า.



รูปที่ 3.1.3.9 ทรงกระบอกฉนวนภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ E_0 .

ผลการคำนวณที่ได้แสดงอยู่ในรูปที่ 3.1.3.10. ศักย์ไฟฟ้าซึ่งถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย $E_0 R_0$ แสดงด้วยสเกลสีเทา ซึ่งมีค่าสเกลอยู่ที่ด้านล่างของรูป. เราสามารถเห็นได้จากรูป 3.1.3.10a ว่า สนามไฟฟ้าภายในทรงกระบอกนอกไม่ได้แตกต่างไปจากกรณีของทรงกระบอกฉนวนเนื้อเดียวนัก. ทั้งนี้ สนามในกรณีของทรงกระบอกเนื้อเดียวมีค่าเท่ากับ $0.5E_0$ เมื่อ $\varepsilon_I / \varepsilon_E = 4$. ในอีกด้านหนึ่ง สนามในรูปที่ 3.1.3.10b มีค่าน้อยกว่าในกรณีแรก โดยเราสามารถสังเกตได้จากสเกลค่าศักย์ซึ่งแสดงอยู่ที่ด้านล่างของรูป. สำหรับการคำนวณทั้งสองกรณีของแกนใน คำตอบได้ลู่เข้าภายใน 8 รอบการทำซ้ำ เมื่อยอมให้ศักย์คลาดเคลื่อนได้ $\varepsilon = 10^{-5} \%$.

ตัวอย่างที่ 4: ฉนวนทรงกระบอกที่วางตัวอยู่บนระนาบตัวนำต่อลงดิน ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

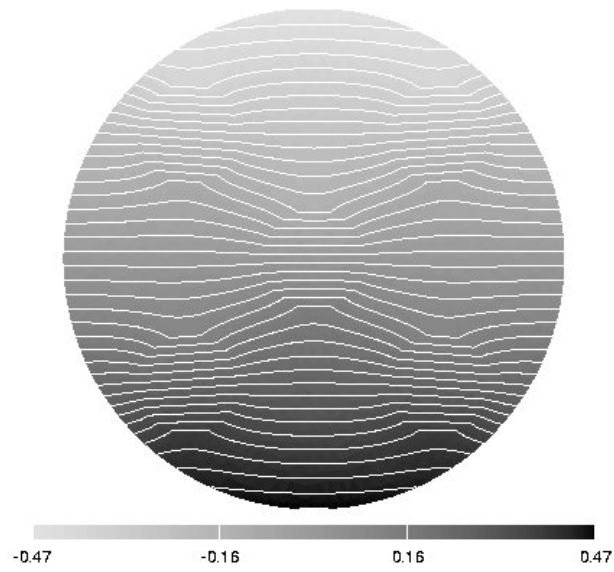
ตัวอย่างสุดท้ายนี้เป็นการจัดเรียงของฉนวนทรงกระบอกรัศมี R ซึ่งวางตัวอยู่บนระนาบตัวนำต่อลงดิน โดยได้รับสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก E_0 ในทิศทางแนวดิ่ง ดังแสดงในรูปที่ 3.1.3.11. ให้สภาพยอมของทรงกระบอก และของตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบเป็น ε_I และ ε_E ตามลำดับ. การจัดเรียงนี้ถูกใช้สำหรับตรวจสอบสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสระหว่างฉนวนพื้นผิวโค้งกับตัวนำไฟฟ้าใน[41]. การคำนวณในที่นี้ เริ่มจากศักย์

$$\Phi = \Phi_{E_0} = M_1^{(1)} z \quad (3.1.3.76)$$

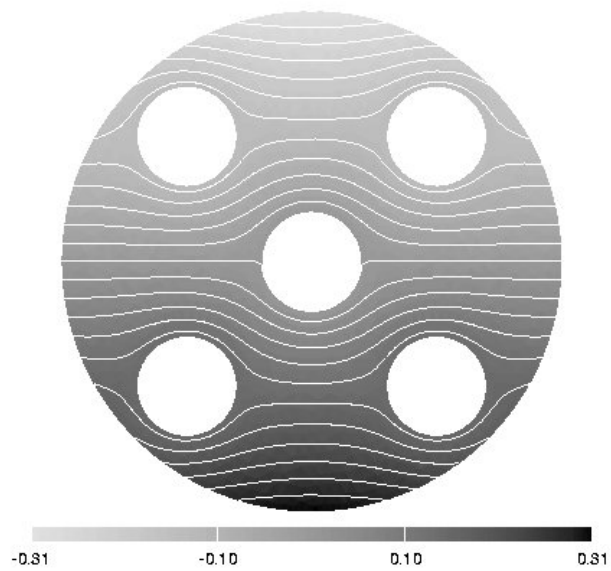
เมื่อ $M_1^{(1)} = iE_0$ ดังที่ได้อธิบายในหัวข้อที่ผ่านมา.

ในขั้นตอนต่อไป เงามัลติโพล $B^{(1)}$ ถูกวางที่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก โดยคำนวณหา $B_j^{(1)}$ ได้จาก $M_j^{(1)}$ ด้วยสมการที่ (3.1.3.45) และ (3.1.3.47). ขั้นตอนนี้ทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนผิวทรงกระบอกฉนวนเป็นจริง. เมื่อใช้เงามัลติโพลของระนาบตัวนำ $B_j'^{(1)}$ ในสมการที่ (3.1.3.22) ที่ตำแหน่ง R ได้ผิวระนาบตัวนำ เราจะได้เงื่อนไขขอบเขตที่ผิวระนาบตัวนำเป็นจริง.

ต่อมา ด้วยสมการที่ (3.1.3.14) ถึง (3.1.3.17) ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจาก $B_j^{(1)}$ ทั้งหมด จะถูกกระจายพจน์ใหม่แบบ M2L มายังจุดศูนย์กลางของทรงกระบอก. การกระจายพจน์ใหม่ทำให้ได้ $M^{(2)}$ สำหรับการทำซ้ำในขั้นต่อไป. เมื่อทำกระบวนการทำซ้ำไปจนถึงรอบที่ n เราจะเขียนศักย์ไฟฟ้าภายนอกทรงกระบอกจนวนเป็น

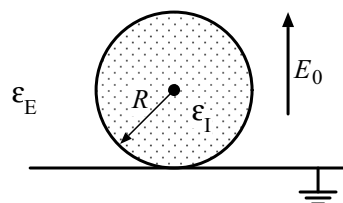


(a)



(b)

รูปที่ 3.1.3.10 ศักย์ไฟฟ้าภายในทรงกระบอกฉนวนเมื่อแกนเป็น (a) ฉนวน และ (b) ตัวนำ. ศักย์ไฟฟ้าที่ทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย $E_0 R_0$ แสดงตามสเกลสีที่ด้านล่างของแต่ละรูป.



รูปที่ 3.1.3.11 ฉนวนทรงกระบอกอยู่บนระนาบตัวนำต่อลงดินภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก E_0 .

$$\Phi = \Phi_{E0} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{N_j} [\Phi_{Ej(k)} + \Phi_{E'j(k)}] \quad (3.1.3.77)$$

เมื่อ N_j เป็นอันดับสูงสุดของมัลติโพลที่ใช้ในการคำนวณ.

รูปแบบการจัดเรียงนี้ถูกเลือกมาเป็นตัวอย่างในงานวิจัย เนื่องจากเราสามารถหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ของสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสได้. สนามไฟฟ้า E_c ณ จุดสัมผัสระหว่างทรงกระบอกและระนาบดิน คำนวณได้ด้วยวิธีเงาประจุ โดยใช้เพียงเงาไดโพลเท่านั้น[41]. สนามไฟฟ้าในด้านของ ε_E เป็น

$$\frac{E_c}{E_0} = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_E} \quad (3.1.3.78)$$

เมื่อ $\varepsilon_I / \varepsilon_E \gg 1$ สนามไฟฟ้าใกล้กับจุดสัมผัสมีค่าไม่สม่ำเสมอสูงมาก ทำให้การคำนวณด้วยวิธีเชิงเลขต่างๆ ให้แม่นยำสูง ทำได้ยาก. เราจึงใช้การจัดเรียงนี้มาตรวจสอบความแม่นยำของผลการคำนวณที่ได้จากวิธีเงามัลติโพล. รูปที่ 3.1.3.12 แสดงความคลาดเคลื่อนของค่า E_c เมื่อเปรียบเทียบกับคำตอบจริงในสมการที่ (3.1.3.78). จากรูปนี้ เราเห็นได้ว่า วิธีเงามัลติโพลให้ความแม่นยำสูง โดยมีความคลาดเคลื่อนต่ำกว่า 1% ที่อัตราส่วนสภาพยอม $\varepsilon_I / \varepsilon_E$ สูงถึง 64 เมื่อใช้ $N_j = 500$. รูปที่ 3.1.3.13 แสดงอันดับของ N_j ที่ต้องการ เพื่อให้ E_c มีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 1% โดยแสดงเป็นฟังก์ชันของอัตราส่วนสภาพยอม. รูปที่ 3.1.3.13 แสดงว่า N_j เพิ่มขึ้นตามอัตราส่วนสภาพยอม เป็นฟังก์ชันกำลังโดยประมาณ.

3.2 อนุภาคในระบบที่มีชั้นฉนวนแข็ง

ดังที่ได้กล่าวมาในหัวข้อที่ 2 แล้วว่า ในระบบฉนวนบางชนิด จะมีการเคลื่อนที่ของตัวนำด้วยชั้นฉนวนบางๆ ซึ่งจะทำให้ไม่มีการสัมผัสโดยตรงระหว่างฉนวนกับอนุภาค. นอกจากนี้ ในระบบดีสชาร์จเงียบ (silent discharge หรือ dielectric barrier discharge) ซึ่งมีการใช้งานอย่างกว้างขวางในปัจจุบัน ก็เป็นการป้องกันแรงดันไฟฟ้าในระบบที่มีชั้นฉนวนแข็งบนอิเล็กโทรดเช่นเดียวกัน. งานวิจัยในส่วนนี้ แบ่งออกเป็นสองขั้นตอนก็คือ 1) การวิเคราะห์ในกรณีที่ชั้นฉนวนแข็งมีความหนาที่อนันต์ ซึ่งเป็นกรณีพื้นฐานที่สุด และ 2) การวิเคราะห์ในกรณีที่ชั้นฉนวนแข็งมีความหนาจำกัด.

3.2.1 สนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคตัวนำทรงกลมที่สัมผัสอยู่กับฉนวนแข็งความหนาที่อนันต์

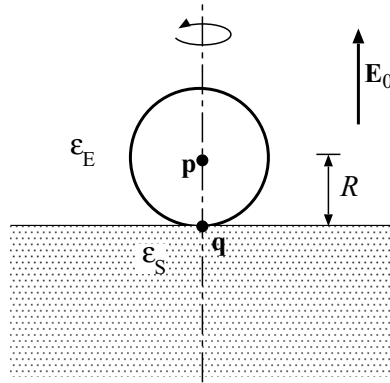
สนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคตัวนำทรงกลมมีความสำคัญในการใช้งานทางด้านต่างๆ ของไฟฟ้าสถิต [15]. อย่างไรก็ตาม การวิเคราะห์สนามและแรงที่มีอยู่ยังไม่ครบถ้วนสมบูรณ์ โดยถูกจำกัดอยู่เฉพาะในกรณีที่อนุภาคตัวนำถูกอัดประจุหรือได้รับแรงดันคงที่ค่าหนึ่ง หรือเป็นกรณีที่อนุภาคมีศักย์ไฟฟ้าลอย (ไม่ทราบค่า) ภายใต้อสนามไฟฟ้าภายนอก. สำหรับในกรณีแรก สนามไฟฟ้าได้ถูกวิเคราะห์ด้วยวิธีเงาประจุ โดยอาศัยเงาไฟฟ้าจำนวนอนันต์ [29,42]. กรณีนี้ใช้ศึกษาผลการเพิ่มขึ้นในปัญหาสนามไฟฟ้าเนื่องจกสัมผัสสัมผัสศูนย์กลาง. งานวิจัยในโครงการนี้ ศึกษาสนามไฟฟ้าและแรงไฟฟ้าในกรณีที่สอง ซึ่งเราไม่ทราบศักย์ไฟฟ้าของตัวนำทรงกลมอยู่ก่อน.

รูปแบบการจัดเรียงที่ใช้ในการศึกษาเป็นรูปแบบของตัวนำทรงกลม ที่สัมผัสอยู่กับฉนวนแข็งความหนาที่อนันต์ ภายใต้อสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ. รูปแบบการจัดเรียงนี้เป็นแบบพื้นฐานที่สุด สำหรับศึกษาเป็นพื้นฐานการใช้งานจริง เช่น การใช้งานฉนวนในระบบฉนวนด้ายก๊าซ. ในที่นี้ เรากำหนดให้อนุภาคตัวนำทรงกลมไม่ได้รับการอัดประจุ (มีประจุไฟฟ้าลัพท์เป็นศูนย์). อย่างไรก็ตาม วิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์นี้ สามารถใช้ได้กับกรณีที่อนุภาคถูกอัดประจุค่าหนึ่ง (ที่ทราบ) หรืออนุภาคได้รับแรงดันคงที่ โดยอาศัยหลักการวิธีทับซ้อน (Superposition) หาคำตอบ.

การวิเคราะห์สนามในการจัดเรียงนี้ ใช้วิธีเงาประจุ ซึ่งเป็นวิธีวิเคราะห์ในการหาค่าศักย์และสนามไฟฟ้าของอนุภาคตัวนำ. ทั้งนี้ เนื่องจากการคำนวณด้วยวิธีเชิงเลขให้มีความแม่นยำสูง ทำได้ยาก เพราะมีขนาดแถบแคบๆ ระหว่างอนุภาคตัวนำและฉนวนแข็ง. เงาประจุสำหรับจุดประจุและฉนวนแข็งความหนาที่อนันต์เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้ว [31]. ในที่นี้ ผู้วิจัยได้ขยายหลักการเงาประจุนี้ สำหรับกรณีทั่วไปของประจุ ซึ่งอาจเป็นจุดประจุ ไดโพล หรือมัลติโพลที่มีอันดับสูงขึ้นไปได้.

3.2.1.1 รายละเอียดการจัดเรียง

รายละเอียดการจัดเรียงแสดงอยู่ในรูปที่ 3.2.1.1. เราพิจารณาตัวนำทรงกลมรัศมี R ที่ไม่ได้รับการอัดประจุ วางตัวอยู่บนฉนวนแข็งที่มีสภาพยอม ϵ_S . ทรงกลมและฉนวนแข็งและตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบทำให้เกิดเป็นรอยต่อสามทางที่จุด q ในรูป. ข้อกำหนดให้ความหนาของฉนวนแข็งความยาวที่อนันต์จะเหมาะสม เมื่ออนุภาคมีรัศมีเล็กกว่าความหนาจริงของฉนวนแข็งมากๆ. ระบบการจัดเรียงได้รับสนามไฟฟ้า E_0 ในแนวตั้ง. สภาพยอมของตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบแทนด้วยสัญลักษณ์ ϵ_E .



รูปที่ 3.2.1.1 ตัวนำทรงกลมรัศมี R วางตัวอยู่บนฉนวนแข็งความหนา g อดันต์ ได้รับความไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ E_0 .

ถ้าหากไม่มีฉนวนแข็งอยู่ในการจัดเรียงที่ได้กล่าวมาข้างต้น สนามไฟฟ้าสูงสุดจะเกิดขึ้นที่ด้านบนและล่างสุดของตัวนำทรงกลม. การมีอยู่ของฉนวนแข็งทำให้ความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด q สูงมากขึ้น. ดังนั้น ในที่นี้ เราสนใจสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส q นี้ โดยจะอ้างอิงค่าทางด้านตัวกลางภายนอก (ด้าน ϵ_E) ซึ่งเป็นค่าสนามไฟฟ้าสูงสุดในการจัดเรียง.

3.2.1.2 วิธีกรคำนวณ

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า การวิเคราะห์สนามไฟฟ้าทำโดยใช้วิธีเงาประจุ. ในที่นี้ใช้ประจุสองชนิด คือ จุดประจุและไดโพล ในการคำนวณ โดยมีหลักการคำนวณคล้ายคลึงกับกรณีที่ตัวนำทรงกลมได้รับศักย์ไฟฟ้าคงที่ค่าหนึ่ง. อย่างไรก็ตาม สถานการณ์ในการวิเคราะห์นี้ซับซ้อนมากขึ้น เนื่องจากเราต้องทำให้ประจุลัพท์บนตัวนำทรงกลมมีค่าเท่ากับศูนย์ด้วย. การคำนวณนี้แสดงค่าศักย์และสนามไฟฟ้าในรูปของมัลติโพลอันดับศูนย์ B_0 และมัลติโพลอันดับที่หนึ่ง B_1 แทนจุดประจุ Q และไดโพล P เพื่อให้สมการของศักย์และสนามไฟฟ้าอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น.

ศักย์ไฟฟ้า ϕ ที่จุด \mathbf{r} ใดๆ เนื่องจาก B_0 หรือ B_1 ที่ตำแหน่ง \mathbf{r}_B ถูกนิยามเป็น

$$\phi = \frac{B_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B\|} \quad (3.2.1.1)$$

$$\phi = \frac{B_1 \cos \theta}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B\|^2} \quad (3.2.1.2)$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{r} - \mathbf{r}_B$ กับทิศทางของไดโพล. จากสมการที่ (3.2.1.1) และ (3.2.1.2) ความสัมพันธ์ระหว่างประจุและไดโพล กับมัลติโพลเป็น $Q = 4\pi\epsilon_E B_0$ และ $P = 4\pi\epsilon_E B_1$.

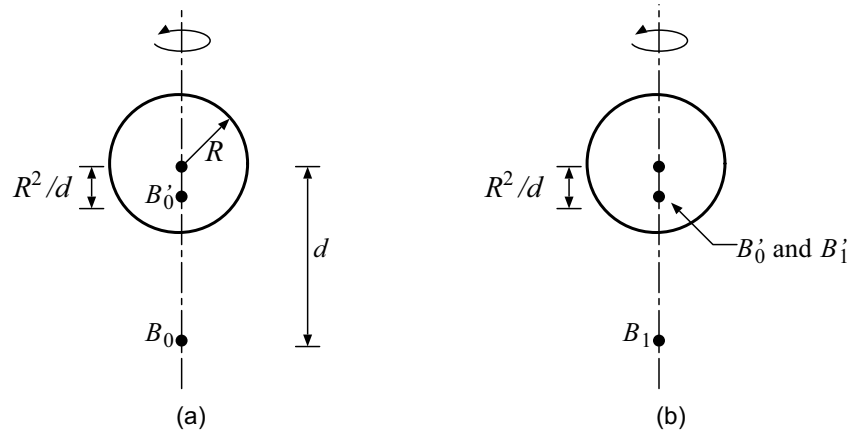
เงาของมัลติโพลเนื่องจากตัวนำทรงกลมที่ต่อลงดิน

พิจารณาตัวนำทรงกลมที่ต่อลงดิน(ศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์) และมัลติโพลอันดับศูนย์ B_0 ซึ่งอยู่ที่ระยะห่าง d จากจุดศูนย์กลางของตัวนำทรงกลม. เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์บนทรงกลมสามารถเป็นจริงได้ ด้วยการ

วางเงาแม่เหล็กโพล B'_0 ที่ตำแหน่ง R^2/d จากจุดศูนย์กลางทรงกลม ดังแสดงในรูปที่ 3.2.1.2(a). ขนาดของเงา B'_0 นี้ สัมพันธ์กับ B_0 โดย [31]

$$B'_0 = -\frac{R}{d} B_0 \quad (3.2.1.3)$$

สำหรับตัวนำทรงกลมลอย ซึ่งไม่มีประจุลัพท์ เราต้องเพิ่มประจุ $B''_0 = -B'_0$ ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม เพื่อให้ประจุลัพท์เท่ากับศูนย์ โดยที่ยังคงรักษาเงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเท่ากับบนผิวทรงกลมไว้อยู่.



รูปที่ 3.2.1.2 เงาประจุสำหรับตัวนำทรงกลมที่ต่อลงดินสำหรับ (a) จุดประจุ และ (b) จุดไดโพล

เงาสำหรับตัวนำทรงกลมต่อลงดิน และแม่เหล็กโพลอันดับที่หนึ่ง B_1 แสดงอยู่ในรูปที่ 3.2.1.2(b) โดยต้องใช้เงาสองชุด คือ B'_1 และ B'_0 ในกรณีนี้[43]. ความสัมพันธ์ระหว่างเงากับแม่เหล็กโพล B_1 เป็นไปตามสมการ

$$B'_1 = \left(\frac{R}{d}\right)^3 B_1 \quad (3.2.1.4)$$

$$B'_0 = -\frac{R}{d^2} B_1 \quad (3.2.1.5)$$

ในทำนองเดียวกันกรณีของแม่เหล็กโพลอันดับศูนย์ สำหรับตัวนำทรงกลมลอย เราจะใช้เงา $B''_0 = -B'_0$ เพิ่มที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม เพื่อให้ประจรวบนทรงกลมเท่ากับศูนย์. เงาสำหรับแม่เหล็กโพลอันดับสูงขึ้นไป ก็สามารถคำนวณได้ในลักษณะเดียวกัน [44].

เงาของแม่เหล็กโพลเนื่องจากฉนวนแข็ง

พิจารณา B_n ซึ่งเป็นแม่เหล็กโพลอันดับที่ n อยู่ที่จุด \mathbf{p} เหนือฉนวนแข็งที่มีความหนา d ด้วยความสูง d ดังแสดงในรูปที่ 3.2.1.3. ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากแม่เหล็กโพลนี้เขียนได้เป็น [10]

$$\phi_B = \frac{B_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos \theta_p) \quad (3.2.1.6)$$

เมื่อ r_p และ θ_p เป็นพิกัดทรงกลมซึ่งมี \mathbf{p} เป็นจุดกำเนิด และ P_n เป็นฟังก์ชันเลอจองด์.

ในลักษณะเดียวกันกับกรณีของจุดประจุและฉนวนแข็งใน [31] เราวางเงาแม่เหล็กโพลสองชุด เพื่อทำให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์ และสนามไฟฟ้า บนผิวของฉนวนแข็งเป็นจริง. เงาทั้งสองคือ B'_n ที่ \mathbf{p}' และ B''_n ที่ \mathbf{p}

ดังแสดงในรูปที่ 3.2.1.4. โดยอาศัยวิธีเงาประจุ เราแยกเขียนศักย์ไฟฟ้าลัพธ์ ϕ_S ในฉนวนแข็ง และ ϕ_E ในบริเวณภายนอกได้เป็น

$$\phi_S = \frac{B_n''}{r_p^{n+1}} P_n(\cos \theta_p) \quad (3.2.1.7)$$

$$\phi_E = \frac{B_n'}{r_{p'}^{n+1}} P_n(\cos \theta_{p'}) + \phi_B \quad (3.2.1.8)$$

โดยที่ $r_{p'}$ และ $\theta_{p'}$ มีนิยามในลักษณะเดียวกันกับ r_p และ θ_p ตามลำดับ.

ขนาดของเงา B_n' และ B_n'' สัมพันธ์กับ B_n โดย

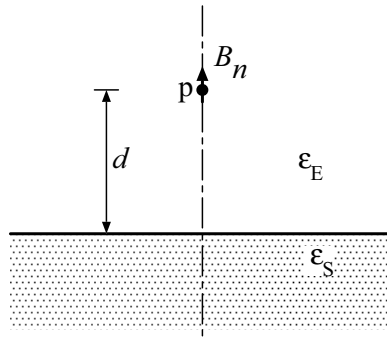
$$B_n' = (-1)^{n+1} K B_n \quad (3.2.1.9)$$

$$B_n'' = (1 - K) B_n \quad (3.2.1.10)$$

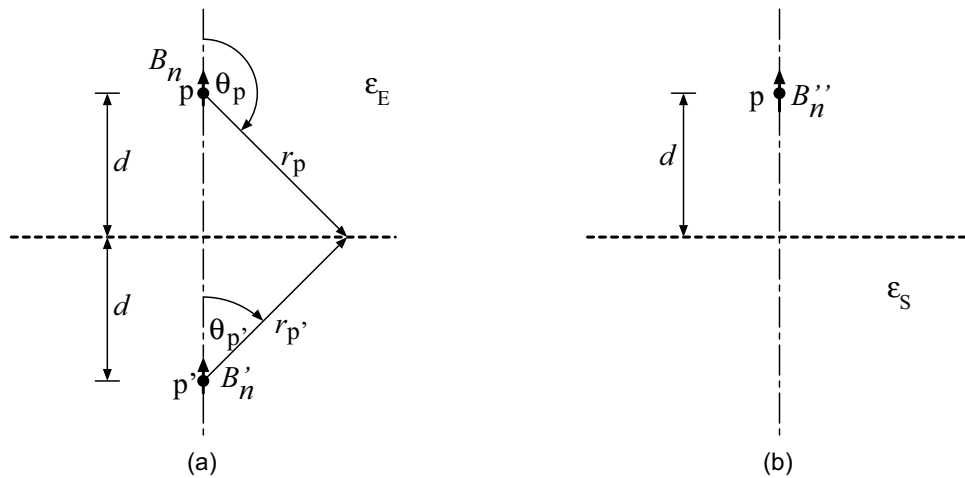
ซึ่งมี K นิยามเป็นฟังก์ชันของสภาพยอม

$$K = \frac{\epsilon_S - \epsilon_E}{\epsilon_S + \epsilon_E} \quad (3.2.1.11)$$

สังเกตว่า $0 \leq K < 1$ สำหรับ $\epsilon_E \leq \epsilon_S < \infty$. เงาประจุที่อธิบายในหัวข้อนี้ สามารถใช้ในการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเงาประจุในเอกสารอ้างอิง [10-11].



รูปที่ 3.2.1.3 มัลติโพลอันดับที่ n และฉนวนแข็ง.



รูปที่ 3.2.1.4 เงามัลติโพลสำหรับศักย์ (a) ภายนอก และ (b) ภายในฉนวนแข็ง.

3.2.1.3 การคำนวณด้วยวิธีเงาประจุ

ผู้วิจัยได้คำนวณสนามไฟฟ้าในการจัดเรียงรูปที่ 3.2.1.1 ด้วยวิธีเงาประจุ โดยใช้ขั้นตอนการคำนวณหลักสามขั้นตอน ซึ่งสามารถอธิบายสั้นๆ ได้ดังต่อไปนี้.

ขั้นตอนที่ 1 การคำนวณเริ่มต้นจากสนามไฟฟ้าภายนอก E_0 และมัลติโพล $B_1^{(1)}$ ที่เกิดจากสนามไฟฟ้าภายนอก. มัลติโพล $B_1^{(1)}$ ทำให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์ไฟฟ้าบนผิวของตัวนำทรงกลมเป็นจริง (เมื่อยังไม่คิดถึงผลของฉนวนแข็ง). ขนาดของ $B_1^{(1)}$ คำนวณได้จากสนามไฟฟ้า โดย

$$B_1^{(1)} = R^3 E_0 \quad (3.2.1.12)$$

การมีอยู่ของฉนวนแข็งเหนี่ยวนำให้เกิดเงาของ $B_1^{(1)}$ ในฉนวนแข็งตามสมการที่ (3.2.1.9) ซึ่งมีการกระทำกับตัวนำทรงกลมต่อไป ตามสมการที่ (3.2.1.4) และ (3.2.1.5). เพื่อให้การวิเคราะห์ในขั้นตอนนี้ง่ายขึ้น เราจะพิจารณาชั่วคราวว่า ตัวนำทรงกลมถูกต่อลงดิน และละลายมัลติโพลอันดับศูนย์ไปก่อน. ผลของการเป็นตัวนำลอย และมัลติโพลอันดับศูนย์ที่เกิดขึ้น จะถูกพิจารณาต่อไปภายหลัง. ขั้นตอนที่ 1 นี้สนใจเฉพาะมัลติโพลอันดับที่หนึ่ง และวิเคราะห์หาอนุกรมอนันต์ของเงามัลติโพลภายในทรงกลม และภายในฉนวนแข็ง.

ขั้นตอนที่ 2 เราสนใจมัลติโพลอันดับศูนย์ ที่เกิดขึ้นเป็นเงาของมัลติโพลอันดับที่หนึ่งในขั้นตอนที่ 1 โดยยังคงพิจารณาว่าทรงกลมยังต่อลงดินอยู่ เช่นเดียวกับในขั้นตอนที่แล้ว. สังเกตว่า เงามัลติโพลอันดับศูนย์แต่ละตัวนำไปสู่อนุกรมอนันต์ของเงาภายในทรงกลมและภายในฉนวนแข็ง.

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นตอนสุดท้ายทำให้เงื่อนไขประจุลัพท์เท่ากับศูนย์ของตัวนำทรงกลมเป็นจริง. เพื่อที่จะหักล้างกับมัลติโพลอันดับศูนย์ที่ได้ใช้มาทั้งหมด เราวางเงามัลติโพลอันดับศูนย์ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม. อย่างไรก็ดี เงาประจุที่วางทำให้เกิดอนุกรมของเงาต่อไปเช่นเดียวกับในขั้นตอนที่ 2. ขั้นตอนนี้แตกต่างกับขั้นตอนที่ 2 ตรงที่ การวางเงาทุกครั้ง เราจะรักษาสภาวะประจุลัพท์เท่ากับศูนย์เอาไว้ตลอด.

เงามัลติโพลทั้งหมดที่ใช้ใน**ขั้นตอนที่ 1** ถึง**ขั้นตอนที่ 3** สามารถจัดรวมกลุ่มกันได้ ตามตำแหน่ง(ความสูงจากรอยต่อผิวฉนวนแข็ง). ณ แต่ละความสูง $h = R/i$ เหนือฉนวนแข็ง เมื่อ $i = 1, 2, \dots$ ขนาดรวมของมัลติโพล $(B_0)_i$ อันดับศูนย์และ $(B_1)_i$ อันดับที่หนึ่ง สามารถเขียนได้ดังนี้.

$$\frac{(B_0)_i}{B_1^{(1)}} = -\frac{K^{i-1}}{R} \frac{1}{i} \left\{ \frac{i-1}{i} - \frac{\alpha_K}{K} \left[\ln\left(\frac{1}{1-K}\right) - \beta_K \right] \right\} \quad (3.2.1.13)$$

$$\frac{(B_1)_i}{B_1^{(1)}} = \left(\frac{1}{i^3}\right) K^{i-1} \quad (3.2.1.14)$$

ฟังก์ชัน α_K และ β_K ในสมการที่ (3.2.1.13) มีนิยามเป็น

$$\alpha_K = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \quad (3.2.1.15)$$

$$\beta_K = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K^j}{j^2} = \int_0^K \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) dt \quad (3.2.1.16)$$

เมื่อ S_k เป็นอันดับที่เริ่มต้นจาก $S_0 = 1.0$ และ

$$S_k = \sum_{l=0}^{k-1} -\frac{K^{k-l}}{k-l+1} S_l \quad (3.2.1.17)$$

ขนาดรวมของมัลติโพล $(B'_0)_i$ และ $(B'_1)_i$ ณ แต่ละตำแหน่ง $h = -R/i$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots$ สัมพันธ์กับ $(B_0)_i$ และ $(B_1)_i$ ตามสมการ

$$(B'_0)_i = -K(B_0)_i \quad (3.2.1.18)$$

$$(B'_1)_i = K(B_1)_i \quad (3.2.1.19)$$

ท้ายสุด สนามไฟฟ้า E_c ณ จุดสัมผัส (จุด \mathbf{q} ในรูปที่ 3.2.1.1) เป็นผลรวมของสนามไฟฟ้าภายนอก และ สนามไฟฟ้าเนื่องจากเงาทั้งหมด ที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 ถึง 3. ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสได้เป็น

$$E_c = E_0 + E_{c1} + E_{c2} + E_{c3} \quad (3.2.1.20)$$

เมื่อ E_{c1} , E_{c2} และ E_{c3} เป็นสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุในขั้นตอนที่หนึ่ง สอง และสาม ตามลำดับ.

สนามไฟฟ้า E_c เขียนในรูปของ K ได้เป็น

$$\frac{E_c}{E_0} = 1 + \frac{1+K}{1-K} \left\{ 2 + \frac{K}{1-K} - \frac{\alpha_K}{K(1-K)} \left[\ln\left(\frac{1}{1-K}\right) - \beta_K \right] \right\} \quad (3.2.1.21)$$

หรือในรูปของสภาพยอมได้เป็น

$$\frac{E_c}{E_0} = 1 + \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E} \left\{ 2 + \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_E}{2\varepsilon_E} - \frac{\alpha_K(\varepsilon_S + \varepsilon_E)^2}{2\varepsilon_E(\varepsilon_S - \varepsilon_E)} \left[\ln\left(\frac{\varepsilon_S + \varepsilon_E}{2\varepsilon_E}\right) - \beta_K \right] \right\} \quad (3.2.1.22)$$

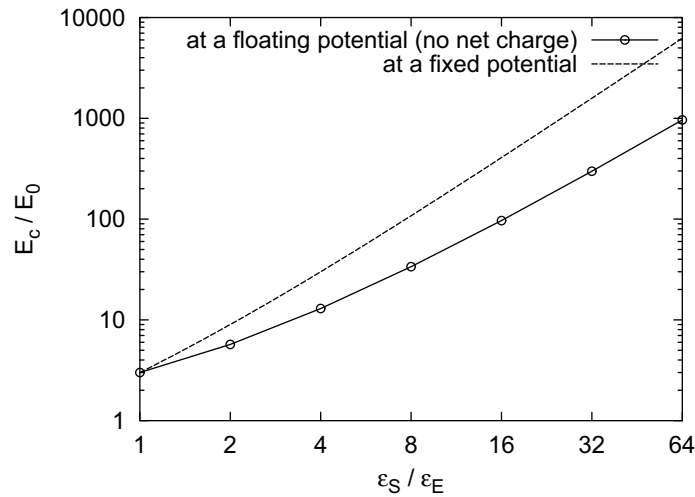
3.2.1.4 ผลการคำนวณและวิเคราะห์

ค่าเชิงเลขของฟังก์ชัน α_K และ β_K

สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสได้ถูกแสดงในรูปของ α_K และ β_K ดังในหัวข้อที่ผ่านมา. แม้ว่าเราไม่สามารถเขียนแสดงฟังก์ชันทั้งสองในรูปปิด (closed form) ได้ อนุกรมที่ใช้หาค่าฟังก์ชันเหล่านี้ดูเข้าอย่างดี ถ้า K มีค่าไม่ใกล้กับหนึ่งมาก. เงื่อนไขนี้ของค่า K เป็นจริงสำหรับค่าของสภาพยอมของฉนวนไฟฟ้าที่ใช้อยู่ทั่วไป. ตัวอย่างเช่น K มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 0.818 เมื่อ $1 \leq \varepsilon_S / \varepsilon_E \leq 10$. รูปที่ 3.2.1.5 และ 3.2.1.6 แสดงค่าของฟังก์ชัน α_K และ β_K สำหรับคำนวณค่าสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสด้วยสมการที่ (3.2.1.21) และ (3.2.1.22). รูปที่ 3.2.1.5 แสดงการแปรผันของ α_K เมื่อ $K = 0$ ถึง 0.999. เราสามารถมองได้จากรูปนี้ว่า $\alpha_K = 1$ ที่ $K = 0$ และ α_K ลดลงเมื่อ K เพิ่มขึ้น. การลดลงของ α_K ตามการเปลี่ยนแปลงค่า K เป็นเชิงเส้นโดยประมาณที่ค่า K ต่ำๆ แต่ไม่เป็นเชิงเส้นเมื่อ K สูงขึ้น.

ในอีกทางหนึ่ง สมการที่ (3.2.1.16) แสดงว่า β_K แปรค่าตั้งแต่ศูนย์ จนถึง $\zeta(2) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} = \pi/6$

(Riemann zeta function) เมื่อ $K = 0$ ถึง 1. การคำนวณค่า β_K เป็นตัวเลขในทางปฏิบัติ ไม่มีปัญหาแต่อย่างใด.



รูปที่ 3.2.1.7 สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส แสดงเป็นฟังก์ชันของอัตราส่วนสภาพยอม.

เพื่อการเปรียบเทียบ เส้นประในรูปที่ 3.2.1.7 แสดงสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส ในกรณีที่ตัวนำทรงกลมถูกได้รับ ศักย์ไฟฟ้าคงที่ (โดยสัมผัสอยู่กับระนาบฉนวนเช่นเดียวกัน แต่ไม่มีสนามไฟฟ้าภายนอก). E_c บนตัวนำทรงกลมในกรณีนี้ เป็นไปตามสมการ [29, 42]

$$\frac{E_c}{E_0} = \frac{3}{2} \left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E} \right) \left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E} + 1 \right) \quad (3.2.1.23)$$

ประจุบนตัวนำทรงกลมในกรณีที่ได้รับศักย์ไฟฟ้าคงที่ถูกเลือกให้ได้ขนาดของ E_c เมื่อ $\varepsilon_S = \varepsilon_E$ เป็นค่าเดียวกับในกรณีของตัวทรงกลมภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ E_0 . นั่นคือ ขนาดของ E_c เท่ากับ $3E_0$. เราสามารถเห็นได้จากรูปที่ 3.2.1.7 ว่า สำหรับค่า $\varepsilon_S > \varepsilon_E$ สนามไฟฟ้าสัมผัส E_c บนตัวนำทรงกลมที่รับ ศักย์ไฟฟ้าค่าคงที่ มีค่าสูงกว่าค่าในกรณีของตัวนำทรงกลมภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ. ความแตกต่างของ ค่า E_c ระหว่างสองกรณีนี้มากขึ้น เมื่ออัตราส่วนสภาพยอมเพิ่มขึ้น.

แม้ว่าสนามไฟฟ้า E_c ณ จุดสัมผัส สามารถคำนวณด้วยสมการที่ (3.2.1.21) และ (3.2.1.22) โดยใช้ค่า ฟังก์ชัน α_K และ β_K ผู้วิจัยได้พบว่า เราสามารถแสดงค่าสนามไฟฟ้าได้ด้วยสมการง่ายๆ ซึ่งได้จากการ ปรับค่ากับเส้นโค้งผลการคำนวณ

$$\frac{E_c}{E_0} \approx 0.696 \left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E} + \sqrt{\frac{7}{4}} \right)^{\sqrt{3}} \quad (3.2.1.24)$$

สมการที่ (3.2.1.24) ประมาณสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสได้อย่างดีในช่วง $\varepsilon_S = \varepsilon_E$ ถึง $64\varepsilon_E$. ตารางที่ 3.2.1.1 เปรียบเทียบค่าได้จากการประมาณด้วยสมการที่ (3.2.1.24) เทียบกับผลเฉลยที่ได้. จากตารางที่ 3.2.1.1 เราเห็นได้ว่าความคลาดเคลื่อนของการประมาณต่ำกว่า 3% สำหรับอัตราส่วนสภาพยอมถึง 64.

ตารางที่ 3.2.1.1 เปรียบเทียบสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสที่ได้จากการคำนวณจริง และจากการประมาณด้วยสมการที่ (2.2.1.24)

$\varepsilon_S / \varepsilon_E$	E_c / E_0		ความแตกต่าง (%)
	คำนวณ	ประมาณ	
1	3.000	2.996	0.133
2	5.710	5.571	2.435
4	12.94	12.60	2.640
8	33.68	33.26	1.237
16	96.80	97.27	0.478
32	298.2	302.0	1.286
64	964.3	969.2	0.504

แรงบนตัวนำทรงกลม

ในที่นี้ แรงบนตัวนำทรงกลมถูกคำนวณจากผลรวมของแรงปฏิกิริยาระหว่างเงาประจุและไดโพลในทรงกลม. แรง F_z ในแนว +z คำนวณได้จาก

$$\frac{F_z}{4\pi\varepsilon_E} = -\frac{K}{R^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (B_0)_j (B_0)_k \left(\frac{jk}{j+k} \right)^2 - \frac{6K}{R^4} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (B_1)_j (B_1)_k \left(\frac{jk}{j+k} \right)^4 + \frac{4K}{R^3} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (B_0)_j (B_1)_k \left(\frac{jk}{j+k} \right)^3 \quad (3.2.1.25)$$

จากสมการที่ (3.2.1.13), (3.2.1.14) และ (3.2.1.25) เราได้แรง F_z เป็นค่าลบ ซึ่งแสดงว่าตัวนำทรงกลมถูกดึงดูดให้ติดอยู่กับฉนวนแข็ง. ทิศทางของแรงในกรณีนี้ ตรงข้ามกันกับแรงในกรณีของตัวนำทรงกลมที่สัมผัสอยู่กับระนาบตัวนำ (ซึ่งเกิดแรงผลักออกนอกระนาบตัวนำ) [15, 45]. ทั้งนี้เพราะว่า สำหรับกรณีของระนาบตัวนำ ประจุจะถูกส่งผ่านระหว่างระนาบตัวนำกับทรงกลม. หลังการถ่ายเทประจุ เราจะได้แรงคูลอมบ์เป็นแรงผลัก. ในทางกลับกัน สำหรับกรณีของฉนวนแข็ง ไม่มีประจุส่งผ่านระหว่างฉนวนแข็งกับตัวนำทรงกลม ทำให้ทิศทางของแรงยังคงเป็นแรงดึงดูดอยู่.

รูปที่ 3.2.1.8 แสดงการแปรผันของขนาดแรงกับอัตราส่วนสภาพยอม $\varepsilon_S / \varepsilon_E$. เพื่อให้สามารถแสดงค่าแรง F_z ในรูปที่ 3.2.1.8 สำหรับกรณีทั่วไปของ ε_E , E_0 และ R ค่าของแรง F_z ในรูปจึงถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย $F_0 = \varepsilon_E E_0^2 R^2$. สังเกตว่าดัชนี j และ k ที่ผู้วิจัยใช้สำหรับคำนวณแรงในสมการที่ (3.2.1.25) เพิ่มขึ้นตาม $\varepsilon_S / \varepsilon_E$. (ใช้ 850 สำหรับกรณี $\varepsilon_S / \varepsilon_E = 64$) แรงจะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อ $\varepsilon_S = \varepsilon_E$ และสูงขึ้นเมื่อ $\varepsilon_S / \varepsilon_E$ สูงขึ้น.

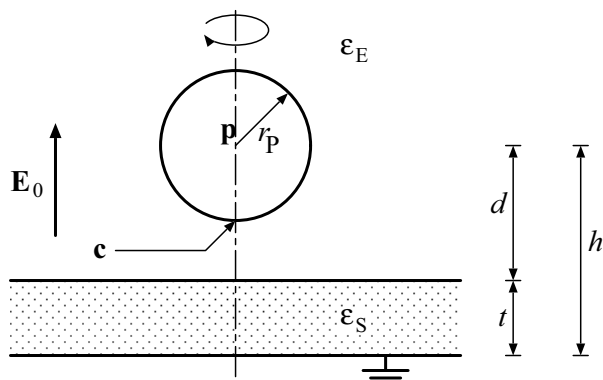
สมการต่อไปนี ซึ่งได้จากการปรับเส้นโค้งความสัมพันธ์ ใช้ประมาณขนาดของแรงได้

$$\left| \frac{F_z}{F_0} \right| \approx 1.8 \left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E} - 1 \right) \left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E} + 1 \right)^{0.31} \quad (3.2.1.26)$$

สมำเสมอภายนอก. การจัดเรียงนี้เป็นรูปแบบพื้นฐาน ที่พบอยู่ในการใช้งานจริงต่างๆ. ตัวอย่างเช่น ผิวนวณแข็งอาจปรากฏเป็นสารที่เคลือบอยู่บนอิเล็กโทรดในสวิตช์เกียร์ไฟฟ้าแรงสูง[52,53] หรือเป็นผิวเคลือบบนอิเล็กโทรดที่ใช้ในการทดลองเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของอนุภาค [54] หรือในการทดลองของของไหลอีอาร์ [55]. สังเกตว่า การวิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงเป็นที่สนใจ เพราะว่าสนามไฟฟ้ามีความเกี่ยวข้องกับการเกิดดีสชาร์จภายในระบบ และแรงสามารถดึงดูดอนุภาคให้เคลื่อนที่เข้าใกล้อิเล็กโทรดมากขึ้น ทำให้สนามไฟฟ้าสูงขึ้นโดยอ้อม.

การหาค่าสนามไฟฟ้าทำได้ยาก ในการจัดเรียงแบบนี้ด้วยวิธีเชิงเลข เนื่องจากว่า (1) สนามไฟฟ้ามีความไม่สมำเสมอสูงมาก เมื่ออนุภาคอยู่ใกล้กับอิเล็กโทรด (2) เมื่อฉนวนแข็งมีขนาดบางมากๆ ความคลาดเคลื่อนเชิงเลขจะเกิดขึ้น. วิธีแก้ไขปัญหาดังกล่าวหนึ่งก็คือ การประมาณชั้นฉนวนแข็งบางด้วยตัวกลางที่มีความหนาเป็นศูนย์ ซึ่งเป็นที่นิยมใช้ในการคำนวณสนามด้วยวิธีเชิงเลข. อย่างไรก็ตาม การประมาณด้วยตัวกลางไร้ความหนาจะไม่เหมาะสม ถ้าหากความหนาของฉนวนแข็งไม่น้อยเพียงพอ หรือสภาพยอมของฉนวนแข็งไม่สูงเพียงพอ[56].

เพื่อให้ได้ความแม่นยำที่ดีเพียงพอ การวิเคราะห์สนามไฟฟ้าในที่นี้ ใช้วิธีเจาเมตริโพล ซึ่งเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์. ผู้วิจัยได้ใช้วิธีเจาเมตริโพลวิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงที่เกิดขึ้น โดยพิจารณาความหนาของชั้นฉนวนแข็งอยู่ในช่วงที่กว้างกว่าใน [50, 51] มาก. สังเกตว่า ขั้นตอนการคำนวณนี้ยังสามารถใช้ได้กับการจัดเรียงของทรงกลมและทรงกลม หรือการจัดเรียงของทรงกลมและระนาบ ที่ใช้ในการทดสอบการพังทลายของฉนวนไฟฟ้า โดยที่ทรงกลมตัวนำไม่ได้รับสนามไฟฟ้าภายนอก แต่ได้รับการป้อนแรงดันที่ทราบค่าโดยตรง [57].



รูปที่ 3.2.2.1 รูปแบบการจัดเรียงที่ประกอบด้วยตัวนำทรงกลมและระนาบดิน โดยมีฉนวนแข็งคั่นอยู่ระหว่างตัวนำทั้งสอง.

3.2.2.1 รูปแบบการจัดเรียงทางกายภาพ

รูปที่ 3.2.2.1 แสดงการจัดเรียงทางกายภาพที่ใช้การศึกษาสำหรับกรณีฉนวนแข็งความหนาจำกัด. การจัดเรียงประกอบด้วยตัวนำทรงกลมลอย(ไม่ได้รับการป้อนพลังงานด้วยการสัมผัสโดยตรง และมีประจุลัพธ์เป็นศูนย์) รัศมีเท่ากับ r_p มีจุดศูนย์กลางอยู่เหนือระนาบตัวนำ(อิเล็กโทรด)ที่ต่อลงดินเป็นความสูง h . บนอิเล็กโทรดมีฉนวนแข็งความหนาเท่ากับ t อยู่ ทำให้ตัวนำทรงกลมไม่สามารถสัมผัสกับระนาบอิเล็กโทรดได้โดยตรง. การจัดเรียงนี้ได้รับสนามไฟฟ้าสมำเสมอภายนอกเท่ากับ E_0 โดยมีทิศทางในแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 3.2.2.1. สภาพยอมของฉนวนแข็งและของตัวกลางที่อยู่โดยรอบแทนด้วยสัญลักษณ์ ϵ_s และ ϵ_e

ตามลำดับ. การใช้ข้อเลือกโตรตระนาบในการจัดเรียงนี้ มีความเหมาะสมภายใต้เงื่อนไขปกติทั่วไป ซึ่งตัวนำทรงกลมมักมีขนาดต่ำกว่าขนาดของอิเล็กโตรตระนาบที่ปรากฏอยู่มาก. เพื่อให้ผลการวิจัยสามารถใช้ประโยชน์ได้ทั่วไป ผู้วิจัยได้แปรค่าอัตราส่วน t/r_p ตั้งแต่ 0.001 ถึง 100 และอัตราส่วน $\varepsilon_S/\varepsilon_E$ ตั้งแต่ 1 ถึง 10 เพื่อให้เห็นผลของพารามิเตอร์ดังกล่าว ต่อสนามไฟฟ้าและแรงบนตัวนำทรงกลมได้อย่างชัดเจน.

3.2.2.2 วิธีวิเคราะห์

การวิเคราะห์สนามไฟฟ้าในการจัดเรียงที่แสดงในรูปที่ 3.2.2.1 ทำด้วยวิธีเงาหมัลติโพล[10, 11] ซึ่งเป็นวิธีที่มีหลักการเดียวกับวิธีเงาประจุ แต่ใช้เงาเป็นหมัลติโพลที่มีอันดับสูงขึ้นไป เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตเป็นจริงตามต้องการ. เงาหมัลติโพลที่ใช้ในกรณีของฉนวนแข็งความหนาจำกัด คำนวณได้จากพื้นฐานของเงาในกรณีของฉนวนแข็งความหนาถึงอนันต์ ซึ่งได้อธิบายไว้แล้วในหัวข้อที่ 3.2.1. ในที่นี้จึงขอสรุปสมการที่ใช้สั้นๆ ดังนี้.

เงาสำหรับหมัลติโพลและฉนวนแข็งความหนาถึงอนันต์

พิจารณาหมัลติโพลอันดับที่ n ซึ่งมีขนาดเท่ากับ B_n และอยู่ที่จุด \mathbf{p} เหนือฉนวนแข็งความยาวถึงอนันต์เป็นระยะห่าง d . ศักย์ไฟฟ้า ϕ_B เนื่องจากหมัลติโพลแสดงได้เป็น

$$\phi_B = \frac{B_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos \theta_p) \quad (3.2.2.1)$$

เมื่อ r_p และ θ_p เป็นพิกัดทรงกลมที่มี \mathbf{p} เป็นจุดกำเนิด และ P_n เป็นฟังก์ชันเลอจองดร์. เราสามารถใช้เงาหมัลติโพลสองตัวในการทำให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์และสนามไฟฟ้าบนผิวของฉนวนแข็งเป็นจริง. เงาทั้งสองคือ B'_n ณ จุด \mathbf{p}' ซึ่งอยู่ด้านล่างของผิวฉนวนแข็ง โดยอยู่ต่ำลงไปเป็นระยะ d และ B''_n ณ จุด \mathbf{p} . (รูปที่ 3.2.1.4) ด้วยวิธีเงาหมัลติโพล ศักย์ไฟฟ้า ϕ_S ภายใน และศักย์ไฟฟ้า ϕ_E ภายนอกฉนวนแข็งสามารถเขียนแยกเป็นสองสมการได้ดังนี้.

$$\phi_S = \frac{B''_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos \theta_p) \quad (3.2.2.2)$$

$$\phi_E = \frac{B'_n}{r_{p'}^{n+1}} P_n(\cos \theta_{p'}) + \phi_B \quad (3.2.2.3)$$

โดย $(r_{p'}, \theta_{p'})$ มีนิยามในลักษณะเดียวกับ (r_p, θ_p) .

ขนาดของเงาหมัลติโพลสัมพันธ์กับหมัลติโพล ด้วยฟังก์ชันของ $K = \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_E}{\varepsilon_S + \varepsilon_E}$.

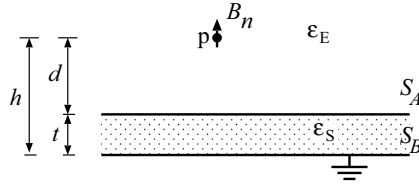
$$B'_n = (-1)^{n+1} K B_n \quad (3.2.2.4)$$

$$B''_n = (1 - K) B_n \quad (3.2.2.5)$$

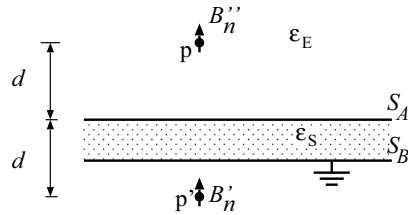
เงาสำหรับหมัลติโพลและระนาบอิเล็กโตรดที่มีฉนวนแข็งความหนาจำกัดคั่นอยู่

พิจารณาหมัลติโพล B_n ที่จุด \mathbf{p} เหนือระนาบอิเล็กโตรดที่ต่อลงดิน โดยมีฉนวนแข็งคั่นอยู่ระหว่างหมัลติโพลและระนาบอิเล็กโตรด ดังแสดงในรูปที่ 3.2.2.2. หมัลติโพลอยู่ห่างจากผิวอิเล็กโตรด S_B เป็นระยะเท่ากับ h และห่างจากผิวของฉนวนแข็ง S_A เป็นระยะ $d = h - t$ โดย t เป็นความหนาของฉนวนแข็ง. ในกรณีนี้

เราต้องใช้เงามัลติโพลในลักษณะทำซ้ำ เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าบนผิวรอยต่อ S_A เป็นจริง และให้ผิวอิเล็กโทรด S_B มีศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์.



รูปที่ 3.2.2.2 มัลติโพล B_n และฉนวนแข็งที่มีความหนาจำกัดอยู่บนระนาบตัวนำต่อลงดิน.



รูปที่ 3.2.2.3 เงามัลติโพลชุดแรก B'_n และ B''_n ซึ่งถูกเหนี่ยวนำโดยฉนวนแข็ง.

กระบวนการทำซ้ำสำหรับหาคำตอบศักย์และสนามไฟฟ้าเป็นไปตามลำดับขั้นต่อไปนี้ โดยมี $d^{(i)}$ และ $h^{(i)}$ เป็นระยะห่างจากผิวรอยต่อ S_A และ S_B ของเงามัลติโพลในรอบที่ i ของการทำซ้ำ ตามลำดับ.

1. วาง B'_n และ B''_n เป็นเงาของมัลติโพล B_n โดยใช้สมการที่ (3.2.2.4) และ (3.2.2.5) สำหรับฉนวนแข็ง (ดูรูปที่ 3.2.2.3). เงามัลติโพลทั้งสองทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนผิว S_A ของฉนวนแข็งเป็นจริง. ศักย์ไฟฟ้า ϕ_E ภายนอก และศักย์ไฟฟ้า ϕ_S ภายในฉนวนแข็งแสดงได้เป็น

$$\phi_E = \phi_B + \phi_{B'} = \frac{B_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos \theta_p) + \frac{B'_n}{r_{p'}^{n+1}} P_n(\cos \theta_{p'}) \quad (3.2.2.6)$$

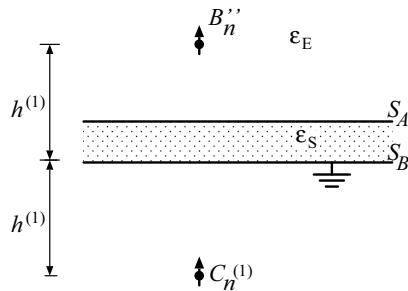
$$\phi_S = \phi_{B''} = \frac{B''_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos \theta_p) \quad (3.2.2.7)$$

2. วางมัลติโพล $C_n^{(1)}$ ที่ตำแหน่ง $h^{(1)} = h$ ภายในระนาบอิเล็กโทรด เป็นเงาของมัลติโพล B''_n ที่เกิดจากผิวของระนาบอิเล็กโทรด S_B (ดูรูปที่ 3.2.2.4). $C_n^{(1)}$ สัมพันธ์กับ B''_n ด้วยสมการ [10]

$$C_n^{(1)} = (-1)^{n+1} B''_n \quad (3.2.2.8)$$

ศักย์ไฟฟ้าภายในฉนวนแข็งจึงกลายเป็น

$$\phi_S = \phi_{B''} + \phi_{C^{(1)}} \quad (3.2.2.9)$$

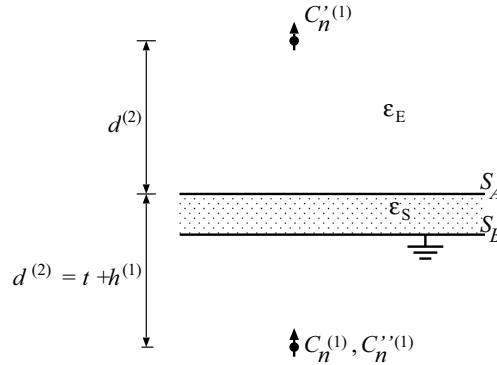


รูปที่ 3.2.2.4 เงามัลติโพล C_n ที่ถูกเหนี่ยวนำโดยระนาบอิเล็กโทรด.

3. วาง $C_n^{(1)}$ และ $C_n^{\prime(1)}$ เป็นเงาของมัลติโพล $C_n^{(1)}$ ซึ่งถูกเหนี่ยวนำให้เกิดขึ้นโดยตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบ เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตของผิวนวณแข็ง S_A เป็นจริง (ดูรูปที่ 3.2.2.5). สังเกตว่าค่าคงที่ K ในขั้นตอนนี้นี้เท่ากับ $(\epsilon_E - \epsilon_S)/(\epsilon_E + \epsilon_S)$ ซึ่งแตกต่างกับในขั้นตอนที่ 1. ทั้งนี้เนื่องจากว่า $C_n^{(1)}$ เป็นมัลติโพลที่ทำให้เกิดศักย์ไฟฟ้าที่ภายในฉนวนแข็ง(ไม่ใช่ภายในตัวกลาง ϵ_E ที่อยู่ล้อมรอบ). ศักย์ไฟฟ้าจึงเขียนได้เป็น

$$\phi_E = \phi_B + \phi_{B'} + \phi_{C_n^{(1)}} \quad (3.2.2.10)$$

$$\phi_S = \phi_{B''} + \phi_{C_n^{(1)}} + \phi_{C_n^{\prime(1)}} \quad (3.2.2.11)$$



รูปที่ 3.2.2.5 เงาของมัลติโพลของ $C_n^{(1)}$ เหนี่ยวนำโดยระนาบอเล็กโตรด.

4. เนื่องจาก $C_n^{(1)}$ ไปรบกวนศักย์ไฟฟ้าในฉนวนแข็ง เราจึงต้องวาง $C_n^{(2)}$ ใต้ผิวนวณอเล็กโตรด S_B เป็นระยะ $h^{(2)} = d^{(2)} + t$ เพื่อเป็นเงาของ $C_n^{(1)}$ เนื่องจากผิวนวณอเล็กโตรด โดย

$$C_n^{(2)} = (-1)^{n+1} C_n^{(1)} \quad (3.2.2.12)$$

5. ทำขั้นตอนที่ 3 และ 4 ซ้ำ จนกระทั่งศักย์ไฟฟ้า ϕ_E และ ϕ_S ลู่เข้าสู่คำตอบ.

อัตราการลู่เข้าสู่คำตอบของขั้นตอนที่ได้กล่าวมา ขึ้นอยู่กับความหนา t ของฉนวนแข็ง และค่าของอัตราส่วนสภาพยอม ϵ_S / ϵ_E . ศักย์ไฟฟ้าจะลู่เข้าเร็วขึ้น เมื่อ t มีค่าสูงขึ้นหรือ ϵ_S / ϵ_E มีค่าต่ำลง. สังเกตว่า เราอาจมองว่ามัลติโพล $B_n', B_n'', C_n^{(i)}, C_n^{\prime(i)}$ และ $C_n^{\prime(i)}$ ทั้งหมด เป็นชุดของเงาของ B_n ที่ถูกเหนี่ยวนำขึ้นจากระนาบอเล็กโตรดที่มีฉนวนแข็งคั่นอยู่.

ขั้นตอนรวมในการคำนวณสนามไฟฟ้าในการจัดเรียงรูปที่ 3.2.2.1

ขั้นตอนการคำนวณรวมซับซ้อนกว่าที่ได้กล่าวถึงในกรณีของ B_n เพียงตัวเดียว เนื่องจากการมีอยู่ของตัวนำทรงกลม. เราสามารถมองได้ว่า การจัดเรียงในรูปที่ 3.2.2.1 ประกอบด้วยวัตถุสองชุด ได้แก่ (1) ทรงกลมตัวนำ และ (2) ระนาบอเล็กโตรดที่มีฉนวนแข็งวางอยู่ด้านบน. เงื่อนไขเพิ่มเติมในการคำนวณ ก็คือ เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าคงที่บนผิว และเงื่อนไขประจุรวมเท่ากับศูนย์ของตัวนำทรงกลม. การคำนวณเริ่มจากการวางมัลติโพล B ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม \mathbf{p} เพื่อให้เงื่อนไขของวัตถุที่ 1 (ตัวนำทรงกลม) เป็นจริง ถ้าไม่มีวัตถุที่สองอยู่. เนื่องจากศักย์ไฟฟ้า ϕ_{ext} ของสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอกสามารถเขียนได้เป็น

$$\phi_{ext} = -E_0 h - E_0 r_p \cos \theta_p \quad (3.2.2.13)$$

จากเงื่อนไขขอบเขตของทรงกลม เราได้ว่า

$$B_1 = E_0 r_p^3 \quad (3.2.2.14)$$

โดยใช้ขั้นตอนวิธีที่ได้อธิบายมาแล้ว เราสามารถหาชุดเงาของ B ซึ่งทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนผิวของวัตถุที่ 2 (ระนาบอิเล็กโตรดและฉนวนแข็ง) เป็นจริงได้. ตัวอย่างมัลติโพลตัวแรกๆ ของชุดเงาแสดงได้ดังนี้

$$B'_1 = KE_0 r_p^3 \quad (3.2.2.15)$$

$$B''_1 = (1-K)E_0 r_p^3 \quad (3.2.2.16)$$

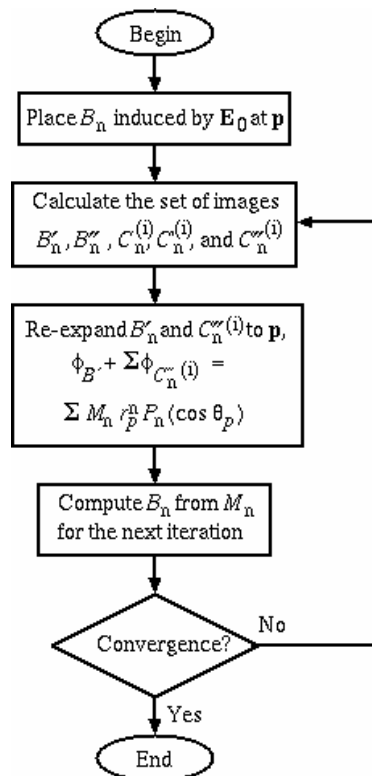
$$C^{(1)}_1 = (1-K)E_0 r_p^3 \quad (3.2.2.17)$$

$$C^{(1)}_1 = -(1-K)KE_0 r_p^3 \quad (3.2.2.18)$$

$$C^{(1)}_1 = (1-K)(1+K)E_0 r_p^3 \quad (3.2.2.19)$$

โดยมี $K = (\epsilon_S - \epsilon_E)/(\epsilon_S + \epsilon_E)$.

ต่อไป เราจะทำการกระจายพจน์ของศักย์ไฟฟ้าเนื่องจาก B' และ C'' ที่ได้ทุกตัวใหม่ โดยมีจุดศูนย์กลางการกระจายที่ \mathbf{p} และใช้เงามัลติโพล B ชุดใหม่ เพื่อทำให้เงื่อนไขขอบเขตของวัตถุที่ 1 เป็นจริงอีกครั้งหนึ่ง. รายละเอียดของการกระจายพจน์ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพล และการใช้เงาของทรงกลมตัวนำ แสดงอยู่ในเอกสารอ้างอิง[10,11]. สังเกตว่า เริ่มจากการทำซ้ำในรอบที่สอง จะเกิดมัลติโพลที่อันดับสูงขึ้น (B_2, B_3, \dots) ในการคำนวณ. เราจะวางเงามัลติโพลในลักษณะนี้เข้าไปมา จนกระทั่งได้ค่าของ ϕ_E และ ϕ_S สู่เข้าสู่คำตอบ. รูปที่ 3.2.2.6 แสดงขั้นตอนการคำนวณรวม. สำหรับผลการคำนวณที่จะนำเสนอในหัวข้อต่อไป ผู้วิจัยได้ใช้มัลติโพลจนถึงอันดับที่ 400 และใช้จำนวนการทำซ้ำระหว่าง 5 ถึง 110 รอบ ขึ้นอยู่กับความหนาของฉนวนแข็งและอัตราส่วนสภาพยอม.

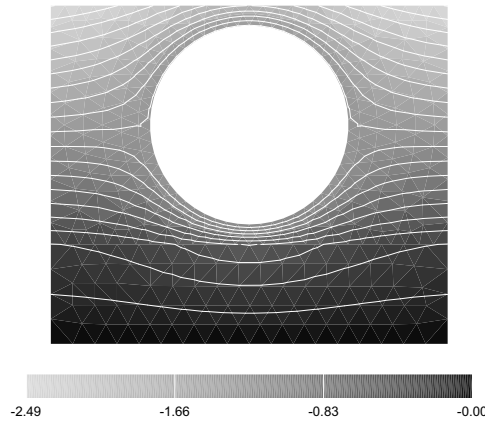


รูปที่ 3.2.2.6 ขั้นตอนวิธีการคำนวณ .

3.2.2.3 ผลการคำนวณและการวิเคราะห์ผล

ความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่าง d ต่อสนามไฟฟ้าและแรง

รูปที่ 3.2.2.7 แสดงการกระจายของศักย์ไฟฟ้าในบริเวณใกล้กับตัวนำทรงกลม สำหรับกรณีของ $t/r_p = 1.0$, $d/r_p = 1.2$ และ $\epsilon_S/\epsilon_E = 4$. ศักย์ไฟฟ้าในรูปถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วยตัวประกอบ $E_0 r_p$ และแสดงค่าตามสเกลสีเทา ซึ่งมีรายละเอียดตามแถบสีทางด้านล่าง. จากเส้นศักย์ไฟฟ้าเท่า เราเห็นได้ว่า การเพิ่มขึ้นของสนามเกิดขึ้นอย่างชัดเจนที่บริเวณใกล้กับผิวของตัวนำทรงกลม. สนามไฟฟ้าที่เพิ่มสูงขึ้นนี้จะเกิดขึ้นอย่างมากที่แกว่งระหว่างตัวนำทรงกลมและฉนวนแข็ง. สนามไฟฟ้าค่าสูงสุดเกิดขึ้นที่จุด c ในรูปที่หนึ่ง และมีค่าเท่ากับ $3E_0$ ในสภาวะที่ไม่มีระนาบอิเล็กโตรดและฉนวนแข็งอยู่. เมื่อมีระนาบอิเล็กโตรด แต่ไม่มีฉนวนแข็ง (นั่นคือกรณีที่ $\epsilon_S/\epsilon_E = 1$) สนามไฟฟ้าสูงสุดมีค่าเพิ่มขึ้นเป็น $3.14E_0$. การมีอยู่ของฉนวนแข็งที่มี $\epsilon_S/\epsilon_E > 1$ ทำให้สนามไฟฟ้าสูงสุดมีค่าเพิ่มขึ้นไปอีก ซึ่งเท่ากับ $4.44E_0$ ในกรณีที่แสดงในรูปที่ 3.2.2.7.



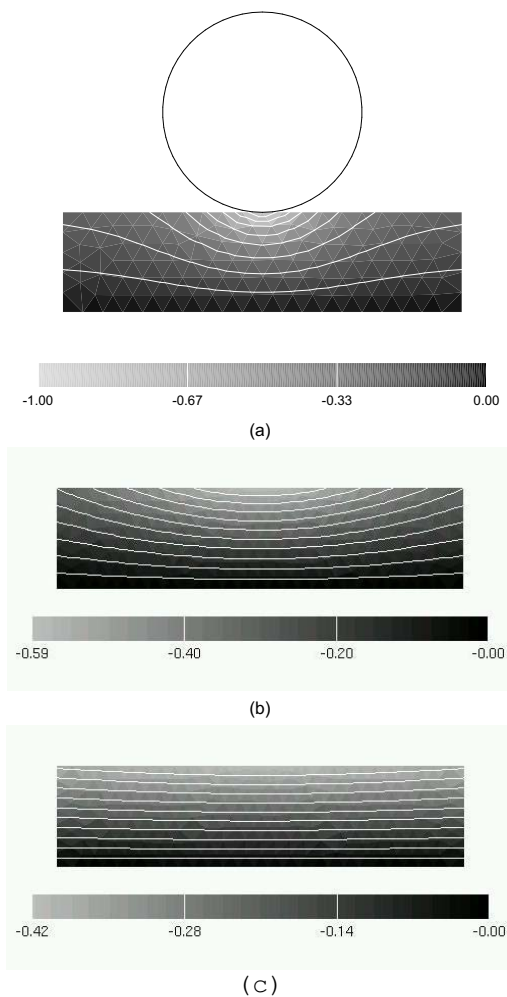
รูปที่ 3.2.2.7 การกระจายของศักย์ไฟฟ้าในกรณีของ $t/r_p = 1.0$, $d/r_p = 1.2$ และ $\epsilon_S/\epsilon_E = 4$.

รูปที่ 3.2.2.8 แสดงค่าสนามไฟฟ้าสูงสุด เป็นฟังก์ชันของระยะห่าง $d/r_p - 1$ ซึ่งถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานแล้ว สำหรับกรณีของ $t/r_p = 1$ และ 0.01. จากรูป เราสามารถเห็นได้อย่างชัดเจนว่า ผลของฉนวนแข็งสามารถละเลยได้ถ้า $d/r_p \geq 2$. ที่ค่า d/r_p ต่ำกว่านี้ สนามไฟฟ้าสูงสุดเพิ่มขึ้นตามการลดลงของระยะห่าง. การเพิ่มของอัตราส่วนสภาพยอมก็ทำให้สนามไฟฟ้าสูงสุดมีค่าสูงขึ้นเช่นเดียวกัน. ถ้าหากระยะห่างมีค่าต่ำเพียงพอ สนามไฟฟ้าจะลู่เข้าสู่ค่าอ้อมตัว ซึ่งขึ้นอยู่กับอัตราส่วนสภาพยอม ϵ_S/ϵ_E . สังเกตว่า สนามไฟฟ้าเปลี่ยนค่าเป็นฟังก์ชันของระยะห่างแม้ $\epsilon_S/\epsilon_E = 1$ เนื่องจากผลของระนาบอิเล็กโตรด ดังที่ได้กล่าวมาแล้วนั่นเอง.

การจัดเรียงของปัญหาที่เราสนใจเป็นแบบสมมาตรรอบแกนหมุน ทำให้ได้แรงลัพธ์บนตัวนำทรงกลมมีทิศทางอยู่ในแนวตั้งเท่านั้น. แรง F_z ในแนวตั้ง มีทิศทางลง ดึงดูดให้ตัวนำทรงกลมเข้าสู่ระนาบอิเล็กโตรด. รูปที่ 3.2.2.9 แสดงค่าของ F_z ซึ่งทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย $F_0 = \epsilon_E E_0^2 r_p^2 / 2$ เป็นฟังก์ชันของระยะห่าง. แรงที่เกิดขึ้นมีพฤติกรรมใกล้เคียงกับสนามไฟฟ้าสูงสุดในรูปที่ 3.2.2.8. อย่างไรก็ตาม ขนาดของแรงไม่สามารถประมาณจากการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าสูงสุด E_{\max} ได้ เนื่องจากสนามไฟฟ้ามีค่าไม่สม่ำเสมอสูงมาก

สนามไฟฟ้าและแรงภายในฉนวนแข็ง เมื่อทรงกลมสัมผัสกับฉนวนแข็ง

รูปที่ 3.2.2.10 แสดงการกระจายของสนามไฟฟ้าภายในฉนวนแข็งซึ่งสัมผัสกับตัวนำทรงกลม ($d/r_p = 1$) เมื่อ $t/r_p = 1, 0.1$ และ 0.01 . รูปที่ 3.2.2.10b และ c แสดงภาพขยายขนาด $4t \times t$ ของฉนวนแข็ง ในกรณีของ $d/r_p = 0.1$ และ 0.01 ตามลำดับ เพื่อให้สามารถเห็นการกระจายของศักย์ไฟฟ้าได้อย่างชัดเจนมากขึ้น. จุดสัมผัส **c** อยู่ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของผิวขอบเขตด้านบนของฉนวนแข็งในรูป. ในรูปที่ 3.2.2.10 ศักย์ไฟฟ้ามีค่าต่ำที่สุดที่ **c** และสูงที่สุด(เป็นศูนย์)ที่ขอบเขตล่างซึ่งติดกับระนาบอิเล็กโทรด. เราสนใจค่าสนามไฟฟ้าเฉลี่ยตามแนวแกนสมมาตร ซึ่งเป็นเส้นในแนวตั้งที่ผ่าน **c**. ทั้งนี้เนื่องจากว่าเส้นแนวนี้เป็นระยะที่สั้นที่สุดระหว่างตัวนำทรงกลมกับระนาบอิเล็กโทรด. จากค่าศักย์ไฟฟ้าต่ำที่สุดที่แสดงในรูปที่ 3.2.2.10 เราเห็นได้อย่างชัดเจนว่า สนามไฟฟ้าเฉลี่ยบนเส้นนี้เพิ่มขึ้นเมื่อ t ลดลง.



รูปที่ 3.2.2.10 การกระจายศักย์ไฟฟ้าภายในฉนวนแข็งที่สัมผัสอยู่กับตัวนำทรงกลมเมื่อ (a) $t/r_p = 1$, (b) $t/r_p = 0.1$ และ (c) $t/r_p = 0.01$.

รูปที่ 3.2.2.11 แสดงค่าเฉลี่ยของสนามไฟฟ้า E_{av} บนแกนสมมาตร เป็นฟังก์ชันของ t/r_p สำหรับค่า ϵ_S / ϵ_E ต่างๆ. รูปนี้แสดงว่า E_{av} มีค่าประมาณเท่ากับ $\epsilon_E E_0 / \epsilon_S$ สำหรับฉนวนแข็งที่หนา. E_{av} เพิ่มขึ้นเมื่อความหนา t/r_p ลดลง. การเพิ่มขึ้นของ E_{av} มีเพียงเล็กน้อยที่ t/r_p ค่าสูง แต่จะเร็วขึ้นอย่าง

3.3 การสร้างตัวเป็นโซ่ของอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้า

หัวข้อนี้เป็นผลการศึกษาพลศาสตร์ของอนุภาคเมื่อได้รับการกระตุ้นจากสนามไฟฟ้าภายนอก. การศึกษาแบ่งเป็นสองขั้นตอนหลักๆ ก็คือ การศึกษากับอนุภาคจำนวนน้อย(20 อนุภาค) ซึ่งทำให้เกิดเพียงโซ่เดียวในตัวกลางของเหลว และการศึกษา กับอนุภาคจำนวนมากขึ้น (67 อนุภาค) ซึ่งทำให้เกิดเป็นกลุ่มโซ่ในตัวกลางของเหลว.

3.3.1 การก่อตัวของอนุภาคเป็นโซ่เดียว

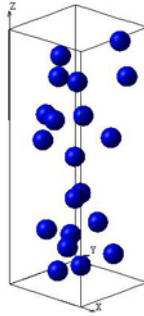
ระบบของอนุภาคคณวนหลายชนิดที่ใช้งานอยู่ในปัจจุบัน เช่น ของไหลอีอาร์ อาศัยปรากฏการณ์การรวมตัวของอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้า ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงทางกายภาพ (ความหนืดปรากฏ). ในการใช้งานเหล่านี้ การจำลองด้วยคอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือที่สำคัญอย่างหนึ่ง สำหรับศึกษาคุณสมบัติของระบบ. โดยการจำลองเชิงเลข เราสามารถแยกพิจารณาพารามิเตอร์ต่างๆ ทางกายภาพของระบบ ซึ่งในทางปฏิบัติปรากฏอยู่พร้อมกัน และเปลี่ยนแปลงไปด้วยกัน. การศึกษาด้วยการจำลองเชิงพลศาสตร์ของของไหลอีอาร์ที่มีอยู่ในปัจจุบัน มักใช้โมเดลไดโพลสำหรับคำนวณแรงระหว่างอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้า [58 – 61]. อย่างไรก็ตาม แรงที่ประมาณด้วยโมเดลไดโพล มีขนาดเล็กกว่าแรงจริงที่เกิดขึ้นมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่ออนุภาคอยู่ใกล้กัน. มีโมเดลที่แม่นยำกว่านี้ สำหรับการประมาณแรงโดยใช้สมการแรงที่รวมผลของพจน์มัลติโพลอันดับสูงขึ้นไป [62] แต่ก็ยังเป็นเฉพาะกรณีของสองอนุภาคเท่านั้น. วิธีที่รวมคิดผลของแรงระหว่างมัลติโพลอย่างสมบูรณ์ก็มีการนำเสนอแล้วเช่นเดียวกัน [63]. ทว่า วิธีนี้ต้องใช้การตั้งระบบสมการเชิงเส้น และแก้ระบบสมการนี้ ทำให้ไม่เหมาะสมต่อการนำมาใช้ในการจำลองเชิงพลศาสตร์ตามเวลาของอนุภาค.

การวิจัยในที่นี้ใช้โมเดลมัลติโพลในการประมาณแรงระหว่างอนุภาค. ผู้วิจัยใช้วิธีเจา มัลติโพล และวิธีกระจายมัลติโพลใหม่ ในการคำนวณสนามไฟฟ้าและเงาของมัลติโพลที่เหมาะสม [11]. หลังจากนั้น แรงจะถูกคำนวณด้วยสมการเชิงวิเคราะห์ที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ เช่นเดียวกัน. ข้อดีของวิธีนี้ เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีที่ใช้โมเดลไดโพล ก็คือ ปฏิกริยารวมระหว่างอนุภาคจะถูกพิจารณาในการคำนวณ. นอกจากนี้ เราสามารถปรับเวลาที่ใช้ในการคำนวณ และความแม่นยำของการประมาณแรงได้ โดยการเลือกอันดับสูงสุดของมัลติโพลที่ใช้ในการคำนวณ และจำนวนรอบการทำซ้ำที่ใช้ในวิธีเจาประจุ. ในขั้นต้นนี้ ผู้วิจัยได้ทำการจำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาค ซึ่งก่อนตัวเป็นโซ่เดียวในของไหลอีอาร์ และเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากการใช้โมเดลไดโพล.

3.3.1.1 ระบบทางกายภาพที่พิจารณาในการวิจัย

ระบบของอนุภาคที่ศึกษาเป็นระบบของอนุภาคคณวนภายในฉนวนเหลว ที่อยู่ระหว่างอิเล็กโตรดคู่ขนานขนาดเท่ากับ $L_x \times L_y$ ณ $z = 0$ และ $z = L_z$. อนุภาคคณวนเป็นทรงกลม มีค่าคงตัวไดอิเล็กตริก $\epsilon_p = 8$, มีความหนาแน่น $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$ และมีเส้นผ่านศูนย์กลาง $\sigma = 10 \text{ }\mu\text{m}$. ฉนวนเหลวมีค่าคงตัวไดอิเล็กตริก $\epsilon_f = 2$. ความหนืดของของไหลเท่ากับ $0.02 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. พารามิเตอร์สำหรับการจำลองเหล่านี้อ้างอิงจากของไหลอีอาร์จริงของอนุภาคคอลลอยด์ในน้ำมันซิลิโคน [59, 61 – 62]. สนามไฟฟ้าภายนอกขนาด 3 kV/mm ถูกป้อนให้กับของไหลผ่านทางอิเล็กโตรดคู่ขนาน. (ค่าสนามไฟฟ้านี้เป็นค่าที่สามารถทำให้เกิดสายโซ่ภายในของ

ไหลได้ [61].) ขนาดของอิเล็กโตรดที่ใช้ในการจำลองคือ $L_x = L_y = 5\sigma$, $L_z = 14\sigma$ และจำนวนของอนุภาคที่ใช้คือ 20. สังเกตว่า มิติของระบบ และจำนวนอนุภาคในที่นี้ ถูกเลือกให้สามารถเกิดสายโซ่เดี่ยวภายในระบบได้ เมื่อสนามไฟฟ้าที่ใช้มีขนาดเพียงพอ. สภาวะเริ่มต้นของระบบของไหลอีอาร์แสดงอยู่ในรูปที่ 3.3.1.1 โดยมีตำแหน่งของอนุภาคถูกกำหนดแบบสุ่ม.



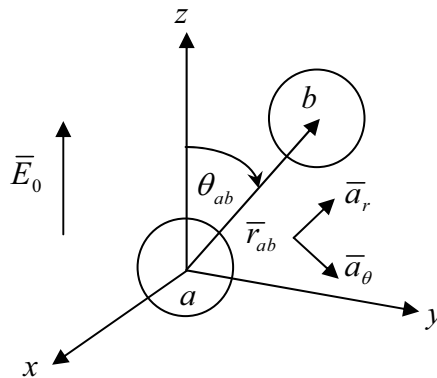
รูปที่ 3.3.1.1 ตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคซึ่งกระจายอยู่แบบสุ่ม.

3.3.1.2 วิธีการจำลอง

ก. การคำนวณแรงไดอิเล็กโตรโฟเรติก

ก-1. แรงจากโมเดลไดโพล

พิจารณาแรงคู่ปฏิกิริยาระหว่างอนุภาค a ที่ \vec{r}_a และอนุภาค b ที่ \vec{r}_b ดังแสดงในรูปที่ 3.3.1.2. โมเดลไดโพลประมาณแรงระหว่างอนุภาคทั้งสองแบบง่ายที่สุด โดย [58]



รูปที่ 3.3.1.2 ระบบพิกัดของคู่อนุภาค.

$$\vec{F}_{ab}^{dip} = \left(\frac{3|\vec{p}|^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_f|\vec{r}_{ab}|^4} \right) \left[(1 - 3\cos^2\theta_{ab})\vec{a}_r - \sin(2\theta_{ab})\vec{a}_\theta \right] \quad (3.3.1.1)$$

เมื่อ

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\pi\epsilon_0\epsilon_f\sigma^3 \frac{(\epsilon_p - \epsilon_f)}{(\epsilon_p + 2\epsilon_f)} \vec{E}_0$$

เป็นไดโพลที่ถูกเหนี่ยวนำขึ้นที่แต่ละอนุภาคเนื่องจากสนามไฟฟ้า \bar{E}_0 . $\bar{r}_{ab} = \bar{r}_a - \bar{r}_b$ และ θ_{ab} เป็นมุมระหว่าง \bar{r}_{ab} และแกน z . $\bar{a}_r = \bar{r}_{ab} / |\bar{r}_{ab}|$, $\bar{a}_\theta = \bar{a}_r \times (\bar{a}_r \times \bar{a}_z) / |\bar{a}_r \times (\bar{a}_r \times \bar{a}_z)|$ และ \bar{a}_z เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแกน z ดังแสดงในรูปที่ 3.3.1.2.

ก-2 แรงจากโมเดลมัลติโพล

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า โมเดลไดโพลให้การประมาณแรงที่ไม่ดี เมื่ออนุภาคทั้งสองอยู่ใกล้กัน สาเหตุของความคลาดเคลื่อนก็คือ ผลของมัลติโพลอันดับที่สูงขึ้นไป ซึ่งถูกละเลยในโมเดลไดโพล. แรงไดโพลีกริโตรโพเรติกที่รวมผลของมัลติโพลบนอนุภาค a สามารถแสดงได้ตามอินทิกรัล

$$\bar{F}_a^{dep} = \int_{r=\sigma/2} \epsilon_f q_{total} [-\nabla(\psi_a)_{ext}] dS_a \quad (3.3.1.2)$$

เมื่อ q_{total} เป็นความหนาแน่นประสิทธิผลของประจุ ซึ่งเท่ากับขนาดของประจุจริงบนตำแหน่งผิวของอนุภาค ที่ทำให้เกิดแรงดันเหนี่ยวนำเท่ากับกรณีที่มีอนุภาคจำนวนอยู่ [8], S_a เป็นผิวของอนุภาค และ $(\psi_a)_{ext}$ เป็นศักย์ไฟฟ้าสถิตบนอนุภาค เนื่องจากแหล่งกำเนิดศักย์ทั้งหมดที่อยู่นอกอนุภาค a .

สมการที่ (3.3.1.2) แสดงในรูปทั่วไป สำหรับอนุภาคจำนวนใดๆ. ในกรณีของอนุภาคสองตัวที่อยู่ใกล้เคียงกัน ดังแสดงในรูปที่ 3.3.1.2, $(\psi_a)_{ext}$ เป็นศักย์ไฟฟ้ารอบอนุภาคเนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอก และเนื่องจากประจุที่เหนี่ยวนำขึ้นที่อนุภาค b . เพื่อให้ได้สมการที่ (3.3.1.2) ในรูปของมัลติโพล เราจะให้จุดศูนย์กลางของอนุภาค a เป็นจุดกำเนิด และแสดงศักย์ไฟฟ้า $(\psi_a)_I$ ภายในอนุภาค และศักย์ไฟฟ้า $(\psi_a)_E$ ภายนอกอนุภาค ดังต่อไปนี้ [11]

$$(\psi_a)_I = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j L_{j,k} r^j \bar{P}_{j,|k|}(\cos \theta) e^{ik\varphi} \quad (3.3.1.3)$$

$$(\psi_a)_E = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j \left[M_{j,k} r^j + \frac{B_{j,k}}{r^{j+1}} \right] \bar{P}_{j,|k|}(\cos \theta) e^{ik\varphi} \quad (3.3.1.4)$$

เมื่อ (r, θ, φ) เป็นพิกัดทรงกลม. ในสมการข้างบนนี้ $L_{j,k}$, $M_{j,k}$, และ $B_{j,k}$ เป็นสัมประสิทธิ์ของศักย์ไฟฟ้า ที่จะถูกคำนวณหาออกมา. $\bar{P}_{j,|k|}$ เป็นฟังก์ชันเลอจองดร์ที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย

$$\frac{\sqrt{(j-|k|)!}}{\sqrt{(j+|k|)!}}.$$

สัมประสิทธิ์ทั้งสามไม่ได้เป็นอิสระต่อกันและกัน แต่เราสามารถกำหนดความสัมพันธ์ที่ทำให้คำนวณ $L_{j,k}$ และ $B_{j,k}$ จาก $M_{j,k}$ ได้ เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าบนผิวของอนุภาคเป็นจริง [11]. จากสมการที่ (3.3.1.3) และ (3.3.1.4) ความหนาแน่นของประจุประสิทธิผล และศักย์ไฟฟ้าภายนอกบนผิวของอนุภาค a สามารถเขียนได้เป็น

$$q_{total} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j \left[\frac{\epsilon_0 (2j+1)}{(\sigma/2)^{j+2}} \right] B_{j,k} \bar{P}_{j,|k|}(\cos \theta) e^{ik\varphi} \quad (3.3.1.5)$$

$$(\psi_a)_{ext} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j M_{j,k} r^j \bar{P}_{j,|k|}(\cos \theta) e^{ik\varphi} \quad (3.3.1.6)$$

โดยใช้สมการที่ (3.3.1.2), (3.3.1.5) และ (3.3.1.6) องค์ประกอบในพิกัดคาร์ทีเซียนทั้งสามของแรงไดโพลีเล็กโตรโพลีสามารถคำนวณได้จาก $B_{j,k}$ และ $M_{j,k}$ ดังต่อไปนี้. (ดัชนีบน dep ชี้บ่งว่าแรงที่กล่าวถึงเป็นแรงไดโพลีเล็กโตรโพลี)

$$\begin{aligned} \frac{F_{a,x}^{dep}}{2\pi\epsilon_0\epsilon_f} = & \sum_{j=0}^{\infty} 2\text{Re}[M_{j+1,1}](B_{j,0})\beta(j+1) - \sum_{j=1}^{\infty} 2\text{Re}[B_{j,1}](M_{j+1,0})\beta(j) \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} 2\text{Re}[(B_{j,1})(M_{j+1,-2})]\beta(j+2) \\ & + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^j 2\text{Re}[B_{j,k}(M_{j+1,-(k+1)} - M_{j+1,-(k-1)})]\beta(j+k+1) \end{aligned} \quad (3.3.1.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{F_{a,y}^{dep}}{2\pi\epsilon_0\epsilon_f} = & -\sum_{j=0}^{\infty} 2\text{Im}[M_{j+1,1}](B_{j,0})\beta(j+1) + \sum_{j=1}^{\infty} 2\text{Im}[B_{j,1}](M_{j+1,0})\beta(j) \\ & + \sum_{j=1}^{\infty} 2\text{Im}[(B_{j,1})(M_{j+1,-2})]\beta(j+2) \\ & + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^j 2\text{Im}[B_{j,k}(M_{j+1,-(k+1)} + M_{j+1,-(k-1)})]\beta(j+k+1) \end{aligned} \quad (3.3.1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{F_{a,z}^{dep}}{4\pi\epsilon_0\epsilon_f} = & -\sum_{j=0}^{\infty} (B_{j,0})(M_{j+1,0})(j+1) - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^j 2\text{Re}[(B_{j,k})(M_{j+1,-k})]\sqrt{(j+1)^2 - k^2} \end{aligned} \quad (3.3.1.9)$$

เมื่อ $\beta(j) = \sqrt{j(j+1)}$. สัญลักษณ์ $\text{Re}[\]$ และ $\text{Im}[\]$ แทนส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน.

ก-3. การคำนวณค่าของสัมประสิทธิ์ $B_{j,k}$ และ $M_{j,k}$

โดยใช้หลักการของวิธีเงาประจุ เราคำนวณค่าของ $B_{j,k}$ และ $M_{j,k}$ ในลักษณะของกระบวนการทำซ้ำด้วยขั้นตอนตามที่แสดงไว้แล้วในเอกสารอ้างอิง [39, 64]. สำหรับแต่ละอนุภาคในระบบที่มี N อนุภาค ขั้นตอนการคำนวณสามารถอธิบายอย่างย่อๆ ได้ โดยมีดัชนีบน (n) แสดงถึงจำนวนรอบของการทำซ้ำดังต่อไปนี้.

1. กำหนด $M_{j,k}^{(0)}$ ซึ่งแสดงค่าศักย์ไฟฟ้าเริ่มต้น ψ_{E_0} เนื่องจากกระนาบอิเล็กโตรด. สำหรับการจัดเรียงที่พิจารณาในที่นี้ ถ้าอนุภาคอยู่ ณ จุด \bar{c} เราจะได้ ψ_{E_0} ณ จุด \bar{p} เป็น

$$\psi_{E_0} = M_{0,0}^{(0)} + M_{1,0}^{(0)} r \bar{P}_{1,0}(\cos \theta) \quad (3.3.1.10)$$

เมื่อ $M_{0,0}^{(0)}$ เป็นศักย์ไฟฟ้าที่ \bar{c} เนื่องจาก \bar{E}_0 และ $M_{1,0}^{(0)} = E_0$.

2. คำนวณ $B_{j,k}^{(n)}$ จาก $M_{j,k}^{(n)}$ ตามวิธีการในเอกสารอ้างอิง [11] ดังนี้

$$B_{j,k}^{(n)} = \left[\frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_f + \varepsilon_p)j + \varepsilon_f} \right] \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2j+1} M_{j,k}^{(n)} \quad (3.3.1.11)$$

3. วางเงาเม็ดโพล $\tilde{B}_{j,k}^{(n)}$ เนื่องจากอิเล็กโตรดทั้งสอง เพื่อให้เงาขอบเขตบนระนาบอิเล็กโตรดเป็นจริง.
4. กระจายศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากเม็ดโพล $\tilde{B}_{j,k}^{(n)}$ ที่เกิดจากระนาบอิเล็กโตรด และที่เกิดจาก $B_{j,k}^{(n)}$ ของอนุภาคอื่น ๆ อีก $N-1$ อนุภาค มายังรอบจุด \bar{c} . ดังนั้น จะได้สนามไฟฟ้าภายนอก สำหรับอนุภาคที่กำลังพิจารณา เป็น

$$\psi_{ext} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j M_{j,k}^{(n+1)} r^j \bar{P}_{j,|k|}(\cos \theta) e^{ik\varphi} \quad (3.3.1.12)$$

เมื่อ $M_{j,k}^{(n+1)}$ ได้จากกระจายเม็ดโพลใหม่ในขั้นตอนนี้.

5. ทำขั้นตอนที่ 2 ถึง 4 ซ้ำ. ศักย์ไฟฟ้าจะอยู่ในรูปสุดท้ายเป็น

$$\psi_E = \sum_{j=1}^{N_{mp}} \sum_{k=-j}^j \sum_{n=1}^{N_{iter}} \left[M_{j,k}^{(n+1)} r^j + \frac{B_{j,k}^{(n+1)}}{r^{j+1}} \right] \bar{P}_{j,|k|}(\cos \theta) e^{ik\varphi} \quad (3.3.1.13)$$

เมื่อ N_{mp} และ N_{iter} เป็นอันดับสูงสุดของเม็ดโพลที่ใช้ และจำนวนรอบการทำซ้ำในการคำนวณตามลำดับ.

ค่าที่ถูกต้องของแรงสามารถคำนวณได้จากขั้นตอนดังกล่าว โดยใช้อันดับ N_{mp} ของเม็ดโพลที่มากเพียงพอ และ ใช้จำนวนรอบการทำซ้ำ N_{iter} จนกระทั่งได้ค่าศักย์เข้าสู่ค่าตอบจริง. อย่างไรก็ตาม ถ้าหากค่าของพารามิเตอร์ทั้งสองสูงเกินไป การคำนวณจะใช้เวลาอย่างมาก ทำให้ไม่เหมาะสมที่จะใช้ในการจำลองแบบพลศาสตร์ ซึ่งเราต้องการทำในที่นี้. ดังนั้น ผู้วิจัยจึงได้ทดลองใช้อันดับ N_{mp} จนถึงอันดับที่ 4 และใช้จำนวนรอบในการทำซ้ำ 2 รอบ. ผลของ N_{mp} และ N_{iter} ต่อค่าที่ได้จากการคำนวณจะแสดงอยู่ในหัวข้อถัดไป. เนื่องจากปฏิกิริยาระหว่างอนุภาคทั้งหมดที่อยู่ในระบบ ถูกรวมผลในการคำนวณแล้ว เราจึงสามารถคาดหวังว่า แรงที่ได้จะมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงคล้ายคลึงกับค่าแรงที่แม่นยำ ซึ่งได้จากการคำนวณโดยใช้ $N_{mp} = 100$.

ข. การคำนวณตำแหน่งของอนุภาคที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

ให้อนุภาค a มีมวล m อยู่ที่ตำแหน่ง \bar{r}_a ภายในฉนวนเหลว ณ เวลา t . การเคลื่อนที่ของอนุภาคเป็นไปตามสมการ

$$m \frac{d^2 \bar{r}_a}{dt^2} = \bar{F}_a^{dep} + \bar{F}_a^{rep} + \bar{F}_a^{hyd} \quad (3.3.1.14)$$

เมื่อ \bar{F}_a^{dep} เป็นแรงไดอิเล็กโตรโฟรีติก ดังที่ได้อธิบายไว้แล้ว. \bar{F}_a^{rep} เป็นแรงผลักที่เรากำหนดให้มี เพื่อป้องกันการซ้อนทับของอนุภาค และการซ้อนทับของอนุภาคกับอิเล็กโตรด. \bar{F}_a^{hyd} เป็นแรงไฮโดรไดนามิกส์บนอนุภาค. แรง \bar{F}_a^{hyd} สำหรับอนุภาคทรงกลมเป็นไปตามสมการของสโตก

$$\bar{F}_a^{hyd} = -3\pi\sigma\eta \frac{d\bar{r}_a}{dt} \quad (3.3.1.15)$$

สำหรับของไหลอีอาร์ทั่วไป เราสามารถละลายผลของความเร่งทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (3.3.1.14) ได้ เนื่องจากแรงเนื่องจากความหนืดมีความเด่นกว่ามาก. ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$3\pi\sigma\eta \frac{d\bar{r}_a}{dt} = \bar{F}_a^{dep} + \bar{F}_a^{rep} \quad (3.3.1.16)$$

เพื่อให้สะดวกต่อการคำนวณ องค์ประกอบต่อไปนี้ถูกนำมาใช้ปรับสมการที่ (3.3.1.16) ให้เป็นบรรทัดฐาน

$$F_0 = \frac{1}{16} \varepsilon_0 \varepsilon_f \alpha^2 \sigma^2 E_0^2$$

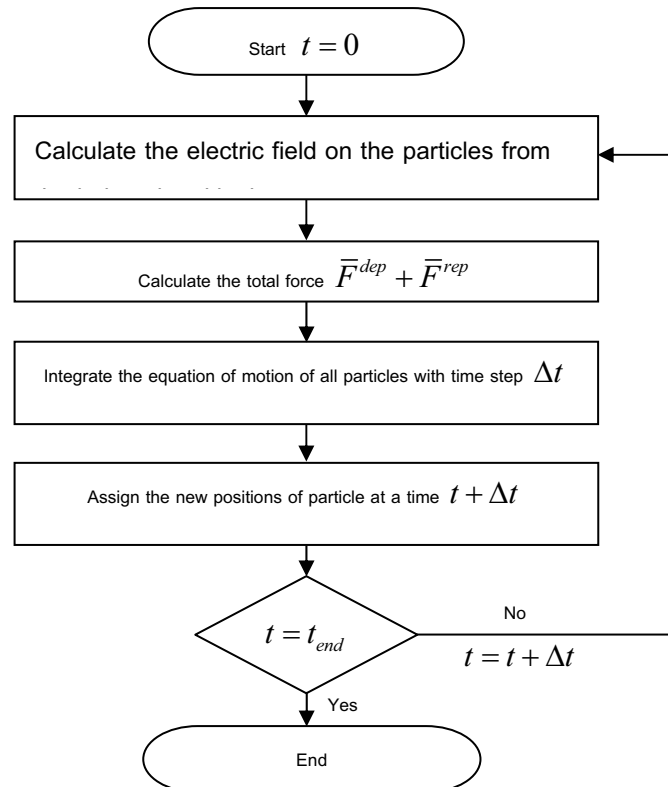
$$t_0 = 3\pi\eta\sigma^2 / F_0$$

$$r_0 = \sigma$$

เมื่อ $\alpha = (\varepsilon_p - \varepsilon_f) / (\varepsilon_p + 2\varepsilon_f)$. เราสามารถเขียนสมการที่ (3.3.1.16) ในรูปที่ไม่มีหน่วยได้เป็น

$$\frac{d\bar{r}_a^*}{dt^*} = \bar{F}_a^{dep*} + \bar{F}_a^{rep*} \quad (3.3.1.17)$$

สัญลักษณ์ * ในสมการบ่งชี้ตัวแปรที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานแล้ว. โดยใช้สมการที่ (3.3.1.17) เราสามารถคำนวณตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา t^* ด้วยกระบวนการขั้นตอนวิธี Runge-Kutta อันดับที่ 4. รูปที่ 3.3.1.3 แสดงขั้นตอนสำหรับคำนวณตำแหน่งของอนุภาค. เราติดตามการเคลื่อนที่ของอนุภาค เพื่อตรวจสอบการเกิดโซ่ที่เชื่อมต่ออิเล็กโตรด โดยทดลองใช้โมเดลไดโพล และโมเดลมัลติโพลในการประมาณแรง. ทั้งนี้ เนื่องจากว่า การก่อตัวเป็นโซ่ของอนุภาคในของเหลว ส่งผลโดยตรงต่อการเปลี่ยนแปลงความหนืดปรากฏของของไหลอีอาร์นั่นเอง.

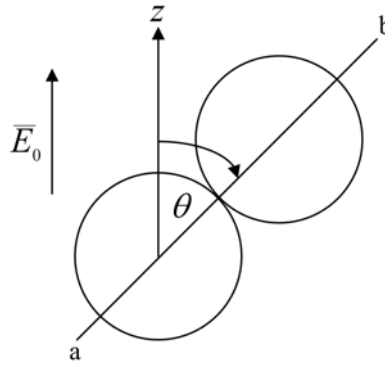


รูปที่ 3.3.1.3 ขั้นตอนการคำนวณตำแหน่งของอนุภาค.

3.3.1.3 ผลการคำนวณ

ก. แรงระหว่างอนุภาคทรงกลมที่สัมผัสกันอยู่

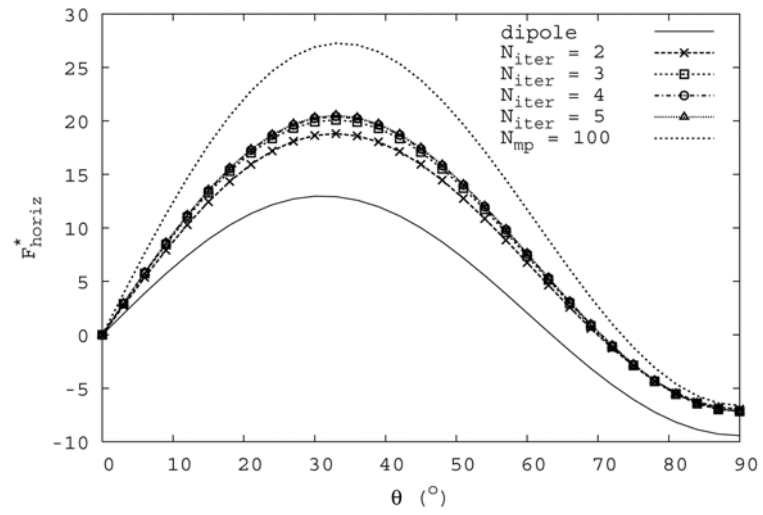
ผลการคำนวณในส่วนนี้แสดงความแตกต่างของแรงที่ได้จากการประมาณด้วยโมเดลไดโพล และแรงที่ได้จากโมเดลมัลติโพล. ผู้วิจัยเริ่มต้นจากกรณีของทรงกลมที่สัมผัสกันอยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก \vec{E}_0 ที่อยู่ในแนวตั้ง ดังแสดงในรูปที่ 3.3.1.4. นั่นคือ เรามองว่า อนุภาคนี้อิเล็กโตรดอยู่ห่างออกไปจากอนุภาคมาก จนสามารถละเลยผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโตรดได้. มุม θ เป็นมุมระหว่างแกน z และเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางของอนุภาคทั้งสอง. ค่าคงตัวไดโพลของอนุภาคและของตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบเท่ากับ $\varepsilon_p = 8$ และ $\varepsilon_f = 2$ ตามลำดับ. เราเลือกการจัดเรียงแบบนี้ในการพิจารณาค่าแรง เพราะว่าแรงไดโพลไดโพลเรติกมีค่าสูงสุดเมื่ออนุภาคสัมผัสกัน. แรงที่ถูกคำนวณโมเดลมัลติโพลขึ้นอยู่กับองค์ประกอบของตัวคือจำนวนรอบ N_{iter} ของการทำซ้ำ และอันดับสูงสุด N_{mp} ของมัลติโพลที่ใช้. เพื่อที่ดูผลขององค์ประกอบทั้งสอง ผู้วิจัยได้คำนวณแรงแบบมัลติโพลที่ทำกับอนุภาคในรูปที่ 3.3.1.4 โดยแปรค่า N_{iter} และ N_{mp} สำหรับ $\sigma = 10 \text{ } \mu\text{m}$ และ $E_0 = 3 \text{ kV/mm}$.



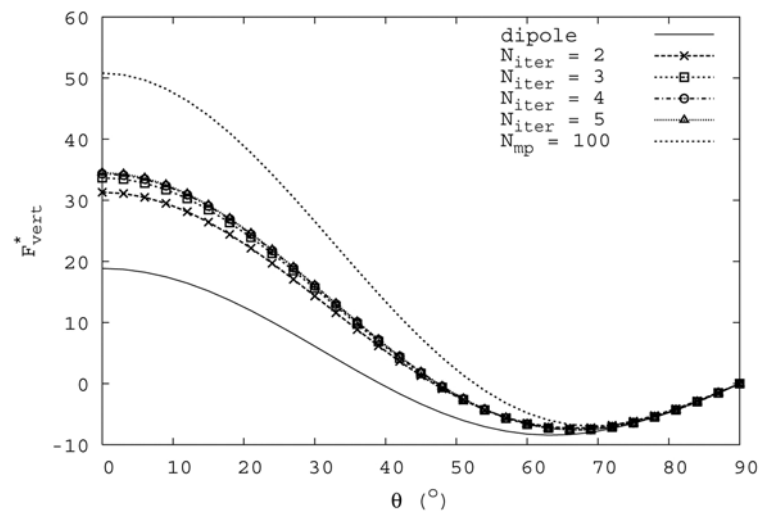
รูปที่ 3.3.1.4 ทรงกลมที่สัมผัสกันภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก.

ผลของ N_{iter} ต่อค่าแรงที่ได้ แสดงอยู่ในรูปที่ 3.3.1.5. แรง F_{horiz} ในแนวระดับ และ F_{vert} ในแนวตั้ง คำนวณโดยใช้ $N_{mp} = 4$ และ $N_{iter} = 2, 3, 4$. เมื่อเปรียบเทียบกับแรงที่ได้จากโมเดลไดโพล และค่าแรงจริง (คำนวณด้วย $N_{mp} = 100$) เราสามารถเห็นได้ว่า แรงแบบมัลติโพลแปรกับ θ ในลักษณะเดียวกัน. แรง F_{horiz} และ F_{vert} เปลี่ยนจากแรงดูดเป็นแรงผลัก เมื่อ θ เปลี่ยนแปลงจาก 0 องศาถึง 90 องศา. (เครื่องหมายของแรงเปลี่ยนจากบวกเป็นลบ) แรง F_{horiz} และ F_{vert} เพิ่มขึ้นเมื่อ N_{iter} เพิ่มขึ้น ในขณะที่มีค่าสูงสุดที่ F_{horiz} สำหรับทุกๆ ค่าของ N_{iter} และมีค่าเป็นแรงผลักสูงสุดที่ $\theta = 33^\circ$.

แรง F_{vert} ในแนวตั้ง มีค่าสูงสุดเป็นแรงดูด เมื่ออนุภาкреียงตัวตามทิศทางของสนามไฟฟ้าภายนอก \vec{E}_0 . ค่าสูงสุดของแรง F_{horiz} และ F_{vert} สำหรับ $N_{iter} = 2$ มีขนาดเป็น 1.45 และ 1.66 เท่าของแรงที่ประมาณได้จากโมเดลไดโพล ตามลำดับ. สำหรับ $N_{iter} = 3$ และ 4 ขนาดของแรงมีค่าขึ้นกว่าในกรณีของ $N_{iter} = 2$ เล็กน้อย. เมื่อใช้ N_{iter} ค่าสูงขึ้น ผู้วิจัยพบว่า (ไม่ได้แสดงในที่นี้) การเพิ่มขึ้นของค่าแรงตาม N_{iter} มีอัตราที่ลดลง.

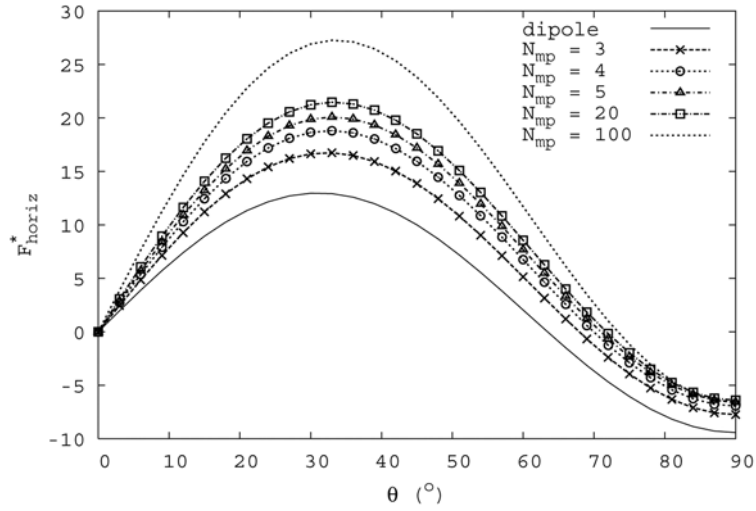


(ก)

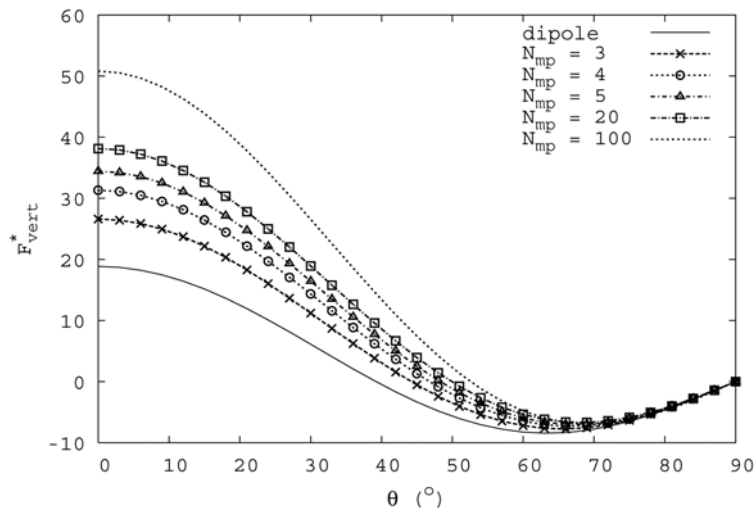


(ข)

รูปที่ 3.3.1.5 ผลของ N_{iter} ต่อแรงที่ทำกับอนุภาคกลางในรูปที่ 3.3.1.4. (ก) แรงในแนวระดับ และ (ข) แรงในแนวตั้ง.



(ก)



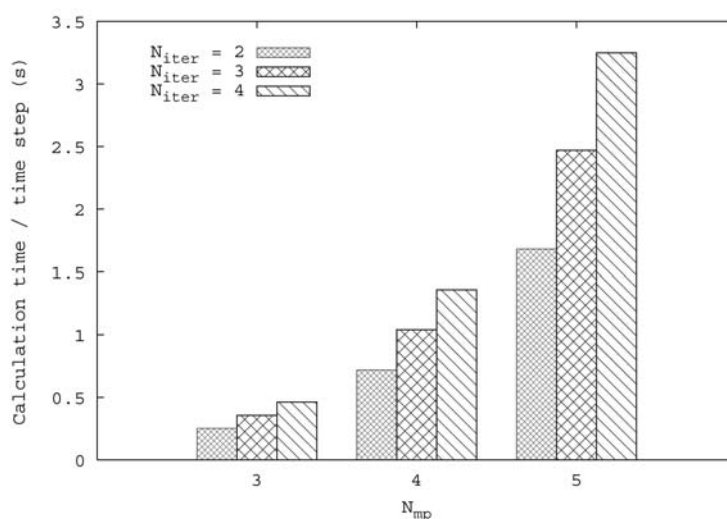
(ข)

รูปที่ 3.3.1.6 ผลของ N_{mp} ต่อแรงที่ทำกับอนุภาคกลางในรูปที่ 3.3.1.4. (ก) แรงในแนวระดับ และ (ข) แรงในแนวตั้ง.

ในลักษณะเดียวกัน รูปที่ 3.3.1.6 แสดงแรง F_{horiz} และ F_{vert} ที่คำนวณได้จากโมเดลมัลติโพล โดยใช้ N_{iter} คงที่เท่ากับ 2 และใช้ N_{mp} ค่าต่างๆ. จากรูปที่ 3.3.1.6 เราสามารถเห็นได้อย่างชัดเจน ถึงค่าแรงที่ดีขึ้นจากโมเดลไดโพล เมื่อใช้โมเดลมัลติโพล. ตัวอย่างเช่น แรงสูงสุดในแนวระดับที่คำนวณจาก $N_{mp} = 3, 4, 5$, และ 20 มีค่าสูงกว่าแรงที่ได้จากโมเดลไดโพลถึง 1.29, 1.45, 1.55 และ 1.65 เท่า ตามลำดับ. นอกจากนี้ เรายังสังเกตได้ด้วยว่า อัตราการเพิ่มของ F_{horiz} และ F_{vert} ตาม N_{mp} ลดลง เมื่อ N_{mp} สูงขึ้น.

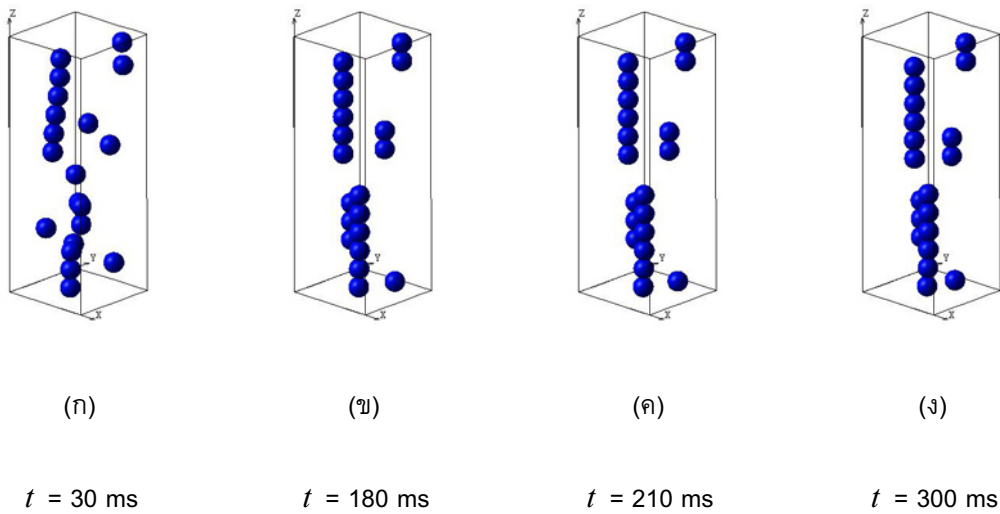
ข. ผลการจำลองของของไหลอีอาร์

สำหรับการจำลองตำแหน่งของอนุภาคในระบบของไหลอีอาร์ที่แสดงอยู่ในรูปที่ 3.3.1.2 ฐานเวลา(ในการทำให้เป็นบรรทัดฐาน)มีค่าเท่ากับ $t_0 = 75$ ms. กำหนดให้ อนุภาคเริ่มได้รับสนามไฟฟ้า ณ เวลา $t = 0$ และเคลื่อนที่เนื่องจากแรงไฟฟ้า. เราต้องการคำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคด้วย $\Delta t^* = 8 \times 10^{-5}$ เป็นจำนวน 50,000 รอบการทำซ้ำตามเวลา. พิจารณาเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณที่ค่าของ N_{iter} และ N_{mp} ต่างๆ กัน. เวลาคำนวณต่อหนึ่งรอบเวลาบนเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มี 1.92GHz Pentium4 CPU และใช้ Linux เป็น os มีรายละเอียดแสดงในรูปที่ 3.3.1.7. เราสามารถเห็นได้จากรูปนี้ว่า เมื่อใช้ $N_{iter} = 3$ และ 4 เวลาที่ใช้ในการคำนวณนานขึ้นอย่างมาก เมื่อเทียบกับเวลาที่ใช้เมื่อ $N_{iter} = 2$ แต่ค่าของแรงมัลติโพลที่ได้ไม่ได้เพิ่มขึ้นอย่างมากนัก (ดังที่ได้อธิบายแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา). เนื่องจากการจำลองจนเสร็จสิ้นใช้เวลาประมาณ 15 ชั่วโมงสำหรับ $N_{mp} = 4$ แต่นานถึง 45 ชั่วโมงสำหรับ $N_{mp} = 5$ ผู้วิจัยจึงเลือกใช้ $N_{iter} = 2$ และ $N_{mp} = 4$ ในการจำลองตำแหน่งของอนุภาคตามเวลาในที่นี้.

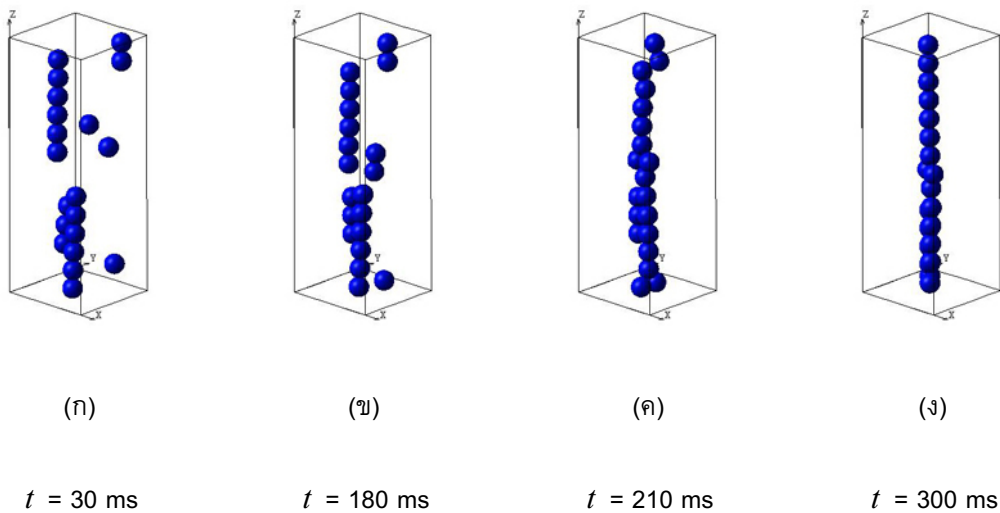


รูปที่ 3.3.1.7 เวลาที่ใช้ต่อหนึ่งรอบการทำซ้ำตามเวลา ที่ค่าของ N_{iter} และ N_{mp} ต่างๆ.

รูปที่ 3.3.1.8 และ 3.3.1.9 แสดงการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของอนุภาคที่ได้จากการใช้โมเดลไดโพล และการใช้โมเดลมัลติโพล ในการประมาณค่าแรงที่ทำบนอนุภาค ตามลำดับ. เราจะเริ่มพิจารณาจากผลที่ได้จากการใช้โมเดลไดโพลก่อน. ในรูปที่ 3.3.1.8(ก) ซึ่งเป็นเวลา 30 ms อนุภาคเริ่มก่อตัวเป็นโซ่สั้นๆ แต่ยังไม่เรียงตัวอย่างดีตามแนวทิศทางของสนามไฟฟ้า. ในรูปที่ 3.3.1.8(ข) อนุภาคก่อตัวเป็นโซ่ที่ยาวขึ้น หรือเป็นคู่ โดยมีอนุภาคเพียงตัวเดียวที่อยู่แยกโดดเดี่ยว ณ เวลา 180 ms. หลังจากเวลา 180 ms โซ่อนุภาคในรูปที่ 3.3.1.8(ค) และ (ง) แตกต่างออกไปจากโซ่ ณ เวลา 180 ms เพียงเล็กน้อยเท่านั้น.



รูปที่ 3.3.1.8 ตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลาต่างๆ ที่ได้จากการใช้โมเดลไดโพลในการประมาณแรง.



รูปที่ 3.3.1.9 ตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลาต่างๆ ที่ได้จากการใช้โมเดลมัลติโพลในการประมาณแรง.

เมื่อเราพิจารณาผลที่ได้จากการใช้โมเดลมัลติโพลในรูปที่ 3.3.1.9 ที่เวลา 30 ms อนุภาคเริ่มก่อตัวเป็นโซ่ในทิศทางของสนามไฟฟ้า. ลักษณะการเรียงตัวของโซ่มีลักษณะขนานกับแนวของสนามไฟฟ้ามากกว่า โซ่ที่ได้จากโมเดลแบบไดโพล. ในรูปที่ 3.3.1.9(ข) ลักษณะการเรียงตัวของโซ่ดีขึ้น และโซ่เคลื่อนที่เข้าใกล้กันเรื่อยๆ เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น. ในรูปที่ 3.3.1.9(ค) เราได้โซ่ที่เชื่อมต่อกันระหว่างอิเล็กโตรด. สังเกตว่า ที่เวลาเดียวกันนี้ (210 ms) อนุภาคที่ได้จากการจำลองโดยใช้โมเดลไดโพล เพิ่งจากรวมตัวเป็นโซ่หลายๆ เส้นเท่านั้น. ในรูปที่ 3.3.1.9(ง) โซ่ที่ได้มีลักษณะเกือบสมบูรณ์ ซึ่งเรียงตัวตามแนวของสนามไฟฟ้า. จากรูปที่ได้ดังกล่าว เราสามารถกล่าวได้ว่า การใช้โมเดลมัลติโพลทำให้ได้เวลาการก่อตัวเป็นโซ่ที่สั้นกว่าเวลาที่ได้จากการใช้โมเดลไดโพล.

นอกจากการตรวจสอบลักษณะสายโซ่ตามรูปที่ 3.3.1.8 และ 3.3.1.9 แล้ว ผู้วิจัยยังได้ทดลองตรวจสอบการใช้ค่าเฉลี่ยกำลังสองของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง $\langle R^{*2} \rangle$ [58, 65] ในการระบุการรวมตัวของอนุภาค. นิยามของค่ากำลังสองของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของอนุภาค a ณ เวลา t เป็น

$$[R_a^*(t)]^2 = [x_a^*(t) - x_a^*(0)]^2 + [y_a^*(t) - y_a^*(0)]^2 + [z_a^*(t) - z_a^*(0)]^2 \quad (3.3.1.18)$$

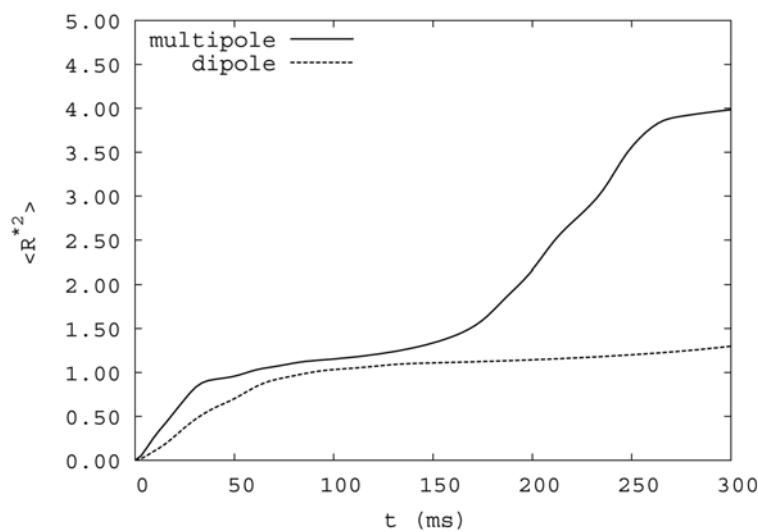
เมื่อ $x_a^*(t), y_a^*(t)$ และ $z_a^*(t)$ เป็นตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา t .

ค่าเฉลี่ย $\langle R^{*2} \rangle$ คำนวณได้จาก

$$\langle R^{*2} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N [R_a^*(t)]^2 \quad (3.3.1.19)$$

เมื่อ N เป็นจำนวนของอนุภาคในระบบ.

ค่าของ $\langle R^{*2} \rangle$ ถูกแสดงตามเวลาในรูปที่ 3.3.1.10. รูปนี้แสดงให้เห็นว่า $\langle R^{*2} \rangle$ ที่คำนวณด้วยโมเดลมัลติโพล มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วที่เวลาเริ่มต้น. ทั้งนี้ เนื่องจากอนุภาคเริ่มก่อตัวเป็นคู่และโซ่ โดยมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งอย่างมาก. เมื่ออนุภาคเริ่มเกาะติดกัน อนุภาคจะเปลี่ยนตำแหน่งด้วยอัตราที่ลดลง. ณ t ประมาณ 175 ms โซ่อนุภาครวมตัวกัน และมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของอนุภาคอย่างมาก ซึ่งทำให้ $\langle R^{*2} \rangle$ สูงขึ้นอีกครั้ง. หลังจาก โซ่อนุภาครวมกันและกลายเป็นโซ่ยาวที่ต่อระหว่างอิเล็กโตรด การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของอนุภาคมีอัตราที่ช้าลง ที่เวลา = 250 ms. ในขณะเดียวกัน เราเห็นว่า $\langle R^{*2} \rangle$ ของอนุภาคที่ได้จากโมเดลไดโพลค่อยๆ เข้าสู่จุดอิ่มตัวที่เวลาประมาณ 150 ms. เนื่องจากอนุภาคไม่ได้รวมตัวเป็นโซ่เชื่อมระหว่างอิเล็กโตรด ค่าของ $\langle R^{*2} \rangle$ ยังคงต่ำกว่าค่าที่ได้จากโมเดลมัลติโพลอย่างมาก. ข้อมูลของ $\langle R^{*2} \rangle$ ดังกล่าวนี้อสอดคล้องกับรูปที่ 3.3.1.8 และ 3.3.1.9.



รูปที่ 3.3.1.10 ค่าเฉลี่ยกำลังสองของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งอนุภาคที่ได้จากการใช้โมเดลทั้งสองในการประมาณค่าแรง.

3.3.2 การก่อตัวเป็นกลุ่มโซ่อนุภาค

หัวข้อนี้เป็นการศึกษาต่อจากหัวข้อที่ 3.3.1 โดยที่ได้เพิ่มจำนวนอนุภาคขึ้นเป็น 67 อนุภาค ทำให้ได้อัตราส่วนปริมาตรของอนุภาคเป็น 10%. พารามิเตอร์อื่นๆ ยังคงเหมือนกับที่ได้ศึกษามา นั่นคือ ค่าคงตัวไดอิเล็กตริกของอนุภาคฉนวนเท่ากับ 8 และของของเหลวเท่ากับ 2, ความหนาแน่นจำเพาะของอนุภาคเท่ากับ 1 g/cm^3 . ปริมาตรที่บรรจุอนุภาคดังกล่าวคือ $L_x = L_y = 5s$ และ $L_z = 14s$ โดยที่ s เป็นรัศมีของอนุภาค.

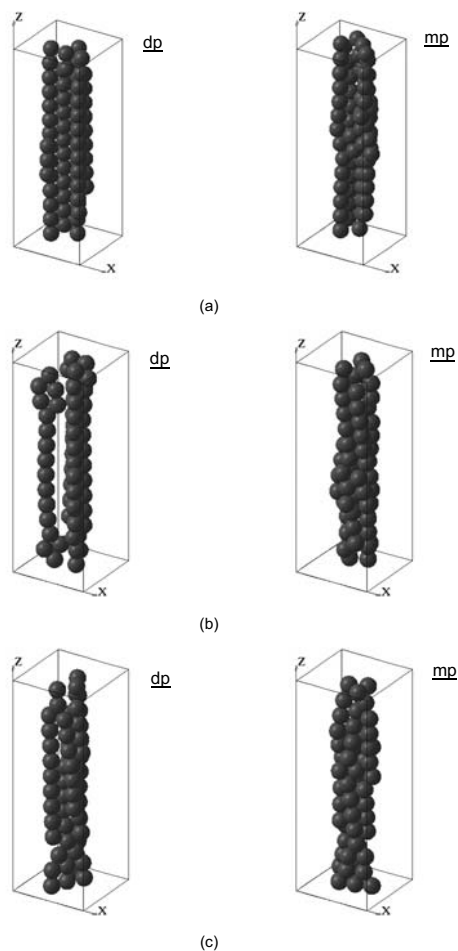
การจำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้า ทำโดยใช้หลักการเดียวกับที่ได้กล่าวมาแล้ว สำหรับกรณีของอนุภาคจำนวนมากนี้ ผู้วิจัยได้ใช้ตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคที่แตกต่างกัน 3 แบบ เพื่อดูผลของตำแหน่งเริ่มต้นที่มีต่อลักษณะของโซ่อนุภาคที่เกิดขึ้น. รูปที่ 3.3.2.1 แสดงตัวอย่างหนึ่งของตำแหน่งอนุภาคเริ่มต้นในระบบที่ใช้ในการจำลอง.



รูปที่ 3.3.2.1 ตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคจำนวน 67 อนุภาค โดยที่พื้นผิวด้านล่างและด้านบนเป็นอิเล็กโตรดซึ่งจะทำให้เกิดสนามไฟฟ้าในแนวดิ่ง.

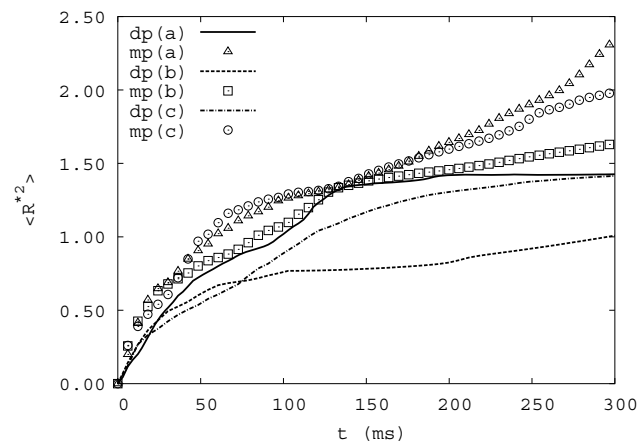
ตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา $t = 300 \text{ ms}$ ที่ได้จากการจำลองโดยใช้โมเดลไดโพล และผลการจำลองโดยใช้โมเดลมัลติโพลในการคำนวณแรง แสดงอยู่ในรูปที่ 3.3.2.2(a) ถึง (c) สำหรับกรณีของตำแหน่งเริ่มต้นที่แตกต่างกันทั้งสามแบบ. สำหรับทุกกรณี การรวมตัวของอนุภาคขึ้นอยู่กับการเริ่มต้นของอนุภาค. ผลการจำลองด้วยโมเดลไดโพลแสดงการเรียงตัวของโซ่อนุภาคตามแนวสนามไฟฟ้า(แนวดิ่ง)เป็นอย่างดี แต่จะมีช่องว่างระหว่างโซ่อนุภาคอยู่ ซึ่งเราจะเห็นได้ชัดเจนในรูปที่ 3.3.2.2(b) และ 3.3.2.2(c) ทางด้านซ้ายมือ ยกเว้นกรณีของรูปที่ 3.3.2.2(a) เท่านั้น ที่โซ่อนุภาคเรียงตัวอยู่ชิดและมีช่องว่างเพียงเล็กน้อย.

เมื่อโมเดลมัลติโพลถูกนำใช้คำนวณแรงบนอนุภาคสำหรับการจำลองการเคลื่อนที่ การเรียงตัวของอนุภาคในแนวของสนามไฟฟ้าอาจจะดูไม่เป็นระเบียบเท่ากับผลจากการใช้โมเดลไดโพล. อย่างไรก็ตาม อนุภาคที่ได้จากการจำลองจะอยู่ชิดติดกันมากกว่า และเราไม่สามารถเห็นช่องว่างระหว่างโซ่อนุภาคในรูปที่ 3.3.2.2(b) และ 3.3.2.2(c) ได้อย่างชัดเจน. ดังนั้น เราสรุปได้ว่า การใช้โมเดลแบบมัลติโพลทำให้ได้ผลการจำลองที่มีความสม่าเสมอมากกว่าการใช้โมเดลแบบไดโพล



รูปที่ 3.3.2.2 กลุ่มโซ่อนุภาคที่ได้จากการจำลอง เมื่อเวลา $t = 300\text{ms}$.

รูปที่ 3.3.2.3 แสดงค่า MSD ของระบบสำหรับตำแหน่งเริ่มต้นทั้งสามแบบ เมื่อจำลองการเคลื่อนที่โดยใช้โมเดลแบบไดโพลและโมเดลแบบมัลติโพล. รูปนี้แสดงให้เห็นว่า เมื่อใช้โมเดลแบบไดโพล ค่า MSD เข้าสู่จุดอิ่มตัวสำหรับตำแหน่งเริ่มต้นแบบ (a) แต่ยังไม่เข้าสู่สำหรับตำแหน่งเริ่มต้นแบบ (b) และแบบ (c). เมื่อใช้โมเดลแบบมัลติโพล เราจะยังคงเห็นการเปลี่ยนแปลงของค่า MSD ของทุกระบบ ณ เวลา $t = 300$ ms. ทว่าเมื่อเราสังเกตลักษณะของโอโซนภาคจริง จะพบว่ามีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของอนุภาคหลังเวลา 300 ms น้อยมาก. ตัวอย่างเช่น รูปที่ 3.3.2.4 เป็นโอโซนภาคของระบบ (a) ณ เวลา 380 ms ซึ่งเราจะเห็นได้ว่ามีความแตกต่างจะตำแหน่ง ณ เวลา 300 ms เพียงเล็กน้อยเท่านั้น. ดังนั้น ผลการจำลองในที่นี้ แสดงให้เห็นว่า ค่า MSD อาจไม่ใช่ดัชนีที่เหมาะสม สำหรับการระบุว่า ระบบอนุภาคนั้นเข้าสู่ตำแหน่งสุดท้ายหรือไม่ ในการจำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาค โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อใช้โมเดลมัลติโพลในการจำลอง.



รูปที่ 3.3.2.3 ค่า MSD ของระบบอนุภาคจำนวน 67 อนุภาค.



รูปที่ 3.3.2.4 ตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา 380 ms ที่ได้จากการจำลองด้วยโมเดลมัลติโพล.

4. สรุปผลการศึกษาที่ได้

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาลักษณะสมบัติของสนามไฟฟ้า และแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากสนามไฟฟ้า ตั้งแต่ระดับอนุภาคเดี่ยวภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก ระดับอนุภาคเดี่ยวภายในระบบอิเล็กทรอนิกส์ที่มีชั้นผิวฉนวน ไปจนถึง ระดับกลุ่มอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก. ผลการศึกษาสามารถสรุปรวมสั้นๆ ได้ดังนี้

- โครงการนี้ได้พัฒนาวิธีคำนวณสนามไฟฟ้าในระบบสองมิติ โดยใช้หลักการของเงาแม่เหล็กไฟฟ้า. วิธีคำนวณนี้ สามารถประยุกต์ใช้ประมาณสนามไฟฟ้าและแรง ในกรณีของอนุภาคที่มีลักษณะแหลมยาวได้.
- การศึกษาในระดับอนุภาคเดี่ยว ได้พิจารณากรณีของทรงกลมตัดกัน และกรณีของอนุภาคทรงคล้ายทรงกลมแป้นข้างหรือแป้นขั้ว (Prolate or oblate spheroid). สำหรับอนุภาครูปทรงกลมตัดกัน ผู้วิจัยสามารถครอบคลุมการวิเคราะห์ถึงกรณีที่มีมุมตัดของทรงกลมเป็นค่าใดๆ ก็ได้ (ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวน $180/n$). สำหรับอนุภาครูปทรงรี ผู้วิจัยสามารถหาตัวประกอบโพลาริเซชันที่ความถี่ต่างๆ และแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างเมื่อใช้โมเดลแบบแม่นยำ ที่มีชั้นผิวฉนวนความหนาแน่นที่ไม่ขึ้นกับมุมบนอนุภาค.
- ในการศึกษาสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคในระบบอิเล็กทรอนิกส์แบบที่มีชั้นผิวฉนวน ผู้วิจัยใช้วิธีเงาประจุและวิธีเงาแม่เหล็กไฟฟ้าสำหรับวิเคราะห์ปัญหา ทำให้ได้คำตอบที่มีความแม่นยำสูงกว่าเมื่อใช้วิธีเชิงตัวเลขทั่วไป. ผลการศึกษาแสดงการเพิ่มขึ้นของสนามไฟฟ้าในบริเวณแฉกประหว่งอนุภาคกับผิวฉนวน หรือ ณ จุดสัมผัสระหว่างอนุภาคกับผิวฉนวน. นอกจากนี้ ผู้วิจัยยังสามารถหาสมการง่ายๆ สำหรับประมาณค่าแรงและสนามไฟฟ้าในระบบดังกล่าว.
- การจำลองการเคลื่อนที่ของกลุ่มอนุภาคที่ได้รับสนามไฟฟ้าภายนอก ในระบบของไหลไออาร์แสดงให้เห็นว่า เมื่อใช้โมเดลที่มีความถูกต้องมากขึ้นในการประมาณค่าแรง ผลของการจำลองที่ได้มีความแตกต่างออกไปอย่างมาก. เวลาที่ใช้ในการเกิดไอซ์เดี่ยวในของไหลสั่นลง และลักษณะของกลุ่มไอซ์ที่เกิดขึ้นมีความสม่ำเสมอ และมีลักษณะที่แตกต่างเมื่อสังเกตจากการพินิจ. นอกจากนี้ ผู้วิจัยยังได้แสดงว่า การใช้ MSD เป็นพารามิเตอร์ในการบ่งชี้การเข้าสู่สภาวะคงตัวของกลุ่มไอซ์ อาจไม่เหมาะสมในทางปฏิบัติได้.

5. รายการเอกสารอ้างอิง

- [1] T. B. Jones, J. Appl. Phys. **62**(1987), pp.362.
- [2] I. W. McAllister, J. Appl. Phys. **63**(1988), pp.2158.
- [3] D. Palaniappan and B. U. Felderhof, J. Appl. Phys. **86**(1999), pp.3418.
- [4] A. V. Radchik, G. B. Smith, and A. J. Reuben, Phys. Rev. B **46**(1992), pp.6115.
- [5] A. V. Paley, A. V. Radchik, and G. B. Smith, J. Appl. Phys. **73**(1993), pp.3446.
- [6] A. V. Paley, A. V. Radchik, G. B. Smith, and A. V. Vagov, Appl. Phys. Lett. **64**(1994), pp.3187.
- [7] A. V. Radchik, A. V. Paley, G. B. Smith, and A. V. Vagov, J. Appl. Phys. **76**(1994), pp.4827.
- [8] A. V. Radchik, A. V. Paley, and G. B. Smith, J. Appl. Phys. **79**(1996), pp.2613.
- [9] B. U. Felderhof and D. Palaniappan, J. Appl. Phys. **88**(2000), pp.4947.
- [10] B. Techaumnat and T. Takuma, IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul. **10**(2003), pp.623.
- [11] B. Techaumnat, B. Eua-arporn, and T. Takuma, J. Appl. Phys. **95**(2004), pp.1586.
- [12] M. Washizu and T. B. Jones, IEEE Trans. Ind. Appl. **32**(1996), pp.233.
- [13] L. Greengard and V. Rokhlin, Acta Numerica **6**(1997), pp.229.
- [14] M. Hara and M. Akazaki, J. Electrostat. **2**(1976/1977), pp.223.
- [15] N.-J. Felici, Rev. Gen. Electr. **75**(1966), pp.1145.
- [16] K. Asami, T. Hanai and N. Koizumi, Japanese J. Appl. Phys., **19**(1980), p.359-365.
- [17] Ruth Douglas Miller and Thomas B. Jones, Biophys. J., **64**(1993), pp.1588-1595.
- [18] T.B.Jones, Electromechanics of Particles, Cambridge University Press (1995).
- [19] R.Pethig, Automation in Biotechnology, I.Karube ed., pp.159-185, Elsevier Science Publishers (1991)
- [20] U. Zimmermann and W.M. Arnold, J. Electrostat.,**21**(1988), pp.309–345.
- [21] J. Gimsa and D. Wachner, Biophys. J., **77**(1999), pp.1316-1326.
- [22] J. Gimsa and D. Wachner, Biophys. J., **81**(2001), pp.1888–1896.
- [23] D. Vrinceanu and E. Gheorghiu, Bioelectrochemistry and Bioenergetics, **40**(1996), pp.167–170.
- [24] E. Gheorghiu, Ann. N.Y. Acad. Sci., **873**(1999), pp.262-262.
- [25] M. Sancho, G. Martinez, and C. Martin, J. Electrostatics, **57**(2003), pp.143-156.
- [26] Moon and Spencer: "Field theory for engineers", Van Nostrand, London (1961).
- [27] M. Washizu and B. Techaumnat, J. Electrostatics, **65** (2007), pp.555–561.
- [28] B. Techaumnat and M. Washizu, J. Phys. D: Appl. Phys., **40**(2007), p.1831–1837.
- [29] T. Takuma, IEEE Trans. Electrical Insulation **26** (1991) pp.500–509.
- [30] T. Takuma, T. Kawamoto, IEEE Trans. Power Apparatus System **103** (1984) pp.2486–2494.
- [31] W.K.H. Panofsky, M. Phillips, Classical Electricity and Magnetism, second ed., Addison-Wesley Publishing, London, (1962).
- [32] D.J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, third ed., Prentice Hall International Inc., New York, (1999), pp. 121–127.
- [33] S. Giordano, J. Electrostatics, **63** (2005), pp.1–9.

- [34] Y. Nakajima, T. Matsuyama, J. Electrostatics **55** (2002), pp.203–221.
- [35] For example, E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, eighth ed., Wiley, Singapore, (2001), p. 669, or C.R. Wylie, L.C. Barrett, Advanced Engineering Mathematics, fifth ed., McGraw-Hill, Singapore, (1985).
- [36] V. Rokhlin, J. Comput. Phys. **60** (1983), pp.187–207.
- [37] L. Greengard, V. Rokhlin, J. Comput. Phys., **73** (1987), pp.325–348.
- [38] N. Yamada, Denkiikigaku, second ed., Denkiakakai, Tokyo, Japan (1999).
- [39] B. Techaumnat, B. Eua-arporn, T. Takuma, J. Phys. D: Appl. Phys., **37** (2004), pp.3337–3346.
- [40] S. Hamada, O. Yamamoto, T. Kobayashi, IEEJ Trans. FM, **125** (2005), pp.533–543 (in Japanese).
- [41] T. Takuma, T. Kawamoto, Electric field at various points of contact between rounded dielectric and electrode, Proceedings of the Fifth International Symposium on High Voltage Engineering, Braunschweig, Germany, 1987.
- [42] T. Takuma, T. Kawamoto, Field behavior at a contact point of a round electrode with solid dielectric, Proceedings of the 4th International Symposium on High Voltage Engineering, Athens, 1983, 12.08.
- [43] A.T. Pe´rez, J. Electrostat., **56** (2002), pp.199–217.
- [44] H. Cheng, SIAM J. Appl. Math., **61** (2000), pp.1324–1337.
- [45] K. Sakai, S. Tsuru, D.L. Abella, M. Hara, IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insulat., **6** (1999), pp.122–130.
- [46] M. Washizu and T.B. Jones, J. Electrostatics, **33** (1994), pp.187-198.
- [47] P.C. Chaumet and J.P. Dufour, J. Electrostatics, **43** (1998), pp.145-159.
- [48] Z. Jiang, J. Electrostatics, **58**(2003), pp.247-264.
- [49] W.S. Czarnecki and L.B. Schein, J. Electrostatics, **61**(2004), pp.107-115.
- [50] B. Techaumnat and T. Takuma, J. Electrostatics., **64** (2006), pp.165–175.
- [51] Y.L Chow, K.D. Srivastava, and C. Charalambous, J. Electrostatics, **11** (1982), pp.167-178.
- [52] M.M. Marcos, S. Zhang, and K.D. Srivastava, CIGRE Paper 15-401 (2002).
- [53] H. Hasegawa, K. Yamaji, M. Hatano, F. Endo, T. Rokunohe, and T. Yamagiwa, IEEE Trans. Power Del., **12**(1997), pp.194-202.
- [54] K. Sakai, D.L. Abella, J. Suehiro, and M. Hara, IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul., **9** (2002), pp.577-588.
- [55] W. Wen and K. Lu, Appl. Phys. Lett., **67**(1995), pp.2147-2148.
- [56] B. Techaumnat and T. Takuma, J. Appl. Phys., **96** (2004), pp.5877-5885.
- [57] L. Flandin, L. Vouyovitch, A. Beroual, J-L. Bessede, and N.D. Alberola, J. Phys. D: Appl. Phys., **38** (2005), pp.144-155.
- [58] D.J. Klingenberg, F. van Swoi, C.F. Zukoski, J. Chem. Phys., **91** (1989), pp.7888–7895.
- [59] Y. Enomoto, K. Oba, Physica A, **309** (2002), pp.15–25.
- [60] L. Jian, S. Jiapeng, J. Appl. Phys., **79** (1996), pp.7312–7317.

- [61] R. Tao, Q. Jiang, Phys. Rev. Lett., **73** (1994), pp.205–208.
- [62] D.J. Klingenberg, F. van Swoi, C.F. Zukoski, J. Chem. Phys., **94** (1991), pp.6170–6178.
- [63] H.J.H. Clercx, G. Bossis, Phys. Rev. E., **48** (1993), pp.2721–2738.
- [64] A. Limsimarat, B. Techaumnat, J. Electrostat., **63** (2005), pp.789–794.
- [65] P. Nakroshis, M. Amoroso, J. Legere, C. Smith, Am. J. Phys., **71** (2003), pp.568–573.

6. OUTPUT ที่ได้จากการวิจัยในโครงการ

ผลงานจากโครงการวิจัยนี้ ได้รับการตีพิมพ์หรือตอบรับสำหรับการตีพิมพ์ ในวารสารทางวิชาการระดับนานาชาติ จำนวนทั้งสิ้น 8 บทความ โดยมีรายละเอียดแยกตามหัวข้อได้ดังต่อไปนี้

เกี่ยวกับการวิเคราะห์อนุภาคที่มีลักษณะเบี่ยงเบนไปจากทรงกลม.

1. Boonchai Techaumnata and Tadasu Takuma, Calculation of electric field in two-dimensional arrangements by the method of multipole images, Journal of Electrostatics, **64** (2006), pp.706–716. มี impact factor เท่ากับ 0.966
2. Boonchai Techaumnata and Tadasu Takuma, Calculation of the electric field in arrangements of intersecting spheres, Journal of Applied Physics, **100** (2006), p.114907. มี impact factor เท่ากับ 2.171
3. Masao Washizu and Boonchai Techaumnat, Polarization and Membrane Voltage of Ellipsoidal Particle with a Constant Membrane Thickness – a Series Expansion Approach, IET Nanobiotechnology, accepted for publication. มี impact factor เท่ากับ 1.882

เกี่ยวกับการวิเคราะห์ระบบอนุภาคที่มีฉนวนผิวคั่นระหว่างอนุภาคกับอิเล็กโตรด

4. Boonchai Techaumnata and Tadasu Takuma, Electric field and force on a conducting sphere in contact with a dielectric solid, Journal of Electrostatics, **64** (2006), pp.165–175. มี impact factor เท่ากับ 0.966
5. Boonchai Techaumnata and Tadasu Takuma, Analysis of the electric field and force in an arrangement of a conducting sphere and a plane electrode with a dielectric barrier, IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, **13** (2006), pp.336-344. มี impact factor เท่ากับ 0.792

เกี่ยวกับการวิเคราะห์พลศาสตร์ของอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้า.

6. Annop Limsimarat and Boonchai Techaumnat, Dynamic simulation using a multipolar model of particles under dielectrophoretic force, Journal of Electrostatics, **65** (2007), pp.672-679. มี impact factor เท่ากับ 0.966
7. Annop Limsimarat and Boonchai Techaumnat, Dynamic simulation including multipolar interactions of a system of dielectric particles under electric field, IEEEJ Trans. FMA, **9** (2007), pp.500-504. ไม่ปรากฏ impact factor

เกี่ยวกับการประยุกต์ใช้การวิเคราะห์แรงกับระบบของเซลล์สิ่งมีชีวิต.

8. Boonchai Techaumna, Kinya Tsuda, Osamu Kurosawa, Gel Murat, Hidehiro Oana and Masao Washizu, High-yield electrofusion of biological cells based on field tailoring by microfabricated structures, IET Nanobiotechnology, accepted for publication. มี impact factor เท่ากับ 1.882

ภาคผนวก

ภาคผนวกนี้เป็นสำเนาของบทความ ที่ได้รับการตีพิมพ์ในวารสารทางวิชาการจำนวน 8 บทความ.

Calculation of electric field in two-dimensional arrangements by the method of multipole images

Boonchai Techaumnat^{a,*}, Tadasu Takuma^{b,c}

^a*Electrical Engineering Department, Chulalongkorn University, Phyathai, Pathumwan, Bangkok 10330, Thailand*

^b*Central Research Institute of Electric Power Industry, 2-11-1 Iwado kita, Komae-shi, Tokyo 201-8511, Japan*

^c*Tokyo Denki University, 2-2 Kanda-Nishiki-cho, Chiyoda-ku, Tokyo 201-8457, Japan*

Received 7 April 2005; received in revised form 2 January 2006; accepted 7 January 2006

Available online 3 February 2006

Abstract

This paper presents the method of images for calculating electric field in two-dimensional arrangements. The method utilizes multipoles as the images to satisfy boundary conditions. The images are given for planar or cylindrical boundaries between two dielectrics and for those between a dielectric and a conductor. We introduce the use of three kinds of multipole re-expansions, which enables the calculation of images in complicated arrangements. The method has a clear advantage over using only line charges or line dipoles when the arrangement under consideration consists of more than two objects. Calculation examples are given to demonstrate the application of the method. The calculation results show that in an arrangement where the field is highly non-uniform, high accuracy can be attained by using the method.

© 2006 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Electric field; Method of images; Multipole re-expansion; Complex potential

1. Introduction

Electric field analysis is important in electric insulation studies and in other applications of dielectric materials. In many cases, physical arrangements under consideration may be reduced to two-dimensional (2D) approximations to simplify the analysis. Two-dimensional arrangements are also useful in the study of fundamental field behavior. For example, they are used in the analysis of electric field intensification at a contact point between a conductor and a solid dielectric as described, for example, in [1,2]. Usually, for 2D arrangements, it is easy to calculate the field by using numerical field-calculation techniques such as the finite element or the boundary element methods. However, it becomes difficult to attain high accuracy via numerical methods for an arrangement in which the electric field is highly non-uniform.

Analytical methods are an alternative for calculating the electric field where the physical configuration is not very

complicated. It is well known that the analytical method of images can be applied for arrangements consisting of simple objects, e.g. planes and cylinders [3,4]. However, the method is not practical if more than two objects are involved, as the determination of image positions and interactions becomes troublesome. Recently, Giordano has presented an analysis of the electric field in fibrous materials using multipoles in 2D arrangements [5]. In this work, the electric potential is expanded as a series of harmonics. To obtain the coefficients of expansion, the multipole re-expansion is applied to form a linear system of equations. This approach is similar to that used in [6,7] for three-dimensional field analysis.

This paper presents an analytical method based on the method of images for 2D field calculations. It is similar to the method that we have proposed for axisymmetrical or three-dimensional arrangements [8,9]. The multipole re-expansion simplifies the image-placement scheme when more than two objects are present in the calculation. In addition to the principles described in [8,9], we propose the use of three kinds of potential re-expansions which greatly extend the application of the method of images. In contrast

*Corresponding author.

E-mail address: boonchai.t@chula.ac.th (B. Techaumnat).

to [5], the method does not require the setting up of a linear equation system. For a configuration comprising more than one object, the potential can be solved by repetitively placing appropriate multipole images until the solution converges, thus significantly reducing the memory requirement when the method is implemented on a computer.

2. Method of multipole images

2.1. Expressing the potential

In our method, a complex plane of z is utilized to represent a 2D physical space. That is, the real and imaginary parts of a complex number $z_0 = x_0 + iy_0$ ($i = \sqrt{-1}$) represent geometrically the abscissa and ordinate of a point (x_0, y_0) in the real space. From the complex function theory [10], we know that real and imaginary parts of an analytic function Φ of z individually satisfy Laplace's equation in two dimensions. The function Φ is analytic only if it satisfies the two Cauchy–Riemann equations:

$$\frac{\partial \operatorname{Re}\{\Phi\}}{\partial x} = \frac{\partial \operatorname{Im}\{\Phi\}}{\partial y} \quad \text{and} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \operatorname{Re}\{\Phi\}}{\partial y} = -\frac{\partial \operatorname{Im}\{\Phi\}}{\partial x}. \quad (2)$$

In this paper, the solution for the potential ϕ is taken as the real part of an analytic function Φ , called the complex potential. The complex potential Φ at a point z in the complex plane may be expressed in the general form of two infinite series expanded about a point $z_0 = x_0 + iy_0$ as

$$\Phi = \Phi_B + \Phi_L, \quad (3)$$

where Φ_B is the potential of multipoles,

$$\Phi_B = B_0 \ln(z - z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^n}, \quad (4)$$

and Φ_L is the potential of Taylor or local expansion,

$$\Phi_L = \sum_{n=0}^{\infty} L_n (z - z_0)^n. \quad (5)$$

B_n and L_n are the complex-number potential coefficients to be determined so as to fulfill the boundary conditions involved. In Eq. (3), Φ_B , singular at z_0 , is the potential due to all sources located inside a circle of radius $|z - z_0|$ with center at z_0 in the complex plane, whereas Φ_L is due to all sources located outside this circle. The coefficient B_n can also be regarded as the magnitude of an n th-order multipole located at z_0 and having its potential singular at z_0 . If a line charge with charge density q_0 is located at (x_0, y_0) in a medium of permittivity ε , for example, then the charge is presented by a monopole or zero-order multipole $B_0 = -q_0/2\pi\varepsilon$ at z_0 in the complex plane.

2.2. Re-expansion of the complex potential

This section describes three types of re-expansion of the potentials in Eqs. (4) and (5). Here we use the term “re-expansion” for processes that expand the function Φ about a different center in the form of a multipole potential in Eq. (4) or a local expansion in Eq. (5). The first two re-expansions only translate the center of expansion (without changing the form of expression), whereas the last one rewrites the multipole potential into the form of local expansion about a translated center of expansion. Combination of these types of re-expansion makes possible the application of the method of multipole images for various arrangements.

2.2.1. Translation of multipole expansion

Consider an n th-order multipole B_n located at $z_0 = x_0 + iy_0$ in a complex plane, as shown in Fig. 1. The complex potential Φ_{B_n} due to this multipole is equal to $B_0 \ln(z - z_0)$ for $n = 0$ and $B_n/(z - z_0)^n$ for $n \geq 1$. With the center of expansion moved to the origin O , we can re-expand Φ_{B_n} for $|z| > |z_0|$, i.e., outside the circle of radius $|z_0|$ and center O . The potential is expressed as

$$\Phi_{B_n} = \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{C_j}, \quad (6)$$

where C_j ($j = n, n+1, \dots$) are the multipoles located at O . That is, $\Phi_{C_0} = C_0 \ln z$ and $\Phi_{C_j} = C_j/z^j$ for $j \geq 1$. The new multipoles, C_j , are determined from B_n ($j \geq n$) as follows [11,12]:

For $j = 0$,

$$C_0 = B_0. \quad (7)$$

For $j \geq 1$,

$$C_j = -\frac{z_0^j B_0}{j} \quad \text{if } n = 0, \quad (8)$$

$$= z_0^{j-n} \frac{(j-1)!}{(j-n)!(n-1)!} B_n \quad \text{if } n \neq 0. \quad (9)$$

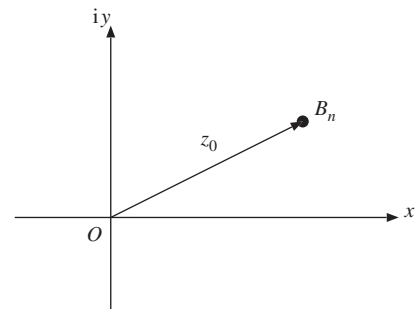


Fig. 1. Multipole B_n at z_0 in the complex plane.

2.2.2. Translation of local expansion

Let $\Phi_{L_n} = L_n(z - z_0)^n$ be an n th-order complex potential expanded about z_0 in the form of a local expansion. We can translate the center of expansion to the origin O and rewrite Φ_{L_n} as

$$\Phi_{L_n} = \sum_{j=0}^n \Phi_{M_j}, \quad (10)$$

$$\Phi_{M_j} = M_j z^j, \quad (11)$$

where M_j ($j = 0, 1, \dots, n$) are complex-number coefficients. Using the polynomial expansion, we obtain the following relation between the coefficients M_j and L_n ($n \geq j$):

$$M_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} (-z_0)^{n-j} L_n. \quad (12)$$

2.2.3. Conversion from multipole expansion to local expansion

Consider the same multipole in Fig. 1. We can express the complex potential Φ_{B_n} in the form of local expansion with the center at the origin O for $|z| < |z_0|$, i.e., inside the circle of radius $|z_0|$ and center O . The potential is re-expressed as

$$\Phi_{B_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{M_j}, \quad (13)$$

where M_j ($j = 0, 1, \dots$) are the potential coefficients of the re-expansion. The limit $|z| < |z_0|$ of Eq. (13) is based on the Taylor's theorem [10]. We can determine M_j from B_n as follows [11,12]:

For $j = 0$,

$$M_0 = \ln(-z_0) B_0 \quad \text{for } n = 0, \quad (14)$$

$$M_0 = \frac{B_n}{(-z_0)^n} \quad \text{for } n \geq 1. \quad (15)$$

For $j \geq 1$,

$$M_j = -\frac{B_0}{j z_0^j} \quad \text{for } n = 0, \quad (16)$$

$$M_j = (-1)^n \frac{B_n}{z_0^{n+j}} \frac{(j+n-1)!}{j!(n-1)!} \quad \text{for } n \geq 1. \quad (17)$$

2.3. Multipole images for fundamental arrangements

This section describes multipole images for fundamental arrangements that consist of only one object whose boundary is a plane or a cylinder surface. The images, which satisfy the boundary conditions on their corresponding objects, are used in the repetitive procedure for arrangements composed of two or more objects.

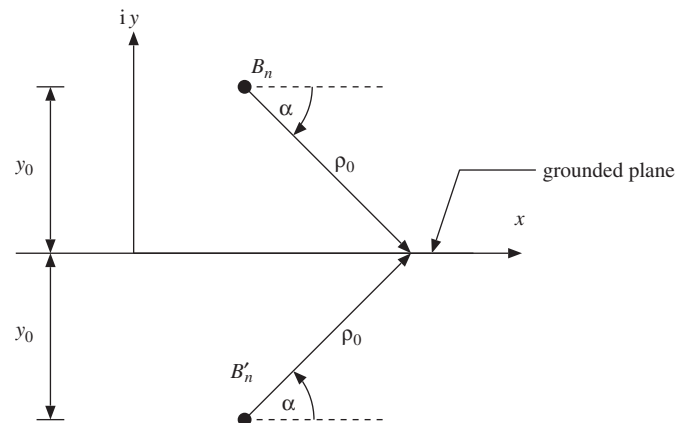


Fig. 2. Multipole B_n and image B'_n induced by the ground plane on the real axis of the complex plane.

2.3.1. Image for a ground plane

Consider a multipole B_n located at $z_0 = x_0 + iy_0$ above a ground plane on the real axis of a z plane, as shown in Fig. 2. The condition to be fulfilled is that of zero potential on the ground plane. This can be done by placing an image B'_n of the same order as B_n at $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$. That is, on the real axis ($y = 0$) of the z plane,

$$\text{Re}\{\Phi_{B_n} + \Phi_{B'_n}\} = 0. \quad (18)$$

Because Φ_{B_n} and $\Phi_{B'_n}$ are a logarithm function of z for $n = 0$ but a power function for $n \geq 1$, we derive the relation between B'_n and B_n separately for $n = 0$ and for $n \geq 1$.

If $n = 0$,

$$\Phi_{B_0} + \Phi_{B'_0} = B_0(\ln \rho_0 - i\alpha) + B'_0(\ln \rho_0 + i\alpha), \quad (19)$$

where $(\rho_0, -\alpha)$ are the polar coordinates of an arbitrary point in x on the ground plane when z_0 is treated as the origin. That is, $z - z_0 = \rho_0 \exp(-i\alpha)$. Because Eq. (18) must be true for any angle α , we get, from Eq. (19)

$$B'_0 = -\bar{B}_0, \quad (20)$$

where \bar{B}_0 is the complex conjugate of B_0 .

If $n \geq 1$, the equation of the potential on the ground plane becomes, for any n :

$$\Phi_{B_n} + \Phi_{B'_n} = \frac{B_n}{\rho_0^n} \exp(in\alpha) + \frac{B'_n}{\rho_0^n} \exp(-in\alpha). \quad (21)$$

From the boundary condition in Eq. (18), we obtain

$$B_{n,r} \cos n\alpha - B_{n,i} \sin n\alpha + B'_{n,r} \cos n\alpha + B'_{n,i} \sin n\alpha = 0. \quad (22)$$

Here we denote the real and imaginary parts of any potential coefficient A_n by $A_{n,r}$ and $A_{n,i}$, respectively. Obviously, Eq. (22) leads to the same relation between B'_n and B_n as that in Eq. (20). Therefore, we conclude that

$$B'_n = -\bar{B}_n \quad \text{for } n \geq 0. \quad (23)$$

2.3.2. Images for a semi-infinite dielectric solid

Consider the arrangement of Fig. 2, but for the case where the ground plane is replaced by a semi-infinite dielectric solid. The permittivities of the dielectric solid and the surrounding (external) medium are denoted by ε_I and ε_E , respectively. Two multipole images, B'_n at \bar{z}_0 and B''_n at z_0 , are used to satisfy the boundary conditions on the planar dielectric interface at $y = 0$. In the surrounding medium, the complex potential Φ_E resulting from the multipoles B_n and B'_n can be expressed as

$$\Phi_E = \Phi_{B_n} + \Phi_{B'_n}. \quad (24)$$

Inside the dielectric solid, the complex potential Φ_I is due to B''_n :

$$\Phi_I = \Phi_{B''_n}. \quad (25)$$

For this situation, the boundary conditions on the dielectric interface are the continuities of the real potential and normal electric flux density. To determine the multipole images, B'_n and B''_n , we express the boundary conditions in terms of the complex potentials as

$$\text{Re}\{\Phi_E\} = \text{Re}\{\Phi_I\} \quad (26)$$

$$\text{and } \Gamma \frac{\partial \text{Re}\{\Phi_I\}}{\partial y} = \frac{\partial \text{Re}\{\Phi_E\}}{\partial y}, \quad (27)$$

where $\Gamma = \varepsilon_I/\varepsilon_E$ defines the permittivity ratio. From the Cauchy–Riemann equations, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{\partial \text{Im}\{\Phi\}}{\partial y} - i \frac{\partial \text{Re}\{\Phi\}}{\partial y} = -i \left(\frac{\partial \text{Re}\{\Phi\}}{\partial y} + i \frac{\partial \text{Im}\{\Phi\}}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= i \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (28)$$

Using this relation, Eq. (27) may be rewritten as

$$\Gamma \cdot \text{Re} \left\{ i \frac{\partial \Phi_I}{\partial z} \right\} = \text{Re} \left\{ i \frac{\partial \Phi_E}{\partial z} \right\}. \quad (29)$$

As in Section 2.3.1, at any point z on the interface, $z - z_0 = \rho_0 \exp(-i\alpha)$ and $z - \bar{z}_0 = \rho_0 \exp(i\alpha) = \bar{z} - \bar{z}_0$. Using Eqs. (26) and (29), we can evaluate B'_n and B''_n from B_n by

$$B'_n = -\frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1} \bar{B}_n, \quad (30)$$

$$B''_n = \frac{2}{\Gamma + 1} B_n. \quad (31)$$

It should be noted here that the relations above describe the most general case of a planar interface between two dielectrics, where ε_I and ε_E are the permittivities of the medium on the multipole side and that on the other side of the interface, respectively.

2.3.3. Images for a grounded conducting cylinder

Consider next a grounded conducting cylinder of radius R centered at the origin of a complex plane, as shown in Fig. 3. Let B_n be a source multipole located at z_0 outside the cylinder ($|z_0| > R$). Using the multipole re-expansion

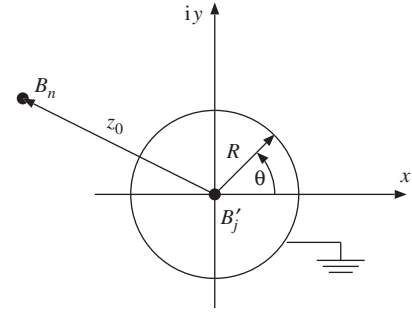


Fig. 3. Multipole B_n and a grounded conducting cylinder. B'_j ($j = 1, 2, \dots$) are the images of B_n induced by the conducting cylinder.

method, the complex potential due to B_n can be rewritten in the form of a local expansion for $|z| < |z_0|$:

$$\Phi_{B_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{M_j}, \quad (32)$$

where M_j are determined by using Eqs. (14)–(17).

To satisfy the zero-potential condition on the cylinder surface, an infinite number of multipoles B'_j ($j = 0, 1, \dots$) are inserted at the cylinder center as the images of B_n . Matching the resultant potential to get

$$\text{Re}\{\Phi_{B'_j} + \Phi_{M_j}\} = 0 \quad (33)$$

on the surface for each j , we can relate B'_j to M_j . As in the previous section, we consider B'_j separately for $j = 0$ and for $j \geq 1$.

For $j = 0$,

$$B'_{0,r} \ln R - B'_{0,i} \theta + M_{0,r} = 0, \quad (34)$$

where $R(\cos \theta + i \sin \theta)$ represents the cylinder surface. It follows from Eq. (34) that

$$B'_0 = -\text{Re} \left\{ \frac{M_0}{\ln R} \right\}. \quad (35)$$

For $j \geq 1$,

$$\text{Re} \left\{ \frac{B'_j \exp(-ij\theta)}{R^j} + M_j R^j \exp(ij\theta) \right\} = 0. \quad (36)$$

From Eq. (36), we can conclude that

$$B'_j = -R^{2j} \bar{M}_j \quad \text{for } j \geq 1. \quad (37)$$

It is worth noting that the images described in this section can apply to a conducting sphere on which the net charge is given. In the most common case where the conductor possesses no net charge, we obtain $B'_0 = 0$, and also obtain the same relation for the other B'_j as that for the grounded cylinder in Eq. (37).

An inverse situation should be noted here for a multipole B_n located at z_0 inside a hollow conducting cylinder of radius R centered at the origin, $|z_0| < R$, as shown in Fig. 4. To satisfy the potential condition on the cylinder surface ($|z| = R$), we re-expand the potential of B_n about the

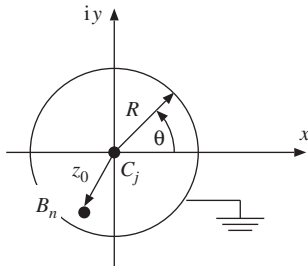


Fig. 4. Source multipole B_n located at z_0 inside a hollow, grounded conducting cylinder.

cylinder center ($z = 0$) using the translation of multipole potential in Eqs. (7)–(9). Then, Φ_{B_n} can be expressed for $|z| > |z_0|$ as

$$\Phi_{B_n} = \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{C_j}, \quad (38)$$

where C_j are the multipoles at the cylinder center. C_j can be determined from B_n using Eqs. (7)–(9). [Note that Φ_{B_n} is re-expanded in the form of a multipole potential in Eq. (38) but in the form of a local expansion in Eq. (32).] The resultant potential is the sum of Φ_{B_n} and the potential due to charges induced on the conducting cylinder surface. The latter can be expressed by a local expression of Eq. (11) about the cylinder center. Denoting this potential by Φ_{M_j} , we write the resultant potential inside the hollow cylinder for this case as

$$\Phi = \Phi_{B_n} + \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{M_j} = \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{C_j} + \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{M_j}, \quad (39)$$

where $\Phi_{M_j} = M_j z^j$. To satisfy the zero-potential condition, we get the following relations:

$$M_0 = -\ln R \cdot C_0 \quad (40)$$

and

$$M_j = -\frac{\bar{C}_j}{R^{2j}} \quad \text{for } j \geq 1. \quad (41)$$

2.3.4. Images for a dielectric cylinder

Consider an arrangement shown in Fig. 5. A dielectric cylinder having a radius R is centered at the origin of a complex plane. The source is a multipole B_n located at z_0 outside the cylinder. We denote the permittivities of the cylinder and the surrounding medium by ε_I and ε_E , respectively. For this arrangement, we separately express the complex potentials Φ_I in the interior and Φ_E in the exterior of the cylinder. The potentials are then determined to satisfy the following boundary conditions on the cylinder surface:

$$\text{Re}\{\Phi_I\} = \text{Re}\{\Phi_E\}, \quad (42)$$

$$\Gamma \frac{\partial \text{Re}\{\Phi_I\}}{\partial \rho} = \frac{\partial \text{Re}\{\Phi_E\}}{\partial \rho}. \quad (43)$$

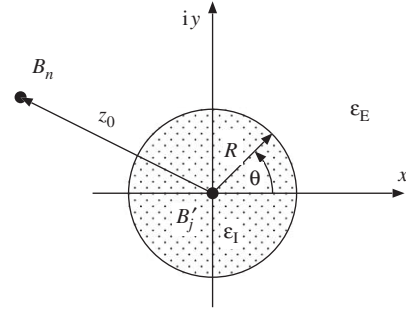


Fig. 5. Multipole B_n and a dielectric cylinder. B'_j ($j = 1, 2, \dots$) are the images of B_n induced by the dielectric cylinder.

The electric field of B_n induces polarization in the dielectric cylinder, resulting in surface monopoles (i.e., surface charges in the real space) on the cylinder unless $\Gamma = 1$. Hence, the potential inside the cylinder is the sum of the potential of B_n and that of the monopoles. The resultant potential Φ_I can be written in the form of a local expansion about the cylinder center

$$\Phi_I = \Phi_L = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{L_j}, \quad (44)$$

where L_j ($j = 0, 1, \dots$) are the potential coefficients to be determined.

Similar to Φ_I , the potential Φ_E also results from the source multipole B_n and the surface charges. We use multipole images B'_j ($j = 1, 2, \dots$) at the cylinder center to express the potential in the exterior due to the surface charges. Therefore, Φ_E is written for $|z| \geq R$ in the form

$$\Phi_E = \Phi_{B_n} + \Phi_{B'} = \Phi_{B_n} + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{B'_j}. \quad (45)$$

Re-expanding the multipole potential Φ_{B_n} into the form of Eq. (32), we can rewrite Φ_E for $R \leq |z| < |z_0|$ as

$$\Phi_E = \sum_{j=0}^{\infty} (\Phi_{M_j} + \Phi_{B'_j}). \quad (46)$$

Note that the limit $|z| < |z_0|$ arises from the re-expansion of Φ_{B_n} to Φ_{M_j} . [The solution for $|z| > |z_0|$ is expressed in Eq. (45).]

From the boundary conditions in Eqs. (42) and (43), it follows that L_j in Eq. (44) and B'_j in Eq. (46) are related to M_j as follows:

$$L_0 = \text{Re}\{M_0\}, \quad (47)$$

$$B'_0 = 0, \quad (48)$$

and for $j \geq 1$,

$$L_j = \frac{2}{\Gamma + 1} M_j, \quad (49)$$

$$B'_j = -\frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1} R^{2j} \bar{M}_j. \quad (50)$$

Note that classical books on electromagnetics (for example, [3]) usually treat the problem of a line charge and a dielectric cylinder by placing a line-charge image at the center of the cylinder and another image at the inversion point of the source. (If the source is at a distance r from the cylinder center, the inversion point will be at a distance R^2/r on the straight line connecting the source and the center.) In our approach, an infinite number of the multipole images are inserted only at the center of the cylinder. It can be shown by using the multipole re-expansion that these two approaches give an equivalent solution. Because the image position is restricted to the center of the cylinder, the application of the method of images to arrangements comprising more than two objects becomes much simplified.

An inverse situation, where B_n is located inside the cylinder, can also be treated in a manner similar to that of the previous case. Consider the multipole B_n in Fig. 4, but in this case let have a dielectric permittivity ϵ_1 . After applying the re-expansion, we obtain its potential in the form of Eq. (38). The resultant potentials are

$$\Phi_I = \Phi_{B_n} + \Phi_M = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{C_j} + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{M_j} \quad (51)$$

inside the cylinder, where $\Phi_{M_j} = M_j z^j$; and

$$\Phi_E = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{C'_j} \quad (52)$$

outside the cylinder, where C'_j are the multipole images. The coefficients M_j and C'_j are determined from C_j to fit the boundary conditions as follows:

$$C'_0 = \Gamma C_0, \quad (53)$$

$$M_0 = (\Gamma - 1) \ln R \cdot C_0, \quad (54)$$

and for $j \geq 1$,

$$C'_j = \frac{2\Gamma}{\Gamma + 1} C_j, \quad (55)$$

$$M_j = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1} R^{2j} \overline{C'_j}. \quad (56)$$

2.4. Initial expression of complex potential for calculation

Solution by the method of images usually begins with an initial complex potential that fulfills a boundary condition on an object in the arrangement under consideration. For example, the boundary condition may be a constant potential on a conductor or may be a potential due to an external uniform electric field. For cases that the arrangement comprises more than one object, field calculation is performed in an iterative manner after the initial potential is obtained. This section explains the setting up of the initial complex potential.

2.4.1. Stressed conducting cylinder

Suppose a conducting cylinder of potential ϕ_0 and radius R_0 is centered at (x_0, y_0) . In the corresponding complex plane, we can place a zero-order multipole B_0 at $z_0 = x_0 + iy_0$ to yield $\text{Re}\{\Phi_{B_0}\} = \phi_0$ at any point z on the cylinder surface ($|z - z_0| = R_0$). From Eq. (4), it is obvious that B_0 can be determined by

$$B_0 = \frac{\phi_0}{\ln R_0}. \quad (57)$$

The initial potential is then written as

$$\Phi = B_0 \ln(z - z_0). \quad (58)$$

2.4.2. Stressed conducting cylinder and a ground plane

Suppose a conducting cylinder of potential ϕ_0 and radius R_0 is centered at (x_0, y_0) above a ground plane located at $y = 0$, as shown in Fig. 6. In the corresponding complex plane, we use images to obtain a complex potential Φ that satisfies two conditions: (1) $\text{Re}\{\Phi\} = \phi_0$ at any point z that $|z - z_0| = R_0$ and (2) $\text{Re}\{\Phi\} = 0$ on the real axis. Two multipole images B_0 and $-B_0$ are inserted at $z_B = x_0 + iy_B$ and \bar{z}_B , respectively, to fulfill both conditions. The height y_B can be calculated from y_0 the radius R_0 of the cylinder by [13]

$$y_B = \sqrt{y_0^2 - R_0^2}. \quad (59)$$

The complex potential due to the two multipoles at a point z is

$$\Phi = B_0 \ln \frac{z - z_B}{z - \bar{z}_B}. \quad (60)$$

From Eq. (60), the two multipoles can be determined from ϕ_0 by

$$B_0 = \frac{\phi_0}{\ln \left[R_0 / \left(y_0 + \sqrt{y_0^2 - R_0^2} \right) \right]}. \quad (61)$$

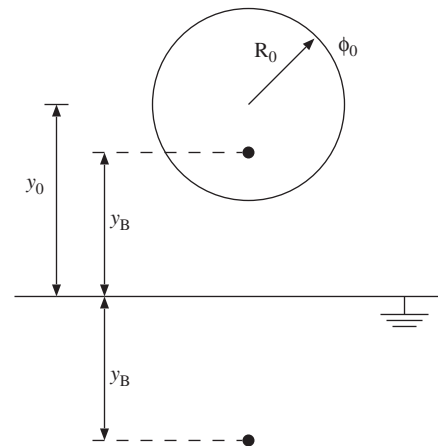


Fig. 6. Electrically stressed conducting cylinder centered above a ground plane by a distance y_0 .

2.4.3. External uniform field

Consider a physical configuration subjected to an external uniform field. The potential due to the external field is used as the initial complex potential. If an electric field E_y exists in the downward vertical ($-y$) direction, for example, the real potential ϕ_{E_y} due to this external field at any point (x, y) is equal to

$$\phi_{E_y} = \phi_0 + yE_y, \quad (62)$$

where ϕ_0 is the potential at the origin. The corresponding complex potential Φ_{E_y} at any point $z = x + iy$ can be expressed in the form of a local expansion as

$$\Phi_{E_y} = M_0 + M_1 z, \quad (63)$$

where $M_0 = \phi_0$ and $M_1 = -iE_y$.

If an external uniform field E_x is in the left-to-right, horizontal ($+x$) direction, the real potential ϕ_{E_x} at a point (x, y) is equal to

$$\phi_{E_x} = \phi_0 - xE_x, \quad (64)$$

and the complex potential Φ_{E_x} is also in the form of Eq. (63) with $M_0 = \phi_0$ and $M_1 = -E_x$.

Note that the potentials ϕ_{E_y} in Eq. (62) and ϕ_{E_x} in Eq. (64) are the well-known solution of Laplace's equation for the uniform fields, whereas the complex potentials Φ_{E_y} and Φ_{E_x} are the analytic functions of z having their real parts identical to ϕ_{E_y} and ϕ_{E_x} , respectively.

2.5. Calculation procedure

The method of images begins with the initial complex potential that satisfies a boundary condition in the arrangement of calculation, as described in Section 2.4. From the initial potential, we place multipole images for each object in the arrangement to fulfill the boundary conditions on the object by using the images described in Section 2.3. However, for an arrangement composed of more than one object, each application of the images perturbs the potential in the arrangement, making the boundary conditions on the other objects unsatisfied. Thus, the images shall be applied repetitively until the solution converges. (That is, the magnitudes of multipole images to be inserted are so small that their potential is lower than a required error level.) More details on the repetitive procedure have been described in [8,9,14]. A similar application of the potential re-expansions has also been presented for three-dimensional electric field calculation in [15].

It should be noted here that the presence of an energized conducting cylinder may introduce a numerical problem in calculation. This is because the potential due to a multipole B_j ($j \geq 1$) vanishes as $|z| \rightarrow \infty$ (infinitely far from the multipole), but that due to a monopole B_0 becomes singular. This characteristic leads to numerical instability when applying the multipole re-expansion and fundamental solutions during iteration, although the relations are theoretically correct. Here, noting that $|\phi_{B_0}|$ consistently decreases to zero as $|z|$ increases from zero to unity, we

solve this problem by restricting the spatial dimensions of the calculation arrangement to be smaller than unity. (An arrangement with larger dimensions can be scaled so as to conform to this restriction.) However, this approach has a disadvantage, when it is implemented on a computer, that the possible order of expansion to be used for the potential is reduced, as dividing by z^j [for example, in Eqs. (15) and (16)] for a very small z may give a too large value (numerical overflow).

3. Calculation examples

3.1. Conducting cylinder in a uniform field

A configuration of an electrically floating, conducting cylinder of radius R and center z_0 under a uniform electric field $E_0 = -iE_y$ is taken as the first example. We begin with the calculation with the external potential Φ_{E_y} similar to that in Eq. (63),

$$\Phi_M = \Phi_{E_y} = M_0 + M_1(z - z_0), \quad (65)$$

where M_0 is the potential at z_0 and $M_1 = -iE_y$. Note that the potential is expanded about z_0 in Eq. (65). Next, multipole images B'_j , $j = 0$ and 1 , are placed at the cylinder center to satisfy the boundary condition

$$\text{Re}\{\Phi\} = \text{constant} \quad (66)$$

on the cylinder surface, where

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_M + \Phi_{B'_j} \\ &= \sum_{j=0}^1 \Phi_{M_j} + \sum_{j=0}^1 \Phi_{B'_j}. \end{aligned} \quad (67)$$

Because the cylinder is a electrically floating conductor, the net charge on it must be zero, that is,

$$B'_0 = 0. \quad (68)$$

Making use of Eq. (37), we get

$$B'_1 = -iR^2 E_y. \quad (69)$$

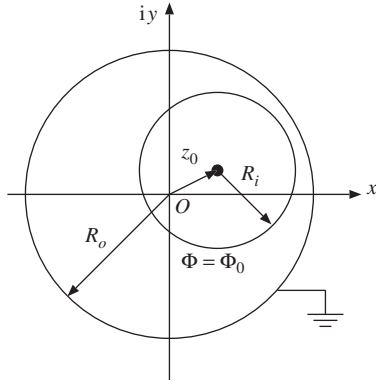
Therefore, the solution of the real potential ϕ is expressed as

$$\phi = \text{Re}\{\Phi\} = \phi_0 + \left(\rho - \frac{R^2}{\rho}\right) E_y \sin \theta, \quad (70)$$

where ϕ_0 is the potential at (x_0, y_0) , and (ρ, θ) are polar coordinates when the cylinder center is taken as the origin. Note that Eq. (70) gives the well known solution of this arrangement [3].

3.2. Eccentric cylinders

The next example is a capacitor formed by two eccentric conducting cylinders. The inner cylinder of radius R_i is energized to a potential ϕ_0 , whereas the outer cylinder of radius R_o is grounded. Fig. 7 shows the configuration on the complex plane, in which we take the origin, O , and the

Fig. 7. Eccentric cylinders of potential difference ϕ_0 .

point z_0 , $|z_0| + R_i < R_o$, as the centers of the outer and inner cylinders, respectively. Although the solution of this arrangement can be obtained using the bicylindrical coordinate system [16], the method presented here is applicable to general problems consisting of more than one inner cylinder.

The repetitive procedure for the arrangement of Fig. 7 can be described as follows, in which the superscript (i) denotes the step of repetition.

- (1) Place initial multipoles $B^{(1)}$ at z_0 to fit the potential ϕ_0 on the inner cylinder. From Eq. (4), we have

$$B_0^{(1)} = \frac{\phi_0}{\ln R_i}, \quad (71)$$

and $B_j^{(1)} = 0$ for $j \geq 1$. The potential Φ between the cylinders is then expressed by

$$\Phi = \Phi_{B^{(1)}} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{B_j^{(1)}}. \quad (72)$$

- (2) Translate all the multipoles $B^{(1)}$ at z_0 to multipoles $C_j^{(1)}$ at O , the center of the outer cylinder. By using Eqs. (6)–(9), we have

$$\Phi_{B^{(1)}} = \Phi_{C^{(1)}}, \quad (73)$$

where $\Phi_{C^{(1)}}$ is the total potential due to all $C_j^{(1)}$.

- (3) Apply the potential $\Phi_{M^{(1)}}$ in the form of local expansion about O to match the potential due to each $C_j^{(1)}$. That is, on the outer cylinder,

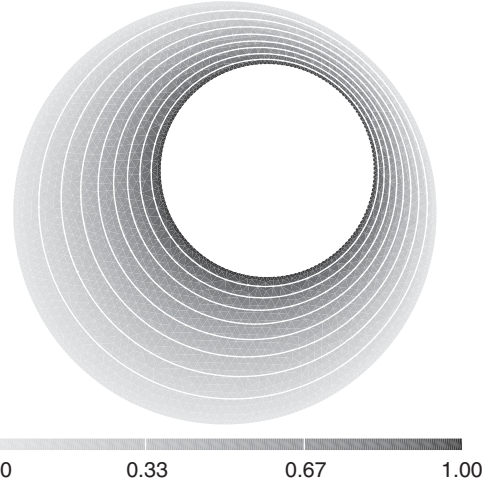
$$\Phi = \Phi^{(1)} = \Phi_{C^{(1)}} + \Phi_{M^{(1)}} = 0, \quad (74)$$

$$\Phi_{C_j^{(1)}} + \Phi_{M_j^{(1)}} = 0. \quad (75)$$

Here $\Phi_{M^{(1)}}$ is the potential due to charges induced on the outer cylinder. Its coefficients are calculated from $C^{(1)}$ by using Eqs. (40) and (41).

- (4) Translate the center of expansion for $\Phi_{M^{(1)}}$ to z_0 . Denoting the re-expanded expression of $\Phi_{M^{(1)}}$ by $\Phi_{M'^{(1)}}$, we have

$$\Phi_{M^{(1)}} = \Phi_{M'^{(1)}}, \quad (76)$$

Fig. 8. Potential within the eccentric cylinders for $R_i = 0.5R_o$ and $z_0 = (0.1R_o, 0.1R_o)$.

where $M'^{(1)}$ is calculated from $M^{(1)}$ by using Eqs. (10) and (12).

- (5) Since $\Phi_{M'^{(1)}}$ influences the potential on the inner cylinder, we place images $B^{(2)}$ at z_0 to cancel the potential $\Phi_{M'^{(1)}}$ on the surface. The potential on the inner cylinder becomes

$$\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi_{B^{(2)}} = \Phi_0 \quad (77)$$

or

$$\Phi_{M_j^{(1)}} + \Phi_{B_j^{(2)}} = 0, \quad (78)$$

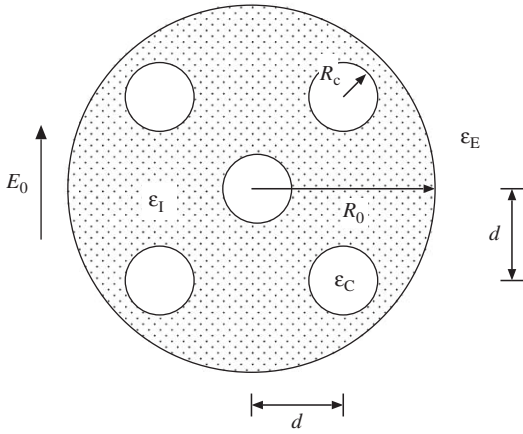
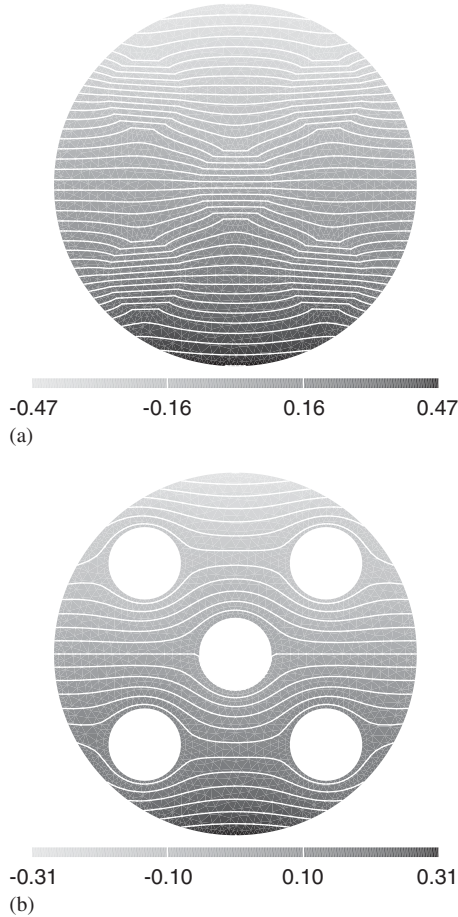
where $B_j^{(2)}$ is related to $M_j^{(1)}$ by Eqs. (35) and (37).

- (6) Repeat Steps 2–5 until the potential Φ converges.

Fig. 8 shows the calculation results for $R_i = 0.5R_o$ and $z_0 = (0.2R_o, 0.2R_o)$. The potential, normalized by ϕ_0 , is displayed on the gray scale at the bottom of the figure. The calculation uses up to eighth-order ($j = 0, 1, \dots, 8$) for the expansion of potential and converges in about 20 steps to an error level $\varepsilon = 10^{-5}\%$ of the potential.

3.3. Multi-core dielectric cylinder under an external field

This example (Fig. 9) represents a simple model for fibrous materials. In Fig. 9, a dielectric cylinder of radius R_o is composed of a dielectric of permittivity ε_I and five cores having radius R_c . Four of them are displaced from the center of the dielectric cylinder by a distance d in both horizontal and vertical directions, whereas the last core is located at the center. The cylinder is placed in a surrounding medium of permittivity ε_E under a vertical, uniform external field E_0 . We have calculated this arrangement for $R_c = 0.2R_o$, $d = 0.5R_o$, and $\varepsilon_I/\varepsilon_E = 4$. Two cases are treated here in which the cores are (a) dielectrics having permittivity $\varepsilon_C = \varepsilon_E$ and (b) conductors.

Fig. 9. Dielectric cylinder under an external field E_0 .Fig. 10. Potential in the dielectric cylinder with (a) dielectric cores and (b) conducting cores. The potential, normalized to $E_0 R_0$, is expressed on the gray scales in the figures.

We omit the calculation procedure for this arrangement, as it is principally the same as those for Section 3.2. However, all the three types of multipole re-expansion described in Section 2.2 must be used in the calculation. The calculation results are shown in Fig. 10. The potential,

normalized to $E_0 R_0$, is expressed on the gray scale at the bottom. It can be seen from Fig. 10(a) that the electric field inside the outer cylinder does not significantly deviate from that of a homogeneous dielectric cylinder, in which the field is uniform and equal to $0.5E_0$ for $\epsilon_I/\epsilon_E = 4$. On the other hand, the field in Fig. 10(b) is less intensified in the dielectric cylinder than that in Fig. 10(a) as we can readily notice from the potential scale. For both types of the cores, we use up to 10th-order for the potential expansion and the solutions converge within eight steps to an error level $\epsilon = 10^{-5}\%$.

3.4. Dielectric cylinder lying on a ground plane under an electric field

The last example is an arrangement of a dielectric cylinder of radius R lying on a ground plane under an external uniform field E_0 in the vertical direction (Fig. 11). We denote the permittivities of the dielectric cylinder and the surrounding medium by ϵ_I and ϵ_E , respectively. This arrangement has been used to investigate the electric field behavior at the contact point between a solid dielectric and a conductor [17]. It is also equivalent, with respect to electric field, to an arrangement of two dielectric cylinders in contact under E_0 . The calculation procedure for this arrangement begins with

$$\Phi = \Phi_{E_0} = M_1^{(1)} z, \quad (79)$$

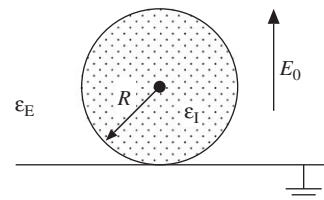
where $M_1^{(1)} = iE_0$, as explained in Section 2.4.3.

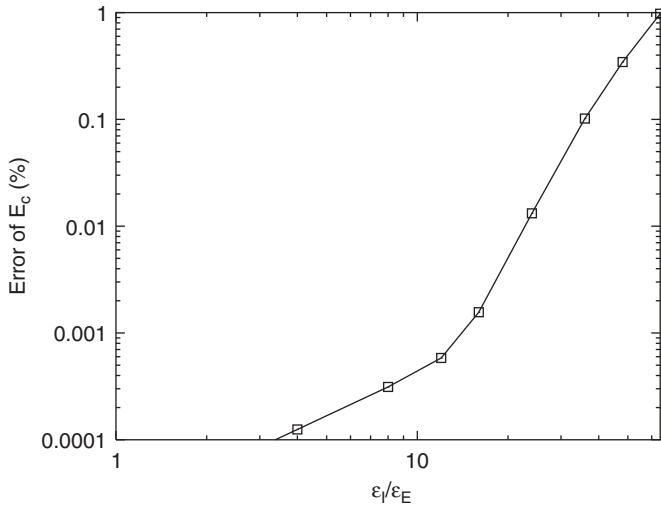
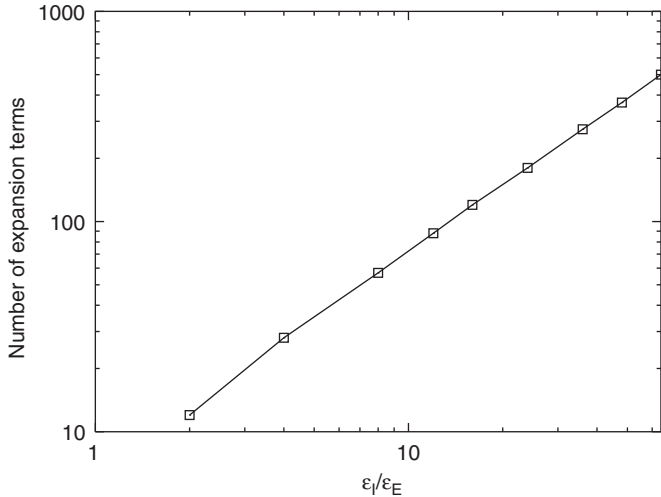
In the next step, multipoles $B_j^{(1)}$ are inserted at the center of the cylinder. For each j , $B_j^{(1)}$ is calculated from $M_j^{(1)}$ with Eqs. (48) and (50). This step satisfies the boundary condition on the dielectric interface. According to Eq. (23), The ground plane also induces multipoles $B_j^{(1)}$, at the distance R below the plane, as the images of $B_j^{(1)}$.

Next, with Eqs. (14)–(17), the potential due to all $B_j^{(1)}$ is re-expanded about the cylinder center in the form of local expansion. The re-expansion gives $M^{(2)}$ for the next iteration. The application of images is repetitively done in this manner. At the n th iteration, the potential outside the dielectric cylinder is expressed by

$$\Phi = \Phi_{E_0} + \sum_k^n \sum_j^{N_j} [\Phi_{B_j^{(k)}} + \Phi_{B_j^{(k)'}}], \quad (80)$$

where N_j is the highest order of expansion used in the calculation.

Fig. 11. Dielectric cylinder on a ground plane under an external field E_0 .

Fig. 12. Error of the electric field E_c at the contact point.Fig. 13. Number of expansion terms required in order that the error of E_c is smaller than 1%.

This arrangement is chosen as an example here because the analytical solution of the electric field is available. The electric field E_c at the contact point between the cylinder and the ground plane has been derived by the classical method of images using only line-dipole images [17]. The solution of E_c in the ϵ_E -side is

$$\frac{E_c}{E_0} = \frac{\epsilon_I}{\epsilon_E}. \quad (81)$$

When $\epsilon_I/\epsilon_E \gg 1$, the electric field near the contact point is highly non-uniform, thus making it difficult for numerical field-calculation methods. We use this arrangement to investigate the accuracy attained by the calculation method. Fig. 12 shows the error of the field E_c , compared with the analytical solution in Eq. (81), in relation to the permittivity ratio ϵ_I/ϵ_E when $N_j = 500$. As can be seen from the figure, we attain the error of the contact-point

electric field, E_c , smaller than 1% for ϵ_I/ϵ_E up to 64. Fig. 13 shows the minimum order N_j of expansion required to achieve an error of E_c smaller than 1% as a function of the permittivity ratio. We can see that N_j increases approximately as an exponential function with the permittivity ratio.

4. Conclusions

This paper describes the method of multipole images for calculating the electric field in two-dimensional arrangements. The method is similar to the classical method of images, but it uses multipoles of higher order than line or dipole charges. Three kinds of multipole re-expansion are utilized to extend the application of the method for more general arrangements. Calculation examples are given to demonstrate the use of this method in various arrangements. In addition to the application to fundamental arrangements, the method can be used for evaluating the accuracy of results obtained by numerical field-calculation methods.

Acknowledgment

This work was financially supported by the Thailand Research Fund and the Commission on Higher Education, Thailand. We thank Dr. Shoji Hamada at Kyoto University for his discussion on the three-dimensional calculation using a similar approach.

References

- [1] T. Takuma, Field behavior at a triple junction in composite dielectric arrangement, *IEEE Trans. Electrical Insulation* 26 (1991) 500–509.
- [2] T. Takuma, T. Kawamoto, Field intensification near various points of contact with a zero contact angle between a solid dielectric and an electrode, *IEEE Trans. Power Apparatus System* 103 (1984) 2486–2494.
- [3] W.K.H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, second ed., Addison-Wesley Publishing, London, 1962.
- [4] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, third ed., Prentice Hall International Inc., New York, 1999, pp. 121–127.
- [5] S. Giordano, Multipole analysis of a generic system of dielectric cylinders and application to fibrous materials, *J. Electrostatics* 63 (2005) 1–9.
- [6] M. Washizu, T.B. Jones, Dielectrophoretic interaction of two spherical particles calculated by equivalent multipole-moment method, *IEEE Trans. Industry Appl.* 32 (2) (1996) 233–242.
- [7] Y. Nakajima, T. Matsuyama, Electrostatic field and force calculation for a chain of identical dielectric spheres aligned parallel to uniformly applied electric field, *J. Electrostatics* 55 (2002) 203–221.
- [8] B. Techaumnat, T. Takuma, Calculation of the electric field for lined-up spherical dielectric particles, *IEEE Trans. Dielectrics Electrical Insulation* 10 (2003) 623–633.
- [9] B. Techaumnat, B. Eua-arporn, T. Takuma, Calculation of electric field and dielectrophoretic force on spherical particles in chain, *J. Appl. Phys.* 95 (2004) 1586–1593.
- [10] For example, E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, eighth ed., Wiley, Singapore, 2001, p. 669, or C.R. Wylie, L.C. Barrett, *Advanced Engineering Mathematics*, fifth ed., McGraw-Hill, Singapore, 1985.

- [11] V. Rokhlin, Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Phys.* 60 (1983) 187–207.
- [12] L. Greengard, V. Rokhlin, A fast algorithm for particle simulations, *J. Comput. Phys.* 73 (1987) 325–348.
- [13] N. Yamada, *Denkijikigaku*, second ed., Denkigakkai, Tokyo, Japan, 1999.
- [14] B. Tchaumnat, B. Eua-arporn, T. Takuma, Electric field and dielectrophoretic force on a dielectric particle chain in a parallel-plate electrode system, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 37 (2004) 3337–3346.
- [15] S. Hamada, O. Yamamoto, T. Kobayashi, Analysis of electric field induced by ELF magnetic field utilizing generalized equivalent multipole-moment method, *IEEJ Trans. FM* 125 (6) (2005) 533–543 (in Japanese).
- [16] P. Moon, D.E. Spencer, *Field Theory for Engineers*, D. Van Nostrand Company Inc., New York, 1961.
- [17] T. Takuma, T. Kawamoto, Electric field at various points of contact between rounded dielectric and electrode, in: *Proceedings of the Fifth International Symposium on High Voltage Engineering*, Braunschweig, Germany, 1987.

Calculation of the electric field in arrangements of intersecting spheres

B. Techaumnat^{a)}

Department of Electrical Engineering, Chulalongkorn University, Phayathai, Pathumwan, Bangkok 10330, Thailand

T. Takuma

Central Research Institute of Electric Power Industry, 2-11-1 Iwado kita, Komae-shi, Tokyo 201-8511, Japan and Tokyo Denki University, 2-2 Kanda-Nishiki-cho, Chiyoda-ku, Tokyo 201-8457, Japan

(Received 17 May 2005; accepted 22 August 2006; published online 6 December 2006)

The application of the method of images to the calculation of electric field in arrangements of intersecting conducting spheres is presented. The multipole re-expansions are utilized to determine the multipole images and the potential coefficients. The method is applicable for cases of electrically floating, grounded, or energized conducting spheres that intersect each other. Examples are given for two grounded intersecting spheres of equal radii and those of different radii, respectively, under an external uniform field. The results for the spheres of equal radii agree well with the analytical solutions for the case of completely overlapped spheres and touching spheres, respectively. For the spheres of different radii, the numerical results show that the method may also be used when the degree of intersection is not too high. © 2006 American Institute of Physics.

[DOI: 10.1063/1.2369631]

I. INTRODUCTION

The electrostatics of two intersecting spheres have been studied in many works related to applications in fusing and merging particles. The existing analytical solutions based on the method of images utilize the geometrical inversion^{1,2} or the Kelvin transformation.³ However, these solutions were restricted to cases in which the spheres must intersect each other at an angle π/n (n is an integer) or must have equal radii. The solutions have also been proposed for an arbitrary angle of intersection,^{4–8} but the calculation, involving integrals of infinite series, is complicated even where the spheres are under a uniform field. Felderhof *et al.*⁹ also derived the solutions based on integrals for any arbitrary angle of intersection.

This paper describes the application of the method of multipole images using re-expansion techniques to the general case of intersecting conducting spheres under an external potential. The method is extended from the one proposed for configurations of separated spheres.^{10,11} It is more general than that using the inversion or transformation,^{1–3} as it can treat spheres of unequal radii that intersect each other at an arbitrary angle. Compared with the analysis by Radchik *et al.*,^{4–8} the method presented in this paper is simpler in that integrals are not involved directly in the main calculation.

II. PHYSICAL CONFIGURATION

Figure 1 shows a schematic of two intersecting conducting spheres lying along the z axis. The lower and the upper spheres are centered at $\mathbf{p}(0,0,z_p)$ and $\mathbf{q}(0,0,z_q)$, and have radii of a and b , respectively. The separation between the sphere centers is denoted by $D=z_q-z_p$. We consider a case in which the spheres are grounded at zero potential in this pa-

per. The case of electrically floating spheres can be treated in a similar manner with an additional condition of zero net charge of both spheres.

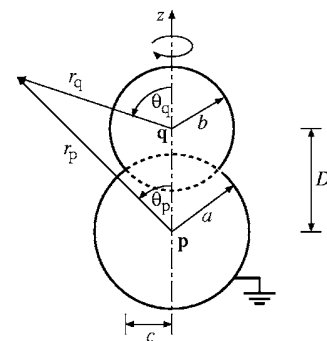
Let the upper sphere be smaller than or equal to the lower one. It can be shown that, the coordinate z_i on the line (circle) of intersection between the sphere surfaces is given by

$$z_i - z_p = \frac{D^2 + (a^2 - b^2)}{2D}, \quad (1)$$

and the radius c of the circle of intersection is determined by

$$c = \sqrt{a^2 - (z_i - z_p)^2}. \quad (2)$$

Note that, in the following sections, symbols (r_x, θ_x) are used to denote the first two spherical coordinates when a point \mathbf{x} is treated as the origin. See (r_p, θ_p) and (r_q, θ_q) in Fig. 1, for example. If the potential is axisymmetrical in the arrangement, the third coordinate (azimuthal angle) shall not be involved in calculation.

FIG. 1. Intersecting spheres of radii a and b .^{a)}Electronic mail: boonchai.t@chula.ac.th

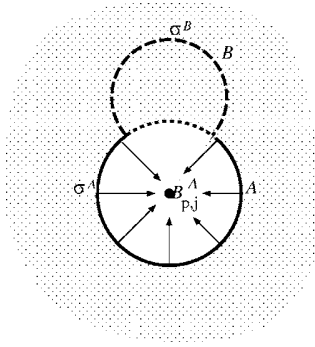


FIG. 2. Potential due to surface charge σ^A on the surface A is represented by multipoles $B_{p,j}^A$ at \mathbf{p} .

III. CALCULATION METHOD

When the spheres in the arrangement of Fig. 1 are subject to an external potential ϕ^E , surface charges are induced on them. The external potential is assumed to be axisymmetrical. These induced charges deviate the resultant potential from ϕ^E . This section describes various mathematical operations on the potential due to these surface charges that are necessary for determining the resultant potential.

A. Expression of potentials for the method of multipole images

For simplicity, let first consider only the surface charge σ^A on the contour A of the lower sphere, indicated by the solid line in Fig. 2. (The charge σ^B on the upper sphere, denoted by contour B, can also be treated in a similar way.) The potential due to σ^A may be written as the multipole potential ψ_p^A expanded about the sphere center \mathbf{p} as

$$\psi_p^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_{p,j}^A}{r_p^{j+1}} P_j(\cos \theta_p), \quad (3)$$

where P_j is the j th-order Legendre polynomial. Note that, in expressions of a potential, we shall consistently use the subscript and superscript to indicate the center of expansion and the source of potential, respectively. In Eq. (3), $B_{p,j}^A$ is considered to be the j th-order multipole moment at \mathbf{p} . The definition of multipole moment here is slightly different from the conventional definition to simplify the potential expression. The multipole potential given by Eq. (3) converges in the shaded open region shown in Fig. 2, i.e., outside the sphere of center \mathbf{p} and radius a .

On the other hand, the potential due to σ^A can also be expanded about the center \mathbf{q} of the upper sphere (see Fig. 3).

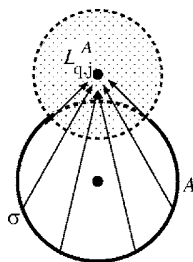


FIG. 3. Potential due to surface charge σ^A on A is locally expanded about \mathbf{q} .

The potential is in the form of local or Taylor expansion as

$$\varphi_q^A = \sum_{j=0}^{\infty} L_{q,j}^A r_q^j P_j(\cos \theta_q), \quad (4)$$

where φ_q^A is the potential locally expanded about \mathbf{q} , and $L_{p,j}^A$ is the j th-order potential coefficient. The potential φ_q^A converges in the shaded, closed region shown in Fig. 3, i.e., the sphere of center \mathbf{q} and radius b . The symbol φ is used for the potential locally expanded in order to mark the difference from the multipole potential ψ in Eq. (3).

B. Reexpansion of potential

Potential in the form of multipole [Eq. (3)] or local expression [Eq. (4)] can be further reexpanded about other points. Here we restrict the re-expansions only to points on the z axis, as they are sufficient for the solutions in the axisymmetrical case. Two kinds of re-expansions involved in the calculation are described as follows.

1. Multipole-to-local re-expansion

By this kind of re-expansion, the multipole potential in Eq. (3) is expanded locally about a different point in the form similar to Eq. (4). Let $\mathbf{u}(0,0,z_u)$ be the new center of expansion. An n th-order multipole potential of Eq. (3) can be re-written as

$$\psi_{p,n}^A = \frac{B_{p,n}^A}{r_p^{n+1}} P_n(\cos \theta_p) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{u,j}^A = \sum_{j=0}^{\infty} L_{u,j}^A r_u^j P_j(\cos \theta_u). \quad (5)$$

$L_{u,j}^A$ is related to $B_{p,n}^A$ by the following equations^{10,12}:

$$L_{u,j}^A = (-1)^j \frac{(n+j)!}{n!j!} \frac{B_{p,n}^A}{d^{n+j+1}} \quad \text{for } z_u > z_p \quad (6)$$

$$= (-1)^n \frac{(n+j)!}{n!j!} \frac{B_{p,n}^A}{d^{n+j+1}} \quad \text{for } z_u < z_p, \quad (7)$$

where $d = |z_u - z_p|$. After re-expansion, the radius of convergence is equal to the smallest distance between \mathbf{u} and the boundary of the shaded region in Fig. 2. It is obvious that the re-expansion shall be invalid if \mathbf{u} is located in the unshaded region.

2. Local-to-local re-expansion

Consider an n th-order potential in Eq. (4) and the new center of expansion at \mathbf{u} . This kind of re-expansion expresses the potential as¹³

$$\varphi_{q,n}^A = L_{q,n}^A r_q^n P_n(\cos \theta_q) = \sum_{j=0}^n \varphi_{u,j}^A = \sum_{j=0}^n L_{u,j}^A r_u^j P_j(\cos \theta_u), \quad (8)$$

where

$$L_{u,j}^A = \frac{n!}{(n-j)!j!} d^{n-j} L_{q,n}^A \quad \text{for } z_u > z_p, \quad (9)$$

and

$$L_{u,j}^A = (-1)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)! j!} d^{n-j} L_{q,n}^A \quad \text{for } z_u < z_p. \quad (10)$$

After re-expansion, the radius of convergence is equal to the smallest distance between **u** and the boundary of the shaded region in Fig. 3.

C. Solutions of the intersecting spheres

We are now in a position to obtain the solutions for the arrangement of Fig. 1. Considering the surface charges σ^A and σ^B on both spheres induced by an external potential φ^E , the potential φ at any point outside the spheres is the result of superposition as

$$\phi = \varphi^E + \psi_p^A + \psi_q^B, \quad (11)$$

where ψ_p^A and ψ_q^B are the multipole potentials due to σ^A and σ^B expanded about **p** and **q**, respectively. To satisfy the zero-potential condition on both spheres, we express the potential separately for each sphere as functions expanded about its center:

$$\phi = \varphi_p^E + \psi_p^A + \varphi_p^B \quad \text{for the lower sphere} \quad (12)$$

and

$$\phi = \varphi_q^E + \varphi_q^A + \psi_q^B \quad \text{for the upper sphere}, \quad (13)$$

where φ_p^B and φ_q^A are the potentials due to σ^B and σ^A locally expanded about **p** and **q**, respectively. Note that the external potential is also written in the form of local expansion in Eqs. (12) and (13). If the external potential is due to a uniform field E_0 in the z direction and the potential is referenced to be zero at $z=0$, for example, then we have

$$\varphi_p^E = -z_p E_0 - E_0 r_p P_1(\cos \theta_p) \quad (14)$$

and

$$\varphi_q^E = -z_q E_0 - E_0 r_q P_1(\cos \theta_q), \quad (15)$$

which are expanded locally about **p** and **q**, respectively.

Suppose we want to obtain the solution of potentials for the order j from 0 up to N . Then, the total number of potential coefficients ($B_{p,j}^A$, $B_{q,j}^B$, $L_{q,j}^A$, and $L_{p,j}^B$) to be determined is $4(N+1)$. The coefficients can be solved from a linear equation system, which is constructed by the following two procedures:

1. Satisfy the potential condition on the spheres. That is, for each order j , we have relations

$$\varphi_{p,j}^E + \psi_{p,j}^A + \varphi_{p,j}^B = 0 \quad (16)$$
 on the surface of the lower sphere ($r_p = a$), and

$$\varphi_{q,j}^E + \varphi_{q,j}^A + \psi_{q,j}^B = 0 \quad (17)$$
 on the surface of the upper sphere ($r_q = b$). Therefore, $2(N+1)$ equations are obtained by using Eqs. (16) and (17).
2. Equate the pairs of potentials that arise from the same charges, i.e., $\psi_p^A = \varphi_q^A$ and $\psi_q^B = \varphi_p^B$. In order to do so, each potential pair must be expanded about the same point. Then we can match the potentials for each order j . A natural choice seems to be multipole-to-local reexpanding ψ_p^A to **q** and ψ_q^B to **p** because the potentials can be

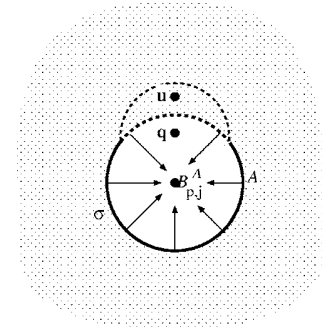


FIG. 4. Reexpanding the multipole potential ψ_p^A to **q** does not converge because **q** is not in the shaded region.

related directly to φ_q^A and φ_p^B , respectively. However, we notice that the potentials may not converge if $D < a$. Figure 4 presents a situation where the re-expansion of ψ_p^A to **q** fails to converge because **q** is located outside the shaded region. Hence, a better alternative is to reexpand both ψ_p^A and φ_q^A to a point in the shaded region of the upper sphere (e.g., **u** in Fig. 4). The same is also applied to the pair of ψ_q^B and φ_p^B . After re-expansion, we can match the potential coefficients for each j , and obtain other $2(N+1)$ equations.

After the linear equations are formed, they can be solved for the unknown coefficients $B_{p,j}^A$, $B_{q,j}^B$, $L_{q,j}^A$, and $L_{p,j}^B$. From our calculation experience, iterative methods are not recommended for solving the linear equations as they may not yield sufficiently accurate solutions in some cases.

IV. EXAMPLES

A. Spheres of equal radii

The case of two spheres of unit radii ($a=b=1$) under a uniform field E_0 in the z direction is taken as the first calculation example. The calculation has been performed for $D = 0.001a$ to $1.99a$. It is obvious that, for the spheres of equal radii, the calculation may be simplified by considering the vertical symmetry. However, we use this case to investigate the validity of the method as the spheres become nearly completely overlapped with D close to zero. Figure 5 shows the residual potential evaluated on the surface of the upper sphere

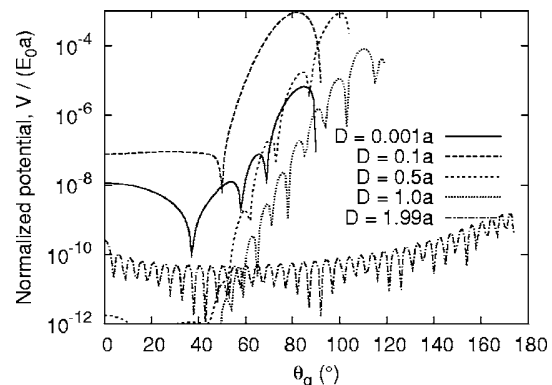
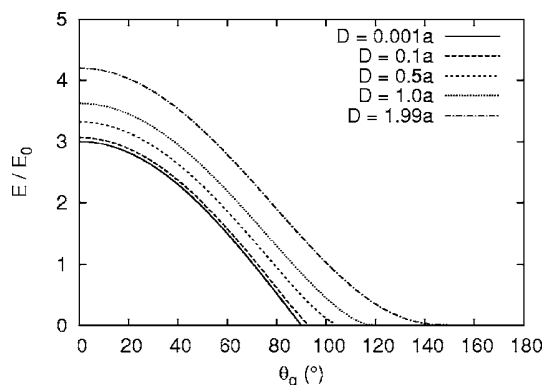


FIG. 5. Residual potential on the sphere surface for different values of D where $a=b$.

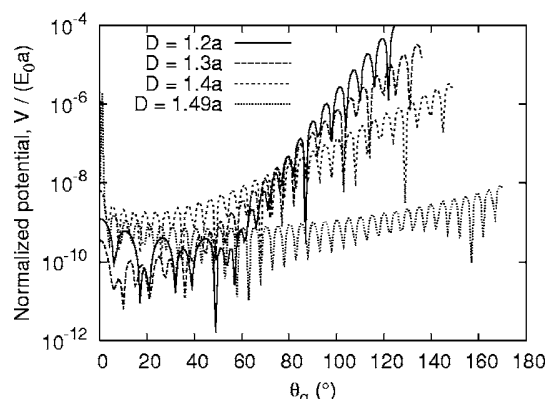
FIG. 6. Electric field on the sphere surface for different values of D .

sphere by Eq. (11). The figure confirms the validity of the proposed method for these values of D . The maximum orders N of the potential expansions used to obtain all the results in Fig. 5 are equal to 35. Although higher N should give better accuracy in the potential expansions, we have found that the linear equation systems are more difficult to be accurately solved. Note that for a special case in which equal-sized spheres are almost completely overlapped each other, i.e., very small D/a , a small N may be used in the calculation. We have found from the numerical results that $B_{p,j}^A = (-1)^{j+1} B_{q,j}^B$ and $B_{p,j}^A = B_{q,j}^B \approx 0$ for odd $j \neq 1$ when $D/a \rightarrow 0$, while the geometrical symmetry due to $a=b$ guarantees that the calculation always gives $B_{p,j}^A = (-1)^{j+1} B_{q,j}^B$. On the other hand, difficulty in numerical computation arises when D is smaller than a but not close to zero. This can be seen from the higher residual potentials in Fig. 5 for $D=0.1a$ and $D=0.5a$. The numerical errors may be caused by the use of finite N in the numerical calculation and also by the small region of convergence of the potentials after re-expansion, making the accurate solution of the linear equation system difficult. In addition, every value of D in Fig. 5 exhibits relatively high residual potential near the position of intersection (at the right end of each line).

Figure 6 shows the electric field on the surface of the upper sphere. As can be seen from the figure, the electric field is maximal at $\theta_q=0$, and decreases to zero at the line of intersection for all D . The maximum electric field decreases with decreasing D (increasing the overlapped portion). It should also be noted that, for D close to zero, the electric field at $\theta_q=0$ approaches $3E_0$, which is the solution for the case of a single conducting sphere. For $D=2a$, the arrangement is identical in electric field to that of a conducting sphere in contact with a grounded plane under a uniform field, and the analytical value of the maximum electric field is $4.207E_0$.¹⁴ The maximum field obtained from the numerical calculation is $4.202E_0$ for $D=1.99a$. It is also known that the charge acquired by the conducting sphere in this condition is equal to $\frac{2}{3}\pi^3\epsilon a^2 E_0^2$.¹⁵ With $D \rightarrow 2a$, we obtain the amount of charges that agrees well with the analytical solution. (The difference of the charges is 0.03% when $D=1.99a$ by $N=35$.)

B. Spheres of different radii

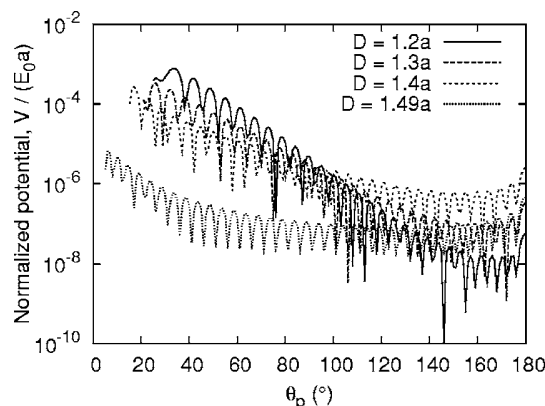
The arrangement of intersecting spheres of different radii has been calculated for $a=2b$ by using $N=35$. The residual

FIG. 7. Residual potential on the upper sphere for different values of D , where $a=2b$.

potential calculated from Eq. (11) on the upper and the lower spheres is shown, respectively, in Figs. 7 and 8 for $D/a=1.2-1.49$. From the figures we can see the same tendency as Fig. 5 that the errors are high near the position of intersection. For this case, the residual potential consistently becomes higher with decreasing D/a , i.e., increasing the degree of intersection. The normalized residual potential smaller than 10^{-3} can be attained by the method for $D/a \geq 1.2$. Note that we cannot obtain results of acceptable accuracy for smaller D/a by decreasing N as in the first calculation example. In the absence of the vertical symmetry $a=b$, a large N must be used for the potential expansion in Eq. (5) when D/a is small. Figures 7 and 8 also show that the error is greater on the larger (lower) sphere. We have also confirmed that the electric field from the calculation decreases properly to zero at the line of intersection for $D/a \geq 1.2$, although the field plot is not shown here.

V. CONCLUSIONS

We have explained the application of the method of multipole images to the potential problems of intersecting spheres. The solution is made possible by considering the convergence of the expressions of potential and by utilizing appropriate kinds of multipole re-expansion. The multipole images and potential coefficients are then determined as the solution of a linear equation system to satisfy the potential

FIG. 8. Residual potential on the lower sphere for different values of D , where $a=2b$.

condition of the spheres. Numerical results are given for the spheres of equal radii and those of different radii. Theoretically, the method can be used for cases of unequal-sized spheres. The external potential is also arbitrary, although it is axisymmetrical here. The numerical results in the case of equal radii have been confirmed that they agree with the case of completely-overlapped spheres and that of touching spheres. In the case of unequal radii, the method works well for slightly-overlapped spheres. For general three-dimensional cases, the approach described in this paper is still applicable. However, the expressions of potential and the re-expansions become more complicated in three dimensions.

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge support from the Thailand Research Fund and the Commission on Higher Education, Thailand.

- ¹T. B. Jones, J. Appl. Phys. **62**, 362 (1987).
- ²I. W. McAllister, J. Appl. Phys. **63**, 2158 (1988).
- ³D. Palaniappan and B. U. Felderhof, J. Appl. Phys. **86**, 3418 (1999).
- ⁴A. V. Radchik, G. B. Smith, and A. J. Reuben, Phys. Rev. B **46**, 6115 (1992).
- ⁵A. V. Paley, A. V. Radchik, and G. B. Smith, J. Appl. Phys. **73**, 3446 (1993).
- ⁶A. V. Paley, A. V. Radchik, G. B. Smith, and A. V. Vagov, Appl. Phys. Lett. **64**, 3187 (1994).
- ⁷A. V. Radchik, A. V. Paley, G. B. Smith, and A. V. Vagov, J. Appl. Phys. **76**, 4827 (1994).
- ⁸A. V. Radchik, A. V. Paley, and G. B. Smith, J. Appl. Phys. **79**, 2613 (1996).
- ⁹B. U. Felderhof and D. Palaniappan, J. Appl. Phys. **88**, 4947 (2000).
- ¹⁰B. Techaumnat and T. Takuma, IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul. **10**, 623 (2003).
- ¹¹B. Techaumnat, B. Eua-arporn, and T. Takuma, J. Appl. Phys. **95**, 1586 (2004).
- ¹²M. Washizu and T. B. Jones, IEEE Trans. Ind. Appl. **32**, 233 (1996).
- ¹³L. Greengard and V. Rokhlin, Acta Numerica **6**, 229 (1997).
- ¹⁴M. Hara and M. Akazaki, J. Electrostat. **2**, 223 (1976/1977).
- ¹⁵N.-J. Felici, Rev. Gen. Electr. **75**, 1145 (1966).

Polarization and Membrane Voltage of Ellipsoidal Particle with a Constant Membrane Thickness – a Series Expansion Approach

Journal:	<i>IET Nanobiotechnology</i>
Manuscript ID:	NBT-2008-0003.R1
Manuscript Type:	Research Paper
Date Submitted by the Author:	22-May-2008
Complete List of Authors:	Washizu, Masao; The University of Tokyo, Department of Mechanical Engineering Techaumnat, Boonchai; Chulalongkorn Univesity, Electrical Engineering
Keyword:	AC ELECTROKINETICS, BIOLOGICAL TECHNIQUES, DIELECTROPHORESIS, ELECTRIC FIELDS, NANOBIO TECHNOLOGY, POLARISATION



Polarization and Membrane Voltage of Ellipsoidal Particle with a Constant Membrane Thickness
– a Series Expansion Approach

Masao Washizu^{1,2} and Boonchai Techaumnat^{1,3}

¹Dept. Bioengineering, The University of Tokyo, Hongo 7-3-1, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan
Phone: +81-3-5841-6344, Fax: +81-3-5841-6344, washizu@washizu.t.u-tokyo.ac.jp

²JST, CREST,

³Dept. Electrical Engineering, Chulalongkorn University, Thailand

Abstract

The estimation of the membrane voltage and the polarization factor of biological cell provide a base for the study of bio-manipulation techniques, such as dielectrophoresis, electroporation or electrofusion. To model a biological cell, an ellipsoidal particle with an insulating membrane is sometimes employed, but due to the limitation of the confocal nature of the coordinate system, the membrane thickness is assumed to vary with the position, despite the fact that the lipid bilayer membrane has a uniform thickness. We in this paper present a method to rigorously treat the uniform-thickness condition in a system having an axial symmetry. The method is based on the harmonic expansion of the field, to include the condition of the uniform membrane thickness as a series expansion of the geometrical factor, and to solve the field problem as an interaction of the harmonic components. It is identified that the conventional variable thickness model is equivalent to neglecting the harmonic interactions in the uniform thickness model. Numerical calculations of the membrane voltage and the polarization factor are made, and it is found that the discrepancy between our rigorous model and the conventional variable thickness model becomes significant where the field deformation is large due to the high axial ratio of the ellipsoid.

Key words:

biological cell, ellipsoid, membrane voltage, polarization, harmonic expansion

1. Introduction

The electrostatic polarization of a particle having an insulating membrane, as well as the voltage induced on the membrane, has been studied as a model of biological cells in relation to such applications for the characterization of cells through impedance analysis, dielectrophoresis, electrorotation, electroporation or electrofusion [1-5]. In particular, on-chip applications of these electrokinetic phenomena often require the design of the device and the interpretation of the result based on a precise estimation of the polarization.

An exact solution for the field problem is known for a spherical particle, however not for an ellipsoidal particle with a uniform membrane thickness. This is due to the confocal nature of the coordinate system employed in the analysis. In spheroidal or ellipsoidal coordinate system, the surface of constant radial parameter, (hereafter denoted as η) becomes a spheroid or an ellipsoid, so that the membrane thickness, i.e. the distance between the inner surface $\eta = \eta_0$ and outer surface $\eta = \eta_0 + d\eta$ of the membrane varies as depicted in Fig.1 b) for a spheroid having axis lengths b and c . The ratio of the thinnest to the thickest part is equal to the aspect ratio of the particle b/c , not precisely representing the biological membrane consisting of a uniform lipid bilayer. Gimsa and Wachner employed an equivalent circuit approach to tackle this problem [6-7]; however, it was based on a simplification in exchange for mathematical exactness. There are also numerical approaches based on integral equations [8-10], but they still have problems in calculation time and accuracy assessments.

In this paper, we confine our interest to the particles having rotational symmetry, i.e. prolate and oblate spheroid, and present a new method for a rigorous analysis of the field problem based on the harmonic expansion, which can provide an exact solution for general 3D external field distributions.

2. Principle

2.1 Harmonic expansion of the field

We shall first consider the case of a prolate spheroid. The prolate spheroidal coordinate system (η, θ, φ) is related to the Cartesian coordinate system by

$$\begin{aligned} x &= a \sinh \eta \sin \theta \cos \varphi \\ y &= a \sinh \eta \sin \theta \sin \varphi \\ z &= a \cosh \eta \cos \theta \end{aligned} \quad (1)$$

The surface $\eta = \eta_0$ is a prolate spheroid having a rotational symmetry on the z -axis and focal points at $z = \pm a$:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

where

$$b = a \sinh \eta_0 \quad \text{and} \quad c = a \cosh \eta_0 \quad (3)$$

and

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (4)$$

With the use of the eccentricity of the ellipsoid e

$$e = \sqrt{1 - (b/c)^2} = a/c \quad (5)$$

where $0 \leq e \leq 1$, eq.(3) can be rewritten as

$$\cosh \eta_0 = 1/e \quad \text{and} \quad \sinh \eta_0 = \sqrt{(1/e)^2 - 1} \quad (6)$$

The solution of Laplace equation in the prolate spheroidal coordinate system is [11]

$$\phi = \left\{ \begin{matrix} P_n^m(\cosh \eta) \\ Q_n^m(\cosh \eta) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} P_n^m(\cos \theta) \\ Q_n^m(\cos \theta) \end{matrix} \right\} \text{cs } m\varphi \quad (7)$$

where cs is either of cos or sin, italicized functions $P_n^m(u)$ and $Q_n^m(u)$ are the Legendre functions of the first and the second kind for the argument $u \geq 1$. The former has the singularity at $u = \infty$,

while the latter at $u = \pm 1$, same as in the case the Legendre functions $P_n^m(u)$ and $Q_n^m(u)$ for the argument $-1 \leq u \leq 1$.

Under the influence of the externally applied potential

$$\phi_{app} = - \sum_{n,m} E_{n,m} a^n P_n^m(\cosh \eta) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \quad (8)$$

the potential outside and inside of the spheroid can be written as

$$\begin{aligned} \phi_{out} &= \phi_{app} + \phi_{ind} \\ &= - \sum_{n,m} E_{n,m} a^n P_n^m(\cosh \eta) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi + \sum_{n,m} C_{n,m} Q_n^m(\cosh \eta) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \end{aligned} \quad (9)$$

$$\phi_{in} = \sum_{n,m} A_{n,m} P_n^m(\cosh \eta) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \quad (10)$$

2.2 Boundary conditions

The complex permittivity ε^* of a medium is defined by

$$\varepsilon^* = \varepsilon + \frac{\mu}{j\omega} = \frac{\mu}{j\omega} (1 + j\omega\tau_s) \quad (11)$$

where ε and μ are the permittivity and conductivity, ω the angular frequency, j the imaginary unit, and τ_s is the time constant of the medium

$$\tau_s = \varepsilon / \mu \quad (12)$$

τ_s is often very short for the medium of biological interest, as short as 50 ns even for 1mM KCl solution ($\mu = 13$ mS/m, 1/150 of physiological condition). The pulse duration used for electroporation or electrofusion is far longer than this value, so $\omega\tau_s \ll 1$ holds for the media inside and outside of cells and the contribution of ε in ε^* can be neglected. On the other hand, the biological membrane is a good insulator, and μ makes little contribution to ε^* . For simplicity, we shall use these approximations throughout the paper, as we did in [12-13].

We further assume that the membrane located at $\eta = \eta_0$ is infinitesimally thin, and the membrane charging is modeled by a dipole sheet. Under these assumptions, the boundary conditions to be met at $\eta = \eta_0$ become [12-13]

$$\begin{aligned}\phi_{out} - \phi_{in} &= \sigma / C_m \\ \mu_{out} E_{out} &= \mu_{in} E_{in}\end{aligned}\quad (13)$$

and the charging of the membrane is governed by

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\mu_{out} E_{out} = -\mu_{in} E_{in} \quad (14)$$

where C_m is the membrane capacitance per unit area, σ is the dipolar charge density on the membrane ($+\sigma$ on the outer and $-\sigma$ on the inner surface respectively),

$$E_{out} = -\frac{1}{g_\eta} \frac{\partial \phi_{out}}{\partial \eta} \bigg|_{\eta=\eta_0}, \quad E_{in} = -\frac{1}{g_\eta} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \eta} \bigg|_{\eta=\eta_0} \quad (15)$$

g_η is the geometric coefficient

$$g_\eta = a\sqrt{\sinh^2 \eta_0 + \sin^2 \theta} = a\sqrt{\cosh^2 \eta_0 - \cos^2 \theta} = c\sqrt{1 - (\cos \theta / \cosh \eta_0)^2} \quad (16)$$

It should be noted that, from these equations,

$$\phi_{out} - \phi_{in} = -\frac{1}{C_m} \int \frac{1}{g_\eta} \frac{\partial \phi_{out}}{\partial \eta} \bigg|_{\eta=\eta_0} dt \quad (17)$$

so, for constant C_m , θ dependence of g_η in this equation yields the interaction of the harmonic components between different degree n in eqs.(9) and (10), but not that between different order m as to be explained in the following sections. Even under a uniform external field ($n = 1$), harmonics with higher degree are evoked.

For the model where the capacitance varies with θ in such a way that

$$C_m = \varepsilon_m / (g_\eta d\eta) \quad (18)$$

where ε_m is the permittivity of the membrane and $g_\eta d\eta$ is the thickness of the membrane (refer to fig.1 b), the θ -dependent factor g_η cancels out in eq.(17), and there will be no interaction between

different n . In this case, the surface defined by $\eta = \eta_0 + d\eta$ satisfies

$$\frac{x^2}{b^2 + \xi} + \frac{y^2}{b^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} = 1 \quad (19)$$

with

$$\xi = 2bc d\eta \quad (20)$$

and the thickness on x and z axes respectively becomes

$$\delta_x = c d\eta \quad \text{and} \quad \delta_z = b d\eta \quad (21)$$

Hence, the conventional variable thickness model is equivalent to neglecting g_η in eq.(15), and the solution for a uniform external field is obtained just by considering $n = 1$ only.

2.3 The solution of the boundary value problem

The solution can be obtained by expanding σ in Legendre harmonics as

$$\sigma = \sum_{n,m} S_{n,m} P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \quad (22)$$

and we have the potential coefficients in eqs.(9) and (10) in terms of the surface charge $S_{n,m}$ and the external potential $E_{n,m}$ as

$$A_{n,m} = \frac{d_\eta Q_n^m(\cosh \eta_0)}{G_n^m(\kappa_\mu, \cosh \eta_0)} \frac{S_{n,m}}{C_m} - \frac{H_n^m(\cosh \eta_0)}{G_n^m(\kappa_\mu, \cosh \eta_0)} a^n E_{n,m} \quad (23)$$

$$C_{n,m} = \frac{\kappa_\mu d_\eta P_n^m(\cosh \eta_0)}{G_n^m(\kappa_\mu, \cosh \eta_0)} \frac{S_{n,m}}{C_m} + \frac{(\kappa_\mu - 1) P_n^m(\cosh \eta_0) d_\eta P_n^m(\cosh \eta_0)}{G_n^m(\kappa_\mu, \cosh \eta_0)} a^n E_{n,m} \quad (24)$$

where we wrote

$$\kappa_\mu = \mu_{in} / \mu_{out} \quad (25)$$

$$d_\eta P_n^m(\cosh \eta_0) = \left. \frac{d}{d\eta} P_n^m(\cosh \eta) \right|_{\eta=\eta_0}, \quad d_\eta Q_n^m(\cosh \eta_0) = \left. \frac{d}{d\eta} Q_n^m(\cosh \eta) \right|_{\eta=\eta_0} \quad (26)$$

$$G_n^m(\kappa_\mu, \cosh \eta_0) = \kappa_\mu Q_n^m(\cosh \eta_0) d_\eta P_n^m(\cosh \eta_0) - P_n^m(\cosh \eta_0) d_\eta Q_n^m(\cosh \eta_0) \quad (27)$$

$$H_n^m(\cosh \eta_0) = Q_n^m(\cosh \eta_0) d_\eta P_n^m(\cosh \eta_0) - P_n^m(\cosh \eta_0) d_\eta Q_n^m(\cosh \eta_0) \quad (28)$$

The time evolution of the membrane charge is governed by

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mu_{in} \frac{1}{g_\eta} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \eta} \bigg|_{\eta=\eta_0} = \frac{\mu_{in}}{c \sqrt{1 - (\cos \theta / \cosh \eta_0)^2}} \sum_{n,m} A_{n,m} d_\eta P_n^m(\cosh \eta_0) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \quad (29)$$

2.4 The treatment of g_η in series expansion

To solve the interaction between different harmonic degree n , we first expand c/g_η in power series of $\cos \theta$ in such a way that

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (\cos \theta / \cosh \eta_0)^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{\cos \theta}{\cosh \eta_0} \right)^{2k} \quad (30)$$

The series converges because

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad \text{and} \quad \cosh \eta_0 \geq 1 \quad (31)$$

Eq.(29) then becomes

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\mu_{in}}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{\cos \theta}{\cosh \eta_0} \right)^{2k} \sum_{n,m} A_{n,m} d_\eta P_n^m(\cosh \eta_0) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \quad (32)$$

This equation contains the components of $(\cos \theta)^{2k} P_n^m(\cos \theta)$, which can be re-expanded in harmonic series using an identity of Legendre function

$$x P_n^m(u) = \frac{n+m}{2n+1} P_{n-1}^m(u) + \frac{n-m+1}{2n+1} P_{n+1}^m(u) \quad (33)$$

Note that this re-expansion yields $P_n^m(u)$ of different degree n but same order m . Hence, we can confine the following arguments for a fixed m .

In matrix form, eq.(33) is written as

$$x \begin{bmatrix} P_0^m(x) \\ P_1^m(x) \\ \cdot \\ P_{n-1}^m(x) \\ P_n^m(x) \\ P_{n+1}^m(x) \\ \cdot \end{bmatrix} = [\mathbf{D}_1] \begin{bmatrix} P_0^m(x) \\ P_1^m(x) \\ \cdot \\ P_{n-1}^m(x) \\ P_n^m(x) \\ P_{n+1}^m(x) \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad x^k \begin{bmatrix} P_0^m(x) \\ P_1^m(x) \\ \cdot \\ P_{n-1}^m(x) \\ P_n^m(x) \\ P_{n+1}^m(x) \\ \cdot \end{bmatrix} = [\mathbf{D}_1]^k \begin{bmatrix} P_0^m(x) \\ P_1^m(x) \\ \cdot \\ P_{n-1}^m(x) \\ P_n^m(x) \\ P_{n+1}^m(x) \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (34)$$

where

$$[\mathbf{D}_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1-m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m+1}{3} & 0 & \frac{(2-m)}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n+m}{2n+1} & 0 & \frac{n-m+1}{2n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Writing

$$[\mathbf{s}] = \begin{bmatrix} S_{0,m} \\ S_{1,m} \\ \cdot \\ S_{n,m} \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{P}_{nm}] = \begin{bmatrix} P_0^m(\cos \theta) \cos m\varphi \\ P_1^m(\cos \theta) \cos m\varphi \\ \cdot \\ P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \\ \cdot \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} A_{0,m} \\ A_{1,m} \\ \cdot \\ A_{n,n} \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (36)$$

we have from eq.(32) that

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{s}] = \frac{\mu_{in}}{c} [\mathbf{D}^p] [\mathbf{a}] \quad (37)$$

where

$$[\mathbf{D}^p] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{d_n P_n^m(\cosh \eta_0)}{\cosh \eta_0^{2k}} [\mathbf{D}_1^T]^{2k} \quad (38)$$

and the superscript P denotes that the quantity is for a prolate spheroid, and T denotes the transpose of the matrix.

On the other hand, from eq.(23),

$$[\mathbf{a}] = \frac{1}{C_m} [\mathbf{M}^P][\mathbf{s}] - [\mathbf{N}^P][\mathbf{e}] \quad (39)$$

where $[\mathbf{e}]$ is an array of the external-field coefficient $E_{n,m}$, \mathbf{M}^P and \mathbf{N}^P are diagonal matrices whose components respectively are

$$M_n^P = \frac{d_\eta Q_n^m(\cosh \eta_0)}{G_n^m(\kappa_\mu, \cosh \eta_0)}, \quad N_n^P = a^n \frac{H_n^m(\cosh \eta_0)}{G_n^m(\kappa_\mu, \cosh \eta_0)} \quad (40)$$

Substitution of eq.(39) into eq.(37) yields

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{s}] = \frac{\mu_{in}}{c C_m} [\mathbf{D}^P][\mathbf{M}^P][\mathbf{s}] - \frac{\mu_{in}}{c} [\mathbf{D}^P][\mathbf{N}^P][\mathbf{e}] \quad (41)$$

This equation governs the temporal evolution of each harmonic component of the membrane charge.

For $n=1$ and $m=0$ or 1 , and first order external field, i.e.

$$E_{n,m} = E_1 \text{ for } n=1, \quad E_{n,m} = 0 \text{ for } n>1 \quad (42)$$

eq.(41) at the limit of $e \rightarrow 0$ becomes

$$\frac{d}{dt}s_1 = \frac{2}{c C_m} \frac{\mu_{in} \mu_{out}}{\mu_{in} + 2\mu_{out}} s_1 - \frac{3\mu_{in} \mu_{out}}{\mu_{in} + 2\mu_{out}} E_1 \quad (43)$$

which reduces to the well-known membrane voltage, V_m , for a spherical cell with the radius c

$$V_m = \frac{s_1}{C_m} = \frac{3}{2} c E_1 (1 - \exp[-t/\tau_1]) \quad (44)$$

where

$$\tau_1 = c C_m (\mu_{in}^{-1} + \mu_{out}^{-1}/2) \quad (45)$$

The case of an oblate spheroid can be formulated in a similar manner, which is shown in the appendix.

2.5 Polarization factor under an a.c. field

Assuming the time variation with $\exp[j\omega t]$, we have from eq.(41) that

$$j\omega [\mathbf{s}] = \frac{\mu_{out}}{cC_m} [\mathbf{D}^i] [\kappa_\mu \mathbf{M}^i] [\mathbf{s}] - \frac{\mu_{out}}{c} [\mathbf{D}^i] [\kappa_\mu \mathbf{N}^i] [\mathbf{e}] \quad (46)$$

where the superscript i is either P (prolate) or O (oblate). Hence, the dipole charge density can be determined from the external field by

$$[\mathbf{s}] = C_m \left([\mathbf{D}^i] [\kappa_\mu \mathbf{M}^i] - I\omega\tau [\mathbf{U}] \right)^{-1} [\mathbf{D}^i] [\kappa_\mu \mathbf{N}^i] [\mathbf{e}] \stackrel{\text{write}}{=} C_m [\mathbf{L}^i] [\mathbf{D}^i] [\kappa_\mu \mathbf{N}^i] [\mathbf{e}] \quad (47)$$

where the time constant is

$$\tau = cC_m / \mu_{out}. \quad (48)$$

On the other hand, eq.(24) (or (A-9) in the Appendix) can be written as

$$[\mathbf{c}] = \frac{\kappa_\mu}{C_m} [\mathbf{S}^i] [\mathbf{s}] + (\kappa_\mu - 1) [\mathbf{T}^i] [\mathbf{e}] \quad (49)$$

where $[\mathbf{c}]$ is an array of $C_{n,m}$, \mathbf{S}^i and \mathbf{T}^i are diagonal matrices whose components respectively are

$$\text{prolate : } S_n^P = \frac{d_\eta P_n^m(\cosh \eta_0)}{G_n^m(\kappa_\mu, \cosh \eta_0)}, \quad T_n^P = a^n \frac{P_n^m(\cosh \eta_0) d_\eta P_n^m(\cosh \eta_0)}{G_n^m(\kappa_\mu, \cosh \eta_0)} \quad (50)$$

$$\text{oblate : } S_n^O = \frac{(-1)^n j^{n+1} d_\eta P_n^m(j \sinh \eta_0)}{G_n^m(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0)}, \quad T_n^O = a^n \frac{j P_n^m(j \sinh \eta_0) d_\eta P_n^m(j \sinh \eta_0)}{G_n^m(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0)} \quad (51)$$

Substitution of eq.(47) into eq.(49) yields

$$[\mathbf{c}] = \left(\kappa_\mu [\mathbf{S}^i] [\mathbf{L}^i] [\mathbf{D}^i] [\mathbf{N}^i] + (\kappa_\mu - 1) [\mathbf{T}^i] \right) [\mathbf{e}] \quad (52)$$

This equation gives the multipolar polarization of the ellipsoid.

In this paper, we shall confine our interest to dipolar moments. In this case, at the limit of $r \rightarrow \infty$,

$$Q_1^0(\cosh \eta) \approx \frac{1}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2, \quad Q_1^1(\cosh \eta) \approx -\frac{2}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \quad (53)$$

$$Q_1^0(j \sinh \eta) \approx -\frac{1}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2, \quad Q_1^1(j \sinh \eta) \approx \frac{2}{3} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \quad (54)$$

Therefore, the dipolar moments are

$$\text{prolate : } d_z^P = \frac{4}{3} \pi \varepsilon_{out} a^2 C_{1,0}^P, \quad d_x^P = -\frac{8}{3} \pi \varepsilon_{out} a^2 C_{1,1}^P \quad (55)$$

$$\text{oblate : } d_z^O = -\frac{4}{3} \pi \varepsilon_{out} a^2 C_{1,0}^O, \quad d_x^O = \frac{8}{3} \pi \varepsilon_{out} a^2 C_{1,1}^O \quad (56)$$

The polarization factor per unit volume P_m^i is then given as

$$P_m^i = \frac{\frac{4}{3} \pi \varepsilon_{out} a^2 f_m C_{1,m}^i}{\frac{4}{3} \pi b^2 c} \quad (57)$$

where $m = 0$ for z -dipole and $m = 1$ for x -dipole, $f_0 = 1$ and $f_1 = 2$.

3. Example of numerical calculations

We shall show some numerical solutions of the equation

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{s}] = \frac{\mu_{in}}{c C_m} [\mathbf{D}^i] [\mathbf{M}^i] [\mathbf{s}] - \frac{\mu_{in}}{c} [\mathbf{D}^i] [\mathbf{N}^i] [\mathbf{e}] \quad (58)$$

where i is either P (prolate) or O (oblate). Because in most practical cases, $\mu_{in} \geq \mu_{out}$, we normalize time t with the time constant τ in eq.(48), i.e.

$$t = \tau t_n$$

Then the membrane voltage

$$[v_m] = \frac{1}{C_m} [\mathbf{s}] \quad (59)$$

is governed by

$$\frac{d}{dt_n} [v_m] = [\mathbf{D}^i] [\kappa_\mu \mathbf{M}^i] [v_m] - [\mathbf{D}^i] [\kappa_\mu \mathbf{N}^i] [\mathbf{e}] \quad (60)$$

Numerical calculations are made for a uniform applied field E_0 in z - and x -directions, for the case of $R=5$, i.e. $c/b=5$ (prolate) and $b/c=5$ (oblate) and $\kappa_\mu=10$, taking the harmonic order n up to $n_{max} = 200$. With $n_{max} = 200$, the error of the series expansion of eq.(30) is less than 0.4%.

Fig.2 shows the time evolution of each harmonic component v_n normalized by cE_0 , from $t_n = 0$ to t_{max} . t_{max} is chosen to cover about $4 \tau_e$ where τ_e is the time constant of nearly exponential growth of the first harmonic. It is seen that higher harmonic components decay very quickly as n is increased, and come into play only at the beginning of the transient.

Fig.3 shows the time evolution of the membrane voltage V_m (total of harmonic components) plotted as a function of θ , with the time division of $t_{max}/20$. In Fig.4 is plotted the same quantity calculated by the variable thickness approximation model, i.e. taking only $n=1$ in eq.(29). With our rigorous model, due to the effect of higher harmonics, the membrane voltage builds up rather quickly at the locations where field becomes stronger ($\theta=0$ in prolate spheroid with E_z , or $\theta=\pi/2$ in oblate spheroid with E_x) at the beginning. As time passes, the membrane voltage distribution approaches sinusoidal shape, and as expected, both models give the same value of steady-state V_m .

The fact that the higher harmonics come into play at the beginning of the transient suggests that they should as well affect the polarizability at higher frequencies. Calculated polarization factor (divided by ϵ_{out}) for $\kappa_\mu=10$ and $R=5$ is shown in Fig.5 in comparison to that calculated by variable thickness model. In fact the shift in spectra is seen (between the thick and thin lines in the figures). In particular for the case where large field non-uniformity is induced by the existence of the particle (prolate spheroid with E_z or oblate spheroid with E_x), the large difference is observed between our rigorous model and the variable thickness model, which amounts to 2.4 times frequency change in the case of oblate spheroid with E_x .

It should be noted that the present method is far faster than numerical methods like that based on BEM [13], especially for the cases the field is perpendicular to the major axis where the problem is

3-dimensional.

4. Conclusions

A method for rigorous calculation for the membrane voltage and the polarization factor of an ellipsoidal particle with an insulating membrane is developed. The method is based on the harmonic expansion of the field, to include the condition of the uniform membrane thickness as a series expansion of the geometrical factor, and to solve the field problem as an interaction of the harmonic components. With the use of the harmonic expansion, the method enables the analysis under arbitrary external field. It is identified that the conventional variable thickness model is equivalent to neglecting the harmonic interactions. Numerical calculation of the membrane voltage and the polarization factors are made, and the discrepancy between our rigorous model and the conventional variable thickness model becomes eminent where the field deformation is large due to the high axial ratio of the ellipsoid.

An approximation that the field is dominated by conduction current in the media is employed in the present analysis, but the method of the series expansion itself does not depend upon the assumption, and is applicable for the cases where the capacitive current in the media is significant.

Acknowledgments

The authors would like to thank Dr. Hidehiro Oana and Dr. Murat Gel of the University of Tokyo, Dr. Osamu Kurosawa of Advance Co., Dr. Hidetoshi Kotera of Kyoto University for discussions and comments. This research is supported by the Ministry of Education Japan (Kakenhi 18048008), JST CREST, Grant-in-Aid for Scientific Research from NEDO. B.T. acknowledges the scholarship of the Japan Society for the Promotion of Science (JSPS) and the support from the Thailand Research Fund (TRF).

[References]

- [1] Asami, K., Hanai, T. and Koizumi, N. : "Dielectric approach to suspensions of ellipsoidal particles covered with a shell, in particular reference to biological cells", Japanese J. Appl. Phys., Vol.19, p.359-365 (1980)
- [2] Miller, R.D. and Jones, T.B. : "Electro-orientation of ellipsoidal erythrocytes Theory and experiment", Biophys. J. Vol.64, p. 1588-1595 (1993)
- [3] Jones, T.B. "Electromechanics of Particles", Cambridge University Press (1995)
- [4] Pethig, R. : "Application of a.c.electrical fields to the manipulation and characterisation of cells", in Automation in Biotechnology, I.Karube ed., p.159-185, Elsevier Science Publishers (1991)
- [5] Zimmermann, U. and Arnold, W.M. : "Biophysics of electroinjection and electrofusion", J. Electrostat. Vol.21, p.309–345 (1988)
- [6] Gimsa, J. and Wachner, D. : "A polarization model overcoming the geometric restrictions of Laplace's solution for spheroidal cells: obtaining new equations for field induced forces and transmembrane potential", Biophys. J., Vol.77, p.1316-1326 (1999)
- [7] J. Gimsa and Wachner, D. : "Analytical Description of the Transmembrane Voltage Induced on Arbitrarily Oriented Ellipsoidal and Cylindrical Cells", Biophys. J., Vol.81, 1888–1896 (2001)
- [8] Vrinceanu, D. and Gheorghiu, E. : "Shape effects on the dielectric behavior of arbitrarily shaped particles with particular reference to biological cells", Bioelectrochemistry and Bioenergetics, vol.40, p.167–170 (1996)
- [9] Gheorghiu, E. : "On the limits of ellipsoidal models when analyzing dielectric behaviour of living cells", Ann. N.Y. Acad. Sci., vol.873, p.262-262 (1999)
- [10] Sancho, M., Martinez, G. and Martin, C. , "Accurate dielectric modelling of shelled particles and cells", J. Electrostatics, vol.57, p.143-156 (2003)
- [11] Moon and Spencer: "Field theory for engineers", Van Nostrand, London (1961)
- [12] Washizu, M. and Tschannat, B. : "Cell Membrane Voltage During Electrical Cell Fusion

Calculated by Re-expansion Method", J. Electrostatics vol.65, p.555–561 (2007)

- [13] Tetchumnat, B. and Washizu, M. : "Analysis of the effects of an orifice plate on the membrane potential in electroporation and electrofusion of cells", J. Phys. D: Appl. Phys. vol.40, p.1831–1837 (2007)

Appendix: Solution for the case of an oblate spheroid

The oblate spheroidal coordinate system (η, θ, φ) is related to the Cartesian coordinate system by

$$\begin{aligned} x &= a \cosh \eta \sin \theta \cos \varphi \\ y &= a \cosh \eta \sin \theta \sin \varphi \\ z &= a \sinh \eta \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

The surface of $\eta = \eta_0$, is an oblate spheroid,

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{A-2})$$

where

$$b = a \cosh \eta_0 \quad \text{and} \quad c = a \sinh \eta_0$$

and

$$a = \sqrt{b^2 - c^2} \quad (\text{A-3})$$

With the use of the eccentricity of the ellipsoid e

$$e = \sqrt{1 - (c/b)^2} = a/b \quad (\text{A-4})$$

where $0 \leq e \leq 1$, we have the same expressions for $\cosh \eta_0$ and $\sinh \eta_0$ that

$$\cosh \eta_0 = 1/e \quad \text{and} \quad \sinh \eta_0 = \sqrt{(1/e)^2 - 1}$$

The solution of Laplace equation in the oblate spheroidal coordinate system is

$$\phi = \left\{ \begin{matrix} P_n^m(j \sinh \eta) \\ Q_n^m(j \sinh \eta) \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} P_n^m(\cos \theta) \\ Q_n^m(\cos \theta) \end{matrix} \right\} \text{cs } m\varphi \quad (\text{A-5})$$

The potentials inside and outside the spheroid respectively are

$$\begin{aligned} \phi_{out} &= \phi_{app} + \phi_{ind} \\ &= -\sum_{n,m} E_{n,m} a^n j^n P_n^m(j \cosh \eta) P_n^m(\cos \theta) \text{cs } m\varphi + \sum_{n,m} C_{n,m} j^{n-1} Q_n^m(j \cosh \eta) P_n^m(\cos \theta) \text{cs } m\varphi \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

$$\phi_{in} = \sum_{n,m} A_{n,m} j^n P_n^m(j \sinh \eta) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \quad (\text{A-7})$$

In the above equations the powers of j are introduced to make all the coefficients real values.

If we expand σ in Legendre harmonics as in eq.(22) and apply the boundary conditions, we have

$$A_{n,m} = \frac{(-j)^n d_\eta Q_n^m(j \sinh \eta_0) S_{n,m}}{G_n^m(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0) C_m} - \frac{H_n^m(j \sinh \eta_0)}{G_n^m(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0)} a^n E_{n,m} \quad (\text{A-8})$$

$$C_{n,m} = \frac{(-1)^n j^{n+1} \kappa_\mu d_\eta P_n^m(j \sinh \eta_0) S_{n,m}}{G_n^m(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0) C_m} + \frac{j(\kappa_\mu - 1) P_n^m(j \sinh \eta_0) d_\eta P_n^m(j \sinh \eta_0)}{G_n^m(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0)} a^n E_{n,m} \quad (\text{A-9})$$

where

$$d_\eta P_n^m(j \sinh \eta_0) = \left. \frac{d}{d\eta} P_n^m(j \sinh \eta) \right|_{\eta=\eta_0}, \quad d_\eta Q_n^m(j \sinh \eta_0) = \left. \frac{d}{d\eta} Q_n^m(j \sinh \eta) \right|_{\eta=\eta_0} \quad (\text{A-10})$$

$$G_n^m(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0) = \kappa_\mu Q_n^m(j \sinh \eta_0) d_\eta P_n^m(j \sinh \eta_0) - P_n^m(j \sinh \eta_0) d_\eta Q_n^m(j \sinh \eta_0) \quad (\text{A-11})$$

$$H_n^m(j \sinh \eta_0) = Q_n^m(j \sinh \eta_0) d_\eta P_n^m(j \sinh \eta_0) - P_n^m(j \sinh \eta_0) d_\eta Q_n^m(j \sinh \eta_0) \quad (\text{A-12})$$

The time evolution of the membrane charge is governed by

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mu_{in} \frac{1}{g_\eta} \left. \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \eta} \right|_{\eta=\eta_0} = \frac{\mu_{in}}{c \sqrt{1 - (\sin \theta / \cosh \eta_0)^2}} \sum_{n,m} A_{n,m} \tanh \eta_0 d_\eta P_n^m(j \sinh \eta_0) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \quad (\text{A-13})$$

where the geometric coefficient g_η in this coordinate system is

$$g_\eta = a \sqrt{\sinh^2 \eta_0 + \cos^2 \theta} = a \sqrt{\cosh^2 \eta_0 - \sin^2 \theta} = \frac{c}{\tanh \eta_0} \sqrt{1 - (\sin \theta / \cosh \eta_0)^2} \quad (\text{A-14})$$

The expansion of c/g_η is

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (\sin \theta / \cosh \eta_0)^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cosh^2 \eta_0} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cosh^2 \eta_0} \right)^k \quad (\text{A-15})$$

so that eq.(A-13) becomes

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{\mu_{in}}{c \sqrt{1 - (\sin \theta / \cosh \eta_0)^2}} \sum_{n,m} A_{n,m} \tanh \eta_0 d_\eta P_n^m(j \sinh \eta_0) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \\ &= \frac{\mu_{in}}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cosh^2 \eta_0} \right)^k \sum_{n,m} A_{n,m} \tanh \eta_0 d_\eta P_n^m(j \sinh \eta_0) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi \end{aligned} \quad (\text{A-16})$$

This equation again contains the components of $(\cos \theta)^{2k} P_n^m(\cos \theta)$, which can be re-expanded in Legendre harmonic series as before, i.e. using

$$[\mathbf{D}_2^T] = [\mathbf{D}_1^T]^2 \quad (\text{A-17})$$

and

$$[\mathbf{D}^O] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\tanh \eta_0 d_\eta P_n^m(j \sinh \eta_0)}{\cosh \eta_0^{2k}} [\mathbf{U} - \mathbf{D}_2^T]^k \quad (\text{A-18})$$

where the superscript O denotes that the quantity is for an oblate spheroid and \mathbf{U} is the identity matrix. Then we have

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{s}] = \frac{\mu_{in}}{c C_m} [\mathbf{D}^O][\mathbf{M}^O][\mathbf{s}] - \frac{\mu_{in}}{c} [\mathbf{D}^O][\mathbf{N}^O][\mathbf{e}] \quad (\text{A-19})$$

where \mathbf{M}^O and \mathbf{N}^O are diagonal matrices whose components respectively are

$$M_n^O = \frac{(-j)^n d_\eta Q_n^m(j \sinh \eta_0)}{G_n^m(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0)}, \quad N_n^O = a^n \frac{H_n^m(j \sinh \eta_0)}{G_n^m(\kappa_\mu, j \sinh \eta_0)} \quad (\text{A-20})$$

For the first order external field and at the limit of $\epsilon \rightarrow 0$, the same expression as eq.(44) results.

[Figure Captions]

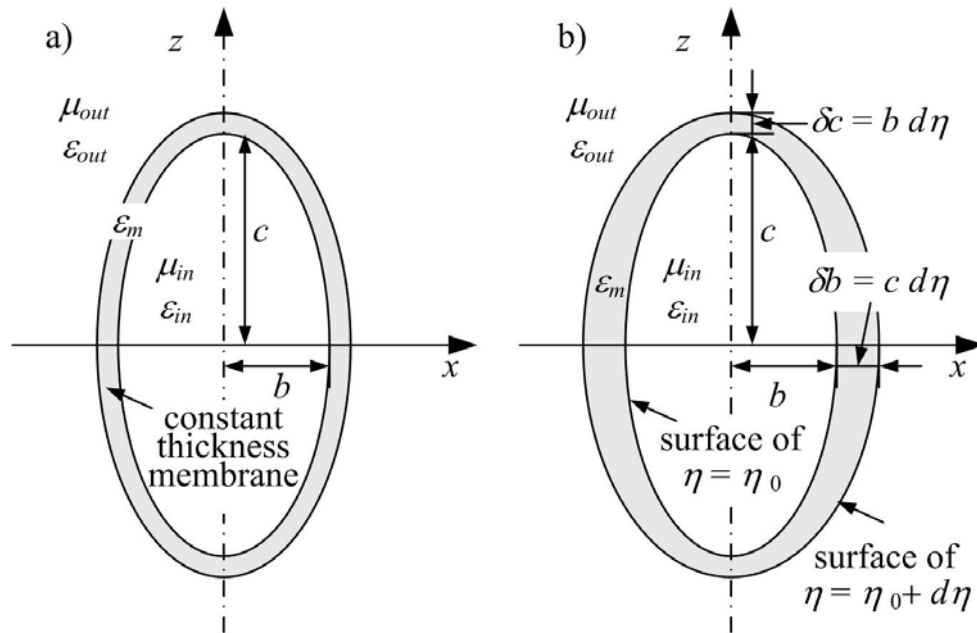
Fig.1 Mathematical modeling of a spheroidal cell. a) Actual cell with a uniform membrane thickness, b) Confocal modeling with variable thickness.

Fig.2 Time evolution of harmonic components, $t = 0$ to t_{max} .

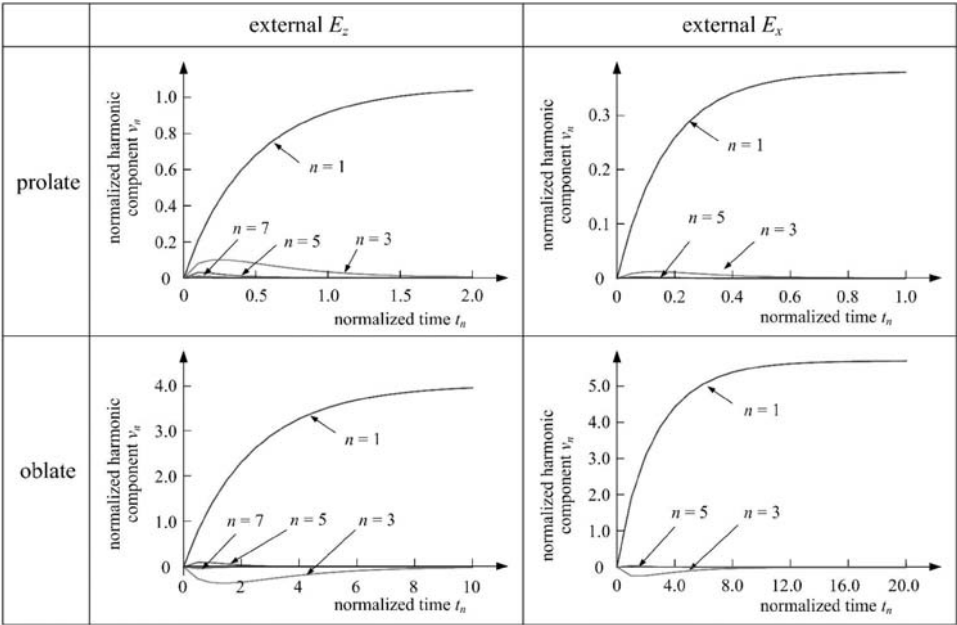
Fig.3 Time evolution of the membrane voltage as a function of θ , at $t = i/20 t_{max}$ ($i = 1$ to 20) .

Fig.4 Time evolution of the membrane voltage with the variable capacitance model, all parameters same as that of fig.3.

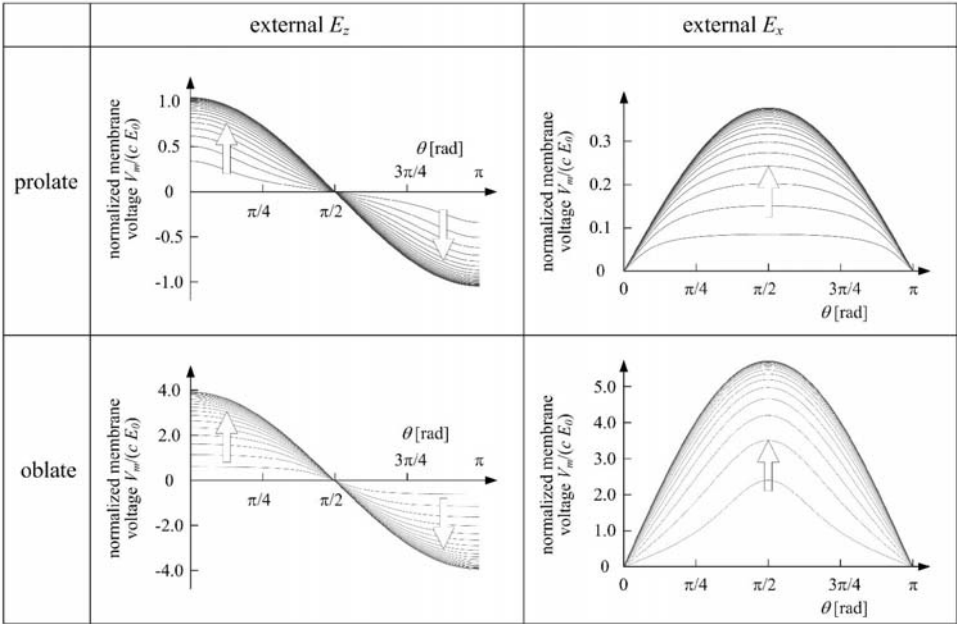
Fig.5 Dipolar polarization factors for $R=5$. Thick lines for the present rigorous model, thin lines for the variable thickness model, solid lines for the real part, and dashed lines for the imaginary part. The abscissa is the log frequency normalized by $1/\tau$, where τ is given by eq.(48)



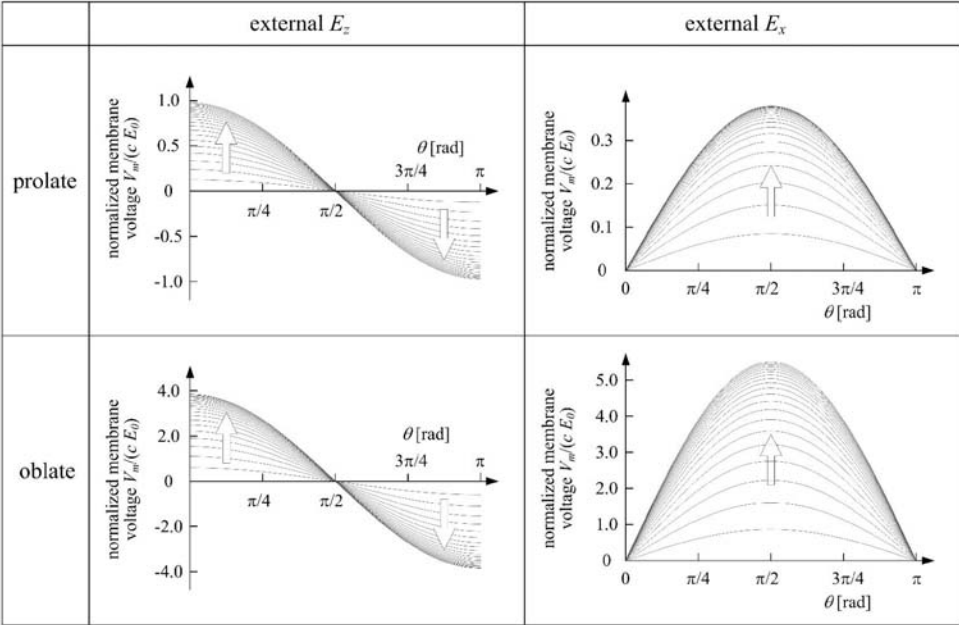
115x75mm (300 x 300 DPI)



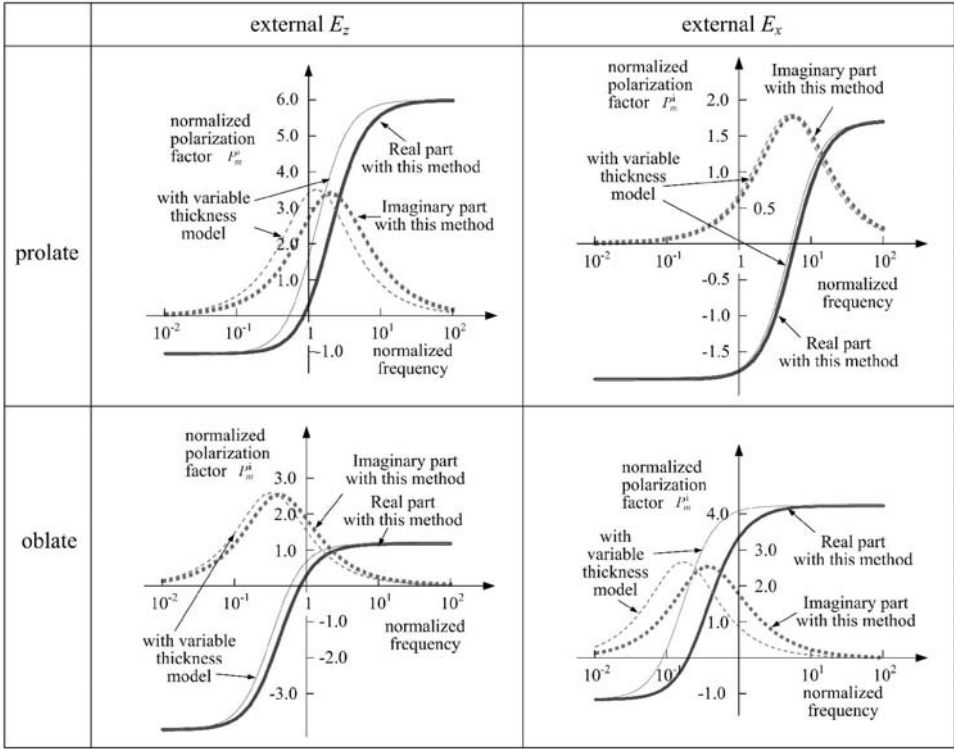
270x178mm (300 x 300 DPI)



270x177mm (300 x 300 DPI)



268x177mm (300 x 300 DPI)



270x212mm (300 x 300 DPI)

Electric field and force on a conducting sphere in contact with a dielectric solid

Boonchai Techaumnat^{a,*}, Tadasu Takuma^{b,c}

^a*Electrical Engineering Department, Chulalongkorn University, Phayathai, Pathumwan, Bangkok 10330, Thailand*

^b*Central Research Institute of Electric Power Industry, 2-11-1 Iwado kita, Komae-shi, Tokyo 201-8511, Japan*

^c*Tokyo Denki University, 2-2 Kanda-Nishiki-cho, Chiyoda-ku, Tokyo 201-8457, Japan*

Received 1 October 2004; received in revised form 18 April 2005; accepted 22 May 2005

Available online 11 July 2005

Abstract

This paper presents the analysis of electric field and force on a conducting sphere lying on a dielectric solid under a uniform field. To achieve high accuracy, we have applied the analytical method of successively placing three infinite sequences of point and dipole charges (zero- or first-order multipoles). The electric field is highest at the contact point, called the triple junction, where the conductor, the dielectric solid, and the surrounding medium (gas or vacuum) meet together. Both the contact-point field and the force increase with the permittivity ratio of the solid to that of the surrounding medium. The resulting force always attracts the sphere to the solid, in contrast to the repulsive force in the case of a conducting sphere lying on a plane conductor under an external field. We have given very simple formulae for approximating the contact-point field and the force which agree with the precise values within a difference of 3% for permittivity ratios up to 32 and 64, respectively.

© 2005 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Conducting sphere; Dielectric solid; Electric field; Force; Method of images

1. Introduction

Electric fields and resulting forces are of particular importance in many fields of electrostatics. One important case concerns the behavior of particles present under an electric field. In a gas insulated system, for example, the force induced by an electric field may lift a foreign conducting particle against the gravitational force, thus possibly affecting the insulation characteristics of the system. In photocopying, the electrostatic behavior of toners under an external field is significant to the overall performance of the process. Therefore, the electric field distribution and force have been reported in detail for the case of a conducting particle lying on a conducting plate under an external field [1].

On the other hand, the electric field and force have not been fully investigated for the case of a conducting particle lying on a dielectric solid. In high-voltage insulation systems, dielectric solids are always used for mechanical support and separation. There exist basically two different cases for such arrangements if we consider general cases including a conductor not necessarily small like an electrode:

- (1) the conductor is charged to a fixed potential, or
- (2) the conductor resides at a floating potential under an applied field.

For the former case (1), the electric field has been computed for a spherical conductor at a fixed potential on a dielectric solid by the method of placing an infinite number of point charges (images) [2,3]. This arrangement represents a fundamental case for studying the field behavior at a triple junction where the conductor,

*Corresponding author.

E-mail address: boonchai.t@chula.ac.th (B. Techaumnat).

the dielectric solid, and the surrounding medium (gas or vacuum) meet together.

This paper presents an analysis of the electric field and resulting force for case (2) wherein a conducting sphere lies on a dielectric solid of semi-infinite thickness under an external (uniform) field. This is the most fundamental arrangement for considering the electric field and force acting on a conducting particle lying on a dielectric solid, such as an insulating spacer or support in gas insulated systems. We assume that the conducting sphere is not charged (i.e., has no net charge) here. However, the analytical method used here can also treat a general case of a charged, electrically floating conductor under an external field. For this case, the electric field is obtained by a linear superposition of the field on the uncharged conductor with the external field, which is treated here, and that on a charged conductor without the external field.

It is very difficult to obtain high accuracy by any numerical method for an arrangement with a triple junction where a rounded conductor meets a dielectric solid. This is because an infinitesimally narrow gap is involved and the field is intensified, particularly when the permittivity of the solid is much greater than that of the surrounding medium. In order to achieve high accuracy, we have analyzed the field on the conducting sphere using the method of images for point and dipole charges (zero- and first-order multipoles). Although the image for an arrangement of a dielectric solid and a point charge has been well known [4], in this paper we generalize the image for the case of a dielectric solid and a multipole of any order, e.g., dipole or quadrupole.

2. Arrangement

The calculation arrangement is shown in Fig. 1. We consider an uncharged conducting sphere of radius R

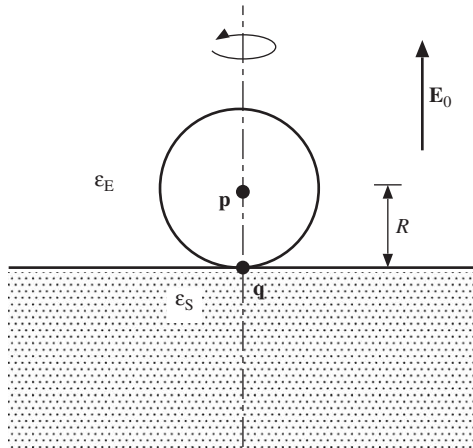


Fig. 1. A conducting sphere with a radius R lying on a dielectric solid of semi-infinite thickness under a uniform field E_0 .

lying on a dielectric solid of permittivity ϵ_S . The sphere, the dielectric solid, and the background medium form a triple junction at the point \mathbf{q} in Fig. 1. We assume that the sphere radius is much smaller than the thickness of the dielectric solid that the solid can be treated as semi-infinite. The conducting sphere and the dielectric solid are subjected to a uniform electric field E_0 in the vertical direction. The permittivity of the exterior is denoted by ϵ_E . We have carried out the calculation for $1 \leq \epsilon_S/\epsilon_E \leq 64$.

In the absence of the dielectric solid, the maximum field is located at the top and the bottom of the conducting sphere. The dielectric solid further increases the electric field at the bottom point, \mathbf{q} . Therefore, we are interested in the contact-point electric field E_c (referred to the ϵ_E -side) at \mathbf{q} , which is the highest field in this arrangement. The electric field on the ϵ_S -side of the contact point is simply given by $\epsilon_E E_c / \epsilon_S$.

3. Calculation method

As already mentioned, we calculate the electric field distribution by using a method of images that utilizes point and dipole charges. The calculation is principally similar to the case of a conducting sphere at a fixed potential and a dielectric solid [2,3]. However, the situation is more complicated here because the net charge on the conducting sphere must remain zero. We express the potential and electric field in the terms of zero-order multipoles (i.e., monopoles) B_0 instead of point charges Q and first-order multipoles B_1 instead of point dipoles P in the $+z$ -direction to simplify the expression. The potential ϕ at any point \mathbf{r} due to B_0 or B_1 located at \mathbf{r}_B is defined as follows:

$$\phi = \frac{B_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B\|}, \quad (1)$$

$$\phi = \frac{B_1 \cos \theta}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B\|^2}, \quad (2)$$

where θ is the angle between $\mathbf{r} - \mathbf{r}_B$ and the dipole direction. It is clear from Eqs. (1) and (2) that the magnitudes of the multipoles are given by $Q = 4\pi\epsilon_E B_0$ and $P = 4\pi\epsilon_E B_1$.

3.1. Images for a multipole and a conducting sphere

Consider a grounded conducting sphere and a zero-order multipole B_0 located at a distance d from its center. The zero-potential condition on the sphere can be satisfied by placing an image B'_0 at a distance R^2/d from the center (Fig. 2(a)). The image magnitude is related to B_0 by [4]

$$B'_0 = -\frac{R}{d} B_0. \quad (3)$$

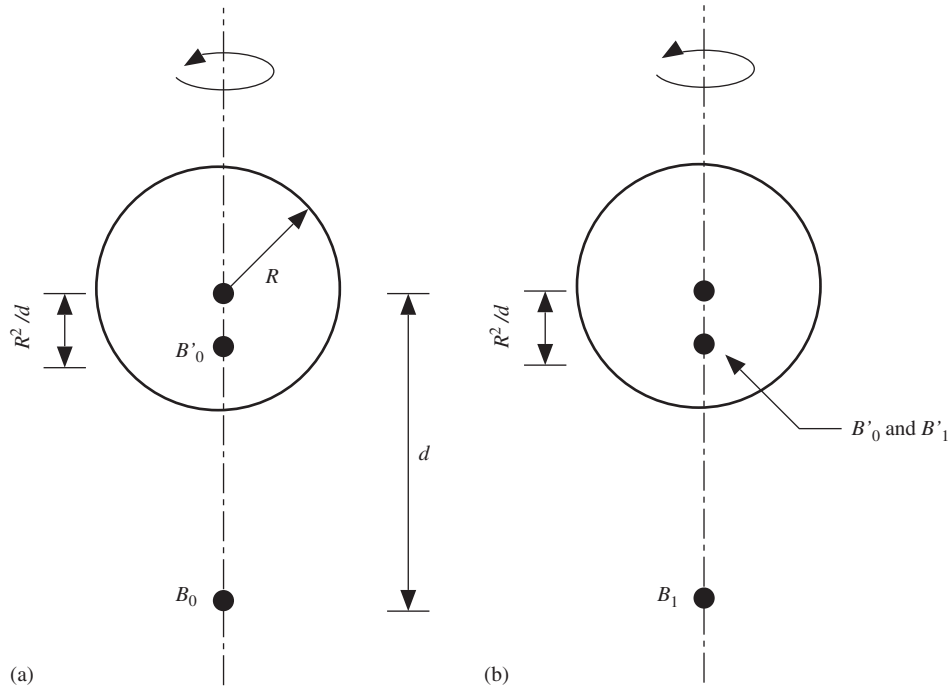


Fig. 2. Images in a grounded conducting-sphere for a point charge (a) or dipole (b).

For an electrically floating conducting sphere under an external field, an additional image $B'_0 = -B'_0$ must be placed at the sphere center to fulfill the zero-charge condition while maintaining the equipotential condition on the sphere.

Images for a grounded conducting sphere and a first-order multipole B_1 are shown in Fig. 2 (b). Two images, B'_1 and B'_0 , are required in this case [5]. The images are related to B_1 by

$$B'_1 = \left(\frac{R}{d}\right)^3 B_1, \quad (4)$$

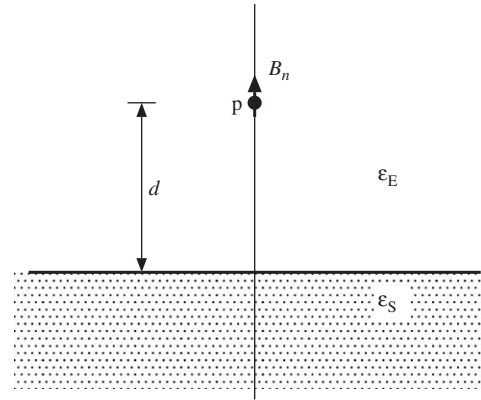
$$B'_0 = -\frac{R}{d^2} B_1. \quad (5)$$

Similarly, an additional image $B'_0 = -B'_0$ is needed at the sphere center for an electrically floating conducting sphere under an external field. Note that there also exist images for linear multipoles of higher orders [6].

3.2. Images for a multipole and a dielectric solid

Consider an n th-order multipole B_n located at a point \mathbf{p} above a dielectric solid of semi-infinite thickness at a height d , as shown in Fig. 3. The potential due to this multipole is expressed by [7]

$$\phi_B = \frac{B_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos \theta_p), \quad (6)$$


 Fig. 3. An n th-order multipole B_n and a dielectric solid.

where r_p and θ_p are the spherical coordinates in which \mathbf{p} is the origin, and P_n is the Legendre function.

Similar to the case of a point charge and a dielectric solid in [4], we place two multipole images of B_n to satisfy the boundary conditions of potential and electric field on the dielectric solid. The images are B'_n at \mathbf{p}' in Fig. 4(a) and B''_n at \mathbf{p} in Fig. 4(b). By the method of multipole images, we separately express the resultant potentials ϕ_S in the dielectric solid and ϕ_E in the surrounding medium as follows:

$$\phi_S = \frac{B''_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos \theta_p), \quad (7)$$

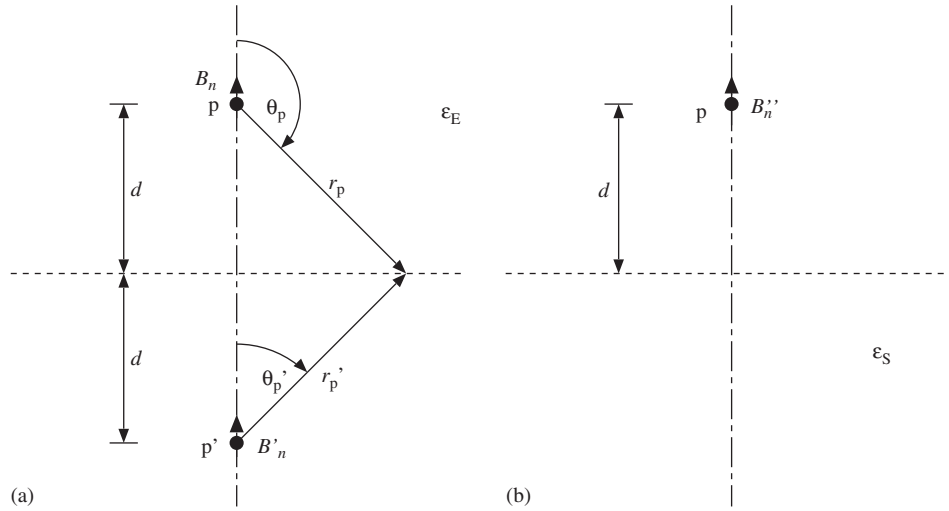


Fig. 4. Multipole images for the (a) exterior and (b) interior of the dielectric solid.

$$\phi_E = \frac{B'_n}{r_p'^{n+1}} P_n(\cos \theta_{p'}) + \phi_B, \quad (8)$$

where $r_{p'}$ and $\theta_{p'}$ are defined in the similar manner as r_p and θ_p , respectively.

The boundary conditions on the surface of the dielectric solid are

$$\phi_S = \phi_E, \quad (9)$$

$$\varepsilon_S \frac{\partial \phi_S}{\partial n} = \varepsilon_E \frac{\partial \phi_E}{\partial n}, \quad (10)$$

where $\partial \phi / \partial n$ is the normal potential gradient. At any point on the dielectric interface, we have $r_{p'} = r_p$ and $\theta_{p'} = \pi - \theta_p$ (see Fig. 4(a)). Noting that $P_n(\cos \theta_{p'}) = (-1)^n P_n(\cos \theta_p)$ and $\partial \phi / \partial n = \cos \theta \partial \phi / \partial r + \sin \theta \partial \phi / \partial \theta$, we obtain the following equations from the boundary conditions.

$$B''_n = B_n + (-1)^n B'_n, \quad (11)$$

$$\varepsilon_S B''_n = \varepsilon_E [B_n + (-1)^{n+1} B'_n], \quad (12)$$

From Eqs. (11) and (12), the magnitudes of B'_n and B''_n are related to B_n by

$$B'_n = (-1)^{n+1} K B_n, \quad (13)$$

$$B''_n = (1 - K) B_n, \quad (14)$$

where K is defined as a function of the permittivities,

$$K = \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_E}{\varepsilon_E + \varepsilon_S}. \quad (15)$$

Note that $0 \leq K < 1$ for $\varepsilon_E \leq \varepsilon_S < \infty$. The images described in this section can also be utilized in electric field calculations by the method of multipole images presented in Refs. [7,8].

3.3. Calculation by the method of images

We calculate the electric field by the method of images in three main steps that can be briefly explained as follows.

In the first step, the calculation starts from the external field E_0 and the corresponding multipole $B_1^{(1)}$, at the sphere center, that satisfies the boundary conditions on the sphere surface under E_0 . The multipole magnitude is related to E_0 by the equation

$$B_1^{(1)} = R^3 E_0. \quad (16)$$

With the dielectric solid present, $B_1^{(1)}$ induces its image in the solid via Eq. (13), which further interacts with the conducting sphere via Eqs. (4) and (5). To simplify the calculation in this step, we temporarily treat the sphere as grounded, and also neglect the zero-order multipoles (point charges), which are to be taken into account later. We focus only on the first-order multipoles (dipole charges), and obtain an infinite sequence of dipole images in the sphere and the dielectric solid. See Appendix A for the positions and magnitudes of the first set of images.

In the second step, we treat the point charges induced as the images of dipole charges with respect to the conducting sphere in the first step. The sphere is still treated as if grounded. Each point charge leads to an infinite sequence of image charges in the sphere and the dielectric solid. This second set of images is given in detail in Appendix B.

In the last step, we fulfill the zero-charge condition of the conducting sphere under an external field. To negate all the charges previously applied, we place a point charge at the sphere center. Similar to the second step, this negating charge results in sequences of images required to satisfy the conditions of potential and field

with the existence of the dielectric solid. However, the insertion of these images differs from the other steps because, in every repetitive step, we maintain zero net charge by adding an appropriate image at the sphere center. Appendix C discusses the third set of images in more detail.

All the images described in the Appendices can be grouped by their positions. At each height $h = R/i$ ($i = 1, 2, \dots$) above the surface of the solid dielectric, From Eqs. (A.4), (B.2), and (C.5) in the Appendices, we obtain the sums $(B_0)_i$ and $(B_1)_i$ of the zero-order and first-order multipoles, respectively, as follows:

$$\frac{(B_0)_i}{B_1^{(1)}} = -\frac{K^{i-1}}{R} \frac{1}{i} \left\{ \frac{i-1}{i} - \frac{\alpha_K}{K} \left[\ln \left(\frac{1}{1-K} \right) - \beta_K \right] \right\}, \quad (17)$$

$$\frac{(B_1)_i}{B_1^{(1)}} = \left(\frac{1}{i^3} \right) K^{i-1}. \quad (18)$$

The functions α_K and β_K in Eq. (17) originate from terms in the summation. They are defined as

$$\alpha_K = \sum_{k=1}^{\infty} S_k, \quad (19)$$

$$\beta_K = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K^j}{j^2} = \int_0^K \frac{1}{t} \ln \left(\frac{1}{1-t} \right) dt, \quad (20)$$

where S_k is a sequence in which $S_0 = 1.0$ and

$$S_k = \sum_{l=0}^{k-1} -\frac{K^{k-l}}{k-l+1} S_l. \quad (21)$$

The magnitudes $(B'_0)_i$ and $(B'_1)_i$ of the zero-order and first-order multipoles at each $h = -R/i$ ($i = 1, 2, \dots$) are simply related to $(B_0)_i$ and $(B_1)_i$ by

$$(B'_0)_i = -K(B_0)_i, \quad (22)$$

$$(B'_1)_i = K(B_1)_i. \quad (23)$$

Finally, the contact-point electric field E_c is the sum of the applied field and the field due to all images.

$$E_c = E_0 + E_{c1} + E_{c2} + E_{c3}, \quad (24)$$

where E_{c1} , E_{c2} , and E_{c3} are the fields due to the images obtained in the first, second, and last steps, respectively. They are given by Eqs. (A.5), (B.4), and (C.7). Thus, we can write the contact-point electric field E_c at \mathbf{q} as

$$\frac{E_c}{E_0} = 1 + \frac{1+K}{1-K} \left\{ 2 + \frac{K}{1-K} - \frac{\alpha_K}{K(1-K)} \left[\ln \left(\frac{1}{1-K} \right) - \beta_K \right] \right\}. \quad (25)$$

Alternatively, as a function of the permittivities (except the terms α_K and β_K), the contact-point electric field can

be expressed as

$$\frac{E_c}{E_0} = 1 + \frac{\epsilon_S}{\epsilon_E} \left\{ 2 + \frac{\epsilon_S - \epsilon_E}{2\epsilon_E} - \alpha_K \frac{(\epsilon_S + \epsilon_E)^2}{2\epsilon_E(\epsilon_S - \epsilon_E)} \times \left[\ln \frac{\epsilon_S + \epsilon_E}{2\epsilon_E} - \beta_K \right] \right\}. \quad (26)$$

4. Results and discussion

4.1. Numerical values of α_K and β_K

The contact-point electric field has been expressed using α_K and β_K as parameters. Although we cannot write these parameters in a closed form, Eqs. (19) and (20) converge well if K is not close to unity. This condition is true for most dielectrics in practical use. For example, K ranges from 0 to 0.818 for $1 \leq \epsilon_S/\epsilon_E \leq 10$. Figs. 5 and 6 provide the values of α_K and β_K for calculating the contact-point electric field using Eq. (25) or (26). Fig. 5 shows the variation of α_K for $K = 0$ to 0.999. It can be seen from the figure that $\alpha_K = 1$ at $K = 0$ and α_K decreases with increasing K . The decrease of α_K with K is roughly linear for small K , but becomes nonlinear at larger K .

On the other hand, it is obvious from Eq. (20) that β_K varies from 0 to the Riemann zeta function $\zeta(2)$ for

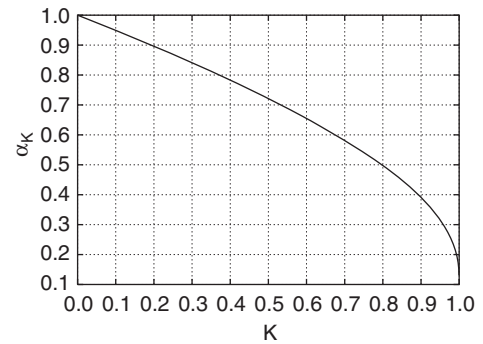


Fig. 5. Variation of α_K in Eq. (19) for $K = 0$ to 0.999.

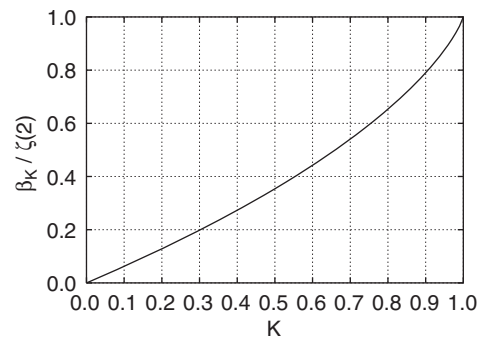


Fig. 6. Variation of β_K in Eq. (20) for $K = 0$ to 1.

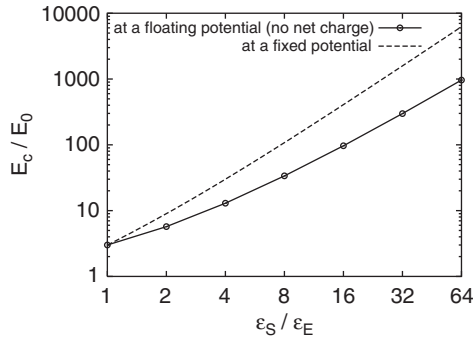


Fig. 7. Contact-point electric field as a function of the permittivity ratio $\varepsilon_S/\varepsilon_E$.

$K = 0$ to 1, where $\zeta(2) = \sum_{j=1}^{\infty} (1/j^2) = \pi^2/6$. Fig. 6 shows the variation of β_K between $K = 0$ to 1.0.

4.2. Contact-point electric field

Fig. 7 shows the contact-point electric field E_c as a function of the permittivity ratio $\varepsilon_S/\varepsilon_E$. Note that there exists no gap at the contact point; however, E_c represents the upper bound of electric field in the small gap near the contact point. On the solid side, the field is equal to $\varepsilon_E E_c/\varepsilon_S$ at \mathbf{q} , as already mentioned. It can be clearly seen from Fig. 7 that the ratio E_c/E_0 increases as the permittivity ratio increases. The figure also implies that the field is infinitely high if $\varepsilon_S = \infty$. In usual electric field distributions, the field of $\varepsilon_S = \infty$ corresponds to that of the conducting solid. However, in the contact field problems, $\varepsilon_S = \infty$ is not equivalent to the conducting solid. The solid has still no conductivity, so that no charge transfer occurs between the sphere and the solid. This corresponds to the situation that an infinitesimally small gap exists between them.

For comparison, the dotted line in Fig. 7 presents E_c on a conducting sphere at a fixed potential in contact with a dielectric solid (without the external field). E_c on the sphere is given by [2,3]

$$\frac{E_c}{E_0} = \frac{3}{2} \left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E} \right) \left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E} + 1 \right). \quad (27)$$

The charge on the conductor is chosen so that the magnitude of E_c for $\varepsilon_S = \varepsilon_E$ is the same as that on the sphere under E_0 . That is to say, the magnitude of E_c is equal to $3E_0$. We can see from Fig. 7 that, for $\varepsilon_S > \varepsilon_E$, E_c on the conducting sphere at the fixed potential is higher than that on the sphere under E_0 . The difference in E_c becomes greater as the permittivity ratio increases.

Although the contact-point electric field, E_c , can be computed from Eq. (25) or (26) by using α_K and β_K , we obtain the following simple formula, based on curve

Table 1

Comparison of the contact-point electric field with the approximation by Eq. (28)

$\varepsilon_S/\varepsilon_E$	E_c/E_0		Difference (%)
	Calculation	Eq. (28)	
1	3.000	2.996	0.133
2	5.710	5.571	2.435
4	12.94	12.60	2.640
8	33.68	33.26	1.237
16	96.80	97.27	0.478
32	298.2	302.0	1.286
64	964.3	969.2	0.504

fitting, for E_c :

$$\frac{E_c}{E_0} \approx 0.696 \left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E} + \sqrt{\frac{7}{4}} \right)^{\sqrt{3}}. \quad (28)$$

Eq. (28) adequately approximates the contact-point electric field over the range $\varepsilon_S = \varepsilon_E$ to $64\varepsilon_E$. Table 1 compares the field magnitude approximated by Eq. (28) with our calculation results. Table 1 shows that the error by the approximation is smaller than 3% for permittivity ratios up to 64.

4.3. Force on the conducting sphere

Force on the conducting sphere may be calculated from the Maxwell stress tensor [9]. Alternatively, it is possible to determine the force as the sum of forces acting on the image charges and dipoles in the sphere. The force F_z in the $+z$ -direction is determined by

$$\begin{aligned} \frac{F_z}{4\pi\varepsilon_E} = & -\frac{K}{R^2} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (B_0)_j (B_0)_k \left(\frac{jk}{j+k} \right)^2 \\ & - \frac{6K}{R^4} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (B_1)_j (B_1)_k \left(\frac{jk}{j+k} \right)^4 \\ & + \frac{4K}{R^3} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (B_0)_j (B_1)_k \left(\frac{jk}{j+k} \right)^3. \end{aligned} \quad (29)$$

From Eqs. (17), (18), and (29), we obtain a negative F_z signifying a sphere that is attracted to the dielectric solid. This force direction is opposite to that on a conducting sphere in contact with a conducting solid under an external field, which repels the sphere from the solid [1,10]. This is because, for the case of the conducting solid, charges are transferred between the solid and the sphere. After the charge transfer, the Coulomb force acting on the sphere changes its direction from attractive to repulsive. In contrast, for the case of a dielectric solid, no charge is transferred between the objects. Thus, the force direction remains attractive.

Fig. 8 shows the variation of the force magnitude with the permittivity ratio $\varepsilon_S/\varepsilon_E$. To generalize the force F_z in Fig. 8 for any values of ε_E , E_0 , and R , F_z is normalized by a factor $F_0 = \varepsilon_E E_0^2 R^2$, and thus becomes dimensionless. The indices j and k required to compute the force in Eq. (29) increase with increasing $\varepsilon_S/\varepsilon_E$. (Up to 850 terms were used for $\varepsilon_S/\varepsilon_E = 64$.) The force is equal to zero for $\varepsilon_S = \varepsilon_E$, and becomes stronger with larger $\varepsilon_S/\varepsilon_E$.

The following formula, obtained by curve fitting, may be used to roughly approximate the force magnitude:

$$\left| \frac{F_z}{F_0} \right| \approx 1.8 \left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E} - 1 \right) \left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E} + 1 \right)^{0.31}. \quad (30)$$

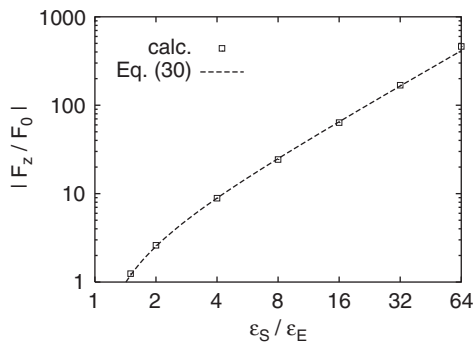


Fig. 8. Force on the conducting sphere as a function of the permittivity ratio $\varepsilon_S/\varepsilon_E$.

Table 2
Comparison of the force on the conducting sphere with the approximation by Eq. (30)

$\varepsilon_S/\varepsilon_E$	F_z/F_0		Difference (%)
	Calculation	Eq. (30)	
2	2.603	2.530	2.791
4	8.880	8.894	0.152
8	24.32	24.90	2.382
16	63.65	64.98	2.095
32	168.5	165.0	2.102
64	461.7	413.6	10.41

The force magnitude given by Eq. (30) is presented by the dotted line in Fig. 8. Table 2 shows the difference between the forces by the method of images and those obtained using Eq. (30). It can be seen from the table that the error is smaller than 3% for permittivity ratios of 2–32. For $\varepsilon_S/\varepsilon_E > 32$, the error in the approximation is considerably high (e.g., 10.4% at $\varepsilon_S/\varepsilon_E = 64$); thus, the force should be directly computed from Eq. (29).

Finally, it is worth noting that we can apply the method described here to numerically calculate the field and force even if the sphere is not in contact with the solid. For example, Fig. 9 presents the maximum field and force on the conducting sphere having its center located above the solid surface by a distance d . Fig. 9(a) shows that the enhancement of the maximum field above the value $3E_0$ (the field where $d/R = \infty$) decreases with increasing d , and is not so significant when $d/R \geq 2$. The force also becomes consistently weaker with increasing d . At sufficiently large d/R , the force varies with the separation roughly as $F \propto d^{-k}$, where k is between 4.0 and 4.2 in Fig. 9(b).

5. Conclusions

This paper presents the analytical solutions of the electric field and force on a conducting sphere in contact with a dielectric solid under a uniform field. The solutions are based on the method of images using point and dipole charges. Fundamental solutions (images) for a general case of a multipole and a dielectric solid are also given here. The contact-point electric field is obtained as a function of K , where $K = (\varepsilon_S - \varepsilon_E)/(\varepsilon_S + \varepsilon_E)$. The numerical results show that the electric field and force increase with increasing the permittivity of the solid dielectric. We propose simple formulae based on curve fitting for estimating the electric field and force. The errors realized by using the formulae are smaller than 3% for permittivity ratios of solid to surrounding medium ranging from 1 to 64 for the field and 2 to 32 for the force.

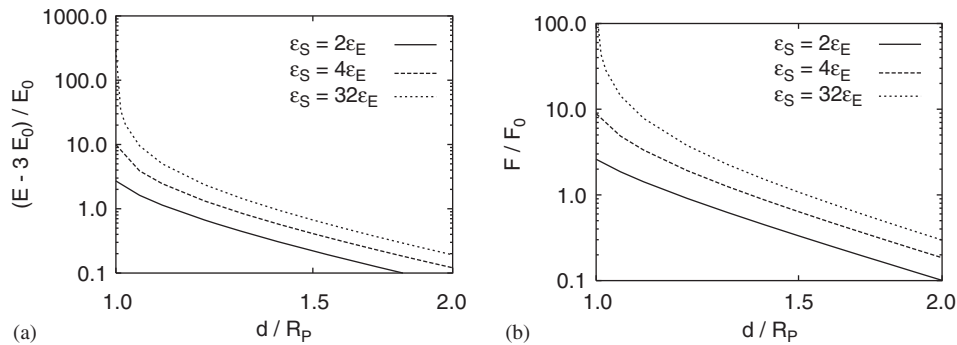


Fig. 9. Variation of the field enhancement and force with separation: (a) electric field, (b) force.

Acknowledgements

This work was supported by the Thailand Research Fund and the Commission on Higher Education, Thailand.

Appendix A. First set of images

This appendix describes the first set of images mentioned in Section 3.3. The images begin with the multipole $B_1^{(1)}$ in Eq. (16). As the image of $B_1^{(1)}$ induced by the dielectric solid, we insert $(B_1')^{(1)}$ in the solid below its surface by a distance R . From Eq. (13),

$$(B_1')^{(1)} = KB_1^{(1)}. \quad (\text{A.1})$$

Next, we apply the images of $(B_1')^{(1)}$ to maintain the equipotential condition on the conducting sphere (see Section 3.1). To simplify the calculation procedure, we treat the sphere as grounded here. The total charge of the sphere must be set to zero in the final step after all the point charges have been applied. Because the distance $d^{(1)}$ between $(B_1')^{(1)}$ and the center of the sphere is equal to $2R$, Eqs. (4) and (5) yield:

$$(B_1)^{(2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 KB_1^{(1)}, \quad (\text{A.2})$$

$$(B_0)^{(2)} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{KB_1^{(1)}}{R}, \quad (\text{A.3})$$

at a height $h^{(2)} = R/2$ above the dielectric solid. Fig. 10 shows the positions of these images.

The multipoles $(B_1)^{(2)}$ and $(B_0)^{(2)}$ induce their images in the dielectric solid, which further interact with the conducting sphere. However, for the first set of images, we neglect the further contribution of all $(B_0)^{(j)}$ (to be treated as the second set of images), and focus only on $(B_1)^{(i)}$, where the superscript (i) denotes the step of repetition. As a result, the images shown in Table 3 are obtained from the repetition. Note that the multipole $(B_1)_i$ at a height R/i for $i = 1, 2, \dots$ is

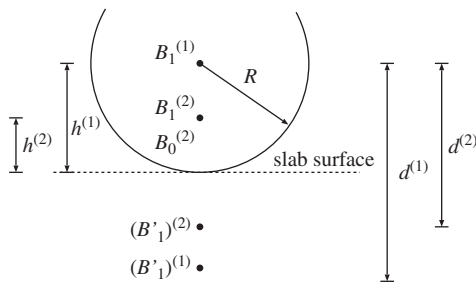


Fig. 10. Positions of the first set of images corresponding to a first-order multipole (dipole) $B_1^{(1)}$.

expressed by

$$(B_1)_i = \frac{1}{i^3} K^{i-1} B_1^{(1)}. \quad (\text{A.4})$$

At the contact point \mathbf{q} in Fig. 1, the electric field E_{c1} due to all $B_1^{(i)}$ and $(B_1')^{(i)}$ is equal to the sum of the field due to each image. Accordingly, E_{c1} , which is in the direction of E_0 , can be written as

$$E_{c1} = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{2B_1^{(i)}}{[h^{(i)}]^3} + \frac{2(B_1')^{(i)}}{[h^{(i)}]^3} \right\} = 2E_0 \frac{1+K}{1-K}. \quad (\text{A.5})$$

Appendix B. Second set of images

The second set of images includes all the images corresponding to $B_0^{(i)}$ ($i = 2, 3, \dots$) described in Appendix A. Consider a zero-order multipole B_{0m} located at a height R/m above the solid surface, where m is an integer and $m \geq 2$. The sphere is still considered to be grounded. Using the proper images described in Sections 3.1 and 3.2, we obtain the sequence of images shown in Table 4, where the superscript (j) denotes the step of repetition. Fig. 11 shows the positions of these images for $j = 1$ and 2.

From Table 4, if we focus on a height R/i for $i = 2, 3, \dots$, the sum $(B_0)_i$ of all the images at this position can be determined as

$$(B_0)_i = \sum_{m=2}^i \frac{m}{i} K^{i-m} B_{0m}. \quad (\text{B.1})$$

Substituting $B_0^{(m)} = -K^{m-1}/[(m-1)m^2R]$ (Table 3) for B_{0m} , we yield

$$\begin{aligned} (B_0)_i &= -\frac{K^{i-1}}{R} \left(\frac{1}{i}\right) \sum_{m=2}^i \frac{1}{m(m-1)} \\ &= -\frac{K^{i-1}}{R} \left(\frac{i-1}{i^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Note that Eq. (B.2) also valids for $i = 1$ because it gives $(B_0)_1 = 0$ as in Table 3.

The electric field $(E_c)_{B_{0m}}$ due to B_{0m} and all of its images is calculated from the formula

$$\begin{aligned} (E_c)_{B_{0m}} &= -(1+K) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{0m}}{R^2} K^{j-1} m(m+j-1) \\ &= -\frac{B_{0m}}{R^2} \frac{1+K}{1-K} \left(m + \frac{K}{1-K}\right) m. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Let E_{c2} denote the electric field at \mathbf{q} due to all $B_{0m}^{(j)}$ and $(B_0')^{(j)}$ for $m = 2, 3, \dots$ and $j = 1, 2, \dots$. Substituting $B_0^{(m)}$ for B_{0m} in the first set of images (shown in

Table 3
Positions and magnitudes of the first set of images in each repetitive step

(i)	$h^{(i)}/R$	$B_0^{(i)}/B_1^{(1)}$	$B_1^{(i)}/B_1^{(1)}$	$(B_1')^{(i)}/B_1^{(1)}$	$d^{(i)}/R$
1	1	—	1	K	2
2	1/2	$-(1/2)^2 K/R$	$(1/2)^3 K$	$(1/2)^3 K^2$	3/2
3	1/3	$-(1/2)(1/3)^2 K^2/R$	$(1/3)^3 K^2$	$(1/3)^3 K^3$	4/3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
i	1/i	$-[1/(i-1)](1/i)^2 K^{(i-1)}/R$	$(1/i)^3 K^{(i-1)}$	$(1/i)^3 K^i$	$(i+1)/i$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Table 4
Positions and magnitudes of the second set of images in each repetitive step

(j)	$h^{(j)}/R$	$B_{0m}^{(j)}/B_{0m}$	$(B_{0m}')^{(j)}/B_{0m}$	$d^{(j)}/R$
1	1/m	1.0	$-K$	$(m+1)/m$
2	1/(m+1)	$[m/(m+1)]K$	$-[m/(m+1)]K^2$	$(m+2)/(m+1)$
3	1/(m+2)	$[m/(m+2)]K^2$	$-[m/(m+2)]K^3$	$(m+3)/(m+2)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
j	1/(m+j-1)	$[m/(m+j-1)]K^{j-1}$	$-[m/(m+j-1)]K^j$	$(m+j)/(m+j-1)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

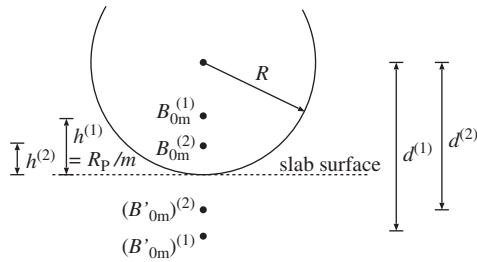


Fig. 11. Positions of the images corresponding to a zero-order multipole B_{0m} .

Table 3) for $m = 2, 3, \dots$, we obtain the following expression for E_{c2} :

$$\begin{aligned}
 E_{c2} &= \sum_{m=2}^{\infty} (E_c)_{B_{0m}} \\
 &= \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{m-1} \left(\frac{1}{m^2} \right) K^{m-1} E_0 R^2 \right] \left[\frac{1}{R^2} \left(\frac{1+K}{1-K} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \left(m + \frac{K}{1-K} \right) m \right] \right\} \\
 &= E_0 \frac{1+K}{1-K} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{K^m}{m} + \frac{K}{1-K} \frac{K^m}{(m+1)m} \right).
 \end{aligned}$$

Because $\sum_{m=1}^{\infty} x^m/m = -\ln(1-x)$ and $\sum_{m=1}^{\infty} x^m/[m(m+1)] = \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + 1$, we can write E_{c2} in a

simple form:

$$E_{c2} = E_0 \frac{(1+K)K}{(1-K)^2}. \quad (\text{B.4})$$

It is worth noting that this set of images can also be used to calculate the electric field in the case of a charged conducting sphere lying on a dielectric solid (without an external field). From Table 4, if we take $m = 1$ and $B_{0m} = 1$, then the sum of the images inside the sphere is expressed by

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{K^{j-1}}{j} = \frac{1}{K} \ln \frac{1}{1-K}, \quad (\text{B.5})$$

for $0 < K < 1$. Consequently, all the images in Table 4 for $m = 1$ and $B_{0m} = 1$ are the solution for the sphere having a net charge equal to $(4\pi\epsilon_E/K) \ln[1/(1-K)]$. These images can be used to obtain the electric field in a general case of a charged, floating sphere, as mentioned in Section 1.

Appendix C. Third set of images

All the zero-order multipoles previously applied contribute to net charge on the conducting sphere. The third set of images is inserted to fulfill the zero-charge condition of the conducting sphere. To neutralize all the charges applied in Appendix B, we place a zero-order

Table 5

Image multipoles due to a unit multipole $B_0'' = 1$

(k)	Images inside the sphere				Images inside the dielectric solid			
	$h = R$	$R/2$	$R/3$	$R/4$	$h = -R$	$-R/2$	$-R/3$	$-R/4$
1	1				$-K$			
2	$-K/2$	$K/2$			$K^2/2$	$-K^2/2$		
3	$-K^2/12$	$-K^2/4$	$K^2/3$		$K^3/12$	$K^3/4$	$-K^3/3$	
4	$-K^3/24$	$-K^3/24$	$-K^3/6$	$K^3/4$	$K^4/24$	$K^4/24$	$K^4/6$	$-K^4/4$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

multipole at the sphere center:

$$B_0'' = \sum_{m=2}^{\infty} B_{0m}'' = - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{0m}^{(j)}, \quad (\text{C.1})$$

where $B_{0m}^{(j)}$ are the images listed in Table 4, and B_{0m}'' is the multipole that balances all $B_{0m}^{(j)}$. From $B_0^{(m)}$ in Table 3 and Eq. (C.1), we get

$$\begin{aligned} B_{0m}'' &= - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{m}{m+j-1} K^{j-1} B_{0m} \\ &= \frac{B_1^{(1)}}{R} \frac{1}{K} \left[\frac{1}{m(m-1)} \right] \left[\ln \left(\frac{1}{1-K} \right) - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{K^j}{j} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

B_0'' can be evaluated from Eqs. (C.1) and (C.2):

$$\begin{aligned} B_0'' &= \sum_{m=2}^{\infty} \left\{ \frac{B_1^{(1)}}{R} \frac{1}{K} \left[\frac{1}{m(m-1)} \right] \left[\ln \left(\frac{1}{1-K} \right) - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{K^j}{j} \right] \right\} \\ &= \frac{B_1^{(1)}}{R} \frac{1}{K} \left\{ \ln \left(\frac{1}{1-K} \right) - \sum_{m=2}^{\infty} \left[\frac{1}{m(m-1)} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{K^j}{j} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Rearranging the summations of j and m in Eq. (C.3), we obtain

$$\begin{aligned} B_0'' &= \frac{B_1^{(1)}}{R} \frac{1}{K} \left\{ \ln \left(\frac{1}{1-K} \right) - \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{K^j}{j} \sum_{m=j+1}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} \right] \right\} \\ &= \frac{B_1^{(1)}}{R} \frac{1}{K} \left\{ \ln \left(\frac{1}{1-K} \right) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{K^j}{j^2} \right\}. \end{aligned}$$

Then, B_0'' can be written in a simple form as

$$B_0'' = \frac{B_1^{(1)}}{R} \frac{1}{K} \left[\ln \left(\frac{1}{1-K} \right) - \beta_K \right], \quad (\text{C.4})$$

where β_K is a function of K , $\beta_K = \sum_{j=1}^{\infty} K^j/j^2$, as defined in Eq. (20).

As explained in Appendix B, B_0'' leads to another sequence of images because of the existence of the dielectric solid. However, for this set of images, we maintain zero net charge by adding an appropriate image

at the sphere center in every repetitive step. Table 5 summarizes the positions and magnitudes of images for an initial multipole $B_0'' = 1.0$ at the sphere center.

In Table 5, the magnitudes of the images inside the sphere can be expressed by the sequence S_k defined in Eq. (21). Consider the images at $h = R$ in the table. The magnitude of the multipole for each k is equal to S_k . Thus, the sum of the multipoles at $h = R$ for all k is denoted by α_K defined in Eq. (19). In general, for a height $h = R/i$ ($i = 1, 2, \dots$) in Table 5, it can be further concluded that the sum of the multipoles at this position is equal to $\alpha_K K^{i-1}/i$. Hence, the sum $(B_0)_i$ of all the images at a height R/i is expressed as

$$(B_0)_i = \frac{\alpha_K K^{i-2}}{i} \frac{B_1^{(1)}}{R} \left[\ln \left(\frac{1}{1-K} \right) - \beta_K \right]. \quad (\text{C.5})$$

We can write the electric field E'_{c3} at \mathbf{q} due to all the multipoles induced by a unit B_0'' in Table 5 as

$$\begin{aligned} E'_{c3} &= -(1+K) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_K K^{l-1}}{l} \left(\frac{l}{R} \right)^2 \\ &= -(1+K) \frac{\alpha_K}{R^2} \sum_{l=0}^{\infty} K^l (l+1) \\ &= -\frac{\alpha_K}{R^2} \frac{1+K}{(1-K)^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Let E_{c3} denote the field at \mathbf{q} due to B_0'' . From Eqs. (C.2) and (C.6), we have

$$\begin{aligned} E_{c3} &= E'_{c3} \sum_{m=2}^{\infty} B_{0m}'' \\ &= -E_0 \frac{\alpha_K}{K} \frac{1+K}{(1-K)^2} \left[\ln \left(\frac{1}{1-K} \right) - \beta_K \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

References

- [1] N.-J. Felici, Forces et charges de petits objets en contact avec une électrode affectée d'un champ électrique, *Rev. Gen. Electr.* 75 (1966) 1145–1160.
- [2] T. Takuma, Field behavior at a triple junction in composite dielectric arrangement, *IEEE Trans. Electr. Insulat.* 26 (1991) 500–509.

- [3] T. Takuma, T. Kawamoto, Field behavior at a contact point of a round electrode with solid dielectric, *Proceedings of the 4th International Symposium on High Voltage Engineering*, Athens, 1983, 12.08.
- [4] W.K.H. Panofsky, M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, second ed., Addison-Wesley Inc., Massachusetts, 1962.
- [5] A.T. Pérez, Charge and force on a conducting sphere between two parallel electrodes, *J. Electrostat.* 56 (2002) 199–217.
- [6] H. Cheng, On the method of images for systems of closely spaced conducting spheres, *SIAM J. Appl. Math.* 61 (2000) 1324–1337.
- [7] B. Techaumnat, T. Takuma, Calculation of the electric field for lined-up spherical dielectric particles, *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insulat.* 10 (2003) 623–633.
- [8] B. Techaumnat, B. Eua-arporn, T. Takuma, Calculation of electric field and dielectrophoretic force on spherical particles in chain, *J. Appl. Phys.* 95 (2004) 1586–1593.
- [9] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1989.
- [10] K. Sakai, S. Tsuru, D.L. Abella, M. Hara, Conducting particle motion and particle-initiated breakdown in dc electric field between diverging conducting plates in atmospheric air, *IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insulat.* 6 (1999) 122–130.

Analysis of the Electric Field and Force in an Arrangement of a Conducting Sphere and a Plane Electrode with a Dielectric Barrier

Boonchai Techaumnat

Chulalongkorn University
Department of Electrical Engineering
Phyathai road, Pathumwan, Bangkok 10330, Thailand

and **Tadasu Takuma**

Central Research Institute of Electric Power Industry
2-11-1 Iwado kita, Komae-shi, Tokyo 201-8511, Japan

and Tokyo Denki University
2-2 Kanda-Nishiki-cho, Chiyoda-ku, Tokyo 201-8547, Japan

ABSTRACT

This paper presents an analysis of the electric field and dielectrophoretic force in an arrangement consisting of an uncharged conducting sphere and a plane electrode with a dielectric barrier. The electric field is calculated by using the method of multipole images using an iterative algorithm proposed for calculating the images of the dielectric barrier of finite thickness. The calculation results show electric field intensification due to the presence of the dielectric barrier having higher permittivity, ϵ_s , than that of the surrounding medium, ϵ_e ; however, if the barrier is separated from the conducting sphere by at least the sphere radius, its influence is negligible. Inside the dielectric barrier, the electric field on the axis of symmetry becomes more uniform and the average field significantly increases with decreasing its thickness. For a case where dielectric barrier is sufficiently thin, the electric field at the contact point and the force on the conducting sphere vary approximately as power functions of ϵ_s / ϵ_e .

Index Terms — electric fields, force, Laplace equation, spheres, electrostatic analysis.

1 INTRODUCTION

ELECTRIC field and force on particles are important in many applications of dielectric materials. In gas insulation systems, for example, particles tend to be attracted to a stressed electrode by the force, resulting in field enhancement that may cause partial discharge or breakdown [1]. The behavior of the field and the force on a particle decisively depends on whether the particle is dielectric or conducting. For the dielectric particle, the electric field and force have been analyzed under various conditions for high-voltage insulation equipment or electrorheological fluid [2-6]. For the conducting particle, most of the works reported deal with configurations of two particles [7-10] or those of a particle and a plane electrode [11, 12]. Interaction between a conducting sphere and a solid dielectric of semi-infinite thickness [13, 14] or finite thickness [14, 15] has been already reported. However, the analysis in [14, 15] has considered only the

electric field in the cases where the thickness of the solid dielectric is larger than or equal to the radius of the sphere.

This paper focuses on an arrangement consisting of an uncharged conducting sphere and a plane electrode under an external field where there exists a dielectric barrier preventing the electrode from making direct contact with the sphere. This arrangement is a fundamental one for analyzing various applications. For example, such a dielectric barrier may be coated on an electrode in gas-insulated switchgear [16,17] or may be used in experiments on particle motion [18]. A dielectric barrier also appears as the medium between two conductors in printing systems. Another example is coated plate electrodes used in the application of an electrorheological fluid with metal particles [19]. The electric field and force are of interest here because the field is related to the occurrence of partial discharge, by which the sphere can acquire charges, and the force may attract the particle to the electrode, thus having an influence on the particle motion and

indirectly enhancing the field. By numerical field-calculation methods, an accurate analysis of the electric field and force in this arrangement is difficult because: (a) the field is highly non-uniform if the sphere is very close to the electrode, and (b) significant numerical errors may occur if the dielectric barrier is very thin. Although a thin dielectric layer may be approximated by a zero-thickness element in numerical field calculations, the representation is not valid unless its thickness is sufficiently small or its permittivity is great enough [20]. In this work, to attain results of high accuracy, we present an iterative algorithm for calculating the electric field in the arrangement by the method of multipole images, an analytical method. The algorithm has been applied to obtain the electric field and force for a wider range of the solid-dielectric thickness than that in [14, 15]. It is suggested here that the method of multipole images can be easily modified to deal with the arrangement of sphere-sphere or sphere-plane gaps used for the breakdown tests of solid dielectrics where the sphere is not exposed to an external field but stressed to a fixed voltage [21].

2 ARRANGEMENT OF CALCULATION

Figure 1 shows the physical arrangement considered in this paper. The arrangement consists of an uncharged conducting sphere with a radius r_p centered above a grounded plane electrode by a height h . A dielectric barrier of thickness t exists on the electrode and prevents direct contact between the sphere and the electrode. The conducting sphere is subjected to an external uniform field \mathbf{E}_0 in the vertical direction. The permittivities of the dielectric barrier and the surrounding medium are denoted by ϵ_S and ϵ_E , respectively. The representation by the plane electrode should be justified in most practical cases that the sphere is much smaller than the plane electrode involved. For generality, the sphere radius and the external field are taken as unit value. We vary the ratios t/r_p from 0.001 to 100 and ϵ_S/ϵ_E from 1 to 10 in the analysis to clarify their effects on the electric field and the force on the sphere. For arbitrary values of r_p , h , t , and \mathbf{E}_0 , the field and force can be readily obtained by scaling the normalized results presented in this paper.

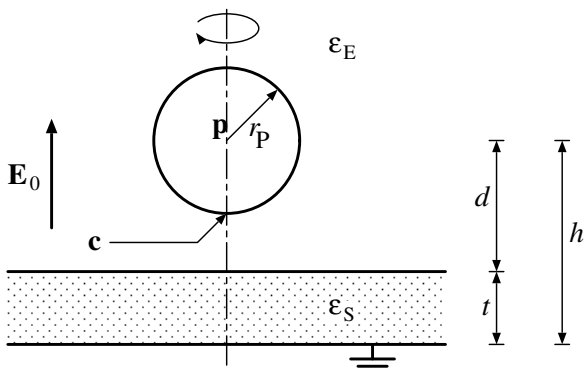


Figure 1. Calculation arrangement.

3 ANALYTICAL METHOD

The method of multipole images [5, 6] is used to calculate the electric field in the arrangement of Figure 1. The method is principally the classical method of images [22] using multipoles of higher orders than point or dipole charges, e.g. quadrupoles or octopoles. Since the potential due to multipoles naturally satisfies the Laplace equation, the analytical solutions are obtained by placing the multipoles to match the boundary conditions given. The potential, axisymmetrical in the arrangement, is expanded around the sphere center as the sum of spherical harmonics. The existence of the dielectric barrier on the electrode is taken into account by placing multipole images repetitively, as described in the following sections.

3.1 IMAGES FOR A MULTIPOLE AND A DIELECTRIC SOLID WITH SEMI-INFINITE THICKNESS

Consider an n th-order multipole B_n located at a point \mathbf{p} above a dielectric solid with semi-infinite thickness by a distance d , as shown in Figure 2. The potential, ϕ_B , due to this multipole is expressed by

$$\phi_B = \frac{B_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos \theta_p), \quad (1)$$

where (r_p, θ_p) are the spherical coordinates in which \mathbf{p} is the origin, and P_n is the Legendre function. Two multipole images of B_n are placed to satisfy the boundary conditions of potential and electric field on the dielectric interface. The images are B'_n at \mathbf{p}' in Figure 3(a) and B''_n at \mathbf{p} in Figure 3(b).

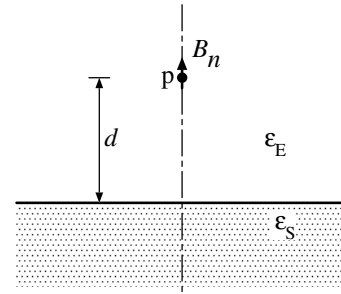


Figure 2. Multipole B_n and a dielectric solid of semi-infinite thickness.

By the method of images, we express separately the resultant potentials ϕ_S inside and ϕ_E outside the dielectric solid as follows.

$$\phi_S = \frac{B''_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos \theta_p) \quad (2)$$

$$\phi_E = \frac{B'_n}{r_{p'}^{n+1}} P_n(\cos \theta_{p'}) + \phi_B \quad (3)$$

where $(r_{p'}, \theta_{p'})$ are defined in the similar manner as (r_p, θ_p) . On the dielectric interface, the potentials ϕ_S and ϕ_E must satisfy the following boundary conditions:

$$\phi_S = \phi_E \quad (4)$$

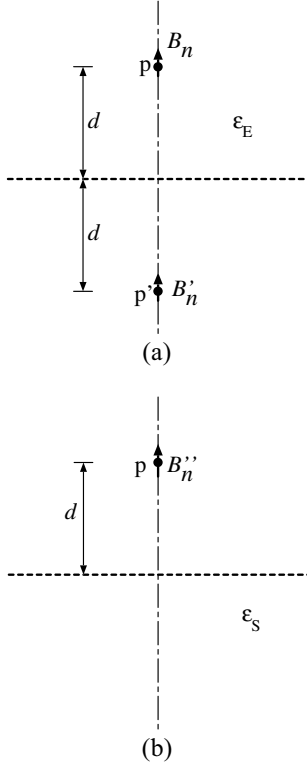


Figure 3. Multipole images for (a) the exterior and (b) the interior of the dielectric solid in Figure 2.

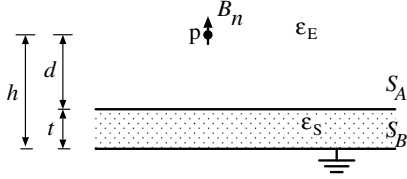


Figure 4. Multipole B_n and a dielectric barrier of finite-thickness.

$$\epsilon_S \frac{\partial \phi_S}{\partial n} = \epsilon_E \frac{\partial \phi_E}{\partial n} \quad (5)$$

where $\partial/\partial n$ is the partial derivative in the direction normal to the interface. From equations (4) and (5), it can be derived that B'_n and B''_n are related to B_n by

$$B'_n = (-1)^{n+1} K B_n \quad (6)$$

$$B''_n = (1 - K) B_n \quad (7)$$

where K is defined as a function of the permittivities,

$$K = \frac{\epsilon_S - \epsilon_E}{\epsilon_S + \epsilon_E} \quad (8)$$

Note that $0 \leq K < 1$ for $\epsilon_E \leq \epsilon_S < \infty$.

3.2 IMAGES FOR A MULTIPOLE AND A GROUNDED PLANE ELECTRODE WITH A DIELECTRIC BARRIER

Consider an n th-order multipole B_n at a point \mathbf{p} above a grounded plane electrode with a dielectric barrier, as shown in Figure 4. The multipole is separated from the electrode surface S_B by a distance h and from the dielectric interface S_A by a distance $d = h - t$, where t is the barrier thickness. In this

case, image multipoles must be iteratively inserted to satisfy the boundary conditions (4) and (5) on the interface S_A and the zero-potential condition on the surface S_B .

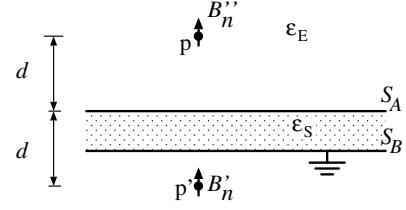


Figure 5. First set of images, B'_n and B''_n , induced by the dielectric barrier.

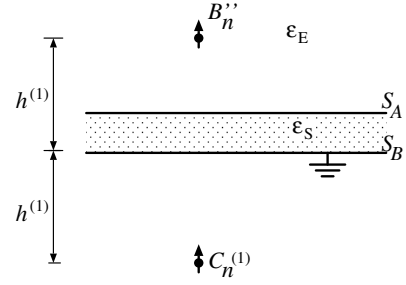


Figure 6. Image $C_n^{(1)}$ induced by the plane electrode.

The repetitive procedure is carried out in the following steps to fulfill the boundary conditions on S_A and S_B , where $d^{(i)}$ and $h^{(i)}$ denote the distances from S_A and S_B of an image multipole at the i -th repetition, respectively.

1. Place B'_n and B''_n as the images of B_n using equations (6) and (7) for the dielectric barrier (Figure 5) to satisfy the boundary conditions on the interface S_A . The potentials ϕ_E in the exterior and ϕ_S in the dielectric barrier are expressed by

$$\phi_E = \phi_B + \phi_{B'} \quad (9)$$

$$= \frac{B_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos \theta_p) + \frac{B'_n}{r_{p'}^{n+1}} P_n(\cos \theta_{p'}) \quad (10)$$

$$\phi_S = \phi_{B''} \quad (11)$$

$$= \frac{B''_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos \theta_p) \quad (12)$$

2. Place a multipole $C_n^{(1)}$ at a distance $h^{(1)} = h$ inside the plane electrode as the image of B''_n with respect to the electrode surface S_B (see Figure 6). $C_n^{(1)}$ is related to B''_n by [5]

$$C_n^{(1)} = (-1)^{n+1} B''_n \quad (13)$$

The potential within the dielectric barrier then becomes

$$\phi_S = \phi_{B''} + \phi_{C_n^{(1)}} \quad (14)$$

3. Place $C_n^{(1)}$ and $C_n^{(1)}$ as the images of $C_n^{(1)}$ induced by the surrounding medium to satisfy the boundary conditions on the dielectric interface S_A (Figure 7). Note that the constant K in this step is equal to $(\epsilon_E - \epsilon_S)/(\epsilon_E + \epsilon_S)$, different from that in Step 1, because $C_n^{(1)}$ contributes to the

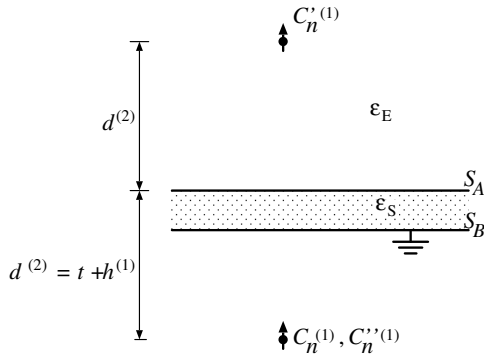


Figure 7. Image $C_n^{(1)}$ induced by the plane electrode.

potential in the dielectric barrier. The potentials are then rewritten as

$$\phi_E = \phi_B + \phi_{B'} + \phi_{C_n^{(1)}} \quad (15)$$

$$\phi_S = \phi_{B''} + \phi_{C_n^{(1)}} + \phi_{C_n^{(1)'}} \quad (16)$$

4. Because $C_n^{(1)}$ perturbs the potential in the dielectric barrier, we insert $C_n^{(2)}$ below the electrode surface S_B by $h^{(2)} = d^{(2)} + t$ as the image of $C_n^{(1)}$ with respect to S_B , where

$$C_n^{(2)} = (-1)^{n+1} C_n^{(1)} \quad (17)$$

5. Repeat Steps 3 and 4 until the potentials ϕ_E and ϕ_S converge.

The convergence of the solutions depends on the thickness t and the permittivity ratio ϵ_S/ϵ_E as the potentials converge faster for larger t and smaller ϵ_S/ϵ_E . Note that we may consider all the multipoles B'_n , B''_n , $C_n^{(i)}$, $C_n^{(i)'}$, and $C_n^{(i)''}$ as a set of the images of B_n induced by the plane electrode with the dielectric barrier.

3.3 CONDUCTING SPHERE AND A GROUNDED PLANE ELECTRODE WITH A DIELECTRIC BARRIER

The calculation procedure for the arrangement in Figure 1 is more complicated than that in the previous section because of the presence of the conducting sphere. The arrangement is treated as composed of two objects: (1) the sphere and (2) the plane electrode with the dielectric barrier. Two additional conditions on the conducting sphere to be fulfilled are that the potential must be constant and the net charge must be zero. The calculation begins with an initial multipole B (dipole) at the sphere center, \mathbf{p} , induced by the external field. B satisfies the boundary conditions on the former object (sphere surface) in the absence of the latter one. Since the potential ϕ_{ext} due to the external uniform field can be expressed as

$$\phi_{ext} = -E_0 h - E_0 r_p \cos \theta_p \quad (18)$$

we get from the boundary conditions on the sphere that [5]

$$B_1 = E_0 r_p^3 \quad (19)$$

Using the procedure described in the previous section, we obtain the set of the images of B that satisfy the conditions on

the surfaces of the dielectric barrier. The first few multipoles are expressed as follows:

$$B'_1 = K E_0 r_p^3 \quad (20)$$

$$B''_1 = (1-K) E_0 r_p^3 \quad (21)$$

$$C_1^{(1)} = (1-K) E_0 r_p^3 \quad (22)$$

$$C_1^{(1)'} = -(1-K) K E_0 r_p^3, \text{ and} \quad (23)$$

$$C_1^{(1)''} = (1-K)(1+K) E_0 r_p^3 \quad (24)$$

In the above expressions, $K = (\epsilon_S - \epsilon_E)/(\epsilon_S + \epsilon_E)$.

Then, the potentials due to all B' and C'' are re-expanded to \mathbf{p} , and the next set of multipoles B is inserted at \mathbf{p} to satisfy the boundary conditions on the sphere surface again. Details of the multipole re-expansion and the image for a conducting sphere are described in [5, 6]. Note that, starting from the second iteration, multipoles of higher degrees (B_2, B_3, \dots) appear as a result of the multipole re-expansion. The images are repetitively applied in this manner until ϕ_E and ϕ_S converge. Figure 8 shows the schematic description of the calculation process. For all the calculations carried out in this paper, we use the multipole order up to 400 and the numbers of repetitions lie between 5 and 110, depending on the dielectric-barrier thickness and the permittivity ratio. It is worth noting that, although we treat the uncharged conducting sphere in this paper, the same calculation process can also be used for a charged conducting sphere or a dielectric sphere. Only the determination of B_n from M_n is different, depending on the boundary conditions of the sphere.

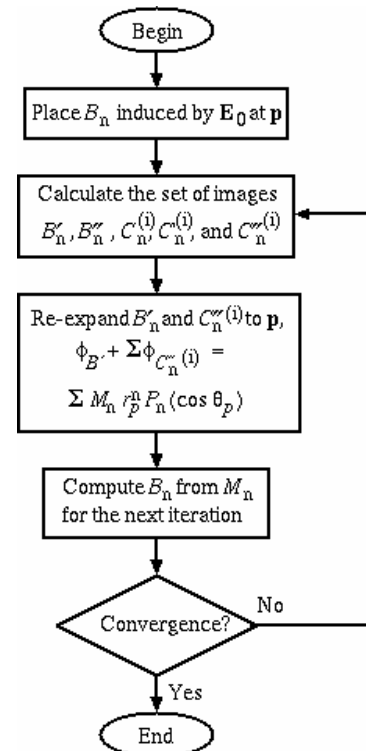


Figure 8. Schematic description of the repetitive process.

4 CALCULATION RESULTS AND DISCUSSIONS

4.1 ELECTRIC FIELD AND FORCE IN RELATION TO DISTANCE d

Figure 9 displays the potential distribution near the conducting sphere for $t/r_p = 1.0$, $d/r_p = 1.2$ and $\varepsilon_s/\varepsilon_E = 4$. The potential normalized by $E_0 r_p$ is represented in grey scale in the lower horizontal bar. From the equipotential lines, field intensification is clearly noticeable near the sphere surface. The field intensification is particularly high in the gap between the conducting sphere and the dielectric barrier. The maximal field, located at the point **c** in Figure 1, is equal to $3E_0$ in the absence of the grounded plane and the dielectric barrier. With the grounded plane but without the dielectric barrier (or $\varepsilon_s/\varepsilon_E = 1$), the maximal field becomes $3.14E_0$. The presence of the dielectric barrier having $\varepsilon_s/\varepsilon_E > 1$ further enhances the maximal electric field, which is equal to $4.44E_0$ in this case.

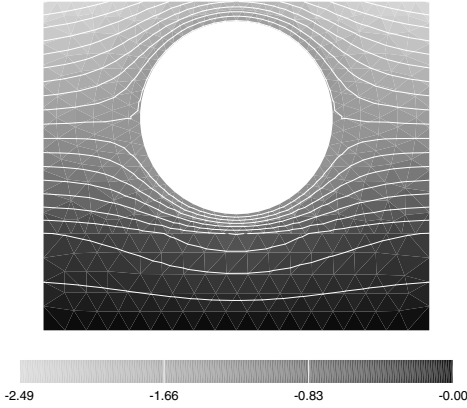


Figure 9. Potential distribution for $t/r_p = 1.0$, $d/r_p = 1.2$, and $\varepsilon_s/\varepsilon_E = 4$.

Figure 10 gives the maximal electric field relative to the normalized distance, $d/r_p - 1$, between the sphere surface and the dielectric barrier for $t/r_p = 1$ and 0.01 . It is clear from the figure that the influence of the dielectric barrier is negligible for $d/r_p \geq 2$. For smaller d/r_p , the maximal field increases with decreasing distance. Increase in the permittivity ratio also enhances the maximal field. If the distance is sufficiently small, the field reaches its saturation value depending on $\varepsilon_s/\varepsilon_E$. Note that the field varies with the distance even for $\varepsilon_s/\varepsilon_E = 1$ because of the effect of the plane electrode as explained already.

Because the arrangement is axisymmetrical, the force acting on the conducting sphere is in the vertical direction. The vertical force F_z is downward, attracting the sphere to the

electrode. Figure 11 shows F_z normalized by $F_0 = \varepsilon_E E_0^2 r_p^2 / 2$ as a function of the distance. The force behavior is obviously similar to that of the maximal field in Figure 10; however, the force magnitude cannot be estimated from E_{\max} because the electric field is highly non-uniform on the sphere. The force magnitude is zero where $d/r_p \rightarrow \infty$ because the influences of the dielectric barrier and the plane electrode diminish in this condition. With decreasing d/r_p , the force becomes stronger, and then approaches to the saturation value corresponding to $d/r_p = 1$.

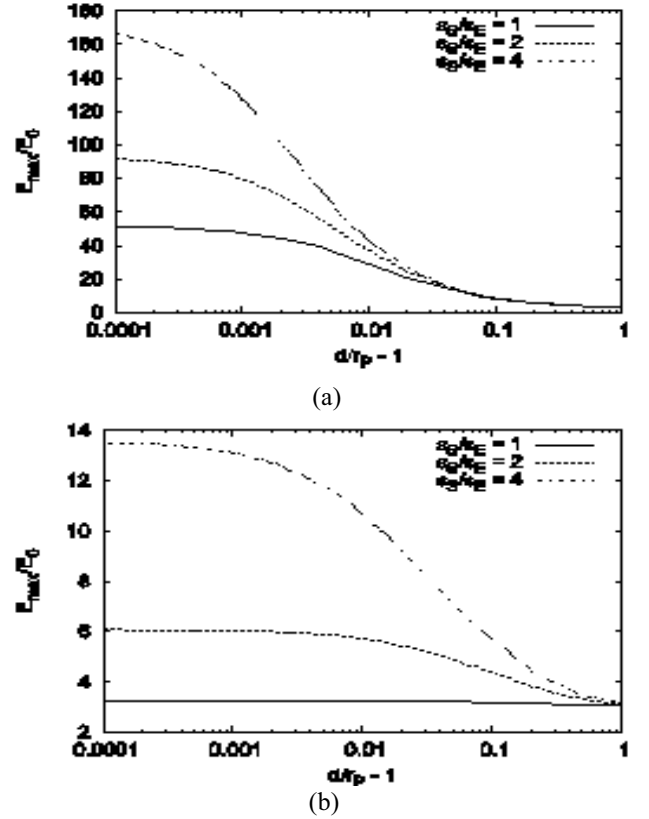


Figure 10. Maximal electric field in relation to the distance from the dielectric barrier for (a) $t/r_p = 1.0$ and (b) $t/r_p = 0.01$.

4.2 ELECTRIC FIELD AND FORCE WHEN THE SPHERE IS IN CONTACT WITH THE BARRIER

4.2.1 ELECTRIC FIELD DISTRIBUTION INSIDE THE DIELECTRIC BARRIER

Figure 12 shows the normalized potential distribution from the upper to the lower surface of the dielectric barrier in contact ($d/r_p = 1$) with the conducting sphere for $t/r_p = 1$, 0.1 , and 0.01 . Figures 12b and 12c show the enlarged $4t \times t$ view of the dielectric barrier for $d/r_p = 0.1$ and 0.01 , respectively, so that we can more clearly see the distribution. The contact point **c** is located at the middle of the upper boundary. In Figure 12, the potential is minimal at **c** and

maximal (zero) on the bottom boundary. We shall focus on the average electric field along the axis of symmetry, the vertical line passing \mathbf{c} , as it is the shortest path between the sphere and the grounded plane. From the minimal potentials shown in Figure 12, it is clear that the average field on this line increases with decreasing t .

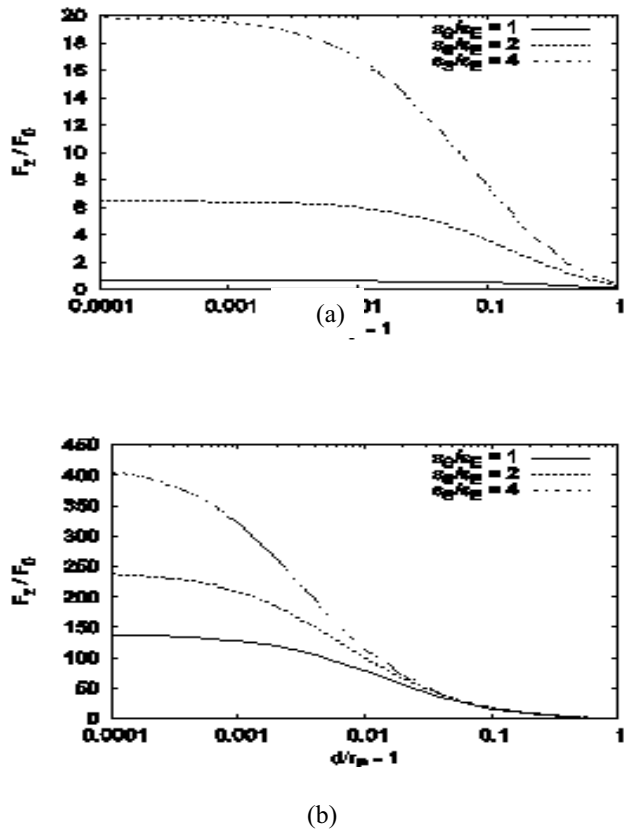


Figure 11. Attractive force acting on the conducting sphere in relation to the distance from the dielectric barrier for (a) $t/r_p = 1.0$ and (b) $t/r_p = 0.01$.

Figure 13 gives the average electric field, E_{av} , on the axis in the barrier as a function of t/r_p for various values of ϵ_S/ϵ_E . The figure shows that E_{av} is close to $\epsilon_E E_0/\epsilon_S$ for a thick dielectric barrier. E_{av} increases with decreasing t/r_p . The increase of E_{av} is slow at large t/r_p , but becomes much faster at smaller values of t/r_p (less than about ten). For a thin dielectric barrier, the effect of the permittivity ratio becomes less significant as the values of E_{av} in Figure 13 for all ϵ_S/ϵ_E are very close to each other (although E_{av} is still lower for higher ϵ_S/ϵ_E). The average field becomes infinitely high as $t/r_p \rightarrow 0$, i.e. in the absence of the barrier.

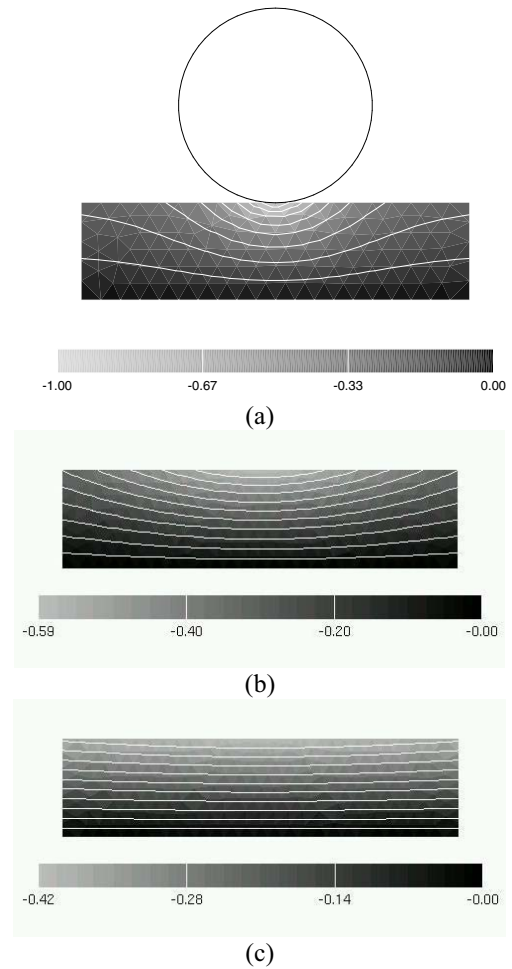


Figure 12. Potential distribution inside the dielectric barrier in contact with the conducting sphere for (a) $t/r_p = 1.0$, (b) $t/r_p = 0.1$, and (c) $t/r_p = 0.01$.

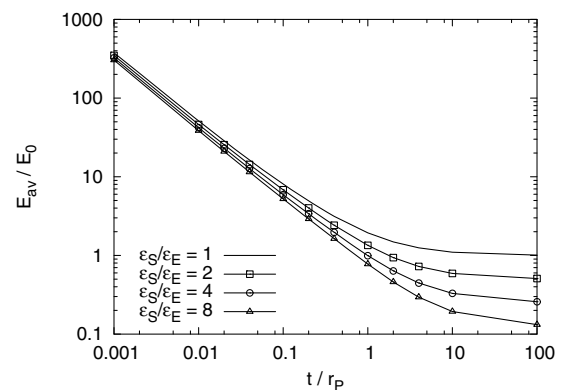


Figure 13. Average electric field on the axis of symmetry in the dielectric barrier.

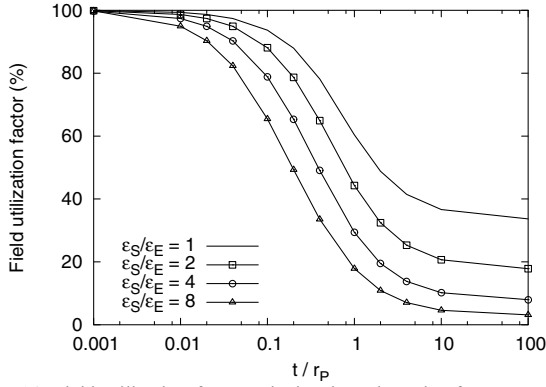


Figure 14. Field utilization factor calculated on the axis of symmetry in the dielectric barrier.

Another important parameter in the design of the dielectric barrier is the field utilization factor, η , defined as the ratio of the average field to the maximal field. Figure 14 gives the field utilization factor in relation to t/r_p for various values of ϵ_s/ϵ_E . The figure shows that, for a same value of t/r_p , η is smaller for a greater ϵ_s/ϵ_E ratio. With decreasing t/r_p , η increases and converges to unity as $t/r_p \rightarrow 0$. For the range of ϵ_s/ϵ_E considered here, η is higher than 90% if $t/r_p \leq 0.02$. This means that, within a sufficiently thin dielectric barrier, the field distribution along the axis of symmetry becomes approximately uniform.

4.2.2 ELECTRIC FIELD AND FORCE ON THE CONDUCTING SPHERE

This section discusses the electric field in the ϵ_E -side and the force on the conducting sphere in contact with the dielectric barrier. A triple junction or a contact point, the point where three media meet together, is formed at **c**. Figures 15a and 15b show the triple-junction field, E_c at **c** (in the ϵ_E -side), and the force F_z as functions of t/r_p . For sufficiently large t/r_p , the arrangement approximates to that of a conducting sphere in contact with a solid dielectric of semi-infinite thickness. The triple-junction field and the force for this case depend only on ϵ_s/ϵ_E , and can be simply approximated by [13]

$$\frac{E_c}{E_0} = 0.696 \left(\frac{\epsilon_s}{\epsilon_E} + 1.32 \right)^{1.73} \quad (25)$$

$$\frac{F_z}{F_0} = 1.8 \left(\frac{\epsilon_s}{\epsilon_E} - 1 \right) \left(\frac{\epsilon_s}{\epsilon_E} + 1 \right)^{0.31} \quad (26)$$

In Figure 15, the magnitudes of E_c and F_z are clearly enhanced by the effect of the plane electrode when t/r_p is smaller than unity. The figure also implies that, without the dielectric barrier ($t/r_p \rightarrow 0$), both E_c and F_z become infinity.

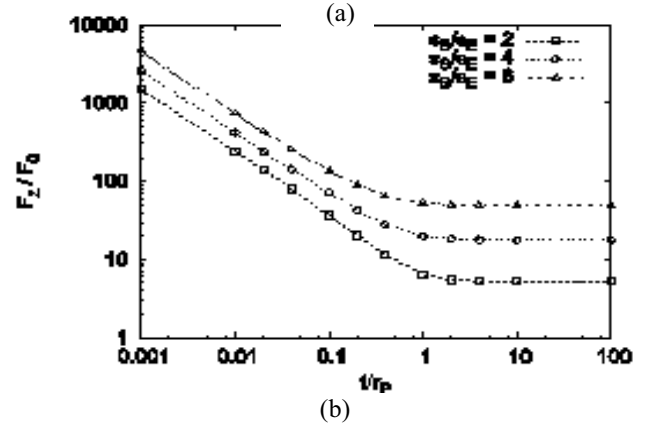
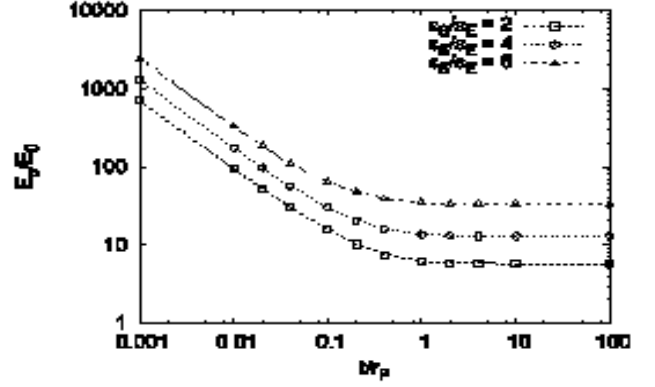


Figure 15. Contact-point electric field (a) and force (b) as functions of the thickness of the dielectric barrier.

Figures 16a and 16b show the contact-point field and the force, respectively, as functions of the permittivity ratio for $t/r_p = 0.1, 0.01$, and 0.001 . The field and the force for $t/r_p \leq 0.1$ vary with the permittivity ratio approximately by the following relations:

$$E_c = E_{c1} \left(\frac{\epsilon_s}{\epsilon_E} \right)^a \quad (27)$$

$$F_z = F_{z1} \left(\frac{\epsilon_s}{\epsilon_E} \right)^b \quad (28)$$

where E_{c1} and F_{z1} are, respectively, the field and the force where $\epsilon_s/\epsilon_E = 1$, a and b are appropriate constants. In the case where the conducting sphere in Figure 1 possesses a fixed potential ϕ_0 instead of the external field E_0 , it has been deduced that $a=1$ for a very thin dielectric barrier [14]. However, in our results of the uncharged conducting sphere, the values of a are between 0.88 and 0.95 for $0.001 \leq t/r_p \leq 0.1$. The values of b are between 0.80 and 0.97 for the same range of t/r_p . Because a differs from unity, it is implied that the electric field in the dielectric barrier (ϵ_s -side) at the contact point still exhibits small dependence on the permittivity ratio. The approximations by equations

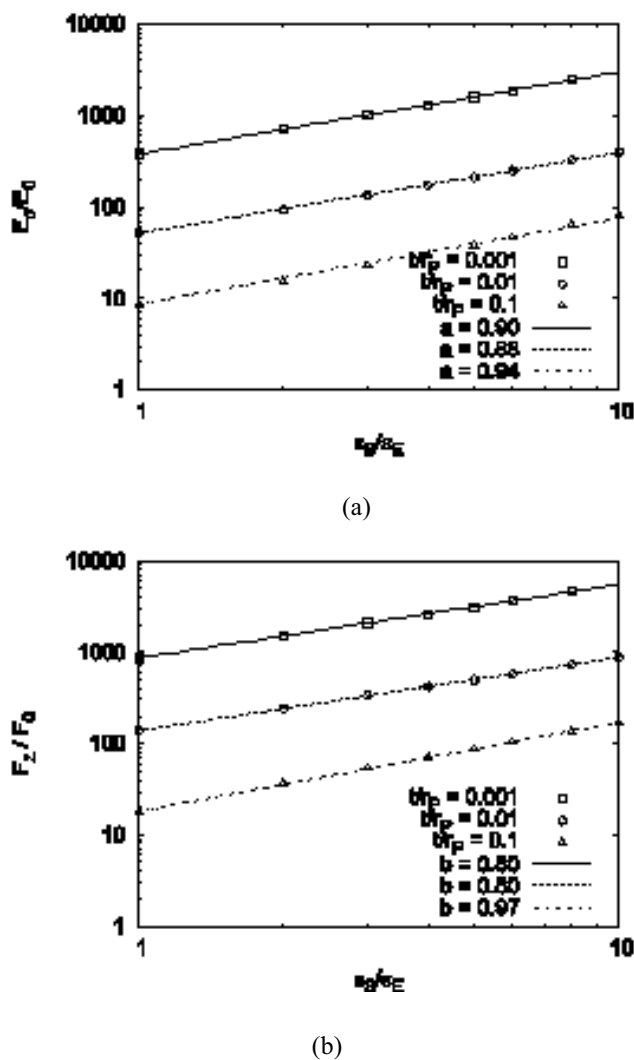


Figure 16. Contact-point electric field (a) and force (b) as functions of the permittivity ratio.

indicates the values of a and b computed by using the method of least squares.

5 CONCLUSIONS

The electric field and force have been analyzed by the method of multipole images for an uncharged conducting sphere on the grounded plane covered with a dielectric barrier under an external field. The results can be summarized as follows for the sphere radius r_p , barrier thickness t , and separation d .

1. The dielectric barrier mitigates the electric field and force when compared with those in the absence of the barrier ($t = 0$). However, the field and force are still enhanced if the permittivity of the barrier is greater than that of the surrounding medium.
2. If the separation $d > 2r_p$, the field will approximate to that on a single sphere without the grounded plane and barrier, and the force will be very small.

3. Thinner barriers cause higher contact field, which increases with the barrier permittivity.
4. For a sphere having $r_p < t$, the analysis can be simplified by treating the barrier as one with semi-infinite thickness.
5. The maximal field and force approximate to power functions of ϵ_s / ϵ_e if $r_p > 10t$.

ACKNOWLEDGMENT

This work was supported by the Thailand Research Fund and the Commission on Higher Education, Thailand.

REFERENCES

- [1] K. Sakai, S. Tsuru, D.L. Abella, and M. Hara, "Conducting particle motion and particle-initiated breakdown in dc electric field between diverging conducting plates in atmospheric air", IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul., Vol.6, pp.122-130, 1999.
- [2] T. Takuma, "Field behavior at a triple junction in composite dielectric arrangements", IEEE Trans. Electr. Insul., Vol.26, pp.500-509, 1991.
- [3] M. Washizu and T.B. Jones, "Multipolar dielectrophoretic force calculation", J. Electrostatics, Vol.33, pp.187-198, 1994.
- [4] Y. Nakajima and T. Matsuyama, "Electrostatic field and force calculation for a chain of identical dielectric spheres aligned parallel to uniformly applied electric field", J. Electrostatics, Vol.55, pp.203-221, 2002.
- [5] B. Techaumnat and T. Takuma, "Calculation of the electric field for lined-up spherical dielectric particles", IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul., Vol.10, pp.623-633, 2003.
- [6] B. Techaumnat, B. Eua-arporn, and T. Takuma, "Calculation of electric field and dielectrophoretic force on spherical particles in chain", J. Appl. Phys., Vol.95, pp.1586-1593, 2004.
- [7] P.C. Chaumet and J.P. Dufour, "Electric potential and field between two different spheres", J. Electrostatics, Vol.43, pp.145-159, 1998.
- [8] H. Cheng, "On the method of images for systems of closely spaced conducting spheres", SIAM J. Appl. Math., Vol.61, pp.1324-1337, 2000.
- [9] Z. Jiang, "Electrostatic interaction of two unequal conducting spheres in uniform electric field", J. Electrostatics, Vol.58, pp.247-264, 2003.
- [10] W.S. Czarnecki and L.B. Schein, "Electrostatic force acting on a spherically symmetric charge distribution in contact with a conductive plane", J. Electrostatics, Vol.61, pp.107-115, 2004.
- [11] N.-J. Felici, "Forces et charges de petits objets en contact avec une electrode affectee d'un champ électrique", Rev. Gen. Electr., Vol.75, 1145-1160, 1966.
- [12] A.T. Perez, "Charge and force on a conducting sphere between two parallel electrodes", J. Electrostatics, Vol.56, pp.199-217, 2002.
- [13] B. Techaumnat and T. Takuma, "Electric field and force on a conducting sphere in contact with a dielectric solid", To be published in J. Electrostatics.
- [14] T. Takuma and T. Kawamoto, "Field intensification near various points of contact with a zero contact angle between a solid dielectric and an electrode", IEEE Trans. Power App. Syst., Vol.103, pp.2486-2494, 1984.
- [15] Y.L. Chow, K.D. Srivastava, and C. Charalambous, "Electric field between a conducting sphere and a dielectric-coated electrode", J. Electrostatics, Vol.11, pp.167-178, 1982.
- [16] M.M. Marcos, S. Zhang, and K.D. Srivastava, "Management of particle contamination in GIS/GITL by electrode coating", CIGRE Paper 15-401, 2002.
- [17] H. Hasegawa, K. Yamaji, M. Hatano, F. Endo, T. Rokunohe, and T. Yamagiwa, "Development of insulating structure and enhancement of insulation reliability of 500 kV DC GIS", IEEE Trans. Power Del., Vol.12, pp.194-202, 1997.

- [18] K. Sakai, D.L. Abella, J. Suehiro, and M. Hara, "Charging and behavior of a spherically conducting particle on a dielectrically coated electrode in the presence of electrical gradient force in atmospheric air, IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul., Vol.9, pp.577-588, 2002.
- [19] W. Wen and K. Lu, "Frequency dependence of metal-particle/insulating oil electrorheological fluids", Appl. Phys. Lett., Vol.67, pp.2147-2148, 1995.
- [20] B. Techaumnat and T. Takuma, "Electric Field and Dielectrophoretic Force on Particles with a Surface Film", J. Appl. Phys., Vol.96, pp.5877-5885, 2004.
- [21] L. Flandin, L. Vouyovitch, A. Beroual, J-L. Bessede, and N.D. Alberola, "Influences of degree of curing and presence of inorganic fillers on the ultimate electrical properties of epoxy-based composites: experiment and simulation", J. Phys. D: Appl. Phys., Vol.38, pp.144-155, 2005.
- [22] D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall International Inc., third edition, pp.121-127, New York, 1999.



Boonchai. Techaumnat (M'02) was born in Bangkok, Thailand in 1970. He received the B.Eng. and M.Eng. degrees from Chulalongkorn University, Thailand, in 1990 and 1995, respectively. He received the D.Eng. in electrical engineering from Kyoto University, Japan, in 2001. He joined the Faculty of Engineering, Chulalongkorn University as a lecturer in 1995, and has been an Assistant

Professor at the faculty since 2003. Dr. Techaumnat received the medal prize for new scholars from the Thailand Research Fund in 2005. His research interests include numerical field analysis, electrical insulation, and other applications of dielectric materials.



Tadasu Takuma (SM'84-F'91) was born in Mie prefecture, Japan, on 30 September 1938. He received the B.S., M.S., and Ph.D. degrees in 1961, 1963, and 1966, respectively. He joined the Central Research Institute of Electric Power Industry (CRIEPI) in 1967. He served as Visiting Professor of the Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University from 1989 to 1993 and as Professor in the Department of Electrical Engineering, Kyoto University from 1995 to 2002. He is now a research advisor to Komae Research Laboratory, CRIEPI. His principal fields of interest are SF₆ gas insulation, gas discharges, environmental problems of overhead transmission lines, numerical field calculation and new energy problems. Dr. Takuma received the Maxwell Premium from the Institute of Electrical Engineers, Great Britain, in 1974, and twice the book prize from the IEE, Japan in 1981 and 1991, and Commendation from the Minister of State for Science and Technology, Japan in 1992.



This article was published in an Elsevier journal. The attached copy is furnished to the author for non-commercial research and education use, including for instruction at the author's institution, sharing with colleagues and providing to institution administration.

Other uses, including reproduction and distribution, or selling or licensing copies, or posting to personal, institutional or third party websites are prohibited.

In most cases authors are permitted to post their version of the article (e.g. in Word or Tex form) to their personal website or institutional repository. Authors requiring further information regarding Elsevier's archiving and manuscript policies are encouraged to visit:

<http://www.elsevier.com/copyright>

Dynamic simulation using a multipolar model of particles under dielectrophoretic force

Annop Limsimarat*, Boonchai Techaumnat

Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University, Phayathi Road, Patumwan, Bangkok 10330, Thailand

Received 1 July 2006; received in revised form 25 April 2007; accepted 1 May 2007

Available online 30 May 2007

Abstract

This article presents the simulation of an electrorheological (ER) fluid system by using a multipole model that includes multipolar interactions between particles. The model uses the multipole re-expansion and the method of images for calculating electric field and force. The highest order of multipoles (N_{mp}) and the number of iterations (N_{iter}) used in the method of images can be chosen for the accuracy of the force approximation and the simulation time required. Study of a two-particle configuration shows that the force does not increase linearly with increasing N_{mp} and N_{iter} . The specific case $N_{mp} = 4$ and $N_{iter} = 2$ is chosen for dynamic simulation. We have performed the simulation of a system of 20 particles, and compared the formulation of particle chains with that obtained using the dipole model. The results imply that the response time for the change in viscosity of real-ER fluids is significantly shorter than that predicted by the dipole model.

© 2007 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Dynamic simulation; Dielectrophoretic force; Multipole; Electrorheological (ER) fluid

1. Introduction

Systems of dielectric particles are used in various applications. For example, an electrorheological (ER) fluid is an application that utilizes the dielectrophoretic (DEP) force on dielectric particles. An ER fluid is a suspension of fine, insulating particles in a liquid of low dielectric constant. In the presence of an applied electric field strong enough for aggregating the particles, the apparent viscosity of the fluid increases, and the fluid turns to a gel-like phase. For the typical ER fluid, this transition occurs on the order of milliseconds and is reversible. Practical devices designed to use ER fluids include electrically controlled clutches and shock absorbers.

Computer simulation has become an important tool for investigating the properties of ER fluid systems. By using simulations, the complicated effects of physical parameters that may be simultaneously present in the fluid can be

considered separately for better understanding. Prior studies on the dynamics of ER fluids often employ a dipole model for computing the interparticle force induced by an electric field [1–4]. However, the force predicted using the dipole model is significantly smaller than the true force, especially when the particles are close to each other. A more accurate model uses an empirical force function that includes the effects of higher-order multipolar terms between a pair of particles [5]. A method that considers a full set of multipolar interactions for a system of multiparticles has also been proposed in [6]. However, the method requires setting up and solving a system of linear equations and is thus not suitable for dynamic simulation if a large number of particles are involved.

This paper presents the application of a multipole model to approximate the interparticle force. The method of multipole images and the multipole re-expansion method [7] are used to calculate the electric field and the multipole images. The force is then computed from the multipole images by using analytical formulae. The main advantage over the existing dipole models is that multipolar interactions

*Corresponding author. Tel.: +662 218 6548; fax: +662 218 6555.

E-mail address: annop.li@student.chula.ac.th (A. Limsimarat).

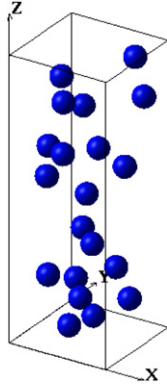


Fig. 1. Initial state of the randomly distributed particles.

between all particles are taken into account. In addition, the accuracy of the force approximation and the time required for calculation can be varied by choosing the highest order of the multipoles and the number of iterations used for the method of images. As an example, we have performed a dynamic simulation using the multipole model for a simplified system of an ER fluid, and we have compared the results to those obtained using the dipole model.

2. Physical configuration

The system of particles in this study is represented by a monodisperse suspension of dielectric particles in a host fluid confined between two $L_x \times L_y$ parallel plate electrodes at $z = 0$ and $z = L_z$. The particles have a dielectric constant $\epsilon_p = 8$, mass density $\rho = 1 \text{ g/cm}^3$, and diameter $\sigma = 10 \mu\text{m}$, and are treated as spheres. The dielectric constant of the fluid is $\epsilon_f = 2$. The viscosity η of the host fluid is 0.02 Pa s . These simulation parameters describe a real-ER fluid consisting of alumina particles in silicone oil [2,4,5]. A uniform external field $= 3 \text{ kV/mm}$ is applied to the fluid via the parallel electrodes. (This value was reported in [4] that it can solidify the ER fluid.) The electrode dimensions are $L_x = L_y = 5\sigma$, $L_z = 14\sigma$, and the number of particles between the electrodes is 20. Note that the dimensions and the particle number have been chosen in order that a single chain (not thick columns) could be formed inside the system when the applied field is sufficiently strong. The initial state of the ER fluid is shown in Fig. 1, where the particle positions are random.

3. Methods

3.1. Calculation of DEP force

3.1.1. Point-dipole force

DEP force is the force exerted by a nonuniform electric field on a polarized but uncharged particle. Consider an interaction force between particle a at \vec{r}_a and particle b at \vec{r}_b , as shown in Fig. 2. The dipole model gives the simplest

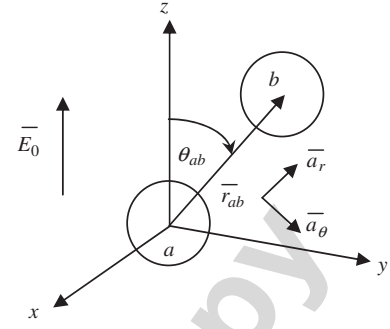


Fig. 2. Coordinate system of the spherical particle pair.

approximation of the DEP force between these two particles as [1]

$$\vec{F}_{ab}^{\text{dip}} = \left(\frac{3|\vec{p}|^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_f|\vec{r}_{ab}|^4} \right) \times [(1 - 3\cos^2\theta_{ab})\vec{a}_r - \sin(2\theta_{ab})\vec{a}_\theta], \quad (1)$$

where

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\pi\epsilon_0\epsilon_f\sigma^3 \left(\frac{\epsilon_p - \epsilon_f}{\epsilon_p + 2\epsilon_f} \right) \vec{E}_0$$

is the induced dipole moment of each particle due to external field \vec{E}_0 , $\vec{r}_{ab} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$, θ_{ab} the angle between \vec{r}_{ab} and the z -axis, $\vec{a}_r = \vec{r}_{ab}/|\vec{r}_{ab}|$, $\vec{a}_\theta = \vec{a}_r \times (\vec{a}_r \times \vec{a}_z)/|\vec{a}_r \times (\vec{a}_r \times \vec{a}_z)|$, and \vec{a}_z is the unit vector in the z -direction, as shown in Fig. 2.

3.1.2. Multipolar force

As already mentioned, the dipole model does not yield a good approximation to the DEP force when particles are close to each other. The reason is that the effects of higher-order multipoles are not negligible in this case. The DEP force, including the multipolar effects, on particle a can be determined by

$$\vec{F}_a^{\text{dep}} = \int_{r=\sigma/2} \epsilon_f q_{\text{total}} [-\nabla(\psi_a)_{\text{ext}}] dS_a, \quad (2)$$

where q_{total} , is the total effective charge density, which is the equivalent real-charge distribution that generates the same induced potential as the spherical dielectric particle [8], appearing on the surface of particle a ; S_a , the surface area of the particle, and; $(\psi_a)_{\text{ext}}$, is the electrostatic potential on particle a due to all sources exterior to particle a .

Note that Eq. (2) is expressed in general for any dielectric particle. In the case of two particles in close proximity, as in Fig. 2, $(\psi_a)_{\text{ext}}$ is the potential around particle a due to the externally applied field and the disturbance produced by particle b . To rewrite Eq. (2) in terms of multipoles, we take the center of particle a as the origin, and express the potentials $(\psi_a)_I$ inside and $(\psi_a)_E$ outside the particle as [7]

$$(\psi_a)_I = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j L_{j,k} r^j \tilde{P}_{j,k}(\cos\theta) e^{ik\varphi}, \quad (3)$$

$$(\psi_a)_E = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j \left[M_{j,k} r^j + \frac{B_{j,k}}{r^{j+1}} \right] \bar{P}_{j,|k|}(\cos \theta) e^{ik\varphi}, \quad (4)$$

where (r, θ, φ) are the spherical coordinates; $L_{j,k}$, $M_{j,k}$, and $B_{j,k}$ the coefficients to be determined, and $\bar{P}_{j,|k|}$ is the associated Legendre function normalized by $\sqrt{\frac{(j-|k|)!}{(j+|k|)!}}$.

The three potential coefficients are not independent of each other. Rather, $L_{j,k}$ and $B_{j,k}$ can be determined from $M_{j,k}$ so as to satisfy the boundary conditions of the potential and field on the particle surface [7]. From Eqs. (3) and (4), the total effective charge density and the exterior potential on the surface of particle a can be written, respectively as

$$q_{\text{total}} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j \left[\frac{\varepsilon_0(2j+1)}{(\sigma/2)^{j+2}} \right] B_{j,k} \bar{P}_{j,|k|}(\cos \theta) e^{ik\varphi} \quad (5)$$

and

$$(\psi_a)_{\text{ext}} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j M_{j,k} r^j \bar{P}_{j,|k|}(\cos \theta) e^{ik\varphi}. \quad (6)$$

Using Eqs. (2), (5) and (6), the Cartesian components of \bar{F}_a^{dep} can be determined from $B_{j,k}$ and $M_{j,k}$ as follows. (The superscript dep means “of DEP origin”)

$$\begin{aligned} \frac{F_{a,x}^{\text{dep}}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_f} &= \sum_{j=0}^{\infty} 2\text{Re}[M_{j+1,1}](B_{j,0})\beta(j+1) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\infty} 2\text{Re}[B_{j,1}](M_{j+1,0})\beta(j) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} 2\text{Re}[(B_{j,1})(M_{j+1,-2})]\beta(j+2) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^j 2\text{Re}[B_{j,k}(M_{j+1,-(k+1)} - M_{j+1,-(k-1)})]\beta(j+k+1), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{F_{a,y}^{\text{dep}}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_f} &= - \sum_{j=0}^{\infty} 2\text{Im}[M_{j+1,1}](B_{j,0})\beta(j+1) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} 2\text{Im}[B_{j,1}](M_{j+1,0})\beta(j) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\infty} 2\text{Im}[(B_{j,1})(M_{j+1,-2})]\beta(j+2) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{\infty} \sum_{k=2}^j 2\text{Im}[B_{j,k}(M_{j+1,-(k+1)} + M_{j+1,-(k-1)})] \\ &\quad \times \beta(j+k+1), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{F_{a,z}^{\text{dep}}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_f} &= - \sum_{j=0}^{\infty} (B_{j,0})(M_{j+1,0})(j+1) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^j 2\text{Re}[(B_{j,k})(M_{j+1,-k})] \sqrt{(j+1)^2 - k^2} \end{aligned} \quad (9)$$

where $\beta(j) = \sqrt{j(j+1)}$, and $\text{Re}[\cdot]$ and $\text{Im}[\cdot]$ designate, respectively, the real and imaginary parts of a complex number.

3.1.3. Calculation of the coefficients $B_{j,k}$ and $M_{j,k}$

Using the method of images, we calculate the coefficients $B_{j,k}$ and $M_{j,k}$ in an iterative manner similar to the schemes reported in [9,10]. The latter are proposed for systems of plate electrodes. For each particle in the system of N particles, the calculation procedure may be briefly described as follows. (The superscript (n) is used to indicate the number of the repetition step.)

1. Determine $M_{j,k}^{(0)}$ to present the initial potential ψ_{E_0} due to the plate electrodes. For our arrangement, if the particle is at \bar{c} , ψ_{E_0} at \bar{p} is written as

$$\psi_{E_0} = M_{0,0}^{(0)} + M_{1,0}^{(0)} r \bar{P}_{1,0}(\cos \theta), \quad (10)$$

where $M_{0,0}^{(0)}$ is the potential at \bar{c} due to \bar{E}_0 and $M_{1,0}^{(0)} = E_0$.

2. Compute $B_{j,k}^{(n)}$ from $M_{j,k}^{(n)}$ by Techaumant et al. [7] as

$$B_{j,k}^{(n)} = \left[\frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{(\varepsilon_f + \varepsilon_p)j + \varepsilon_f} \right] \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2j+1} M_{j,k}^{(n)}. \quad (11)$$

3. Place the multipole images $\tilde{B}_{j,k}^{(n)}$ with respect to both plate electrodes to satisfy the potential conditions on them. Details of the image placement are explained in Appendix A.

4. Re-expand all of the images $\tilde{B}_{j,k}^{(n)}$ induced by the plate electrodes and $B_{j,k}^{(n)}$ of the other $N-1$ particles to \bar{c} . That is, the external potential, to which the current particle is subject in the next step, is

$$\psi_{\text{ext}} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^j M_{j,k}^{(n+1)} r^j \bar{P}_{j,|k|}(\cos \theta) e^{ik\varphi}, \quad (12)$$

where $M_{j,k}^{(n+1)}$ is obtained from the re-expansions.

5. Repeat Steps 2–4. The potential can then be written in the final form as

$$\psi_E = \sum_{j=1}^{N_{\text{mp}}} \sum_{k=-j}^j \sum_{n=1}^{N_{\text{iter}}} \left[M_{j,k}^{(n+1)} r^j + \frac{B_{j,k}^{(n+1)}}{r^{j+1}} \right] \bar{P}_{j,|k|}(\cos \theta) e^{ik\varphi}, \quad (13)$$

where N_{mp} and N_{iter} are the highest order of multipoles and the largest number of iterations, respectively.

The accurate value of force can be obtained by using sufficiently high order N_{mp} for the multipoles (i.e., $j = 0, 1, \dots, N_{\text{mp}}$) and carrying out this procedure until the solutions converge. However, with higher N_{mp} the calculation time shall be very long, and not suitable for dynamic simulations. Here, we use the order N_{mp} of the multipoles up to four and perform the image placement (Steps 2–4) twice ($N_{\text{iter}} = 2$). The contributions of N_{mp} and N_{iter} to the calculation results will be presented later in Section 4.1. Because the interactions between all particles are included in the calculations, we expect the computed force to be similar to the accurate value calculated by using $N_{\text{mp}} = 100$.

3.2. Calculation of particle motion

Let particle a , having mass m , be at \bar{r}_a in the host fluid at time t . The motion of this particle is determined by

$$m \frac{d^2 \bar{r}_a}{dt^2} = \bar{F}_a^{\text{dep}} + \bar{F}_a^{\text{rep}} + \bar{F}_a^{\text{hyd}}, \quad (14)$$

where \bar{F}_a^{dep} is the DEP force as described in Section 3.1, \bar{F}_a^{rep} the repulsive force, and \bar{F}_a^{hyd} is the hydrodynamic force on the particle.

The force \bar{F}_a^{rep} is an artificial force applied in simulations of particles [1–4] to avoid overlapping with the other particles and with the walls. Details of \bar{F}_a^{rep} are explained in Appendix B. The hydrodynamic force is given for a spherical particle by Stoke's equation

$$\bar{F}_a^{\text{hyd}} = -3\pi\sigma\eta \frac{d\bar{r}_a}{dt}. \quad (15)$$

For typical ER fluids, we can neglect the acceleration term on the left-hand side of Eq. (14) as the viscosity is predominant. Substituting (15) into (14), we get

$$3\pi\sigma\eta \frac{d\bar{r}_a}{dt} = \bar{F}_a^{\text{dep}} + \bar{F}_a^{\text{rep}}. \quad (16)$$

Applying the following scaling factors

$$F_0 = \frac{1}{16}\epsilon_0\epsilon_f\alpha^2\sigma^2 E_0^2,$$

$$t_0 = 3\pi\eta\sigma^2/F_0,$$

$$r_0 = \sigma,$$

where $\alpha = (\epsilon_p - \epsilon_f)/(\epsilon_p + 2\epsilon_f)$, we rewrite Eq. (16) in the dimensionless form as

$$\frac{d\bar{r}_a^*}{dt^*} = \bar{F}_a^{\text{dep}*} + \bar{F}_a^{\text{rep}*}. \quad (17)$$

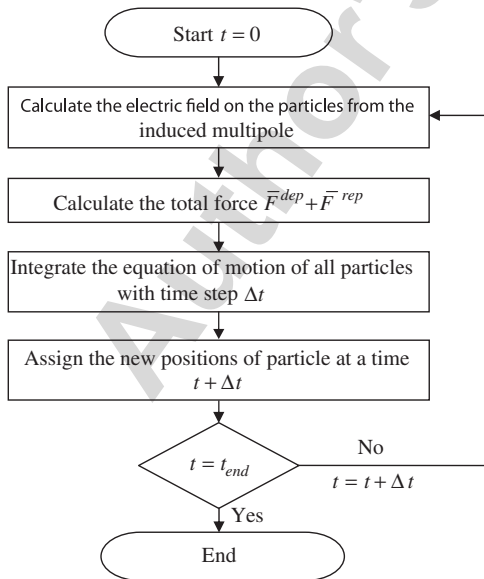


Fig. 3. Procedure for computing the particle position.

The symbol $*$ in Eq. (17) denotes dimensionless variables. Using Eq. (17), we compute the position of each particle at time t^* using the fourth-order Runge–Kutta algorithm. The procedure for computing the particle position is shown in Fig. 3. We follow the motion of the particles to monitor how pairs and chains of the particles are formed and determine the aggregation time of the first single chain that spans electrodes by using the dipole and the multipole models. This is because the formation of particle chain is directly related to the change in viscosity of ER fluids.

4. Results

4.1. Force on two touching particles

This section discusses the difference between the force predicted by the dipole model and that predicted by the multipole model. We first consider the case of two particles in contact under an external field \bar{E}_0 in the vertical direction (i.e., two plate electrodes are located so far from the particles), as in Fig. 4. The angle θ is measured between the z -axis and the line joining two-particle centers (lines a–b in Fig. 4.). The particles and the host fluid have dielectric constants $\epsilon_p = 8$, and $\epsilon_f = 2$, respectively. The case is considered here, as it is known that the DEP force becomes maximal when particles are in contact [11]. The force computed by the multipole model depends on two main parameters: the number of iterations N_{iter} and the maximum order of multipoles N_{mp} . To study the effects of N_{iter} and N_{mp} , we compute the multipolar forces on the particles in Fig. 4 for various N_{iter} and N_{mp} with $\sigma = 10 \mu\text{m}$ and $E_0 = 3 \text{ kV/mm}$.

The effect of N_{iter} is shown in Fig. 5. The horizontal force F_{horiz} and vertical force F_{vert} are calculated by using $N_{\text{mp}} = 4$ for $N_{\text{iter}} = 2, 3$, and 4. Compared to the dipolar forces and the accurate solutions (computed by $N_{\text{mp}} = 100$) in the figure the multipolar forces vary with θ similarly to them. F_{horiz} and F_{vert} change from the attractive to the repulsive forces as θ varies from 0° to 90° (the sign changes from positive to negative.). F_{horiz} and F_{vert} increase with increasing N_{iter} , while F_{horiz} reaches its peak at $\theta = 33^\circ$ for all value of N_{iter} and is repulsively maximum at $\theta = 90^\circ$.

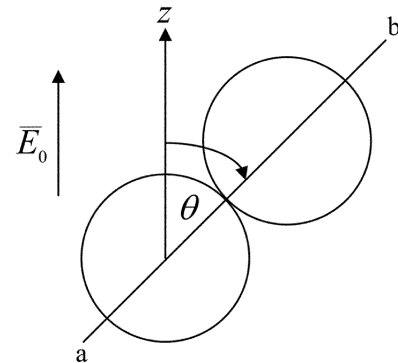


Fig. 4. Two touching particles.

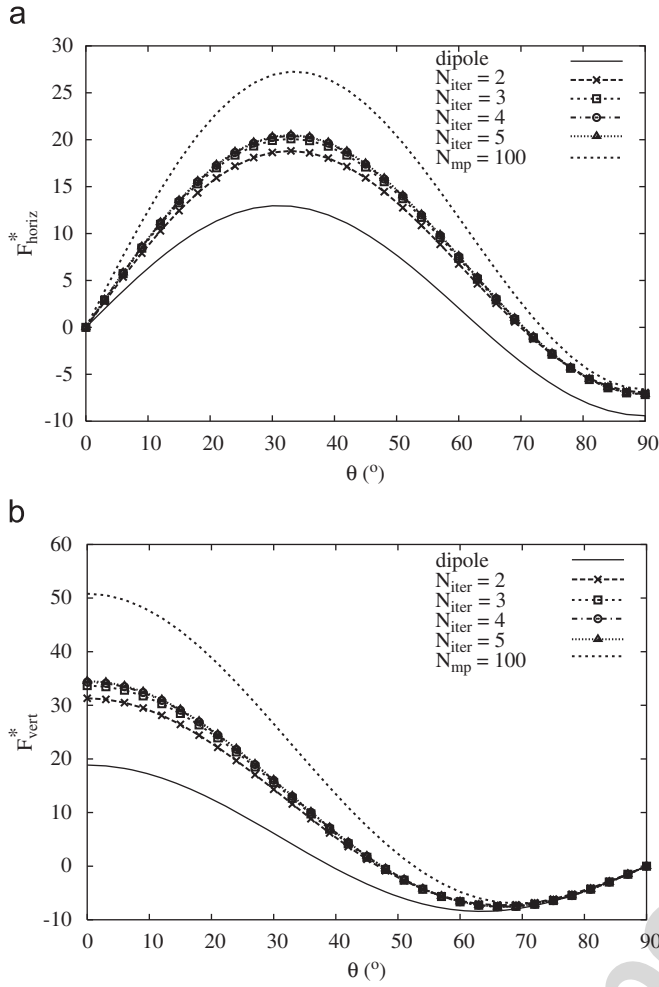


Fig. 5. The effect of N_{iter} on the forces on the lower particle in Fig. 4 for $N_{\text{mp}} = 4$: (a) F_{horiz} and (b) F_{vert} .

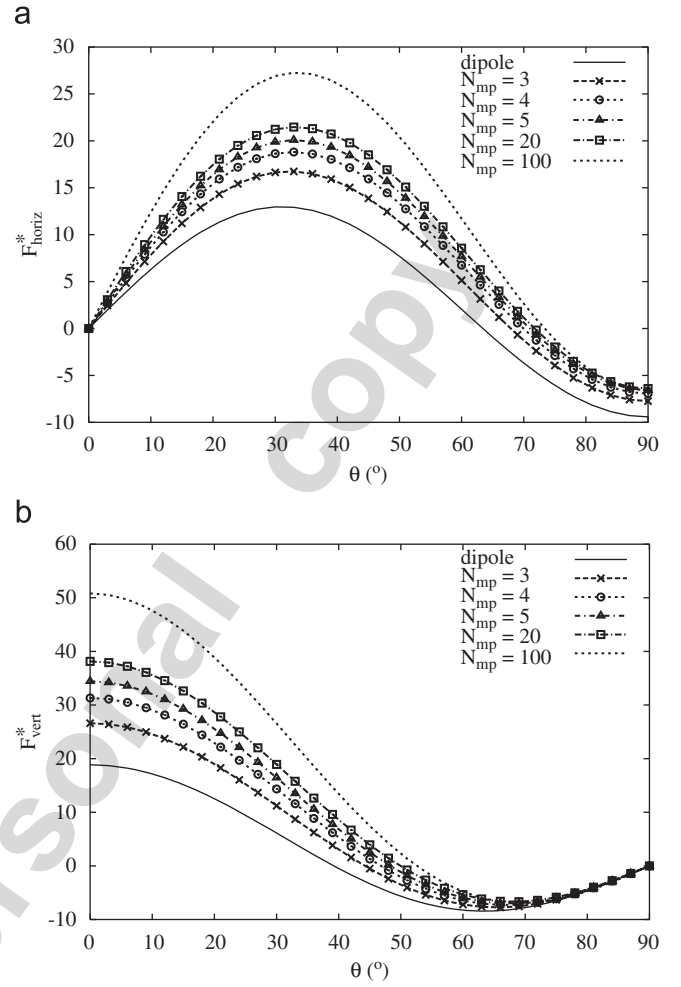


Fig. 6. The effect of N_{mp} on the forces on the lower particle in Fig. 5 for $N_{\text{iter}} = 2$: (a) F_{horiz} and (b) F_{vert} .

The force F_{vert} reaches a maximum attractive value when the particles are aligned in the direction of with \vec{E}_0 . The maximum magnitudes of F_{horiz} and F_{vert} for $N_{\text{iter}} = 2$ are 1.45 and 1.66 times the dipolar forces, respectively. For $N_{\text{iter}} = 3$ and 4, the force magnitudes are slightly higher than those for $N_{\text{iter}} = 2$. Although, the results are not shown here, we have found that, at higher N_{iter} , the multipolar force increases with N_{iter} by a smaller degree.

In Fig. 6, F_{horiz} and F_{vert} are calculated by using different values of N_{mp} ($N_{\text{iter}} = 2$, constant). From Fig. 6, we can clearly see the improvement of the force magnitude by using the multipolar model. For example, the maximum magnitudes of F_{horiz} calculated with $N_{\text{mp}} = 3, 4, 5$, and 20 are greater than that of the dipolar forces by 1.29, 1.45, 1.55, and 1.65 times, respectively. The increasing rate of F_{horiz} and F_{vert} with N_{mp} is smaller at higher value of N_{mp} .

4.2. ER fluid simulation

For the ER fluid system in Section 2, the time base, which is used for normalization in Eqs. (14) and (16), was $t_0 = 75$ ms. At $t = 0$, an external field is turned on and the

particles begin to move. We want to calculate the evolution of the particle trajectories with $\Delta t^* = 8 \times 10^{-5}$ for 50,000 time steps. First, we consider the calculation time required when various values of N_{iter} and N_{mp} are used. The calculation time per time step on a PC with 1.92 GHz CPU and GNU/Linux operating system is shown in Fig. 7. The figure shows that, by using $N_{\text{iter}} = 3$ and 4, the computation times are much longer than that by using $N_{\text{iter}} = 2$, but the multipolar forces do not considerably increase (as explained in the previous section). Because the simulations take about 15 h for $N_{\text{mp}} = 4$ but 45 h for $N_{\text{mp}} = 5$, we choose $N_{\text{iter}} = 2$ and $N_{\text{mp}} = 4$ for the calculations.

The evolution of the particle positions obtained from the dipole and multipole models are shown in Figs. 8 and 9, respectively. In Fig. 8(a), at $t = 30$ ms, the particles begin to form small chains but these are not arranged well in the direction parallel to the electric field. In Fig. 8(b), at $t = 180$ ms, the particles form longer chains and pairs, and only one particle is isolated. After $t = 180$ ms, the chains in Figs. 8(c) and (d) are only slightly different from those in Fig. 8(b).

For the particles simulated by the multipole model in Fig. 9, at $t = 30$ ms, the particles begin to form chains in

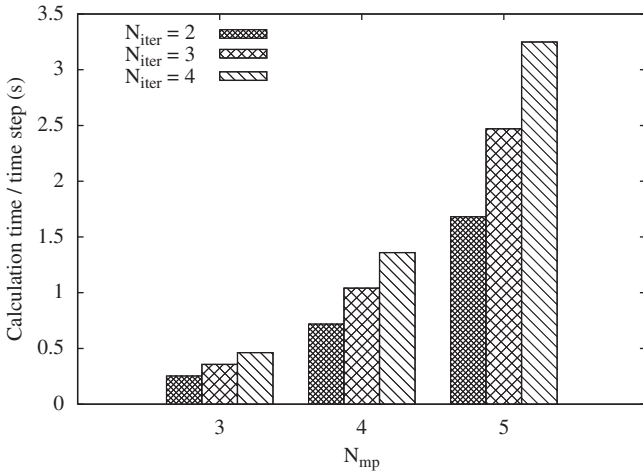


Fig. 7. Calculation time per time step for various values of N_{iter} and N_{mp} .

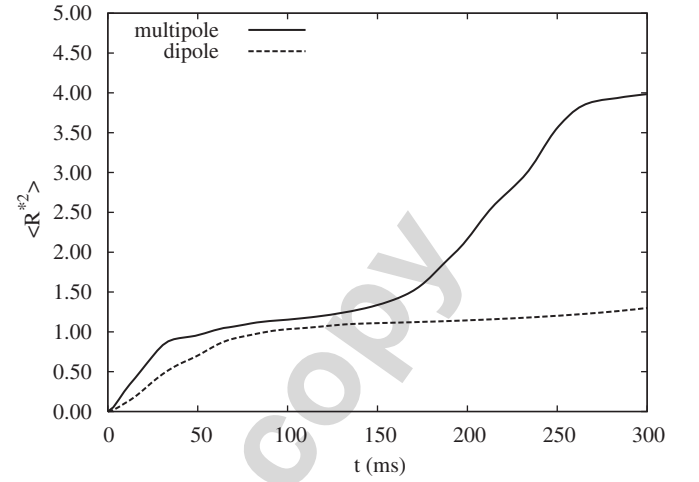


Fig. 10. Mean square displacement of particles simulated by the dipole and the multipole models.

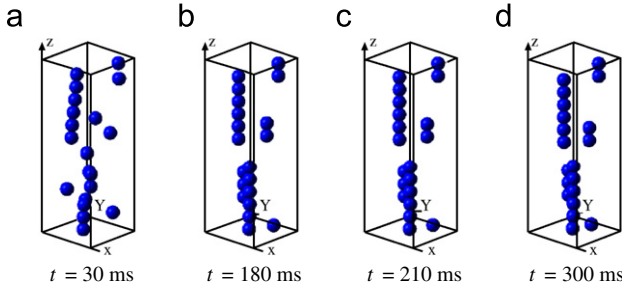


Fig. 8. The positions of particles at different times simulated by the dipole model.

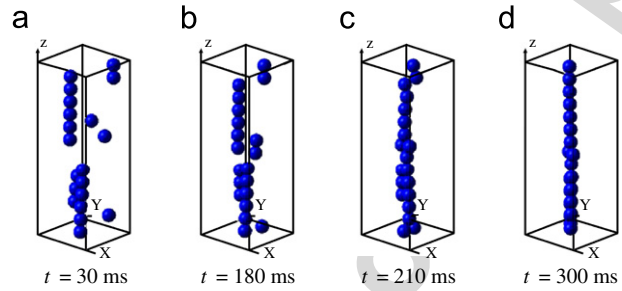


Fig. 9. The positions of particles at different times simulated by the multipole model.

the direction of the field. The chains are more parallel to the electric field than those by the dipole model in Fig. 8(a). In Fig. 9(b), the alignment of chains is improved and chains move close to each other as time increases. In Fig. 9(c), chains merge together, and a long chain spanning the electrodes is formed. Note that at this time ($t = 210$ ms) the particles simulated by the dipole model have just formed into arranged chains. In Fig. 9(d), the ordering of chains in the field direction is almost perfect. Thus, the aggregation time of the particles simulated by the multipole model is much shorter than when the dipole model is used.

In addition to the visual inspection of Figs. 8 and 9, we monitor the mean square displacement $\langle R^2 \rangle$ [1,12] to identify the particle aggregation. The definition of the square displacement of particle a at time t is

$$[R_a^*(t)]^2 = [x_a^*(t) - x_a^*(0)]^2 + [y_a^*(t) - y_a^*(0)]^2 + [z_a^*(t) - z_a^*(0)]^2, \quad (18)$$

where $x_a^*(t)$, $y_a^*(t)$, and $z_a^*(t)$ are the position of particle a at time t .

The mean square displacement is determined as

$$\langle R^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^N [R_a^*(t)]^2, \quad (19)$$

where N is the number of particles.

The value of $\langle R^2 \rangle$ is plotted against time in Fig. 10. The figure shows that $\langle R^2 \rangle$ computed via the multipole model has a rapid change at the initial state, because the particles begin to form chains and their positions change considerably. After the particles attach to each other, they move more gradually. At $t \approx 175$ ms, the chains merge together and rearrange, resulting in rapid change in $\langle R^2 \rangle$ again. After the chains merge and the long chain spans the electrodes, the transition of particles slows down at $t \approx 250$ ms. The value of $\langle R^2 \rangle$ in the dipole model gradually approaches saturation after $t \approx 150$ ms. As the particles do not span the electrodes, $\langle R^2 \rangle$ is still much smaller than that of the multipole. These results are consistent with the visual aggregation of particles in Figs. 8 and 9.

5. Conclusions

We have presented a multipole model for the simulation of particle systems, and performed the simulation of a system of 20 particles with parameters referred to a real-ER fluid. When the multipole model is used, the force approximation and the simulation time vary with the

number of iterations N_{iter} and the highest order of multipoles N_{mp} . Increasing N_{iter} and N_{mp} does not improve the multipolar force linearly; rather, the force increases only slightly at high values of N_{iter} and N_{mp} . The values $N_{\text{iter}} = 2$ and $N_{\text{mp}} = 4$ are chosen based on the force approximation and the simulation time. The simulation results obtained via the multipole model have been compared to those found using the dipole model. From the multipole model, the time by which a particle chain spans the electrodes is about 200 ms. Conversely, using the dipole model, there is no chain spanning the electrodes after 300 ms. These results imply that in a real-ER fluid, the response time for the change in viscosity is significantly shorter than that predicted by the dipole model.

Acknowledgments

We want to thank for the support from The Commission on Higher Education, Thailand, and The Thailand Research Fund.

Appendix A

Placement of the multipole images

A particle is located between plate electrodes separated by a distance L_z in Fig. A1. Consider a multipole $B_{j,k}$ at the center of the particle at a distance h above the lower plate electrode. The multipole images $\tilde{B}_{j,k}$ with respect to the plate electrodes are placed in a sequential manner. The placement is divided into two sequences. The first one is that $\tilde{B}_{j,k}$ is placed with respect to the lower electrode prior to the upper electrode. The second one is that $\tilde{B}_{j,k}$ is placed with respect to the upper electrode prior to the lower electrode. The m th images ($m = 1, 2, 3$, etc.) of $\tilde{B}_{j,k}$ of the first and the second sequences are denoted by $[\tilde{B}_{j,k}]_{1(m)}$ and $[\tilde{B}_{j,k}]_{2(m)}$, respectively. Fig. A1 shows an example of

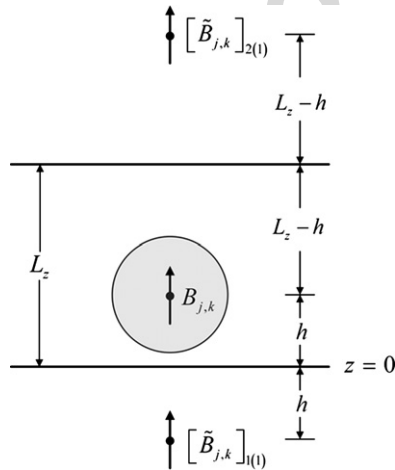


Fig. A1. Placement of the multipole images with respect to the parallel plate electrodes.

$[\tilde{B}_{j,k}]_{1(1)}$ and $[\tilde{B}_{j,k}]_{2(1)}$. The positions of $[\tilde{B}_{j,k}]_{1(m)}$ and $[\tilde{B}_{j,k}]_{2(m)}$ can be determined by

$$z_{1(m)} = (-1)^m \{[(m-1)L_z] + L_z[(m-1)\%2] + h\}, \quad (\text{A.1})$$

$$z_{2(m)} = (-1)^{m-1} \{[(m-1)L_z] + [(m\%2)L_z] + (L_z - h)\}, \quad (\text{A.2})$$

where $z_{1(m)}$ is the position of $[\tilde{B}_{j,k}]_{1(m)}$, $z_{2(m)}$ the position of $[\tilde{B}_{j,k}]_{2(m)}$, and $\%$ is the operator that provides the remainder after division. ($z = 0$ at the lower plate electrode).

In Fig. A1, $[\tilde{B}_{j,k}]_{1(1)}$ and $[\tilde{B}_{j,k}]_{2(1)}$ are located at $z_{1(1)} = -h$ and $z_{2(1)} = 2L_z - h$.

The magnitude of $\tilde{B}_{j,k}$ that fulfills the potential conditions on the plate electrodes is [7]

$$\tilde{B}_{j,k} = (-1)^{j+k+1} B_{j,k}. \quad (\text{A.3})$$

Appendix B

Repulsive force

To prevent the particles from overlapping each other and the electrodes, we use an artificial, short-range repulsive force between two particles (a and b) [2,4]

$$\bar{F}_{ab}^{\text{rep}} = 2F_{\text{max}} \exp \left[-100 \left(\frac{|\bar{r}_{ab}|}{\sigma} - 1.0 \right) \right] \bar{a}_r, \quad (\text{B.1})$$

where \bar{a}_r and \bar{r}_{ab} are shown in Fig. 2, and F_{max} is taken as the maximum DEP force determined in the case of two particles for the number of $N_{\text{iter}} = 2$ and $N_{\text{mp}} = 4$, as shown in Fig. 5. A short-range repulsive force between particle a and both electrodes is defined as

$$\bar{F}_a^{\text{wall}} = 2F_{\text{max}} \left\{ \exp \left[-100 \left(\frac{z_a}{\sigma} - 0.5 \right) \right] - \exp \left[-100 \left(\frac{(L_z - z_a)}{\sigma} - 0.5 \right) \right] \right\} \bar{a}_z. \quad (\text{B.2})$$

The first exponential term on the right-hand side of Eq. (B.2) is the repulsive force between particle a and the bottom electrode, and the second term is that between particle a and the top electrode. The total repulsive force \bar{F}_a^{rep} on particle a is the sum of the force in Eq. (B.2) and the forces in (B.1) for all the particles b , includes the image particles.

That is,

$$\bar{F}_a^{\text{rep}} = \sum_{b, b \neq a}^N \bar{F}_{ab}^{\text{rep}} + \bar{F}_a^{\text{wall}}, \quad (\text{B.3})$$

where N is the number of particles.

References

- [1] D.J. Klingenberg, F. van Swoi, C.F. Zukoski, Dynamics simulation of electrorheological suspensions, *J. Chem. Phys.* 91 (1989) 7888–7895.
- [2] Y. Enomoto, K. Oba, Simulation of structures and their rheological properties in electrorheological fluids, *Physica A* 309 (2002) 15–25.
- [3] L. Jian, S. Jiapeng, Simulation of a three-dimensional electrorheological suspensions, *J. Appl. Phys.* 79 (1996) 7312–7317.
- [4] R. Tao, Q. Jiang, Simulation of structure formation in an electrorheological fluid, *Phys. Rev. Lett.* 73 (1994) 205–208.
- [5] D.J. Klingenberg, F. van Swoi, C.F. Zukoski, The small shear rate response of electrorheological suspensions. II. Extension beyond the point-dipole limit, *J. Chem. Phys.* 94 (1991) 6170–6178.
- [6] H.J.H. Clercx, G. Bossis, Many-body electrostatic interactions in electrorheological fluids, *Phys. Rev. E* 48 (1993) 2721–2738.
- [7] B. Techaumnat, B. Eua-arporn, T. Takuma, Calculation of electric field and dielectrophoretic force on spherical particle in chain, *J. Appl. Phys.* 95 (2004) 1586–1593.
- [8] M. Washizu, T.B. Jones, Multipolar dielectrophoretic force calculation, *J. Electrostat.* 33 (1994) 187–198.
- [9] B. Techaumnat, B. Eua-arporn, T. Takuma, Electric field and dielectrophoretic force on a dielectric particle chain in a parallel-plate electrode system, *J. Phys. D: Appl. Phys.* 37 (2004) 3337–3346.
- [10] A. Limsimarat, B. Techaumnat, Electric field and force on a dielectric particle between two diverging plate electrodes, *J. Electrostat.* 63 (2005) 789–794.
- [11] T.B. Jones, *Electromechanics of Particles*, Cambridge University Press, New York, 1995.
- [12] P. Nakroshis, M. Amoroso, J. Legere, C. Smith, Measuring Boltzmann's constant using video microscopy of Brownian motion, *Am. J. Phys.* 71 (2003) 568–573.

High-yield electrofusion of biological cells based on field tailoring by microfabricated structures

Journal:	<i>IET Nanobiotechnology</i>
Manuscript ID:	NBT-2008-0008.R1
Manuscript Type:	Research Paper
Date Submitted by the Author:	18-Aug-2008
Complete List of Authors:	Techaumnat, Boonchai; Chulalongkorn University, Electrical Engineering Washizu, Masao; The University of Tokyo, Department of Mechanical Engineering Murat, Gel; The University of Tokyo, Department of Mechanical Engineering Oana, Hidehiro; The University of Tokyo, Department of Mechanical Engineering
Keyword:	CELL MANIPULATION, DIELECTROPHORESIS



High-yield electrofusion of biological cells based on field tailoring by microfabricated structures

Boonchai Techaumnat^{*a,b}, Kinya Tsuda^b, Osamu Kurosawa^e, Gel Murat^{b,d,f}, Hidehiro Oana^{b,d,f} and Masao Washizu^{b,c,d,f}

^aElectrical Engineering Department, Chulalongkorn University, Phyathai, Pathumwan, Bangkok 10330, Thailand

^bDepartment of Mechanical Engineering, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan.

^cDepartment of Bioengineering, The University of Tokyo.

^dCenter for Nano-Bio Integration, The University of Tokyo.

^eAdvance Co., Japan,

^fJST, CREST, Japan

Abstract

This paper presents the use of electric-field constriction created by a microfabricated structure to realize high-yield electrofusion of biological cells. The method uses an orifice on an electrically insulating wall (orifice plate), whose diameter is as small as that of the cells. Due to the field constriction created by the orifice, we can induce controlled magnitude of membrane voltage selectively around the contact point, regardless of the cell size. The field constriction also ensures 1:1 fusion even when more than two cells are forming a chain at the orifice. A device for electrofusion has been made with a standard SU-8 lithography and PDMS molding, and real-time observation of the electrofusion process is made. Experiments using plant protoplasts or mammalian cells show that the process is highly reproducible, and the yield higher than 90% is achieved.

High-yield electrofusion of biological cells

I. Introduction

Electrofusion is a process for creating hybrid among different types of cells with the use of electrical pulses[1]. The process is based on the reversible breakdown of the membrane. When a cell is placed under the influence of a pulsed external field, electrical charging of the membrane occurs and the potential difference between inside and outside of the membrane (hereafter called membrane voltage V_m) develops. When V_m reaches the breakdown voltage (denoted as V_b), which is about 1 V for most biological cells [1-3], the electrical breakdown of the membrane takes place. If the pulse is moderate and $V_m \approx V_b$, the breakdown is reversible; the membrane is locally and temporarily destroyed, but the lipid bilayer structure is restored spontaneously due to the fluidity of the membrane. Such a reversible breakdown at the contact point of two cells lead to the reconnection of the membrane and the cytoplasm are merged, which is the principle of the electrofusion.

Obviously, nothing happens if V_m is too low, and the cells are ruptured permanently if V_m is too high, and successful fusion is expected in a narrow range of V_m , say $\pm 15\%$ of V_b [2]. Therefore, a precise control over the magnitude of the induced membrane voltage is an essential key for a high-yield fusion.

In conventional electrofusion, a mixture of cell suspensions is placed under the influence of ac field first, and the cells are dielectrophoretically (DEP) aligned to form chains, and then a high-intensity electric pulse is applied to fuse the cells. However, the process is essentially low yield due to following reasons:

- 1) An analytical solution for the membrane voltage, when a stepwise uniform external field E_0 is applied, is given by [1]

High-yield electrofusion of biological cells

$$V_m(t) = \frac{3}{2} a E_0 \cos \theta [1 - \exp(-t/\tau_c)] \quad (1)$$

where θ is the zenith angle (as in Fig. 2), and τ_c is the time constant of membrane charging which is

$$\tau_c = a C_m (\rho_{in} + \rho_{out} / 2) \quad (2)$$

Its steady-state value V_m , i.e. after time t adequately longer than τ_c and the membrane charging is completed, becomes

$$V_m(\theta) = \frac{3}{2} a E_0 \cos \theta \quad (3)$$

This equation shows that V_m is proportional to the cell radius a , so that for a cell suspension with size distribution, successful fusion should occur only for the cells with an appropriate size.

- 2) For non-spherical cells, V_m depends on their orientation.
- 3) A prerequisite for the fusion is that more than two cells are in contact. Our analysis for two contacting cells [4-5] shows that V_m is more than 20% larger at the top or bottom of the cell chains ($\theta = 180^\circ$ in Fig. 2) than that the contact point ($\theta = 0^\circ$). It is likely that the membrane at the end of the chain ruptures before fusion occurs.
- 4) Whereas biological hybrids results in high-yield only when fusion between two cells is predominant [1], there is no way to guarantee 1:1 fusion by the conventional procedure based on DEP chain formation in cell suspension.

In the past, a group including some of the authors achieved electrofusion of yeast cells in a fluid integrated circuit, in which field nonuniformity is utilized to position two cells to be in contact to each other before applying fusing electric pulse [6-7]. In the current work, we solve the aforementioned problems by tailoring the field pattern, so that the reversible breakdown is restricted to occur exclusively at the contact point, thus improving the

High-yield electrofusion of biological cells

fusion yield. The principle, the device and the experimental results are presented in this paper.

II. Principle

Our group has already reported on the electroporation using a field constriction at a microorifice [8-9]. Unlike other on-chip electroporation methods [10-11], our method uses radio-frequency modulated pulse [9] with the voltage as low as 1.5V to restrict pore formation to take place exclusively at the orifice, and hence low-invasive and high-yield electroporation is achieved.

The electrofusion method presented in this paper is based on a similar principle, as depicted in Fig. 1. The device consists of an insulator wall, having an orifice which is comparable to the cells in size, or an array of such orifices, and the electrodes on both sides. When a voltage is applied between the electrodes, the field lines, being unable to penetrate through the insulator wall, converge into the orifice opening to create field constriction there.

First, cells are fed, say of type A on one side and type B on the other side, and the electrodes are energized with a.c. voltage. Due to the field non-uniformity created by the constriction, cells are dielectrophoretically moved towards the orifice, forming a cell pair A-B. This process up to here is identical to what is presented in refs. [6-7], but the important difference appears when the pulse voltage is applied. Because the orifice diameter in this work is comparable to that of the cells; most voltage drop occurs around the orifice, and the membrane breakdown takes place nowhere but in the orifice.

High-yield electrofusion of biological cells

This situation can be looked into in more detail with an aid of a field analysis using a model shown in Fig.2. Two cells of radii a and a' are in contact at the orifice of radius b on an insulating barrier located at the middle of two electrodes separated by the distance $2h$. Because our purpose here is to see the effect of field constriction, we assume an axial symmetry for simplicity, that the cells are aligned along the center line, despite that this position is unstable and the cell pair will be dielectrophoretically attached to the barrier as experimentally observed (to be later shown in Fig. 7). We employ a boundary element method formulation [4], and calculate the membrane voltage V_m as the function of position expressed by the zenith angle θ (see fig.2), taking the cell radius as a parameter. For the numerical analysis, a fictitious boundary of radius d is assumed and all electrical flux is confined within the boundary, but it is chose far enough that it does not affect the result. As in [4], we solved the temporal evolution of V_m for a stepwise applied voltage, but in the following part of the paper, we shall confine our interest to its steady-state value, which is of importance for practical applications.

Figure 3 plots the calculated steady-state voltage V_m normalized by the applied voltage V_0 for a case of two equal-sized cells ($a = a'$). It is seen from the figure that, when the cells are large enough that the orifice is almost plugged (line a), V_m takes maximum on the membrane within the orifice ($\theta < 12^\circ$), where $V_m/V_0 \approx 1/2$, and V_m is very small elsewhere. $V_m/V_0 \approx 1/2$ means that the applied voltage is borne by the two membranes contacting in the orifice. This is the effect of field constriction, where the voltage drop is concentrated in the vicinity of the orifice, and the drop in the medium is negligible. In this case, the reversible membrane breakdown can be expected to take place only in the orifice by applying a voltage $2V_b$ to the electrodes, regardless of the electrode spacing h . This effect

High-yield electrofusion of biological cells

remains so far as the cells are large enough compared with the orifice, so that the induction of precisely controlled membrane voltage becomes possible irrespective of the cell size or electrode position.

As the orifice becomes wider (lines b, c and d in Fig. 3), the peak of V_m broadens, and V_m/V_0 there becomes smaller. The electrical current can flow through the gap between the cells and the insulating barrier in this case, which creates a voltage drop in the medium. This results in the reduction of the voltage applied to the membrane. Voltage higher than $2V_b$ is required for the reversible breakdown, but still in this case V_m is higher at $\theta = 0^\circ$ than $\theta = 180^\circ$, so the breakdown occurs selectively around the contact point. The magnitude of V_m at $\theta = 0^\circ$ and 180° becomes the same when the gap is increased to about $1.6a$.

The figure also shows the case without orifice by circular dots. V_m is higher at $\theta = 180^\circ$ than $\theta = 0^\circ$ by 28%. Therefore, upper and lower ends ($\theta = 180^\circ$) of the cell pair are likely to breakdown first, which we believe is one of the reasons why conventional cell-suspension based electrofusion is low yield. Note that the membrane potential in this case depends on the distance h between the electrodes as indicated by equation (3); however, the distribution of V_m on the cells is independent of h , provided it is wide enough.

When cells are dielectrophoretically pulled and made into contact in the orifice as in Fig. 2, they deform slightly. The contact is locally flat, and when the breakdown occurs at a certain point on one of the membranes, the voltage drop borne by the membrane is added to the other membrane. It is like breakdown propagation of two series capacitors, and such a process will lead to the membrane reconnection and the cell fusion.

High-yield electrofusion of biological cells

Figure 4 presents the case of two different sized cells ($a' = a/2$). It is clear that V_m is larger for the larger cell. The maximum V_m , which does not conform to equation (3), reflects the different degrees of leak between the cells and the orifice. However, the tendency that V_m is largest at the contact point is still there. If the membrane of the larger cell breaks down, it will cause domino-like breakdown of the opposing membrane of the smaller cell, initiating the fusion.

A particular case of interest is when more than one cell is attached to the orifice. The effect of the chain length on the membrane voltage is illustrated by using an arrangement of a $2N$ -cell chain having N (equal-sized) cells located above and under the orifice, respectively. The membrane potential on the cells above the orifice is presented for $N = 1, 2$ and 3 in Fig. 5A, in which the first cell is the one closest to the orifice. It is obvious from the figure that, in the steady-state, 1) maximum membrane voltage V_m occurs in the orifice (small θ on the first cell) and V_m is much smaller on other locations or on other cells, and 2) the maximum V_m virtually unaffected by the number of cells on the chain. Hence, appropriate magnitude of electric pulse can be readily selected to generate one-to-one fusion between the two cells at the orifice.

Discontinuities, for example between that at $\theta=180^\circ$ of the first cell and that at $\theta=0^\circ$ of the second cell, are seen. Its physical interpretation is as follows: because in steady-state where the membrane charging is completed, no current flows across the membrane, and the field is zero inside the cell. The potential drop per cell along the symmetry axis is borne by the membrane at $\theta=0^\circ$ and $\theta=180^\circ$, and the ratio between these two is determined by the field non-uniformity. On the first cell, both the field itself and the field

High-yield electrofusion of biological cells

non-uniformity is large, so large V_m at $\theta=0^\circ$ results. On the other hand, on the second or third cell, which is located far from the orifice, field is weaker and more uniform, so that V_m at $\theta=0^\circ$ and $\theta=180^\circ$ are small and more or less equal in magnitude.

For comparison, Fig. 5B gives the membrane voltage on the same cells in the absence of the orifice plate. V_m maxima is located at the chain end, and changes only slightly with N . The membrane potential at all the contact points is more or less the same. This would be the reason why the typical procedure results in many-cell fusion.

III. Device

For the cell fusion based on the field constriction, we need an orifice with the diameter of several μm , which is within the capability of microfabrication technique based on photolithography. However, to make the device low cost and make it disposable for each biological experiment, complex three-dimensional structure is not desirable. Another design consideration is to facilitate the observation of the fusion process under a short working distance of high-magnification optical microscopes.

We have the options among a) making an orifice array in a thin film as is done in our electroporation device, and observe the cell pair from the top, or b) making the orifice on the side wall, and view the cell pair from the side. In the former design, circular and smaller orifice can be made easily, but did not provide a good view for observation. Better observation can be made with the latter design, however, making a circular orifice on the side-wall in the microchannel requires complex 3D fabrication. In this paper, we made a compromise by employing the latter design, and use a rectangular orifice, which can be

High-yield electrofusion of biological cells

made with a single-mask process. This does not precisely represent the model used in the numerical analysis, but still adequately create the field constriction effect.

The device is shown schematically in Fig. 6. Two channels run horizontally as in Fig. 6A, which are separated by a wall, that has periodical openings (orifices). The device is fabricated by single-mask lithography using SU-8 and PDMS (poly-dimethyl siloxane) molding, so the structure is two dimensional, and the orifices' cross-section is rectangular. The cover lid has a pair of vacuum-evaporated Al electrodes for energization.

The dimensions of the device are varied for the type of cells to be used for experiments. Typical values are listed in Table 1. It is worth noting here, owing to the design that gives a high degree of field constriction in membrane charging, we can use wider electrode gap than that in the past [6-7] and still achieve cell fusion by smaller applied voltage.

IV. Material and Method

In the following, experimental demonstrations of fusion among the same type of cell are made. Two type of cells, plant and mammalian, are used.

Plant protoplasts are obtained from the stems of radish sprouts. A solution of 1.5% cellulase R10, 0.75% macerozyme, 0.6 M mannitol, and 10 mM MES (pH 5.7) is used for digestion and isolation. After isolation, cells are washed twice with a solution of 0.6 M mannitol, and the conductivity of cell suspension is controlled to be about 7 mS/m or lower.

High-yield electrofusion of biological cells

As a mammalian cell, Jurkat cells (human T cell lymphoblast-like cell line) are used. The cells are cultured in RPMI 1640 medium supplemented with 10% FBS under 37°C, 5% CO₂, and they were suspended in 0.25M glucose solution for fusion. The conductivity of the cell suspension is 6 mS/m.

The cells are fed into the device, the electrodes are energized to collect cells into opening by dielectrophoresis, and radio-frequency (r.f.) modulated pulse voltage is applied for fusion. Typical electrical parameters are listed in Table II. With the solution conductivity and the cell size used in experiment, the charging time constant of a single cell under a uniform field (τ_c in eq.(2)) is about 20 and 6 μ s for the protoplast and lymphoblast, respectively [3]. (1- μ F/cm² membrane capacitance and 1-S/m inner conductivity are assumed.) In order to generate positive DEP to attract cells into the orifice, the time constant of the applied frequency should be shorter than these charging time constant τ_c , while in order to reach the steady-state V_m they should be longer than τ_c . Thus, frequencies above 1 MHz are used for DEP, while those in the range of kHz are applied to initiate fusion. The reason why the modulated pulse is used is to prevent secondary breakdown of the membrane [9], and is found to be very effective in preventing the breakdown at other locations than at the contact point.

V. Results and discussion

Fig. 7 shows a temporal sequence of cell fusion of the plant protoplasts. First two cells, one about twice larger than the other, are dielectrophoretically made in contact at the orifice in Fig. 7A. Then, r.f. modulated pulse is applied, by which the cell fusion is initiated, as shown in Fig. 7B. The voltage for DEP is still there, so the fused cell is

High-yield electrofusion of biological cells

elongated due to the electrical stress. In fact, such an elongation has been used to confirm that the membrane is reconnected in our experiments. By removing the voltage, the fused cell is released from the orifice, and becomes spherical due to surface tension [Fig. 7C].

As is noted previously, if the orifice is ideally plugged by the cells, only $2 V_b \approx 2 \text{ V}$ shall be sufficient for initiating fusion. However, the orifice of the current device is rectangular with $60 \text{ }\mu\text{m}$ -depth, and rather leaky. Because of this, we needed 6 V to induce the fusion in the figure. Still, the field constriction is found to be effective in selectively breaking down the contact point. This result confirms our prediction from fig. 3B that the orifice can be used to initiate fusion between two cells of unequal size. For simple comparison, we may consider the case of a single cell of $50\text{-}\mu\text{m}$ diameter, more or less the size of the larger cell in Fig. 7. In the absence of the orifice, to initiate the membrane breakdown in the electrode gap specified in Table 1, a potential difference of 11 V must be applied to the electrodes. (Needless to say that, without the orifice, this voltage still fails to induce cell fusion between the two cells in Fig. 7 because of higher membrane voltage at the opposite pole than at the contact-point pole.)

In Fig. 8 is shown the typical case where more than two cells are forming a chain. The application of the electric field for DEP usually results in chains much longer than two cells. This is because a cell chain attracts other cells located nearby to its terminals and the attractive DEP force is stronger when the chain becomes longer. In this case, the chain is composed of seven cells and bridges the electrode gap. Without the orifice, any of the contact points can breakdown, and the breakdown is often not limited to one as already explained in Section 2. However, with the highly concentrated field profile due to the orifice, we can restrict the breakdown only to the contact in the orifice, and realize

High-yield electrofusion of biological cells

one-to-one cell fusion. The applied voltage is 6.5V in this case. Compared to that of Fig. 7, it is clear that the voltage is independent of the number of cells on the chain. This also conforms to the analysis result in Fig. 5.

Figure 9 is the case of smaller cells. Size of the cells is about a half of those in Fig. 7, so, if the orifice is absent, the required voltage will be twice higher. However, due to the field constriction, such size-dependence is alleviated, and the fusion of Fig. 7 is achieved with a slightly higher voltage (7 V) than that in Fig. 7 (6 V). This radius dependence is not necessarily in quantitative agreement with the result of Fig. 3. This is rather due to the limitation of the analysis assuming axial symmetry. The cells in Fig. 7 are dielectrophoretically positioned at the tip of tapered insulating barrier, where higher non-field uniformity exists. Still, the result demonstrates the advantage of the use of the field constriction for a) having less size-dependence, and b) selective breakdown at the contact point.

Figure 10 shows a temporal sequence of the fusion between human Jurkat cells. The orifice is rectangular again, but is smaller than in the previous experiments, 8 μm (width) x 15 μm (depth). Since the DEP force acting on a cell is typically proportional to the cubic of cell size [12] and the Jurkat cell is about 3 times smaller than the protoplast, comparatively stronger electric field is required to attract the cells to the orifice in Fig. 10(1) and (2), as shown in Table 2. The membrane fusion is observed in (3) after the application of the electric pulse of 6 V. The cell is released from the orifice ((4) and (5)) and observed for several minutes after the fusion in (6). On average, the magnitude of applied voltage needed to induce fusion for Jurkat cells is just slightly higher than that for the protoplasts (see Table 2). Therefore, these results confirm the effectiveness of the

High-yield electrofusion of biological cells

orifice in field constriction, decreasing the degree of size dependence of V_m .

In all experiments with plant protoplasts as well as with Jurkat cells, cell fusion took place so far as the cells can be positioned in the orifice, and the membrane breakdown other than at the contact point was hardly observed. Including several ten fusion events not shown here, more than 90% fusion yield was obtained by the device, which is a significant improvement from the previous work. This is primarily due to the fact that, until membrane breakdown occurs, we can increase the magnitude of fusing pulses gradually without damaging cells, provided they are in good condition.

VI. Conclusions

A device has been designed and fabricated for high-yield electrofusion of cells, based on the use of field constriction at the orifice on an insulating barrier. Experiments performed on the device show that we can realize one-to-one cell fusion for cells. As the approach used here is in principle independent of cell size, it can be applied to the practical problems of fusion between cells of different size. The fusion is highly reproducible and more than 90% yield has been achieved.

Acknowledgments

This research is supported by the Ministry of Education Japan (Kakenhi 18048008), JST CREST, Grant-in-Aid for Scientific Research from NEDO, and Advance CO. B.T. acknowledges the scholarship of the Japan Society for the Promotion of Science (JSPS) and the support from the Thailand Research Fund (TRF). VDEC (VLSI Design and Education Center) Electron Beam Lithography System was used for making devices.

High-yield electrofusion of biological cells

*Corresponding author E-mail address: boonchai.t@chula.ac.th.

References

- [1] Zimmermann, U., and Arnold, W.M.: 'Biophysics of electroinjection and electrofusion', J. Electrostat., 1988, 21, pp.309-345.
- [2] Zimmermann, U.: 'Electric field-mediated fusion and related electrical phenomena', Biochim. Biophys. Acta, 1982, 694, pp.227-277.
- [3] Mehrle, W., Naton, B., and Hampp, R.: 'Determination of physical membrane properties of plant cell protoplasts via the electrofusion technique: prediction of optimal fusion yields and protoplast viability', Plant Cell Reports, 1990, 8, pp.687-691.
- [4] Techaumnat, B., and Washizu, M.: 'Analysis of the effects of an orifice plate on the membrane potential in electroporation and electrofusion of cells', J. Phys. D: Appl. Phys., 2007, 40, pp.1831-1837.
- [5] Washizu, M., and Techaumnat, B.: 'Cell membrane voltage during electrical cell fusion calculated by re-expansion method', J. Electrostat., 2007, 65, pp.555-561.
- [6] Masuda, S., Washizu, M., and Nanba, T.: 'Novel method of cell fusion in field constriction area in fluid integrated circuit', IEEE Trans. Ind. Applicat., 1989, 25, pp.732-737.
- [7] Urano, N., Kamimura, M., Nanba, T., Okada, M., Fujimoto, M., and Washizu, M.: 'Construction of a yeast cell fusion system using a fluid integrated circuit', Journal of Biotechnology, 1991, 20, pp.109-115.
- [8] Kurosawa, O., Oana, H., Matsuoka, S., Noma, A., Kotera, H., and Washizu, M.: 'Electroporation through a micro-fabricated orifice and its application to the measurement of cell response to external stimuli', Meas. Sci. Technol., 2006, 17, pp.3127-3133.
- [9] Kurosawa, O., Oana, H., Kotera, H., and Washizu, M.: 'High-yield electroporation using RF modulated field constriction', Proc. Int. Conf. on μ -TAS, Tokyo, Japan, 2006, pp.458-460.

High-yield electrofusion of biological cells

- [10]Huang, Y., and Rubinsky, B.: 'Flow-through micro-electroporation chip for high efficiency single-cell genetic manipulation', *Sensors Actuators A*, 2003, 104, pp.205-212.
- [11]Khine, M., Lau, A., Ionescu-Zanetti, C., Seo, J., and Lee, L.P.: 'A single cell electroporation chip', *Lab. Chip*, 2005, 5, pp.38-43.
- [12]Jones, T.B.: 'Electromechanics of Particles' (Cambridge University Press, 1995, 1st edn.).

High-yield electrofusion of biological cells

Table 1. Typical dimensions of the device shown in Fig. 6.

Cell type of the device	plant	human
	protoplast	lymphoblast
Cell size (μm)	20-60 ^ϕ	5-15 ^ϕ
Channel depth, D (μm)	60	15
Wall thickness, T (μm)	50	30
Orifice width, B (μm)	30-40	8-10
Electrode gap, G (μm)	400	500

Table 2. Typical electrical parameters for DEP and fusion.

Cell type	DEP	Fusion
plant protoplast	2MHz,	6-7V _p , 5ms,
(20-60 μm^{ϕ})	3-6V _p	50kHz-modulated
human	5 MHz,	6-10V _p , 10ms,
lymphoblast	7.5-10V _p	20kHz-modulated
(5-15 μm^{ϕ})		

High-yield electrofusion of biological cells

List of Figure Captions

1. Principle of electrofusion based on the field constriction.
2. Model used for analyzing membrane voltage in the presence of an orifice.
3. Membrane voltage V_m induced on the equal-sized cells in contact in an orifice as a function of position. δ is the minimum spacing between the cells and the orifice wall, $w = 0.1a$, $d = 5a$ and $h = 5a$ where a is the cell radius.
4. Membrane voltage on the unequal cells, of which the larger and smaller radii are a and $a/2$, respectively. Dimensions w , d and h are the same as those used for Fig. 3.
5. Membrane voltage V_m when N cells (of equal radius) exist on each side of the orifice: (a) V_m on the first, second and third cells from the orifice and (b) V_m on the same cells in the absence of the orifice. The analysis uses $w = 0.1a$, $d = 5a$, $h = 12a$ and $\delta = 0.1a$.
6. Structure of the device for electrofusion.
7. Temporal sequence of electrofusion between two unequal cells (plant protoplasts).
8. Membrane breakdown on a long cell chain occurs only at the contact point between two cells at the orifice when electric pulse is applied. As a result, 1:1 fusion is obtained. (a) Chain formed under DEP force. (b) Breakdown at the contact point by electric pulse.
9. Fusion between two cells smaller than the orifice. (a) Cells attracted to the orifice surface by DEP. (b) Breakdown of membrane at the contact point due to electric pulse. (c) Cell released from the orifice.
10. Fusion of mammalian cells in a temporal sequence from (1) to (6).

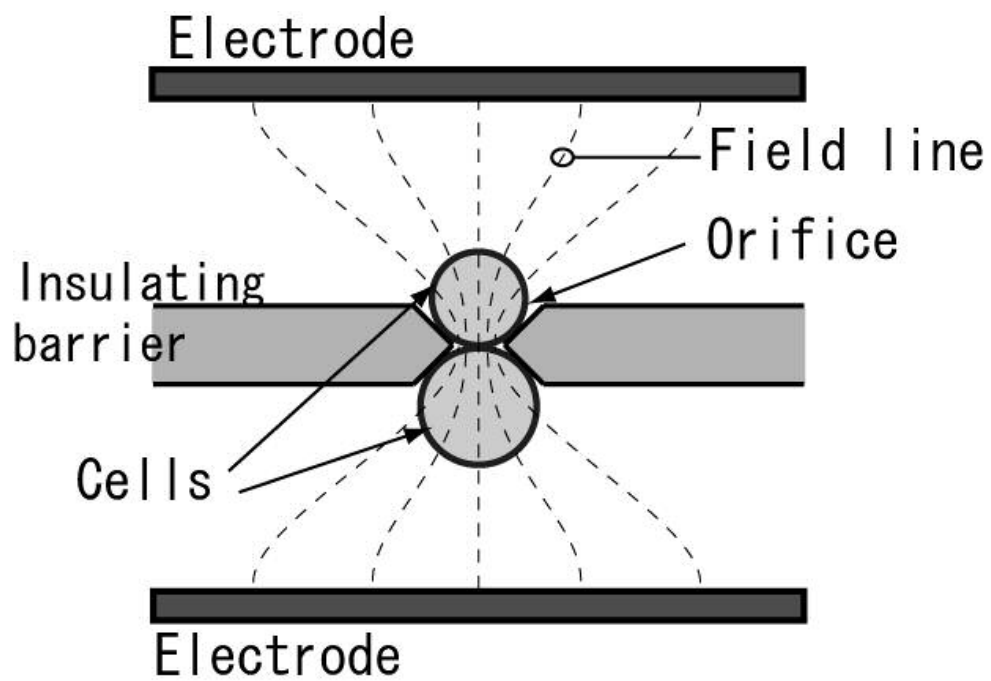


FIG. 1.

52x44mm (300 x 300 DPI)

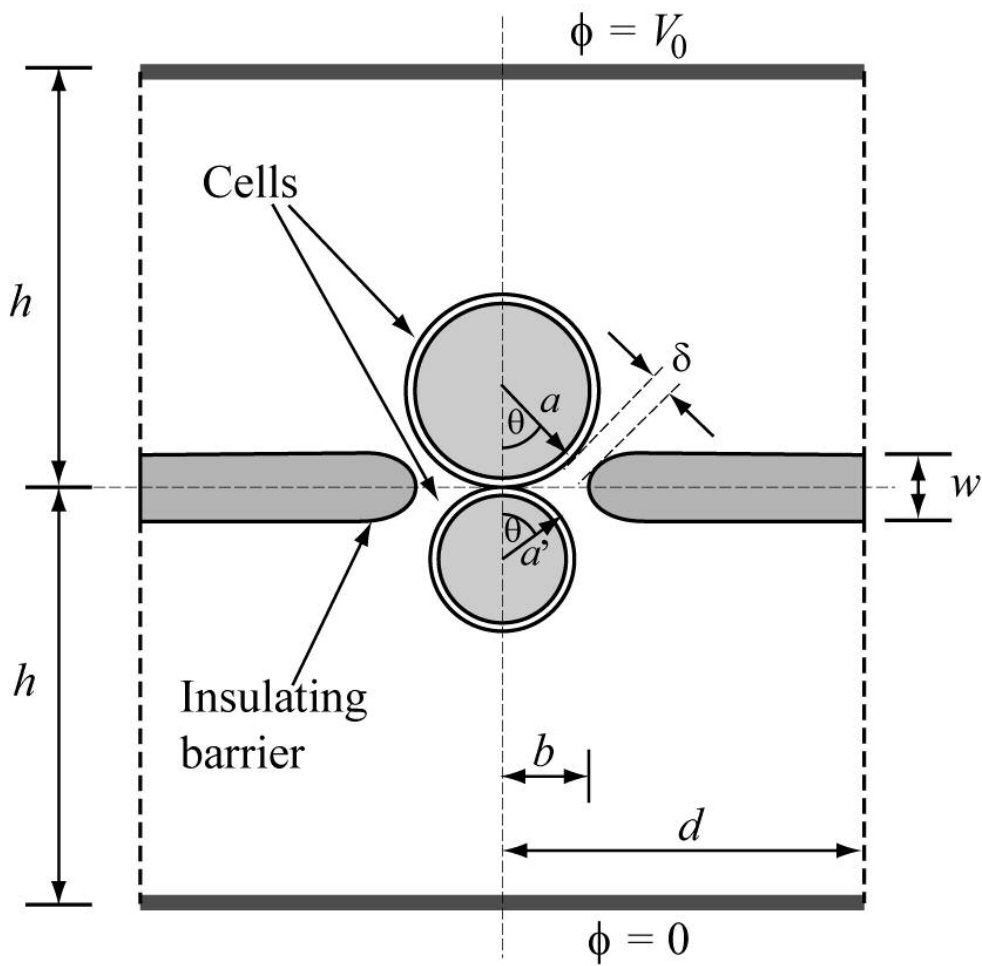


FIG. 2.

70x78mm (300 x 300 DPI)

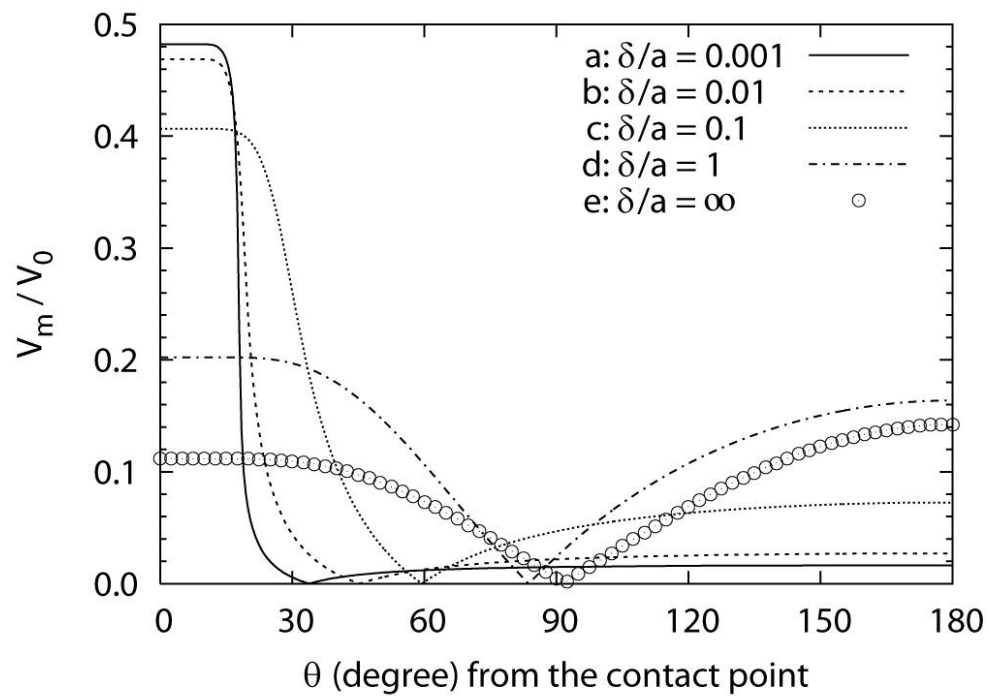


FIG. 3.

85x70mm (300 x 300 DPI)

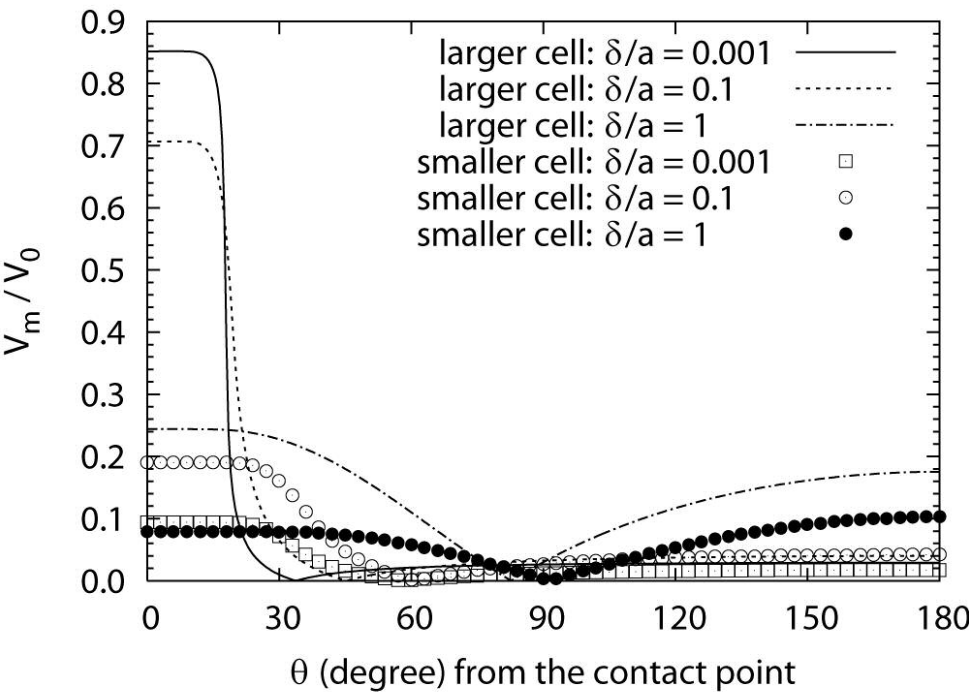


FIG. 4.

85x70mm (300 x 300 DPI)

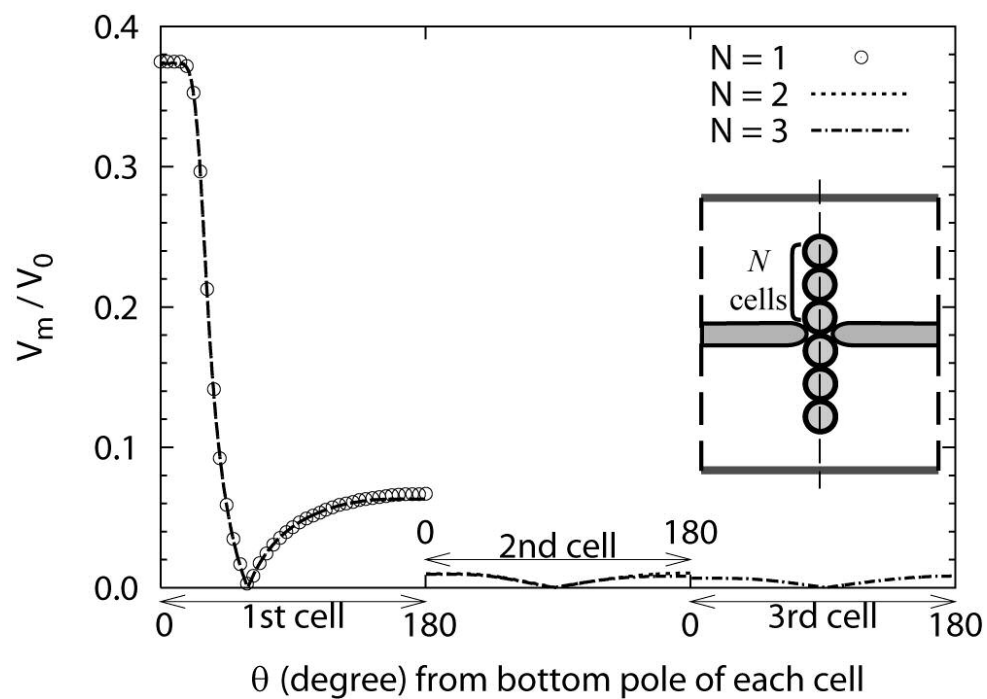


FIG. 5A.

84x69mm (300 x 300 DPI)

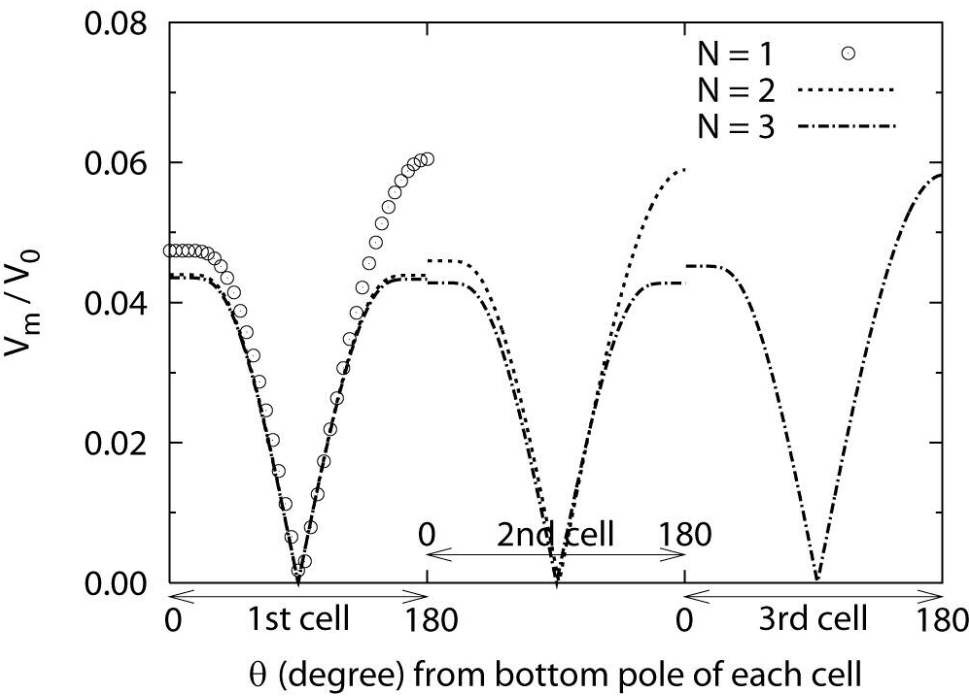


FIG. 5B.

84x68mm (300 x 300 DPI)

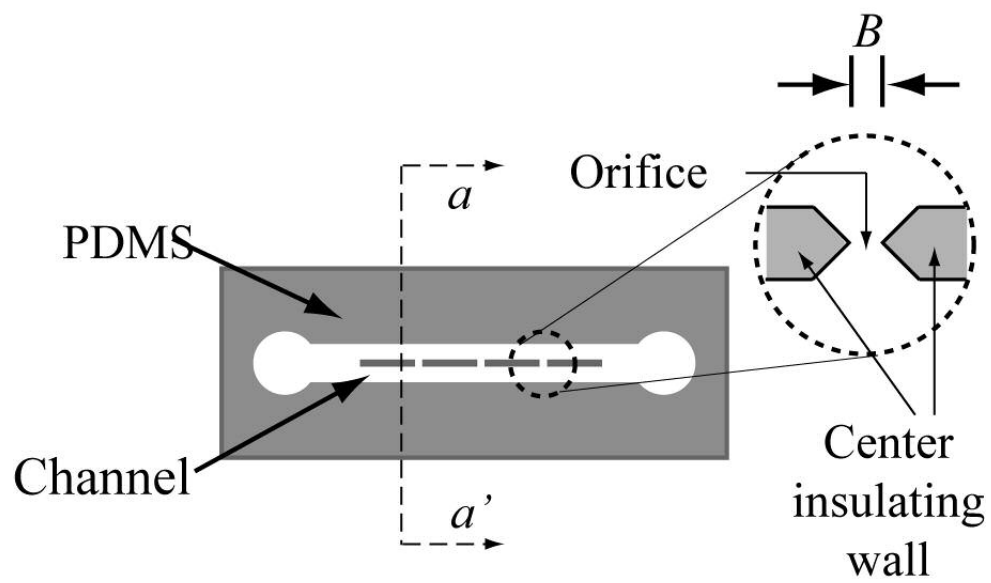


FIG. 6A.

77x56mm (300 x 300 DPI)

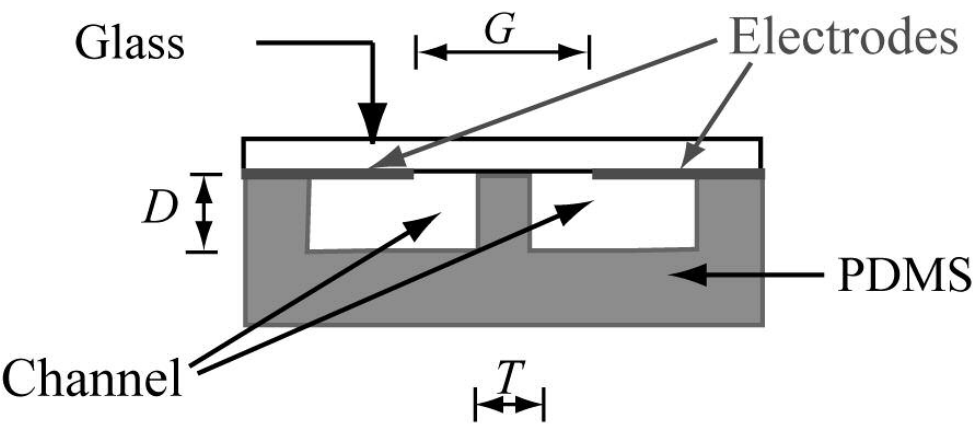
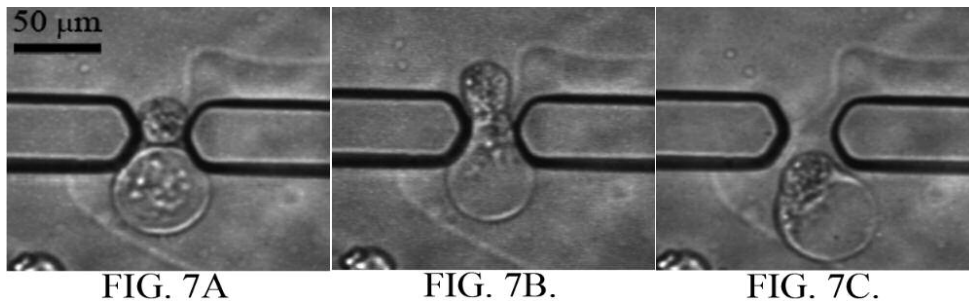


FIG. 6B

75x44mm (300 x 300 DPI)



96x29mm (264 x 264 DPI)

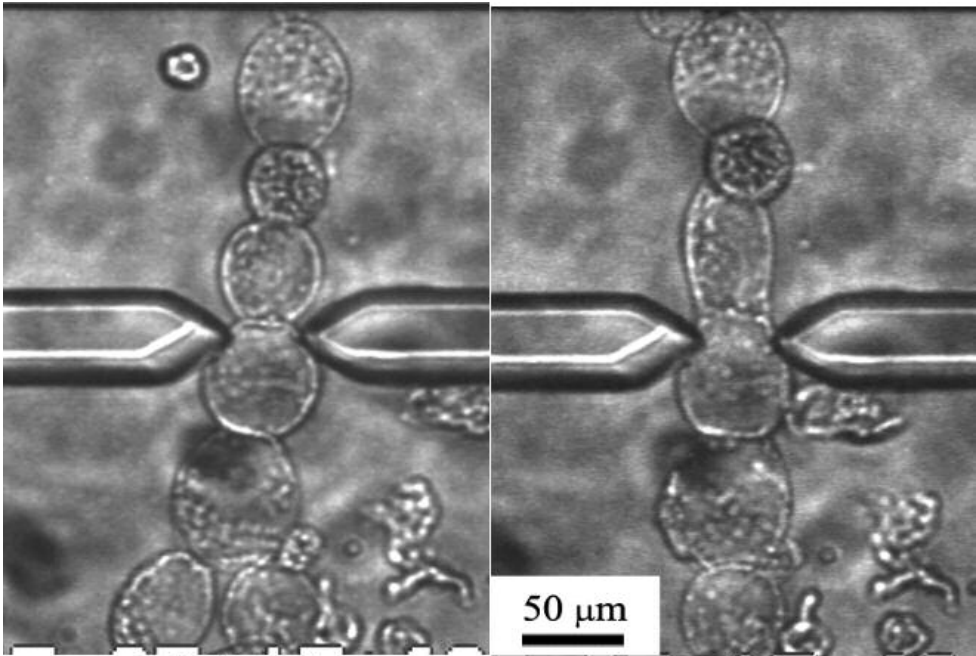
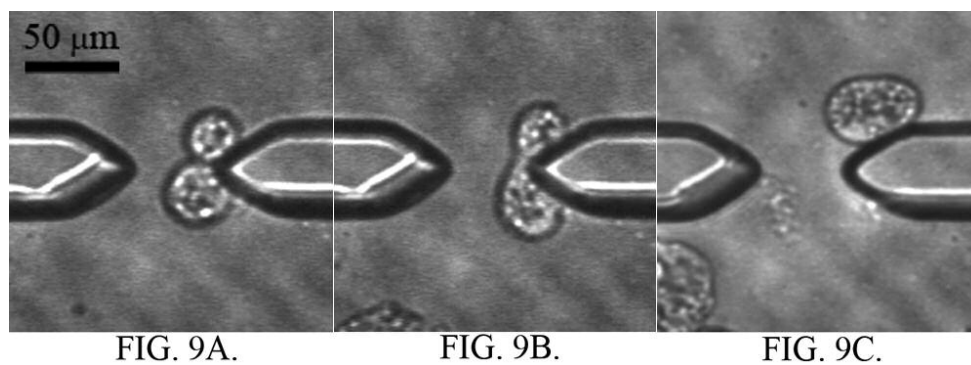


FIG. 8A.

FIG. 8B.

63x48mm (264 x 264 DPI)



95x35mm (264 x 264 DPI)

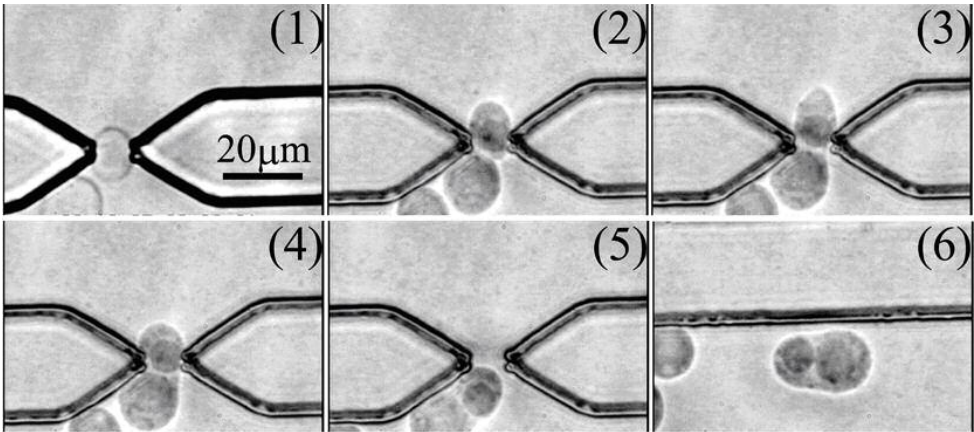


FIG. 10.

79x39mm (264 x 264 DPI)