รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การศึกษาผลของรูปร่าง การจัดเรียงของอนุภาค และรูปแบบอิเล็กโตรด ที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรง

โดย บุญชัย เตชะอำนาจ

สิงหาคม 2551

สัญญาเลขที่ RMU4880014

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การศึกษาผลของรูปร่าง การจัดเรียงของอนุภาค และรูปแบบอิเล็กโตรด ที่มีต่อสนามไฟฟ้าและแรง

บุญชัย เตชะอำนาจ
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สนับสนุนโดยสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา
และสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกอ. และ สกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

สารบัญ

หัวข้อ	หน้าที่
บทคัดย่อ(ไทย)	3
บทคัดย่อ(อังกฤษ)	5
Executive Summary	7
1. ความสำคัญและที่มาของปัญหา	8
2. วัตถุประสงค์ของโครงการ	10
3. ผลการศึกษา	11
4. สรุปผลการศึกษาที่ได้	88
5. รายการเอกสารอ้างอิง	89
6. Output ที่ได้จากการวิจัยในโครงการ	92
ภาคผนวก	93

บทคัดย่อ

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาลักษณะสมบัติของสนามไฟฟ้า และแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากสนามไฟฟ้า ตั้งแต่ระดับอนุภาคเดี่ยวภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก ระดับอนุภาคเดี่ยวภายในระบบอิเล็กโตรดที่มีชั้นผิวฉนวน ไปจนถึง ระดับกลุ่มอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก. ผลการศึกษามีดังต่อไปนี้

- โครงการนี้ได้พัฒนาวิธีคำนวณสนามไฟฟ้าในระบบสองมิติ โดยใช้หลักการของเงามัลติโพลในการทำให้เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องเป็นจริง และได้นำเสนอสมการเงามัลติโพลสำหรับวัตถุตัวนำหรือฉนวนที่มีขอบเขตเป็นทรงกระบอกหรือเป็นระนาบ. การคำนวณใช้การกระจายมัลติโพลใหม่ 3 ชนิด ซึ่งทำให้สามารถใช้กระบวนการวางเงามัลติโพลได้. ข้อดีของวิธีนี้เหนือวิธีเงาประจุทั่วไปก็คือวิธีที่นำเสนอนี้สามารถใช้ได้การรูปแบบที่ซับซ้อน มีวัตถุมากกว่าสองตัวในระบบได้. นอกจากนี้ วิธีคำนวณนี้ สามารถประยุกต์ใช้ประมาณสนามไฟฟ้าและแรง ในกรณีของอนุภาคที่มีลักษณะแหลมยาวได้.
- การศึกษาในระดับอนุภาคเดี่ยว ได้พิจารณากรณีของทรงกลมตัดกัน และกรณีของอนุภาคทรงคล้ายทรงกลมแป้นข้างหรือแป้นขั้ว. สำหรับอนุภาครูปทรงกลมตัดกัน ผู้วิจัยได้นำเสนอการประยุกต์ใช้วิธีเงามัลติโพลในการคำนวณสนามไฟฟ้า. วิธีที่นำเสนอนี้สามารถใช้ได้กับกรณีของอนุภาคตัวนำที่ต่อลงดิน หรือไม่ต่อลงดิน หรือได้รับการป้อนศักย์ไฟฟ้าคงที่ค่าหนึ่งได้. ผู้วิจัยได้แสดงตัวอย่างการคำนวณสำหรับตัวนำทรงกลมตัดกันที่ต่อลงดิน ทั้งในกรณีที่ตัวนำทรงกลมมีรัศมีเท่ากัน และกรณีที่มีรัศมีต่างกัน. ผลการคำนวณสอดคล้องกับขีดจำกัดเมื่อทรงกลมทั้งสองซ้อนทับกันพอดี. สำหรับกรณีของทรงกลมรัศมีต่างกัน ผลการคำนวณเชิงตัวเลขแสดงว่า วิธีนี้สามารถใช้ได้เมื่อระดับของมุมตัดไม่สูงเกินไป.
- การศึกษาอนุภาคทรงคล้ายทรงกลมแบบมีชั้นผิวฉนวน ได้วิเคราะห์แรงดันที่ตกคร่อมชั้นผิวฉนวนและตัวประกอบโพลาไรเซชัน โดยใช้โมเดลแม่นยำแบบที่ชั้นผิวฉนวนมีความหนาคงที่. วิธีวิเคราะห์มีพื้นฐานจากการกระจายฮาร์มอนิกส์ในระบบพิกัดทรงคล้ายทรงกลม และหาคำตอบโดยพิจารณาปฏิกิริยาระหว่างแต่ละองค์ประกอบฮาร์มอนิกส์. ผลการศึกษาทำให้เข้าใจความแตกต่างของแรงดันที่ตกคร่อมชั้นผิวฉนวนและตัวประกอบโพลาไรเซชันที่ได้จากการใช้โมเดลแม่นยำ เมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้เมื่อใช้โมเดลประมาณที่มีความหนาของชั้นฉนวนไม่คงที่.
- ในการศึกษาสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคในระบบอิเล็กโตรดแบบที่มีชั้นผิวฉนวน เมื่อชั้นฉนวนมีความหนากึ่งอนันต์ ผู้วิจัยได้ใช้วิธีเงาประจุในการคำนวณสนามไฟฟ้า โดยวางอนุกรมอนันต์ของเงาประจุและเงาไดโพล. สนามไฟฟ้ามีค่าสูงสุด ณ จุดสัมผัสระหว่างอนุภาคกับชั้นฉนวน. ทั้งสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส และแรงที่ทำกับอนุภาคเพิ่มขึ้นตามสภาพยอมของของแข็ง. แรงที่ได้ดึงให้อนุภาคทรงกลมอยู่ติดกับชั้นฉนวนแข็ง. ผลการศึกษาทำให้ได้สมการง่ายๆ สำหรับประมาณสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส และแรงที่ทำกับอนุภาค โดยมีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 3% เมื่อฉนวนแข็งมีสภาพยอมไม่เกิน 32 และ 64 เท่าของสภาพยอมของตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบ ตามลำดับ.
- ในการจัดเรียงของอนุภาคและตัวนำระนาบที่มีชั้นผิวฉนวนความหนาจำกัด สนามไฟฟ้าถูกคำนวณโดยใช้วิธีเงามัลติโพล โดยมีกระบวนการคำนวณแบบทำซ้ำที่ถูกนำเสนอขึ้นโดยเฉพาะ. ผลการคำนวณแสดงว่าสนามไฟฟ้าเพิ่มขึ้นจากกรณีที่ไม่มีชั้นผิวฉนวน. อย่างไรก็ตาม ถ้าอนุภาคอยู่ห่างจากผิวฉนวนประมาณระยะเท่ากับรัศมีของอนุภาค ผลของชั้นผิวฉนวนก็สามารถละเลยได้. ภายในชั้นผิวฉนวน สนามไฟฟ้าบนแกนสมมาตรจะมีความสม่ำเสมอมากขึ้น และสนามไฟฟ้าเฉลี่ยจะ

สูงขึ้น เมื่อความหนาของชั้นผิวฉนวนลดลง. สำหรับกรณีที่ชั้นผิวฉนวนมีความบางเพียงพอ ผู้วิจัยได้พบว่า เราสามารถประมาณค่าสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส และแรงบนอนุภาคตัวนำได้ เป็นฟังก์ชันกำลังของอัตราส่วนสภาพยอมของชั้นฉนวนแข็งต่อสภาพยอมของตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบ.

- การศึกษาพฤติกรรมของระบบอนุภาคทำกับระบบของไหลอีอาร์ โดยใช้โมเดลแบบมัลติโพล ซึ่งรวมปฏิกิริยาอันดับที่สูงกว่าโมเดลแบบไดโพลที่ใช้กันอยู่ทั่วไป. โมเดลแบบมัลติโพลใช้หลักการกระจายมัลติโพล และวิธีเงาประจุในการคำนวณสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาค. ผู้วิจัยได้เลือกอันดับของมัลติโพล และจำนวนรอบในการทำซ้ำที่เหมาะสม เพื่อให้ได้ค่าแรงที่แม่นยำสูงขึ้น โดยที่ไม่ใช้เวลาในการคำนวณนานเกินไป. การศึกษาในกรณีของอนุภาคสองตัวแสดงว่า แรงที่ได้เพิ่มขึ้นอย่างไม่เป็นเชิงเส้นกับอันดับของมัลติโพลและจำนวนรอบการทำซ้ำที่ใช้. จากนั้น ได้ทำการจำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาคจำนวน 20 และ 67 อนุภาค และเปรียบเทียบผลการจำลองที่ได้ กับผลที่ได้เมื่อใช้โมเดลแบบไดโพล. ผลการศึกษาแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างอย่างมาก เมื่อปรับปรุงการจำลองด้วยการใช้โมเดลมัลติโพล.

Abstract

This research has studied the characteristics of electric field and force induced by the field for (1) a single particle under an applied electric field, (2) an isolated particle in a system of dielectric barrier, and (3) a system of particles under an external field. Results of the studies may be summarized as follows:

- We have presented the method of images for calculating electric field in two-dimensional arrangements. The method utilizes multipoles as the images to satisfy boundary conditions. The images are given for planar or cylindrical boundaries between two dielectrics and for those between a dielectric and a conductor. We introduce the use of three kinds of multipole re-expansions, which enables the calculation of images in complicated arrangements. The method has a clear advantage over using only line charges or line dipoles when the arrangement under consideration consists of more than two objects. In addition, the proposed method is also applicable to the estimation of the electric field and force on a very long particle.
- For the level of a single particle, the research is focused on (1) intersecting spherical particle and (2) spheroid particle. In arrangements of intersecting conducting spheres, the application of the method of images to the calculation of electric field is presented. The method is applicable for cases of electrically floating, grounded, or energized conducting spheres that intersect each other. Examples are given for two grounded intersecting spheres of equal radii and those of different radii, respectively, under an external uniform field. The results for the spheres of equal radii agree well with the analytical solutions for the case of completely overlapped spheres and touching spheres, respectively. For the spheres of different radii, the numerical results show that the method may also be used when the degree of intersection is not too high.
- For an isolated spheroidal particle with insulating membrane, we have analyzed the membrane voltage and the polarization factor using a precise model, by which the membrane has a uniform thickness. The analytical method is based on the harmonic expansion of the field, to include the condition of the uniform membrane thickness as a series expansion of the geometrical factor, and to solve the field problem as an interaction of the harmonic components. The results clarified the effects of the applied model on the membrane voltage and the polarization factor of the particle.
- For an arrangement of a conducting sphere lying on a dielectric solid under a uniform field, we have applied the analytical method of successively placing three infinite sequences of point and dipole charges (zero- or first-order multipoles). The electric field is highest at the contact point. Both the contact-point field and the force increase with the permittivity ratio of the solid to that of the surrounding medium. The resulting force always attracts the sphere to the solid. We have given very simple formulae for approximating the contact-

point field and the force which agree with the precise values within a difference of 3% for permittivity ratios up to 32 and 64, respectively.

- In an arrangement consisting of an uncharged conducting sphere and a plane electrode with a dielectric barrier, the electric field is calculated by using the method of multipole images using an iterative algorithm proposed for calculating the images of the dielectric barrier of finite thickness. The calculation results show electric field intensification due to the presence of the dielectric barrier having higher permittivity than that of the surrounding medium; however, if the barrier is separated from the conducting sphere by at least the sphere radius, its influence is negligible. Inside the dielectric barrier, the electric field on the axis of symmetry becomes more uniform and the average field significantly increases with decreasing its thickness. For a case where dielectric barrier is sufficiently thin, the electric field at the contact point and the force on the conducting sphere vary approximately as power functions of the permittivity ratio.
- Studies on the system of particles have been done for an electrorheological (ER) fluid system by using a multipole model that includes multipolar interactions between particles. The model uses the multipole re-expansion and the method of images for calculating electric field and force. The highest order of multipoles and the number of iterations used in the method of images can be chosen for the accuracy of the force approximation and the simulation time required. Study of a two-particle configuration shows that the force does not increase linearly with increasing the order of multipoles and the number of iterations. We have performed the simulation of a system of 20 and 67 particles, and compared the formulation of particle chains with that obtained using the dipole model. The results indicate significant difference when the multipole model is used in simulation.

Executive Summary

This research has studied the characteristics of electric field and force induced by the field for (1) a single particle under an applied electric field, (2) an isolated particle in a system of dielectric barrier, and (3) a system of particles under an external field. Results of the studies may be summarized as follows:

- A novel calculation method based on multipole images has been developed for two dimensional problems. This method is capable of estimating electric field and force for the cases of long particles.
- The study of single particle includes the analysis of a) a intersecting spherical particle and b) a spheroidal particle. For the case of intersecting spheres, the analysis is applicable for an arbitrary angle of intersection between the spheres. For the case of a spheroidal particle, we have determined the polarization factor at various frequencies, and demonstrated the difference obtained by using a precise model for which the insulating membrane thickness is uniform, independent of azimuth angle.
- For the study of an isolated particle in a system of dielectric barrier, we have applied the method of images and the method of multipole images to the potential problems in order to achieve high accuracy of the results. Results of the study illustrate field intensification at a small gap between the particle and the dielectric barrier or at the contact point between the particle and the barrier. In addition, we are able to determine simple empirical formulae for estimating the electric field and force in such systems.
- Simulation of a system of particle under an externally applied electric field has been performed for an electrorheological (ER) fluid. We have utilized more accurate model (multipole model) in the calculation of force acting on particles for the simulation. The simulation results show significant difference compared with those obtained by the conventional dipole model. The time of chain formulation is shorter, and the appearance of chains becomes more consistent by the use of the multipole model. Furthermore, we have also demonstrated that it may be improper to use the MSD as a parameter to indicate the steady state of chain formation in practice.

1. ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ในปัจจุบันมีการใช้งานฉนวนและตัวนำไฟฟ้าในรูปแบบของอนุภาคอยู่มากมาย. ตัวอย่างของการใช้ประโยชน์ที่สำคัญได้แก่ เครื่องถ่ายเอกสาร เครื่องพ่นสีแบบใช้ไฟฟ้า เครื่องเคลือบวัสดุต่างๆ [1]. (เอกสารอ้างอิงแสดงอยู่ในตอนท้ายของหัวข้อที่ 6.) ในระบบฉนวนไฟฟ้าแรงสูง ก็มีการเติมอนุภาคขนาดเล็กหรือฟิลเลอร์ (filler) ชนิดต่างๆ เพื่อปรับปรุงลักษณะสมบัติทางไฟฟ้าของวัสดุฉนวน ได้แก่ สภาพนำหรือค่าคงตัวไดอิเลกตริก[2]. ในอีกด้านหนึ่ง มักมีการปรากฏอยู่ของอนุภาคฉนวนหรืออนุภาคตัวนำโดยไม่ได้ตั้งใจ เนื่องจากกระบวนการผลิต กระบวนการประกอบอุปกรณ์ไฟฟ้าแรงสูง. ตัวอย่างการใช้ประโยชน์ที่สำคัญซึ่งได้รับความสนใจมากในปัจจุบันอีกชนิดหนึ่งก็คือ ของไหล ER [3, 4] (electrorheological fluid). ของไหล ER เป็นฉนวนไฟฟ้าเหลวที่มีอนุภาคฉนวนขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางในช่วง 1 ถึง 50 ไมโครเมตรอยู่ภายใน. เมื่อป้อนสนามไฟฟ้าที่มีขนาดสูงพอให้กับของไหล ER ของไหล ER จะมีความหนืดจำเพาะเพิ่มขึ้นอย่างฉับพลัน. ความหนืดจำเพาะของของไหลจะกลับคืนสู่สภาพเดิม เมื่อตัดสนามไฟฟ้าที่ป้อนออกไป. เวลาที่ใช้ในการเปลี่ยนแปลงความหนืดนี้อยู่ในช่วงมิลลิวินาที ซึ่งถือได้ว่ามีค่าต่ำมาก. ของไหล ER มีแนวทางการใช้งานในอุตสาหกรรมได้หลายด้านเช่น คลัตช์ อุปกรณ์ควบคุมการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์ อุปกรณ์รับแรงกระแทก (shock absorber) เป็นต้น.

ในการใช้ประโยชน์อนุภาคฉนวนหรืออนุภาคตัวนำที่ได้กล่าวมาขั้นต้นนี้ ลักษณะสมบัติของสนามไฟฟ้าหรือแรงบนอนุภาคมีความสำคัญอย่างยิ่งต่อความสามารถในการใช้งาน. สำหรับการใช้งานทางไฟฟ้าสถิตทั่วไป แรงที่เกิดขึ้นมีผลต่อตำแหน่ง การเคลื่อนที่ และเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ของอนุภาค. ในกรณีที่อนุภาคฉนวนเป็นฟิลเลอร์ ลักษณะสมบัติของวัสดุโดยรวมขึ้นอยู่กับการกระจายของฟิลเลอร์ และลักษณะสมบัติทางไฟฟ้าของฟิลเลอร์. ในระบบไฟฟ้าแรงสูงที่มีการฉนวนด้วยก๊าซ อนุภาคฉนวนหรือตัวนำทำให้ความสามารถในการฉนวนของอุปกรณ์ต่ำกว่าที่ได้ออกแบบไว้ เนื่องจากเมื่อได้รับแรงจากสนามไฟฟ้า อนุภาคมีโอกาสเคลื่อนที่ไปสัมผัสอิเล็กโตรด ทำให้เกิดดีสชาร์จบางส่วนหรือเบรกดาวน์ขึ้นในระบบฉนวนได้.

เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงความหนืดของของไหล ER เกิดจากการที่อนุภาคฉนวนภายในของไหลเรียงตัวกันเมื่อได้รับสนามไฟฟ้าและเกิดแรงทางไฟฟ้าระหว่างอนุภาคขึ้น การคำนวณหาแรงระหว่างอนุภาคที่อยู่ภายในจึงเป็นสิ่งหนึ่งที่สำคัญในการศึกษาลักษณะสมบัติของของไหล ER. ในขณะที่ของไหลหยุดนิ่ง การเรียงตัวของอนุภาคนั้นจะเป็นไปในแนวของสนามไฟฟ้า แรงที่เกิดขึ้นระหว่างอนุภาคฉนวนนี้ขึ้นกับความเครียดสนามไฟฟ้าที่ผิวของอนุภาค. จนถึงปัจจุบัน ได้มีการศึกษาองค์ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับแรงที่เกิดกับอนุภาคในแง่ต่างๆ มากมาย. แต่งานเกือบทั้งหมดเป็นการศึกษาที่พิจารณาอนุภาครูปร่างทรงกลม ภายใต้สนามไฟฟ้าแบบสม่ำเสมอเท่านั้น. นอกจากนี้ งานวิจัยที่วิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงบนผิวอนุภาคที่มีอยู่เกือบทั้งหมดไม่ได้พิจารณาถึงผลของอิเล็กโตรด.

ในทางปฏิบัติ ลักษณะรูปร่างของอนุภาคไม่เป็นทรงกลมโดยสมบูรณ์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในระบบฉนวนไฟฟ้าแรงสูง อนุภาคลักษณะแหลมยาว มีแนวโน้มที่จะทำให้เกิดปัญหาในระบบมากกว่า. อีกทั้ง บางครั้งก็มีการเคลือบหรือวางชั้นฉนวนคั่น (dielectric barrier) บนผิวของอิเล็กโตรดเพื่อป้องกันไม่ให้อนุภาคสัมผัสกับอิเล็กโตรดโดยตรง.

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะมุ่งเน้นที่กรณีของอนุภาคที่ไม่เป็นทรงกลม กรณีที่มีชั้นฉนวนบางเคลือบอยู่บนอิเล็กโตรด และกรณีที่มีอนุภาคจำนวนมากกว่าสองขึ้นไปอยู่ในระบบ. การวิเคราะห์คำนวณหาสนามไฟฟ้าและแรงสำหรับกรณีเหล่านี้ ทำได้ยาก เนื่องจากมีการเปลี่ยนแปลงสนามไฟฟ้าบนผิวหรือรอยต่อระหว่างตัวกลางอย่างมาก. เพื่อให้สามารถคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้าและแรงออกมาได้อย่างแม่นยำ ผู้วิจัยจะใช้สองวิธีการในการศึกษานี้ คือ

(ก) วิธีสมการเชิงวิเคราะห์

(ข) วิธีเชิงเลข ในงานวิจัยนี้ จะใช้วิธีชิ้นประกอบขอบเขต (boundary element method).

ในส่วนของวิธีสมการเชิงวิเคราะห์ ผู้วิจัยจะพยายามขยายความสามารถวิธีเงามัลติโพล (the method of multipole images) ซึ่งเป็นวิธีที่สามารถคำนวณสนามไฟฟ้าได้อย่างแม่นยำสูงในกรณีที่รูปแบบปัญหาเป็นแบบไม่ซับซ้อน. วิธีเชิงเลขจะถูกนำมาตรวจสอบความแม่นยำ และคำนวณหาสนามไฟฟ้าบนโซ่อนุภาคที่มีจำนวนมากกว่าสองอนุภาค. วิธีเชิงเลขนี้จะใช้เทคนิคฟาสต์มัลติโพล เพื่อให้สามารถคำนวณปัญหาได้อย่างละเอียดและแม่นยำได้ในกรณีหลายอนุภาค ซึ่งวิธีเชิงวิเคราะห์ใช้เวลานานมากในการคำนวณ.

องค์ความรู้พื้นฐานที่ได้จากงานวิจัยนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อไปในการศึกษาพฤติกรรมของอนุภาค ที่มีปรากฏอยู่ในอุปกรณ์ทางไฟฟ้าสถิตต่างๆ ซึ่งรวมถึงของไหล ER ด้วย. ในกรณีของระบบฉนวนไฟฟ้าแรงสูง ความเข้าใจในพฤติกรรมของอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้า จะเป็นประโยชน์ต่อการออกแบบระบบกับดักอนุภาคในอุปกรณ์ต่างๆ เพื่อป้องกันไม่ได้อนุภาคเคลื่อนที่ไปกระตุ้นให้เกิดดีสชาร์จภายในระบบได้.นอกจากนี้ ก็ยังมีการประยุกต์ใช้งานในระบบของเซลล์สิ่งมีชีวิต ซึ่งเป็นลักษณะของอนุภาคตัวนำ ที่มีชั้นผิวฉนวนเคลือบอยู่.

2. วัตถุประสงค์

โครงการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ที่จะศึกษาลักษณะสมบัติของแรงและ สนามไฟฟ้าบนอนุภาคในหลายระดับ ตั้งแต่

(ก) กรณีของอนุภาคเดี่ยว (หรือกรณีอนุภาคอยู่ห่างจากอนุภาคอื่นมากเพียงพอ จนสามารถละเลยปฏิกิริยาระหว่างอนุภาคได้) ที่อยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอกแบบสม่ำเสมอ ในกรณีผู้วิจัยจะเน้นในกรณีของอนุภาคที่ไม่เป็นทรงกลม.

(ข) กรณีของอนุภาคเดี่ยว ที่อยู่ในระบบอิเล็กโตรดซับซ้อนขึ้น เป็นแบบที่มีชั้นฉนวนกั้นอยู่ระหว่างอิเล็กโตรดกับอนุภาค ซึ่งเป็นรูปแบบของการเกิดดีสชาร์จเงียบ (Silent discharge or dielectric barrier discharge)

(ค) กรณีของกลุ่มอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ โดยจะศึกษาลักษณะของการก่อตัวเป็นโซ่อนุภาค และเวลาที่ใช้ในการเกิดโซ่

3. ผลการศึกษา

3.1 การวิเคราะห์อนุภาคที่ไม่เป็นทรงกลม

ในกรณีของอนุภาคที่ไม่เป็นทรงกลมนี้ ผู้วิจัยได้วิเคราะห์อนุภาคแบบทรงกลมตัดกัน และอนุภาคแบบทรงรี ซึ่งอนุภาคทั้งสองกรณีนี้มีความเกี่ยวข้องกับการหลอมหรือการเชื่อมอนุภาค. นอกจากนี้ ยังได้พัฒนาวิธีวิเคราะห์สนามไฟฟ้าแบบสองมิติ ซึ่งจะสามารถนำมาใช้สำหรับประมาณหาค่าแรงหรือสนามไฟฟ้าได้ เมื่ออนุภาคมีลักษณะเป็นแท่งยาว.

3.1.1 วิเคราะห์สนามไฟฟ้าบนอนุภาคที่มีลักษณะไม่เป็นทรงกลม

การศึกษาศักย์ไฟฟ้าในระบบทรงกลมตัดกัน มีความสำคัญในการใช้งานที่เกี่ยวข้องกับ การหลอมหรือการรวมตัวของอนุภาค. วิธีเชิงวิเคราะห์ที่ถูกนำเสนออยู่ในปัจจุบัน อาศัยหลักการเงาประจุบนระบบพิกัดแปลงแบบส่วนกลับเรขาคณิต (geometrical inversion) [1, 2] หรืออาศัยการแปลงแบบเคลวิน (Kelvin transformation) [3]. อย่างไรก็ดี วิธีการเหล่านี้สามารถใช้ได้จำกัดเฉพาะในกรณีที่ทรงกลมทั้งสองตัดกันเป็นมุมเท่ากับ 180/n (n เป็นจำนวนเต็ม) เท่านั้น. นอกจากนี้ ทรงกลมทั้งสองที่พิจารณา ต้องมีขนาดเท่ากันอีกด้วย. แม้ว่า จะมีการนำเสนอวิธีการวิเคราะห์สำหรับทรงกลมที่ตัดกันเป็นมุมทั่วไปใดๆ [4 – 9] แต่การคำนวณต้องใช้อินทิกรัลของอนุกรมอนันต์ ทำให้การคำนวณซับซ้อนมาก แม้เราจะพิจารณาในกรณีง่ายๆ ของทรงกลมภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก.

หัวข้อนี้อธิบายการใช้วิธีเงามัลติโพล และเทคนิคการกระจายมัลติโพล เพื่อคำนวณสนามไฟฟ้าในกรณีทั่วไปของทรงกลมตัวนำที่ตัดกัน ภายใต้ศักย์ไฟฟ้าภายนอก. วิธีที่นำเสนอในที่นี้ เป็นการขยายต่อจากวิธีที่ได้นำเสนอไว้แล้ว สำหรับกรณีของทรงกลมที่อยู่ห่างหรือสัมผัสกัน (นั่นคือ ไม่ตัดกันนั่นเอง) [10, 11]. วิธีนี้ มีความสามารถในการใช้ได้ทั่วไปมากกว่าการแปลงแบบส่วนกลับเรขาคณิต หรือการแปลงแบบเคลวิน เนื่องจากสามารถใช้ได้กับทรงกลมที่มีขนาดไม่เท่ากัน ซึ่งตัดกันเป็นมุมใดๆ ได้. เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีเชิงวิเคราะห์ที่ใช้อินทิกรัลของอนุกรมอนันต์ วิธีที่นำเสนอนี้ไม่ซับซ้อน เนื่องจากไม่มีการใช้อินทิกรัลมาเกี่ยวข้องกับการคำนวณโดยตรงแต่อย่างใด.

3.1.1.1 รูปแบบการจัดเรียงทางกายภาพ

รูปที่ 3.1.1.1 แสดงรูปแบบการจัดเรียงของตัวนำทรงกลมสองตัวที่ตัดกันอยู่ โดยทรงกลมทั้งสองเรียงตัวอยู่ตามแนวแกน z. ทรงกลมล่างและทรงกลมบนมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\mathbf{p}(0, 0, z_{\mathrm{p}})$ และ $\mathbf{q}(0, 0, z_{\mathrm{q}})$ ตามลำดับ และมีรัศมีเท่ากับ a และ b. ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางทั้งสองเท่ากับ $D = z_q - z_p$. ในที่นี้เราพิจารณากรณีที่ทรงกลมต่อลงดิน มีศักย์ไฟฟ้าเป็นศูนย์. กรณีที่ตัวนำทรงกลมไม่ต่อลงดิน ก็สามารถวิเคราะห์ได้ด้วยหลักการเดียวกัน โดยอาศัยเงื่อนไขของประจุรวมเท่ากับศูนย์.

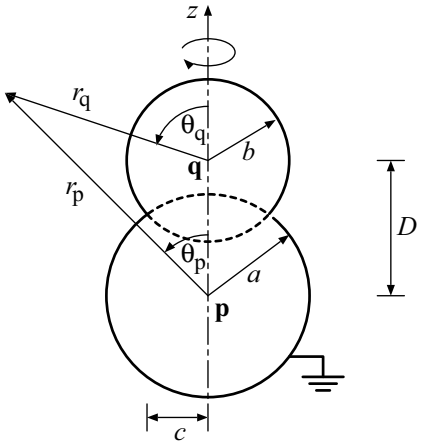
กำหนดให้ทรงกลมบนมีขนาดเท่ากับหรือเล็กกว่าทรงกลมล่าง. เราสามารถแสดงได้ว่า พิกัด z_i บนเส้นรอยตัด(วงกลม)ระหว่างผิวของทรงกลมทั้งสอง เป็นไปตามสมการ

$$z_i - z_p = \frac{D^2 + (a^2 - b^2)}{2D} \tag{3.1.1.1}$$

และรัศมี c ของวงกลมรอยตัดนี้มีค่าเป็น

$$c = \sqrt{a^2 - (z_i - z_p)^2} \tag{3.1.1.2}$$

การอธิบายต่อจากนี้จะใช้สัญลักษณ์ (r_x, θ_x) แสดง พิกัดทรงกลมที่มีจุด **x** เป็นจุดกำเนิด. ดังแสดงตัวอย่างเป็นพิกัด (r_p, θ_p) และพิกัด (r_q, θ_q) ในรูปที่ 3.1.1.1. สังเกตว่า ถ้าศักย์ไฟฟ้าในการจัดเรียงที่พิจารณา มีลักษณะการกระจายที่สมมาตรรอบแกนหมุน พิกัดที่สาม (มุมบนระนาบ x-y) ของระบบพิกัดทรงกลมจะไม่เกี่ยวข้องกับการคำนวณ.



รูปที่ 3.1.1.1 ทรงกลมตัดรัศมีเท่ากับ a และ b.

3.1.1.2 วิธีคำนวณ

เมื่อทรงกลมในการจัดเรียงตามรูปที่ 3.1.1.1 อยู่ภายใต้ศักย์ไฟฟ้าภายนอก ϕ^E จะมีประจุถูกเหนี่ยวนำขึ้นที่ผิวของทรงกลม. ในที่นี้ สมมติให้ศักย์ไฟฟ้าภายนอกมีลักษณะสมมาตรรอบแกนหมุน เพื่อลดความซับซ้อนของสมการ. ประจุที่ถูกเหนี่ยวนำขึ้นที่ผิวจะทำให้ศักย์ไฟฟ้าลัพธ์ของระบบเปลี่ยนแปลงไป. วิธีการคำนวณที่จะกล่าวต่อไปนี้ อธิบายกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จะประยุกต์ใช้กับศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากประจุเหล่านี้สำหรับคำนวณหาศักย์ไฟฟ้าลัพธ์ของระบบ.

ก. สมการของศักย์ไฟฟ้าสำหรับวิธีเงามัลติโพล

เราจะเริ่มจากการพิจารณาเฉพาะประจุ σ^A บนผิว A ของทรงกลมล่าง โดยละเลยประจุของทรงกลมบน. พื้นผิว A แสดงด้วยเส้นทึบในรูปที่ 3.1.1.2. ประจุ σ^B บนผิวของผิวของทรงกลมบน ก็พิจารณาด้วยหลักการเดียวกัน. ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจาก σ^A อาจเขียนในรูปของศักย์ไฟฟ้า ψ_p^A เนื่องจากมัลติโพล ซึ่งกระจายรอบจุดศูนย์กลาง **p** ของทรงกลมได้เป็น

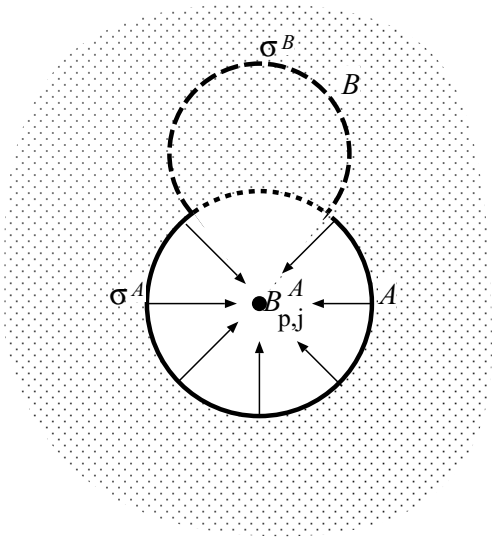
$$\psi_p^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_{p,j}^A}{r_p^{j+1}} P_j(\cos\theta_p) \tag{3.1.1.3}$$

เมื่อ P_j เป็นพหุนามเลอจองดร์อันดับที่ j. สังเกตว่า การแสดงสมการศักย์ไฟฟ้าในที่นี้ จะใช้ดัชนีล่างแสดงจุดศูนย์กลางของการกระจาย และใช้ดัชนีบนแสดงตำแหน่งของประจุที่ทำให้เกิดศักย์นั้น. ในสมการที่ (3.1.1.3) $B^A_{p,j}$ เป็นมัลติโพลอันดับที่ j ซึ่งอยู่ ณ ตำแหน่ง $\mathbf{p}$. นิยามของขนาด(โมเมนต์)ของมัลติโพลในที่นี้แตกต่างจากนิยามทั่วไปเล็กน้อย เพื่อให้สมการของศักย์ไฟฟ้าอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น. ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลในสมการที่ (3.1.1.3) มีค่าลู่เข้า ภายในบริเวณเปิดที่แสดงในรูปที่ 3.1.1.2. นั่นคือ ภายนอกทรงกลมจุดศูนย์กลาง $\mathbf{p}$ รัศมี a.

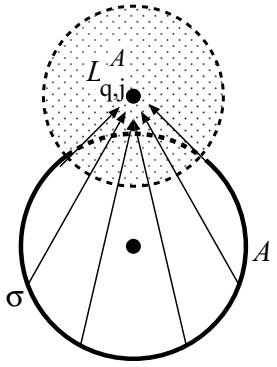
ในอีกด้านหนึ่ง ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจาก σ^A ยังสามารถกระจายรอบจุด $\mathbf{q}$ ของทรงกลมบนได้ (ดูรูปที่ 3.1.1.3). สำหรับกรณีนี้ ศักย์ไฟฟ้าอยู่ในรูปแบบการกระจายเฉพาะที่ หรือการกระจายแบบเทย์เลอร์ เป็น

$$\varphi^A_q = \sum_{j=0}^{\infty} L^A_{q,j} r_q^j P_j(\cos\theta_p) \qquad (3.1.1.4)$$

เมื่อ φ^A_q เป็นศักย์ไฟฟ้าที่ถูกกระจายเฉพาะที่รอบจุด $\mathbf{q}$ และ $L^A_{q,j}$ เป็นสัมประสิทธิ์อันดับที่ j ของศักย์ไฟฟ้า. ศักย์ไฟฟ้า φ^A_q มีค่าลู่เข้า สำหรับจุดในบริเวณเปิดที่แสดงในรูปที่ 3.1.1.3. นั่นคือ ภายในทรงกลมจุดศูนย์กลาง $\mathbf{q}$ รัศมี b. สังเกตว่า ในที่นี้ สัญลักษณ์ φ ถูกใช้แสดงศักย์ไฟฟ้าที่กระจายแบบเฉพาะที่ เพื่อให้แตกต่างกับศักย์ไฟฟ้า ψ เนื่องจากมัลติโพลในสมการที่ (3.1.1.3).



รูปที่ 3.1.1.2 ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากประจุ σ^A บนพื้นผิว A สามารถกระจายเป็นศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพล $B^A_{p,j}$ ณ จุด $\mathbf{p}$ ได้.



รูปที่ 3.1.1.3 ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากประจุ σ^A บนพื้นผิว A สามารถกระจายแบบเฉพาะที่ รอบจุด $\mathbf{q}$ ได้.

ข. การกระจายศักย์ไฟฟ้ารอบจุดศูนย์กลางใหม่

ศักย์ไฟฟ้าในรูปของมัลติโพลในสมการที่ (3.1.1.3) หรือในรูปการกระจายเฉพาะที่ในสมการที่ (3.1.1.4) สามารถกระจายซ้ำใหม่ รอบจุดศูนย์กลางการกระจายอื่นได้. ในที่นี้ เราจะจำกัดจุดศูนย์กลางใหม่ของการกระจาย ให้เป็นจุดบนแกน z เท่านั้น เนื่องจากเพียงพอต่อการคำนวณในที่นี้. การกระจายศักย์ไฟฟ้าใหม่ที่จำเป็นต่อการคำนวณ มีอยู่สองแบบดังต่อไปนี้.

1. การกระจายศักย์ไฟฟ้าแบบมัลติโพลไปเป็นแบบเฉพาะที่

ด้วยการกระจายแบบนี้ ศักย์ไฟฟ้าของมัลติโพลในสมการที่ (3.1.1.3) จะถูกกระจายซ้ำรอบจุดศูนย์กลางใหม่ และมีรูปแบบของการกระจายเป็นตามสมการที่ (3.1.1.4). กำหนดให้ $\mathbf{u}(0,0,z_u)$ เป็นจุดศูนย์กลางใหม่ของการกระจายศักย์ไฟฟ้า. ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลอันดับที่ n ในสมการที่ (3.1.1.3) สามารถเขียนได้เป็น

$$\psi_{p,n}^{A} = \frac{B_{p,n}^{A}}{r_p^{n+1}} P_n(\cos\theta_p) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{u,j}^{A} = \sum_{j=0}^{\infty} L_{u,j}^{A} r_u^j P_j(\cos\theta_u) \qquad (3.1.1.5)$$

สัมประสิทธิ์ $L_{u,j}^{A}$ ของศักย์ไฟฟ้า สัมพันธ์กับ $B_{p,n}^{A}$ ด้วยสมการต่อไปนี้ [10, 12]
เมื่อ $z_u > z_p$

$$L_{u,j}^{A} = (-1)^j \frac{(n+j)!}{n!\,j!} \frac{B_{p,n}^{A}}{d^{n+1+1}} \qquad (3.1.1.6)$$

และเมื่อ $z_u < z_p$

$$L_{u,j}^{A} = (-1)^n \frac{(n+j)!}{n!\,j!} \frac{B_{p,n}^{A}}{d^{n+1+1}} \qquad (3.1.1.7)$$

โดยที่ $d = \left| z_u - z_p \right|$. หลังจากการกระจายศักย์ไฟฟ้า รัศมีการลู่เข้าของศักย์ไฟฟ้าเท่ากับระยะที่ต่ำที่สุดระหว่าง $\mathbf{u}$ และขอบเขตของบริเวณที่แรเงาในรูปที่ 3.1.1.2. เห็นได้ชัดเจนว่า การกระจายศักย์ไฟฟ้าใหม่จะทำไม่ได้ ถ้า $\mathbf{u}$ อยู่ภายในบริเวณที่ไม่ได้แรเงาในรูป.

2. การกระจายศักย์ไฟฟ้าแบบเฉพาะที่ไปยังจุดศูนย์กลางใหม่

พิจารณาศักย์ไฟฟ้าอันดับที่ n ของสมการที่ (3.1.1.4) และให้ตำแหน่งของจุดศูนย์กลางการกระจายศักย์ไฟฟ้าใหม่อยู่ที่ $\mathbf{u}$. การกระจายศักย์ไฟฟ้าใหม่แบบนี้ให้รูปแบบของศักย์ไฟฟ้าเป็น [13]

$$\varphi_{q,n}^{A} = L_{q,n}^{A} r_q^n P_n(\cos\theta_q) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{u,j}^{A} = \sum_{j=0}^{\infty} L_{u,j}^{A} r_u^j P_j(\cos\theta_u) \qquad (3.1.1.8)$$

เมื่อ

$$L_{u,j}^{A} = \frac{n!}{(n-j)!\,j!} d^{n-j} L_{q,n}^{A} \qquad (3.1.1.9)$$

สำหรับ $z_u > z_p$ และ

$$L_{u,j}^{A} = (-1)^{n-j} \frac{n!}{(n-j)!\,j!} d^{n-j} L_{q,n}^{A} \qquad (3.1.1.10)$$

สำหรับ $z_u < z_p$.

หลังจากการกระจายศักย์ไฟฟ้า รัศมีของการลู่เข้ามีขนาดเท่ากับระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่าง **u** และขอบเขตของบริเวณที่แรเงาในรูปที่ 3.1.1.3.

ค. คำตอบของศักย์ไฟฟ้าสำหรับทรงกลมที่ตัดกัน

ด้วยวิธีการกระจายศักย์ไฟฟ้าที่ได้กล่าวมาแล้ว เราสามารถหาคำตอบของศักย์ไฟฟ้าในการจัดเรียงตามรูปที่ 3.1.1.1 ได้. พิจารณาประจุ σ^A และ σ^B บนทรงกลมทั้งสอง ที่ถูกเหนี่ยวนำโดยศักย์ไฟฟ้าภายนอก ϕ^E. ศักย์ไฟฟ้า φ ณ จุดใดๆ ภายนอกทรงกลม เป็นผลของการทับซ้อน. นั่นคือ

$$\phi = \phi^E + \psi_p^A + \psi_q^B \tag{3.1.1.11}$$

เมื่อ ψ_p^A และ ψ_q^B เป็นศักย์ไฟฟ้าในรูปมัลติโพลเนื่องจาก σ^A และ σ^B ที่กระจายรอบจุด **p** และจุด **q** ตามลำดับ. เพื่อให้ได้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์ (เนื่องจากสมมติว่าตัวนำทั้งสองต่อลงดิน) เป็นจริง เราจะแสดงสมการของศักย์ไฟฟ้าแยกเป็นแต่ละทรงกลม ในรูปของฟังก์ชันที่กระจายรอบจุดศูนย์กลางของทรงกลมนั้นๆ

สำหรับทรงกลมล่าง ศักย์ไฟฟ้าเป็น

$$\phi = \varphi_p^E + \psi_p^A + \varphi_p^B \tag{3.1.1.12}$$

และสำหรับทรงกลมบน ศักย์ไฟฟ้าเป็น

$$\phi = \varphi_q^E + \varphi_q^A + \psi_q^B \tag{3.1.1.13}$$

เมื่อ φ_p^B และ φ_q^A เป็นศักย์ไฟฟ้าเนื่องจาก σ^B และ σ^A ที่กระจายแบบเฉพาะที่รอบจุด **p** และจุด **q** ตามลำดับ. สังเกตว่า ศักย์ไฟฟ้าภายนอกในสมการทั้งสอง ก็เขียนอยู่ในรูปของการกระจายเฉพาะที่เช่นเดียวกัน. ถ้าศักย์ไฟฟ้าภายนอกเป็นศักย์เนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอก $\mathbf{E}_0$ ในทิศทาง z เราจะได้

$$\varphi_p^E = -z_p E_0 - E_0 r_p P_1(\cos\theta_p) \tag{3.1.1.14}$$

และ

$$\varphi_q^E = -z_q E_0 - E_0 r_q P_1(\cos\theta_q) \tag{3.1.1.15}$$

ซึ่งกระจายเฉพาะที่รอบจุด **p** และ **q** ตามลำดับ.

สมมติว่าเราต้องการคำตอบของศักย์ไฟฟ้า โดยมีอันดับของสัมประสิทธิ์ศักย์ไฟฟ้า j จาก 0 ถึง N. ดังนั้น สัมประสิทธิ์ศักย์ไฟฟ้า ($B_{p,j}^A, B_{q,j}^B, L_{q,j}^A$ และ $L_{p,j}^B$) ที่ไม่ทราบค่า มีจำนวนเท่ากับ $4(N+1)$. สัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าเหล่านี้สามารถคำนวณได้จากการตั้งระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วยสมการที่ได้จากกระบวนการต่อไปนี้

1. ทำให้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าของทรงกลมเป็นจริง. นั่นคือ เมื่อเราพิจารณาแต่ละอันดับ j เราได้ความสัมพันธ์

   $$\varphi_{p,j}^E + \psi_{p,j}^A + \varphi_{p,j}^B = 0 \tag{3.1.1.16}$$

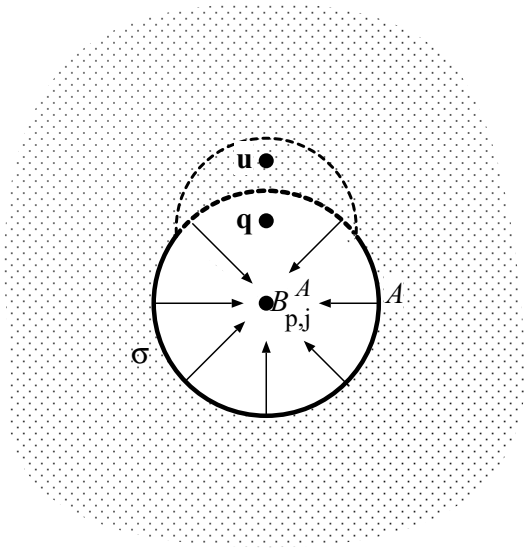
   บนผิวของทรงกลมล่าง $(r_p = a)$ และ

   $$\varphi_{q,j}^E + \varphi_{q,j}^A + \psi_{q,j}^B = 0 \tag{3.1.1.17}$$

บนผิวของทรงกลมบน $(r_q = b)$. ดังนั้น เราได้สมการจำนวน $2(N+1)$ สมการ จากเงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าทั้งสอง.

1. ทำให้ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากประจุชุดเดียวกัน ที่เขียนอยู่ในรูปต่างกัน มีขนาดเท่ากัน. นั่นคือ $\psi_p^A = \varphi_q^A$ และ $\psi_q^B = \varphi_p^B$. เพื่อให้ได้เงื่อนไขนี้เป็นจริง ศักย์ไฟฟ้าแต่ละคู่ต้องถูกกระจายอยู่รอบจุดเดียวกัน. ดังนั้น เราจะสามารถจับคู่ความเท่ากันของศักย์ไฟฟ้าแต่ละอันดับ j ได้. เงื่อนไขที่ดูจะเป็นธรรมชาติที่สุดสำหรับการกระจายก็คือ การใช้การกระจายใหม่แบบมัลติโพลเป็นแบบเฉพาะที่กับ ψ_p^A รอบจุด **q** และกับ ψ_q^B รอบจุด **p** เนื่องจากศักย์ไฟฟ้าสามารถจับคู่กับ φ_q^A และ φ_p^B ได้โดยตรง. อย่างไรก็ตาม เราสังเกตได้ว่า ศักย์ไฟฟ้าจะไม่มีค่าลู่เข้า ถ้า $D < a$. รูปที่ 2.2.1.4 แสดงสภาวะที่การกระจายใหม่ของ ψ_p^A ไปยัง **q** ไม่ลู่เข้า เพราะว่า **q** อยู่ภายนอกบริเวณที่แรเงาในรูป. ดังนั้น ตัวเลือกที่ดีกว่าสำหรับการกระจายศักย์ไฟฟ้า คือการกระจายศักย์ไฟฟ้า ψ_p^A และ φ_q^A ไปยังจุดใดๆ จุดหนึ่งภายในบริเวณแรเงาของทรงกลมบน (เช่น จุด **u** ในรูปที่ 2.2.1.4). หลักการเดียวกันก็จะถูกใช้กับคู่ศักย์ ψ_q^B และ φ_p^B. หลังการกระจายศักย์ไฟฟ้าใหม่ เราสามารถจับคู่สัมประสิทธิ์ของศักย์ไฟฟ้าสำหรับแต่ละอันดับ j และได้สมการจำนวน $2(N+1)$ สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่ต้องการ.

เมื่อสร้างระบบสมการเชิงเส้นได้แล้ว เราสามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ทั้งหมดที่ไม่ทราบค่าออกมาได้. จากการทดลองคำนวณเชิงเลขในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยพบว่า วิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบทำซ้ำไม่เหมาะสมสำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่ได้ เนื่องจากอาจได้คำตอบที่มีความแม่นยำไม่เพียงพอ.



รูปที่ 3.1.1.4 การกระจายศักย์ไฟฟ้า ψ_p^A ใหม่รอบจุด **q** ไม่ลู่เข้า เนื่องจากจุด **q** ไม่อยู่ในบริเวณแรเงาในรูป.

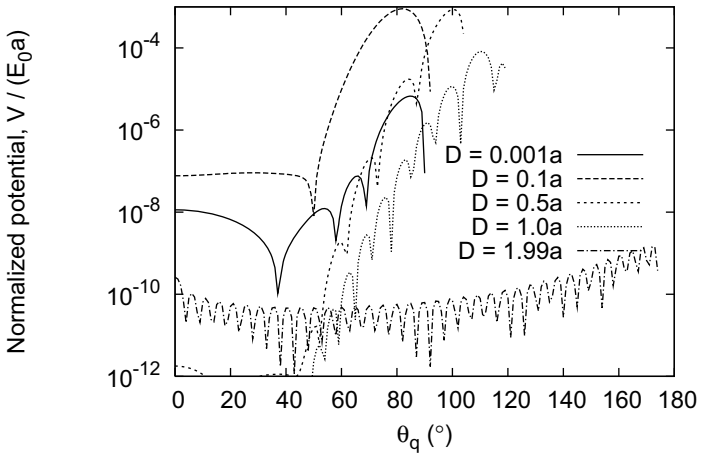
3.1.1.3 ตัวอย่างการคำนวณ

ก. ทรงกลมขนาดเท่ากัน

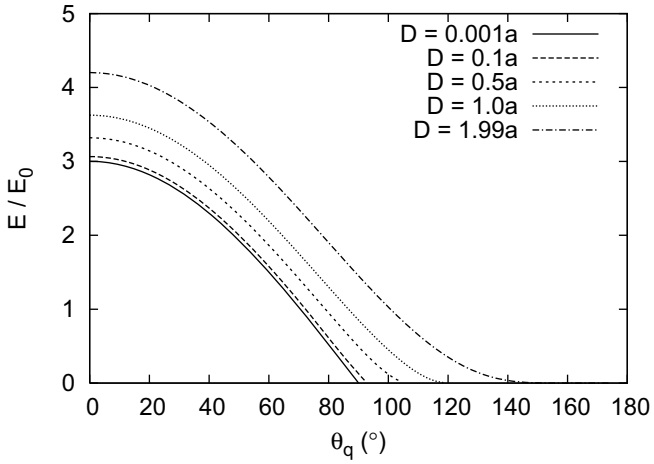
กรณีของทรงกลมขนาดเท่ากัน $(a=b=1)$ ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ $\mathbf{E}_0$ เป็นตัวอย่างแรกของการคำนวณในที่นี้. การคำนวณทำในกรณีที่ $D=0.001a$ ถึง $1.99a$. เราสามารถเห็นได้ชัดเจนว่า สำหรับกรณีของทรงกลมขนาดเท่ากัน การคำนวณสามารถลดรูปให้ง่ายขึ้น ด้วยความสมมาตรของศักย์ไฟฟ้าของทรงกลมทั้งสอง. อย่างไรก็ตาม เราใช้กรณีในการตรวจสอบความถูกต้อง และความสามารถใช้ได้ของวิธีที่นำเสนอในที่นี้ เมื่อทรงกลมทั้งสองเกือบซ้อนทับกันโดยสมบูรณ์ $D/a \to 0$. รูปที่ 3.1.1.5 แสดงศักย์ไฟฟ้าตกค้างที่หาค่าบนผิวของทรงกลมด้วยสมการที่ (3.1.1.11). รูปนี้ยืนยันความสามารถในการคำนวณของวิธีที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ สำหรับช่วงค่าของ D/a. อันดับสูงสุด N ของศักย์ไฟฟ้าในการกระจายพจน์ เท่ากับ 35 สำหรับทุกๆ กรณีในการคำนวณในรูปที่ 3.1.1.5. แม้ว่าอันดับ N ที่สูงขึ้นควรจะให้คำตอบที่ถูกต้องมากขึ้นตามทฤษฎี ผู้วิจัยพบว่า การแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่ได้ให้แม่นยำ ทำได้ยากขึ้น. สังเกตว่า สำหรับกรณีพิเศษที่ทรงกลมขนาดเท่ากับเกือบจะซ้อนทับกันโดยสมบูรณ์ ค่า N ต่ำๆ สามารถใช้ในการคำนวณได้. นอกจากนี้ ผู้วิจัยยังได้พบจากการทดลองคำนวณเชิงเลขว่า $B^A_{p,j}=(-1)^{j+1}B^B_{q,j}$ และ $B^A_{p,j}=B^B_{q,j}\approx 0$ สำหรับอันดับเลขคี่ที่ $j\neq 1$ เมื่อ $D/a\to 0$.

ในอีกด้านหนึ่ง การคำนวณเชิงเลขยากขึ้น เมื่อ D เล็กกว่า a แต่ไม่ใกล้กับศูนย์ ซึ่งเราสามารถสังเกตได้จากค่าศักย์ไฟฟ้าตกค้างที่สูงขึ้นในรูปที่ 3.1.1.5 เมื่อ $D=0.1a$ และ $D=0.5a$. ความคลาดเคลื่อนเชิงเลขนี้เกิดจากการใช้อันดับ N ที่จำกัด และเกิดจากบริเวณของการลู่เข้าที่เล็กลงของศักย์ไฟฟ้าหลังจากการกระจายใหม่ ซึ่งส่งผลให้การแก้ระบบสมการเชิงเส้นอย่างแม่นยำสูง ทำได้ยาก. นอกจากนี้ สำหรับทุกๆ ค่า D ในรูปที่ 3.1.1.5 เราจะเห็นความคลาดเคลื่อนของคำตอบที่ได้สูง ในบริเวณใกล้กับแนวเส้นตัดของทรงกลมทั้งสอง.

รูปที่ 3.1.1.6 แสดงสนามไฟฟ้าบนผิวของทรงกลมบน. เราสามารถเห็นได้จากรูปว่า สนามไฟฟ้าสูงสุดที่ $\theta_q=0$ และลดลงเป็นศูนย์ที่แนวเส้นตัดระหว่างทรงกลม สำหรับทุกค่าของ D. ขนาดของสนามไฟฟ้าสูงสุดบนผิวทรงกลมลดลง เมื่อ D ลดลง (ระดับของการซ้อนทับเพิ่มขึ้น). นอกจากนี้ เรายังสังเกตได้ว่า เมื่อ D เข้าใกล้ศูนย์ สนามไฟฟ้าที่ $\theta_q=0$ มีค่าเข้าใกล้ $3E_0$ ซึ่งเป็นคำตอบจริงของกรณีตัวนำทรงกลมเดี่ยวภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ. สำหรับกรณีที่ $D=2a$ รูปการจัดเรียงมีสนามไฟฟ้าเท่ากับกรณีของตัวนำทรงกลมที่สัมผัสกับระนาบต่อลงดิน ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ. กรณีนี้ สนามไฟฟ้าสูงสุดบนผิวทรงกลมเท่ากับ $4.207E_0$ [14]. สนามไฟฟ้าสูงสุดที่ได้จากการคำนวณเชิงเลข ด้วยวิธีที่ใช้ในงานวิจัยนี้ มีค่าเท่ากับ $4.202E_0$ เมื่อ $D=1.99a$. นอกจากนี้ เมื่อเปรียบเทียบกับคำตอบของประจุบนผิวตัวนำทรงกลมในสภาวะนี้ ซึ่งเท่ากับ $(2/3)\pi^3\varepsilon a^2E_0^2$ ทางทฤษฎี เราได้ความคลาดเคลื่อนของค่าประจุเพียง 0.03% ที่ $D=1.99a$.



รูปที่ 3.1.1.5 ศักย์ไฟฟ้าตกค้างบนผิวทรงกลมที่ได้จากการคำนวณเชิงเลข สำหรับทรงกลมขนาดเท่ากัน.

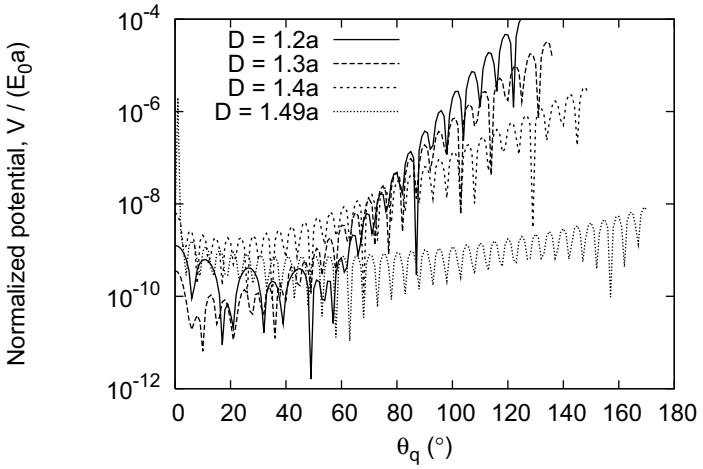


รูปที่ 3.1.1.6 สนามไฟฟ้าบนผิวทรงกลม ในกรณีที่ทรงกลมทั้งสองมีขนาดเท่ากัน.

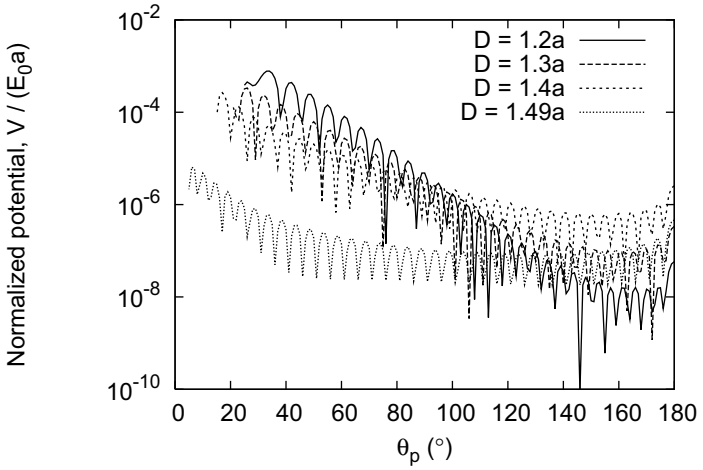
ข. ทรงกลมขนาดต่างกัน

ผู้วิจัยได้ทดลองคำนวณกรณีของตัวนำทรงกลมขนาดต่างกัน เมื่อ $a = 2b$ โดยใช้ $N = 35$. ศักย์ไฟฟ้าตกค้างที่คำนวณจากสมการที่ (3.1.1.11) บนผิวทรงกลมบนและทรงกลมล่าง แสดงอยู่ในรูปที่ 3.1.1.7 และ 3.1.1.8 ตามลำดับ. ระดับของการทับซ้อนที่ใช้ในการคำนวณคือ $D/a = 1.2 - 1.49$. จากรูปทั้งสอง เราสามารถเห็นแนวโน้มของผลการคำนวณในลักษณะเดียวกับแนวโน้มในรูปที่ 3.1.1.5. ความคลาดเคลื่อนของคำตอบเชิงเลขที่ได้ มีค่าสูงขึ้น เมื่อ D/a ลดลง (ระดับการทับซ้อนเพิ่มมากขึ้น). ศักย์ไฟฟ้าต่อเนื่องที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานมีค่าต่ำกว่า 10^{-3} สำหรับ $D/a \geq 1.2$. เมื่อระดับการทับซ้อนเพิ่มขึ้นมากกว่านี้ เราไม่สามารถคำนวณให้ได้คำตอบที่มีความแม่นยำสูงได้. ในกรณีที่ปราศจากความสมมาตร $a = b$ เราต้องใช้ค่า

N สูงในการคำนวณตามสมการที่ 3.1.1.5 เมื่อ D/a มีค่าต่ำ. นอกจากนี้ รูปที่ 3.1.1.7 และ 3.1.1.8 ยังแสดงว่า ความคลาดเคลื่อนที่ได้มีค่าสูงว่าบนทรงกลมล่าง ซึ่งมีขนาดสูงกว่า. สำหรับสนามไฟฟ้าบนผิวทรงกลม ผู้วิจัยได้ตรวจสอบและพบว่าสนามไฟฟ้ามีค่าลดลงสู่ศูนย์ที่แนวตัดระหว่างตัวนำทั้งสอง สำหรับ $D/a \geq 1.2$ แม้ว่าจะไม่ได้แสดงรูปผลลัพธ์ไว้ในที่นี้.



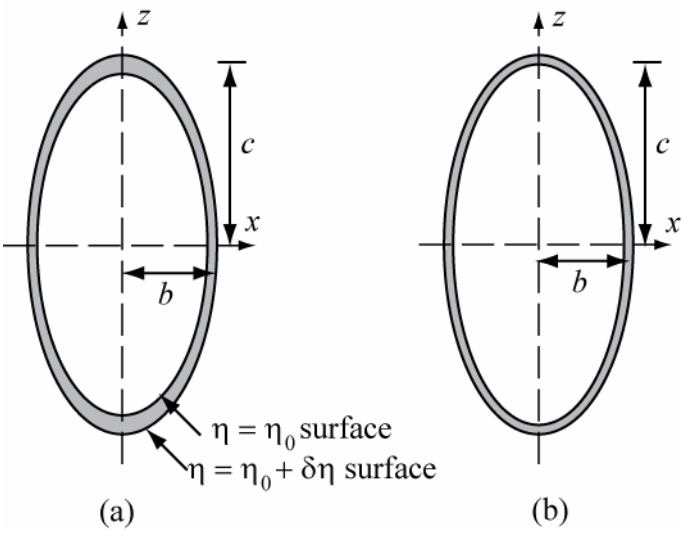
รูปที่ 3.1.1.7 ศักย์ไฟฟ้าตกค้างบนผิวทรงกลมบน ในกรณีที่ $a = 2b$.



รูปที่ 3.1.1.8 ศักย์ไฟฟ้าตกค้างบนผิวทรงกลมล่าง ในกรณีที่ $a = 2b$.

3.1.2 อนุภาคทรงรีแบบมีชั้นฉนวน

อนุภาครูปทรงรีที่ศึกษาในโครงการนี้ เป็นแบบที่มีชั้นฉนวนอยู่บนพื้นผิว ดังแสดงในรูปที่ 3.1.2.1(b). ตัวอย่างของการใช้งานของอนุภาคแบบนี้อย่างหนึ่งก็คือ เซลล์สิ่งมีชีวิต [16-20]. ในกรณีนี้ เรามักจะสนใจค่า polarization ซึ่งเป็นพารามิเตอร์ที่เราสามารถนำมาใช้ประมาณค่าสนามไฟฟ้า แรง และการเกิดพังทลายของชั้นผิวฉนวนได้. คำตอบแม่นยำของอนุภาคแบบมีผิวฉนวนนั้น ทราบดีอยู่สำหรับกรณีของอนุภาคทรงกลม. อย่างไรก็ตาม สำหรับอนุภาคทรงรี งานศึกษาที่มีอยู่ถึงในปัจจุบัน มักจะประมาณโดยอาศัยพิกัดทรงรี โดยให้ชั้นผิวฉนวนมีพิกัดอยู่ที่ η_0 และ $\eta_0 + d\eta$ ดังนั้น ฉนวนจะมีความหนาไม่สม่ำเสมอ ขึ้นอยู่กับตำแหน่งบนพื้นผิวที่พิจารณา (รูปที่ 3.1.2.1(a)). นอกจากนี้ แม้ว่า Wagner กับ Gimsa หรือกลุ่มนักวิจัยอื่น ได้ศึกษาอนุภาคทรงรีที่มีผิวฉนวนความหนาคงที่ก็ตาม แต่ก็ใช้วิธีทางวงจรไฟฟ้า ซึ่งมีความแม่นยำต่ำ [21-25].



รูปที่ 3.1.2.1 ความแตกต่างของโมเดลสองแบบ (a) แบบตามพิกัดทรงรี มีความหนาของชั้นผิวไม่คงที่ และ (b) แบบที่มีความหนาของชั้นผิวคงที่ ซึ่งตรงกับลักษณะของอนุภาคจริง.

3.1.2.1 หลักการกระจายฮาร์มอนิกส์

เราทำการวิเคราะห์โดยเริ่มจากกรณีของทรงคล้ายทรงกลมแบนข้าง (Prolate spheroid). พิกัด (η, θ, φ) ของทรงคล้ายทรงกลมแบนข้างสัมพันธ์กับพิกัดคาร์ทีเซียน ตามสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x &= a\sinh\eta\sin\theta\cos\varphi \\ y &= a\sinh\eta\sin\theta\sin\varphi \\ z &= a\cosh\eta\cos\theta \end{aligned} \qquad (3.1.2.1)$$

โดยที่พื้นผิว $\eta = \eta_0$ นั้น เป็นผิวของทรงคล้ายทรงกลมแบนข้างที่มีสมมาตรรอบแกน z. นั่นคือ

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (3.1.2.2)$$

เมื่อ

$$b = a\sinh\eta_0;\quad c = a\cosh\eta_0 \qquad (3.1.2.3)$$

และ

$$a = \sqrt{c^2+b^2} \qquad (3.1.2.4)$$

ถ้าหากเราใช้ความเยื้องศูนย์กลาง (Eccentricity; e) เป็นพารามิเตอร์ เราจะเขียนได้ว่า

$$e = \sqrt{1-\left(\frac{b}{c}\right)^2} = \frac{a}{c}; \qquad 0 \le e \le 1 \tag{3.1.2.5}$$

และสมการที่ (3.1.2.3) แสดงได้เป็น

$$\cosh \eta_0 = 1/e; \qquad \sinh \eta_0 = \sqrt{(1/e)^2 - 1} \tag{3.1.2.6}$$

คำตอบของสมการลาปลาซในระบบพิกัดทรงคล้ายทรงกลมแบนข้างคือ [26]

$$\phi = \begin{Bmatrix} P_{n,m}(\cosh \eta) \\ Q_{n,m}(\cosh \eta) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{n,m}(\cos \theta) \\ Q_{n,m}(\sin \theta) \end{Bmatrix} cs\ m\varphi \tag{3.1.2.7}$$

โดยที่ cs คือ cos หรือ sin, P_n^m และ Q_n^m เป็นฟังก์ชันเลอจองดร์ชนิดที่หนึ่ง และชนิดที่สองตามลำดับ. ฟังก์ชันแรกมีภาวะเอกฐานที่ค่าอนันต์ และฟังก์ชันที่สองมีภาวะเอกฐานที่ +1 หรือ -1.

ภายใต้อิทธิพลของศักย์ไฟฟ้าภายนอก

$$\phi_{app} = -\sum_{n,m} E_{n,m} a^n P_{n,m}(\cosh \eta) P_{n,m}(\cos \theta) \mathrm{cs} m\varphi \tag{3.1.2.8}$$

ศักย์ไฟฟ้าภายในและภายนอกของอนุภาคสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \phi_{out} &= \phi_{app} + \phi_{ind} \\ &= \phi_{app} + \sum_{n,m} C_{n,m} Q_{n,m}(\cosh \eta) P_{n,m}(\cos \theta) \mathrm{cs} m\varphi \end{aligned} \tag{3.1.2.9}$$

และ

$$\phi_{in} = -\sum_{n,m} A_{n,m} a^n P_{n,m}(\cosh \eta) P_{n,m}(\cos \theta) \mathrm{cs} m\varphi \tag{3.1.2.10}$$

3.1.2.2 เงื่อนไขขอบเขต

นิยามให้ค่าสภาพยอมเชิงซ้อนเท่ากับ

$$\varepsilon^* = \varepsilon + \frac{\mu}{j\omega} = \frac{\mu}{j\omega}(1 + j\omega\tau) \tag{3.1.2.11}$$

เมื่อ ε และ μ เป็นสภาพยอมและสภาพนำ, ω เป็นความถี่เชิงมุม, $j^2 = -1$ และ

$$\tau = \varepsilon / \mu \tag{3.1.2.12}$$

เวลาคงตัว τ จะสั้นมากสำหรับตัวกลางทางชีววิทยา เช่น อาจสั้นถึง 50 ms สำหรับสารละลาย KCL ความเข้มข้น 1mM. ความยาวของพัลส์ที่ใช้สำหรับการทำอิเล็กโตรพอเรชั่น หรือการเชื่อมเซลล์ด้วยไฟฟ้านั้นจะมากกว่าค่านี้มาก. ดังนั้น ในทางปฏิบัติ $\omega\tau << 1$ และเราสามารถละเลยผลของสภาพยอมที่มีต่อ ε^* ได้. ในอีกด้านหนึ่ง วัสดุของเมมเบรนของเซลล์เป็นฉนวนที่ดี เราจึงสามารถละเลยผลของสภาพนำได้.

สมมติให้เมมเบรนของอนุภาคเซลล์อยู่ที่ $\eta = \eta_0$ และมีความหนาน้อยมาก. เราจะแทนเมมเบรนนี้ด้วยชั้นผิวของไดโพล. ภายใต้เงื่อนไขนี้ เงื่อนไขขอบเขตที่ $\eta = \eta_0$ ก็คือ [27-28]

$$\phi_{out} - \phi_{in} = \frac{\sigma}{C_m} \qquad (3.1.2.13)$$
$$\mu_{out} E_{out} = \mu_{in} E_{in}$$

และการอัดประจุของเมมเบรนเป็นไปตามความสัมพันธ์

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\mu_{out} E_{out} = -\mu_{in} E_{in} \qquad (3.1.2.14)$$

เมื่อ C_m เป็นค่าความเก็บประจุจำเพาะต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่, σ เป็นความหนาแน่นประจุไดโพลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่บนเมมเบรน (มีขั้วบวกที่ด้านนอก และลบที่ด้านใน) และสนามไฟฟ้าบนผิวเขียนได้เป็น

$$E_{out} = -\frac{1}{g_\eta}\frac{\partial \phi_{out}}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=\eta_0}, \quad E_{in} = -\frac{1}{g_\eta}\frac{\partial \phi_{in}}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=\eta_0} \qquad (3.1.2.15)$$

โดย g_η เป็นสัมประสิทธิ์ทางเรขาคณิต เท่ากับ

$$g_\eta = a\sqrt{\sinh^2\eta_0 + \sin^2\theta} = a\sqrt{\cosh^2\eta_0 + \cos^2\theta} = c\sqrt{1-(\cos\theta/\cosh\eta_0)} \qquad (3.1.2.16)$$

สังเกตว่า จากสมการข้างบนเหล่านี้

$$\phi_{out} - \phi_{in} = \frac{1}{C_m}\int \frac{1}{g_\eta}\frac{\partial \phi_{out}}{\partial \eta}\bigg|_{\eta_0} dt \qquad (3.1.2.17)$$

ดังนั้น สำหรับค่าความเก็บประจุ C_m คงที่, การที่ g_η ขึ้นกับมุม θ หมายความว่า จะต้องมีปฏิกิริยาระหว่างอันดับฮาร์มอนิกส์ n ต่างกัน ของสมการที่ (3.1.2.9) และ (3.1.2.10) แต่จะไม่มีปฏิกิริยาระหว่างลำดับที่ m. ปฏิกิริยาเหล่านี้ ทำให้เกิดฮาร์มอนิกส์อันดับที่สูงขึ้น แม้ว่าอนุภาคจะอยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ (n=1) ก็ตาม.

สำหรับโมเดลที่มีความหนาของเมมเบรนแปรตามมุม θ โดยที่

$$C_m = \varepsilon_m / (g_\eta d\eta) \qquad (3.1.2.18)$$

เมื่อ ε_m เป็นสภาพยอมของเมมเบรน และ $g_\eta d\eta$ เป็นความหนาของเมมเบรน (อ้างอิงรูปที่ 3.1.2.1a) ค่าพารามิเตอร์ g_η จะไม่ขึ้นกับ θ อีกต่อไป และทำให้ไม่มีปฏิกิริยาระหว่างอันดับ n ที่ต่างกัน. ในกรณีนี้ พื้นผิวที่นิยามโดย $\eta = \eta_0 + d\eta$ จะทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\frac{x^2}{b^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1 \qquad (3.1.2.19)$$

เมื่อ

$$\xi = 2bc \cdot d\eta \qquad (3.1.2.20)$$

และความหนาบนแกน *x* และ *z* เป็น

$$\delta_x = cd\eta \quad \text{and} \quad \delta_z = bd\eta \qquad (3.1.2.21)$$

ดังนั้น สำหรับโมเดลทั่วไปที่มีความเก็บประจุแปรตามมุม ก็คือการที่ละเลย g_η ในสมการที่ (3.1.2.15) และหาคำตอบของสมการในกรณีของสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก โดยพิจารณา $n = 1$ เท่านั้น.

3.1.2.3 การหาคำตอบของปัญหาเงื่อนไขขอบเขต

คำตอบของศักย์ไฟฟ้าได้จากการกระจายความหนาแน่นประจุไดโพล σ ในรูปของฟังก์ชันเลอจองดร์เป็น

$$\sigma = \sum_{n,m} S_{n,m} P_{n,m}(\cos\theta)\mathrm{cs}m\varphi \tag{3.1.2.22}$$

ซึ่งเราจะได้สัมประสิทธิ์ของศักย์ไฟฟ้าในสมการที่ (3.1.2.9) และ (3.1.2.10) ในรูปของสัมประสิทธิ์ $S_{n,m}$ ของประจุ และสัมประสิทธิ์ $E_{n,m}$ ของสนามไฟฟ้าภายนอกเป็น

$$A_{n,m} = \frac{Q'_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)} \frac{S_{n,m}}{C_m} - \frac{H_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)} a^n E_{n,m} \tag{3.1.2.23}$$

$$C_{n,m} = \kappa_\mu \frac{P'_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)} \frac{S_{n,m}}{C_m} + (\kappa_\mu - 1) \frac{P_{n,m}(1/e) P'_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)} a^n E_{n,m} \tag{3.1.2.24}$$

เมื่อเราให้

$$\kappa_\mu = \mu_{in} / \mu_{out} \tag{3.1.2.25}$$

$$P'_{n,m}(1/e) = \frac{d}{d\eta} P_{n,m}(\cos\eta)\bigg|_{\eta=\eta_0} \quad \text{และ} \quad Q'_{n,m}(1/e) = \frac{d}{d\eta} Q_{n,m}(\cos\eta)\bigg|_{\eta=\eta_0} \tag{3.1.2.26}$$

$$G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e) = \kappa_\mu Q_{n,m}(1/e) P'_{n,m}(1/e) - P_{n,m}(1/e) Q'_{n,m}(1/e) \tag{3.1.2.27}$$

$$H_{n,m}(1/e) = Q_{n,m}(1/e) P'_{n,m}(1/e) - P_{n,m}(1/e) Q'_{n,m}(1/e) \tag{3.1.2.28}$$

การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของความหนาแน่นประจุไดโพลของชั้นเมมเบรนจะแสดงได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt} &= \mu_{in} g_\eta^{-1} \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=\eta_0} \\ &= \frac{\mu_{in}}{c\sqrt{1-(e\cos\theta)^2}} \sum_{n,m} A_{n,m} P'_{n,m}(1/e) P_{n,m}(\cos\theta)\mathrm{cs}m\varphi \end{aligned} \tag{3.1.2.29}$$

3.1.2.4 การจัดการกับพารามิเตอร์ g_η

g_η เป็นพารามิเตอร์ที่สำคัญในการคำนวณ เนื่องจากเป็นตัวเชื่อมความสัมพันธ์ระหว่างอันดับของฮาร์มอนิกส์ของสนามไฟฟ้า. เรากระจายพจน์ c/g_η ในรูปของ $\cos\theta$ เป็น

$$\frac{1}{\sqrt{1-(e\cos\theta)^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(e\cos\theta\right)^{2k} \tag{3.1.2.30}$$

อนุกรมนี้มีค่าลู่เข้าเนื่องจากว่า

$$-1 \le \cos\theta \le 1 \quad \text{and} \quad e \le 1 \tag{3.1.2.31}$$

สมการที่ (3.1.2.29) จะเขียนได้ในรูปของ

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\mu_{in}}{c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(e\cos\theta\right)^{2k} \sum_{n,m} A_{n,m} P'_{n,m}(1/e) P_{n,m}(\cos\theta)\mathrm{cs}m\varphi \tag{3.1.2.32}$$

สมการนี้มีพจน์ของ $(\cos\theta)^{2k} P_{n,m}(\cos\theta)$ ซึ่งสามารถกระจายพจน์ใหม่ในรูปของอนุกรมฮาร์มอนิกส์ โดยอาศัยกฎของฟังก์ชันเลอจองดร์

$$xP_{n,m}(u)=\frac{n+m}{2n+1}P_{n-1,m}(u)+\frac{n-m+1}{2n+1}P_{n+1,m}(u) \tag{3.1.2.33}$$

สังเกตว่า การกระจายพจน์ใหม่นี้ ทำให้ได้ ที่มีอันดับ n ต่างกันขึ้น (แต่มีลำดับ m คงเดิม). ดังนั้น เราจะอธิบายต่อไป โดยพิจารณาที่ค่า m ค่าหนึ่งๆ.

ในรูปของเมตริกซ์ เราจะเขียนสมการที่ (3.1.2.33) ได้เป็น

$$x\begin{bmatrix}P_{0,m}(x)\\P_{1,m}(x)\\\vdots\\P_{n-1,m}(x)\\P_{n,m}(x)\\P_{n+1,m}(x)\\\vdots\end{bmatrix}=[\mathbf{D}_1]\begin{bmatrix}P_{0,m}(x)\\P_{1,m}(x)\\\vdots\\P_{n-1,m}(x)\\P_{n,m}(x)\\P_{n+1,m}(x)\\\vdots\end{bmatrix},\qquad x^{2k}\begin{bmatrix}P_{0,m}(x)\\P_{1,m}(x)\\\vdots\\P_{n-1,m}(x)\\P_{n,m}(x)\\P_{n+1,m}(x)\\\vdots\end{bmatrix}=[\mathbf{D}_1]^{2k}\begin{bmatrix}P_{0,m}(x)\\P_{1,m}(x)\\\vdots\\P_{n-1,m}(x)\\P_{n,m}(x)\\P_{n+1,m}(x)\\\vdots\end{bmatrix} \tag{3.1.2.34}$$

โดยที่

$$[\mathbf{D}_1]=\begin{bmatrix}0 & 1-m & 0 & 0 & \cdots & & 0\\ \frac{(m+1)}{3} & 0 & \frac{(2-m)}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdot & 0 & \cdot & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdot & 0 & \cdot & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{(n+m)}{(2n+1)} & 0 & \frac{(n-m+1)}{(2n+1)} & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdot & 0 & \cdot\\ 0 & \cdots & & & 0 & \cdot & 0\end{bmatrix} \tag{3.1.2.35}$$

เมื่อนิยามให้

$$[\mathbf{s}]=\begin{bmatrix}S_{0,m}\\S_{1,m}\\\vdots\\S_{n,m}\\\vdots\end{bmatrix},\quad [P_{nm}]=\begin{bmatrix}P_{0,m}(\cos\theta)\mathrm{cs}m\varphi\\P_{1,m}(\cos\theta)\mathrm{cs}m\varphi\\\vdots\\P_{n,m}(\cos\theta)\mathrm{cs}m\varphi\\\vdots\end{bmatrix},\quad [\mathbf{a}]=\begin{bmatrix}A_{0,m}\\A_{1,m}\\\vdots\\A_{n,m}\\\vdots\end{bmatrix} \tag{3.1.2.36}$$

สมการที่ (3.1.2.32) จะอยู่ในรูปของ

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{s}]=\frac{\mu_{\text{in}}}{c}[\mathbf{D}^p][\mathbf{a}] \tag{3.1.2.37}$$

เมื่อ

$$[\mathbf{D}^p]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}e^{2k}P'_{n,m}(1/e)[\mathbf{D}_1^T]^{2k} \tag{3.1.2.38}$$

และมีดัชนีบน P ชี้ว่าเป็นกรณีของทรงคล้ายทรงกลมแบนข้าง (prolate spheroid) และ T ระบุการสลับเปลี่ยนของเมตริกซ์.

ในอีกทางหนึ่ง จากสมการที่ (3.1.2.23) เราจะได้

$$[\mathbf{a}] = \frac{1}{C_m}[\mathbf{M}^P][\mathbf{s}] - [\mathbf{N}^P][\mathbf{e}] \tag{3.1.2.39}$$

เมื่อ $[\mathbf{e}]$ เป็นเวกเตอร์ของสัมประสิทธิ์ของสนามไฟฟ้าภายนอก $E_{n,m}$, $\mathbf{M}^P$ และ $\mathbf{N}^P$ เป็นเมตริกซ์แนวทแยง ซึ่งมีสมาชิกเป็น

$$M_n^P = \frac{Q'_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)}, \qquad N_n^P = a^n \frac{H_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)} \tag{3.1.2.40}$$

เมื่อแทนสมการที่ (3.1.2.39) ลงในสมการที่ (3.1.2.37) จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{s}] = \frac{\mu_{in}}{cC_m}[\mathbf{D}^P][\mathbf{M}^P][\mathbf{s}] - \frac{\mu_{in}}{c}[\mathbf{D}^P][\mathbf{N}^P][\mathbf{e}] \tag{3.1.2.41}$$

สมการนี้ เป็นสมการหลักสำหรับคำนวณการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของแต่ละฮาร์มอนิกส์ของประจุที่อยู่บนพื้นผิวของเมมเบรน.

สำหรับ n=1 และ m=0 หรือ , เมื่อให้สนามไฟฟ้าภายนอกเป็นแบบสม่ำเสมอ. นั่นคือ

$$\begin{aligned} E_{n,m} &= E_1, \quad n = 1 \\ E_{n,m} &= 0, \qquad n > 1 \end{aligned} \tag{3.1.2.42}$$

สมการที่ (3.1.2.41) ที่เมื่อ e ลู่เข้าสู่ศูนย์ จะกลายเป็น

$$\frac{d}{dt}s_1 = \frac{2}{cC_m}\frac{\mu_{in}\mu_{out}}{\mu_{in} + 2\mu_{out}}s_1 - \frac{3\mu_{in}\mu_{out}}{\mu_{in} + 2\mu_{out}}E_1 \tag{3.1.2.43}$$

ซึ่งลดรูปลงเป็นคำตอบของความต่างศักย์เมมเบรน V_m ของทรงกลมรัศมีเท่ากับ

$$V_m = \frac{s_1}{C_m} = \frac{3}{2}cE_1(1 - \exp[-t/\tau_1]) \tag{3.1.2.44}$$

เมื่อ

$$\tau_1 = cC_m\left(\frac{1}{\mu_{in}} + \frac{1}{2\mu_{out}}\right) \tag{3.1.2.45}$$

คำตอบในกรณีของทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว (oblate spheroid) ก็สามารถหาได้ในลักษณะเดียวกัน โดยมีรายละเอียดแสดงในหัวข้อที่ 3.1.2.7.

3.1.2.5 โพลาไรเซชันเนื่องจากสนามไฟฟ้า

สมมติสนามไฟฟ้าภายนอกเปลี่ยนแปลงตามเวลา และสามารถแทนด้วยเฟสเซอร์ $\exp[j\omega t]$ จากสมการที่ (3.1.2.41) เราจะได้ว่า

$$j\omega[\mathbf{s}] = \frac{\mu_{out}}{cC_m}[\mathbf{D}^i][\kappa_\mu\mathbf{M}^i][\mathbf{s}] - \frac{\mu_{out}}{c}[\mathbf{D}^i][\kappa_\mu\mathbf{N}^i][\mathbf{e}] \tag{3.1.2.46}$$

โดยที่ดัชนีบน i แสดงกรณีของทรงคล้ายทรงกลมแบนข้าง P หรือทรงกคล้ายทรงกลมแบนขั้ว O. ดังนั้นความหนาแน่นของประจุไดโพลสามารถหาจากสนามไฟฟ้าภายนอกได้ตามสมการ

$$\begin{aligned} [\mathbf{s}] &= C_m\left([\mathbf{D}^i][\kappa_\mu\mathbf{M}^i] - I\omega\tau[\mathbf{U}]\right)^{-1}[\mathbf{D}^i][\kappa_\mu\mathbf{N}^i][\mathbf{e}] \\ &\overset{write}{=} C_m[\mathbf{L}][\mathbf{D}^i][\kappa_\mu\mathbf{N}^i][\mathbf{e}] \end{aligned} \tag{3.1.2.47}$$

ซึ่งมีค่าคงตัวเวลาเป็น

$$\tau = cC_m / \mu_{out} \tag{3.1.2.48}$$

ในอีกด้านหนึ่ง สมการที่ (3.1.2.24) สามารถจัดรูปได้เป็น

$$[\mathbf{c}] = \frac{\kappa_\mu}{C_m}[\mathbf{S}^i][\mathbf{s}] + (\kappa_\mu - 1)[\mathbf{T}^i][\mathbf{e}] \tag{3.1.2.49}$$

เมื่อ $[\mathbf{c}]$ เป็นเวกเตอร์ของ $C_{m,n}$, $\mathbf{S}^i$ และ $\mathbf{T}^i$ เป็นเมตริกซ์แนวทแยงซึ่งมีสมาชิกเป็น

$$\text{Prolate:}\quad S_n^P = \frac{P'_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)}, \qquad T_n^P = a^n \frac{P_{n,m}(1/e)P'_{n,m}(1/e)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, 1/e)} \tag{3.1.2.50}$$

$$\text{Oblate: } S_n^O = \frac{(-1)^n j^{n+1} P'_{n,m}(j\sinh\eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j\sinh\eta_0)}, T_n^O = a^n \frac{jP_{n,m}(j\sinh\eta_0)P'_{n,m}(j\sinh\eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j\sinh\eta_0)} \tag{3.1.2.51}$$

เมื่อแทนสมการที่ (3.1.2.47) ลงในสมการที่ (3.1.2.49) เราจะได้

$$[\mathbf{c}] = \left(\kappa_\mu[\mathbf{S}^i][\mathbf{L}^i][\mathbf{D}^i][\mathbf{N}^i] + (\kappa_\mu - 1)[\mathbf{T}^i]\right)[\mathbf{e}] \tag{3.1.2.52}$$

สมการนี้ สามารถใช้หาโพลาไรเซชันของทรงคล้ายทรงกลมได้.

ในโครงงานวิจัยหัวข้อนี้ ผู้วิจัยจำกัดความสนใจอยู่ที่ไดโพล. ในกรณีนี้ เราจะสังเกตว่า เมื่อ r ลู่เข้าสู่อนันต์ จะได้

$$Q_{1,0}(\cosh\eta) \approx \frac{1}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^2, \qquad Q_{1,1}(\cosh\eta) \approx -\frac{2}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \tag{3.1.2.53}$$

$$Q_{1,0}(j\sinh\eta) \approx -\frac{1}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^2, \qquad Q_{1,1}(j\sinh\eta) \approx \frac{2}{3}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \tag{3.1.2.54}$$

ดังนั้น โมเมนต์ไดโพลจะเขียนได้เป็น

$$\text{Prolate:}\quad d_z^P = \frac{4}{3}\pi\varepsilon_{out}a^2C_{1,0}^P, \quad d_x^P = -\frac{8}{3}\pi\varepsilon_{out}a^2C_{1,1}^P \tag{3.1.2.55}$$

$$\text{Oblate:}\quad d_z^O = -\frac{4}{3}\pi\varepsilon_{out}a^2C_{1,0}^O, \quad d_x^P = \frac{8}{3}\pi\varepsilon_{out}a^2C_{1,1}^O \tag{3.1.2.56}$$

และได้ตัวประกอบโพลาไรเซชันต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรเท่ากับ

$$P_m^i = \frac{4\!\!\diagup\!\!3\,\pi\varepsilon_{out}a^2 f_m C_{1,m}^i}{4\!\!\diagup\!\!3\,\pi b^2 c} \tag{3.1.2.57}$$

เมื่อ $m = 0$ สำหรับไดโพลในแนว z และ $m = 1$ สำหรับในแนว x. $f_0 = 1$ และ $f_1 = 2$.

3.1.2.6 ตัวอย่างการคำนวณ

เราจะแสดงตัวอย่างเป็นตัวเลขของคำตอบของสมการ

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{s}] = \frac{\mu_{in}}{cC_m}[\mathbf{D}^i][\mathbf{M}^i][\mathbf{s}] - \frac{\mu_{in}}{c}[\mathbf{D}^i][\mathbf{N}^i][\mathbf{e}] \tag{3.1.2.58}$$

เมื่อ i แสดงกรณีของทรงคล้ายทรงกลมแหลม P หรือทรงกคล้ายทรงกลมแป้น O. เนื่องจากว่า ในทางปฏิบัติแล้ว μ_{in} μ_{out} เราจะทำให้เวลาเป็นบรรทัดฐานด้วยค่าคงตัวเวลา τ ในสมการที่ (3.1.2.48). นั่นคือ

$$t = t_n \tau \tag{3.1.2.59}$$

ดังนั้น แรงดันของเมมเบรน

$$[v_m] = \frac{1}{C_m}[\mathbf{s}] \tag{3.1.2.60}$$

จะเปลี่ยนแปลงตามสมการ

$$\frac{d}{dt}[v_m] = [\mathbf{D}^i][\kappa_\mu \mathbf{M}^i][v_m] - [\mathbf{D}^i][\kappa_\mu \mathbf{N}^i][\mathbf{e}] \tag{3.1.2.61}$$

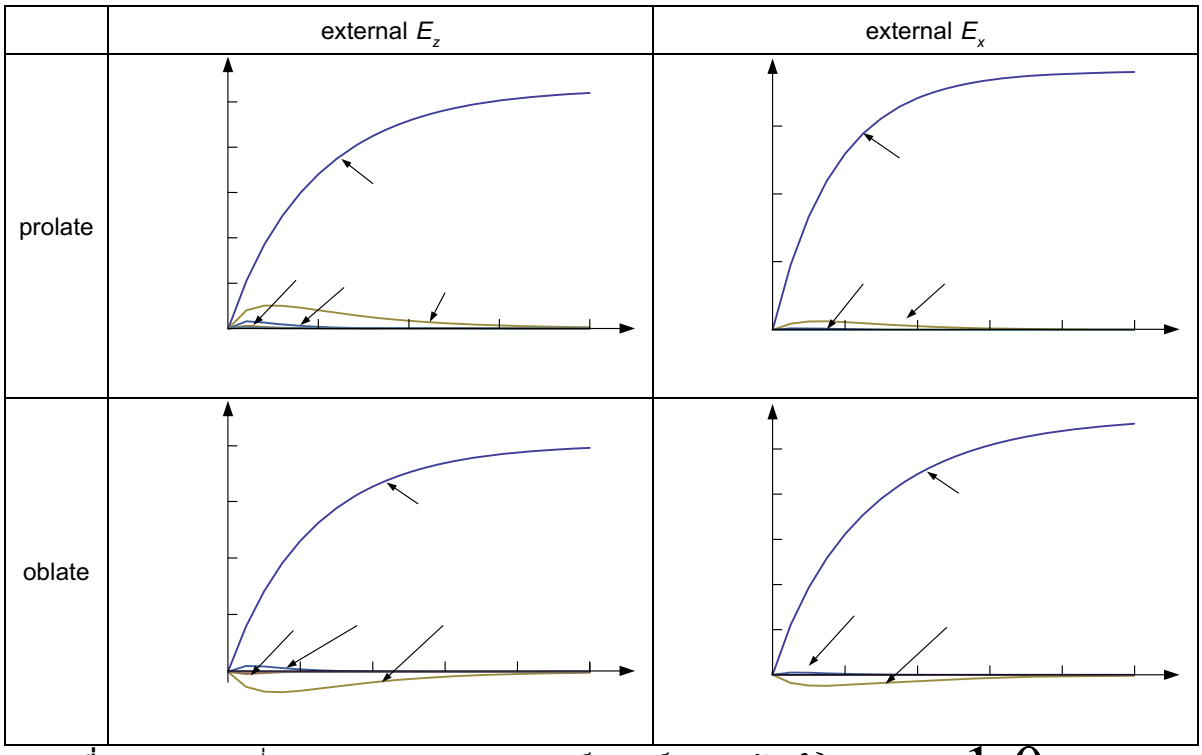
ผู้วิจัยได้ทดลองคำนวณตัวอย่างเชิงเลขสำหรับกรณีของสนามไฟฟ้า E_0 แบบสม่ำเสมอ ในแนวแกน z และแกน x ตามลำดับ เมื่อ $R = 5$ (นั่นคือ c/b = 5 สำหรับทรงคล้ายทรงกลมแบนข้าง และ b/c = 5 สำหรับทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว) และ $\kappa_\mu = 10$. การคำนวณใช้อันดับฮาร์มอนิกส์จนถึง $n_{\max} = 200$ ซึ่งจะได้ความคลาดเคลื่อนของการกระจายพจน์แบบอนุกรมน้อยกว่า 0.4%.

รูปที่ 3.1.2.2 แสดงการเปลี่ยนแปลงตามเวลาของแต่ละองค์ประกอบฮาร์มอนิกส์ v_n ที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย cE_0 ตั้งแต่เวลา $t_n = 0$ ถึง $t_{\max}$. $t_{\max}$ ถูกเลือกให้ครอบคลุมช่วงเวลาประมาณ 4 เท่าของเวลาคงตัวของฮาร์มอนิกส์ที่หนึ่ง. เราสามารถเห็นได้จากรูปว่า ฮาร์มอนิกส์อันดับสูงลดหายลงอย่างรวดเร็ว เมื่อค่า n เพิ่มขึ้น และมีผลสำคัญต่อการตอบสนองที่ช่วงเริ่มต้นของทรานเซียนต์เท่านั้น.

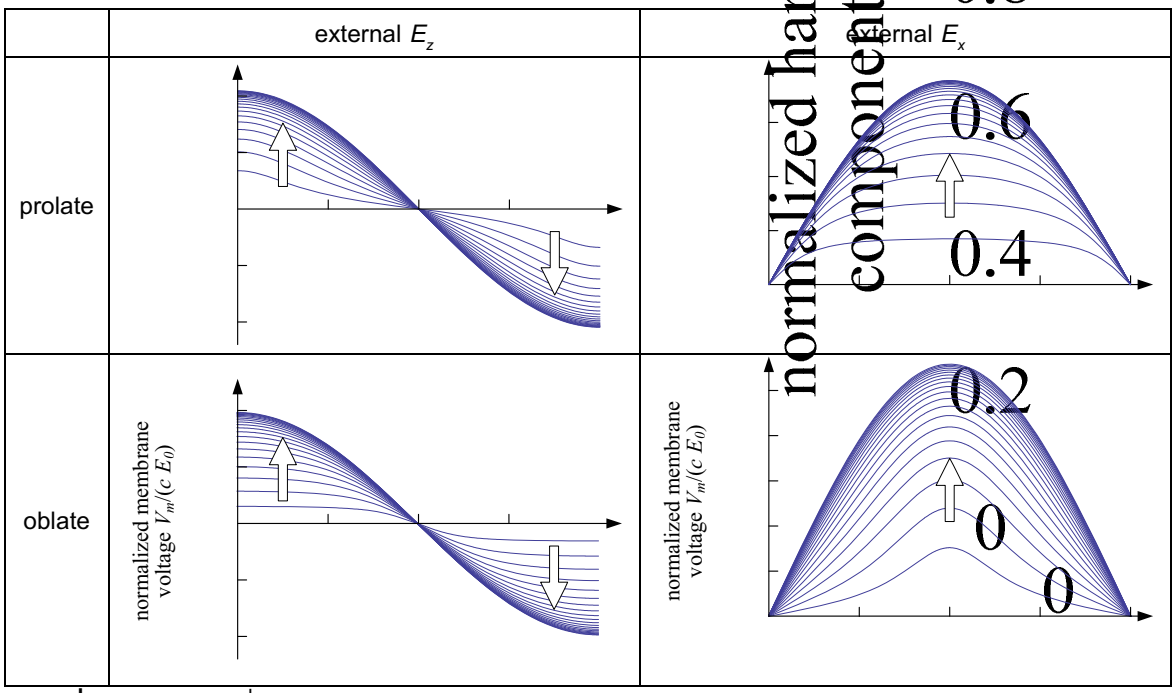
รูปที่ 3.1.2.3 เป็นการสร้างแรงดันเมมเบรนตามเวลา(ผลรวมของทุกฮาร์มอนิกส์) เป็นฟังก์ชันของมุม θ โดยแสดงเป็นลำดับขั้นเวลา $t_{\max}/20$. รูปที่ 3.1.2.3 แสดงแรงดันเมมเบรนเช่นเดียวกัน แต่เป็นค่าที่ได้เมื่อประมาณด้วยโมเดลแบบที่มีความหนาของเมมเบรนไม่คงที่ (นั่นคือ ใช้ $n = 0$ ในสมการที่ (3.1.2.29)). ด้วยโมเดลแบบแม่นยำที่ใช้ในโครงงานวิจัยนี้ เราจะเห็นการสร้างแรงดันเมมเบรนที่ตำแหน่งซึ่งมีสนามไฟฟ้าความเข้มสูง ซึ่งก็คือที่ $\theta = 0$ สำหรับทรงคล้ายทรงกลมแหลมภายใต้สนามไฟฟ้า E_z และที่ $\theta = \pi/2$ สำหรับทรงคล้ายทรงกลมแป้นภายใต้สนามไฟฟ้า E_x. เมื่อเวลาผ่านไป การกระจายของแรงดันเมมเบรนก็จะเข้าสู่รูปร่างฟังก์ชันไซน์ และค่าที่สภาวะคงตัวของทั้งสองโมเดลมีขนาดเท่ากัน.

จากผลการคำนวณที่ผ่านมา เราจะเห็นได้ว่าฮาร์มอนิกส์อันดับสูงจะมีบทบาทสำคัญ ณ ช่วยเริ่มต้นของทรานเซียนต์. ดังนั้น เราสามารถคาดได้ว่า ผลของโมเดลแบบแม่นยำจะแสดงให้เห็นต่อโพลาไรเซชันที่ความถี่สูงๆ. ในรูปที่ 3.1.2.5 ผู้วิจัยแสดงตัวประกอบโพลาไรเซชัน (หารด้วย ε_{out}) สำหรับ $\kappa_\mu = 10$ และ $R = 5$. เราสามารถเห็นได้จากรูปนี้ว่า มีการเลื่อนของสเปคตรัม เมื่อเปรียบเทียบระหว่างเส้นทึบและเส้นประในรูป. การเปลี่ยนแปลงนี้ เห็นได้ชัดเจนในกรณีที่เกิดสนามไฟฟ้าไม่สม่ำเสมอสูง เนื่องจากการเหนี่ยวนำของอนุภาค.

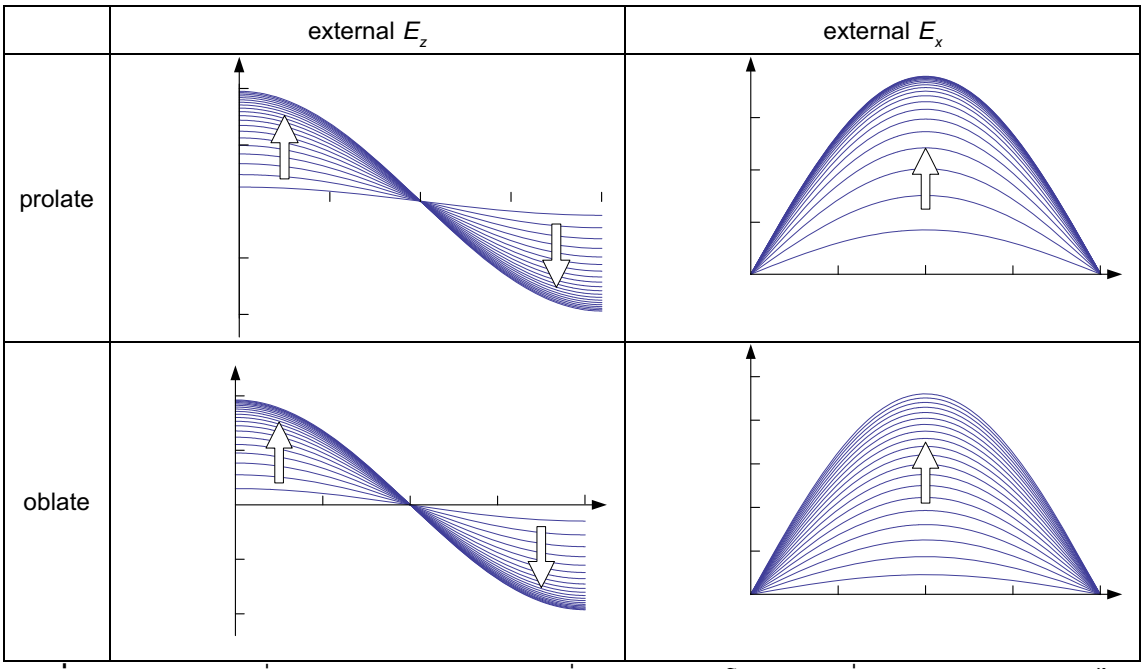
ข้อสังเกตประการหนึ่งก็คือ วิธีที่ใช้ในที่นี้มีความเร็วในการคำนวณสูงกว่าวิธีเชิงตัวเลขต่างๆ เช่นวิธีที่มีพื้นฐานบนวิธีชิ้นประกอบขอบเขต [28] โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกรณีที่สนามไฟฟ้าภายนอกตั้งฉากกับแกนหลังของทรงคล้ายทรงกลม ซึ่งจะทำให้การคำนวณเป็นแบบสามมิติ.



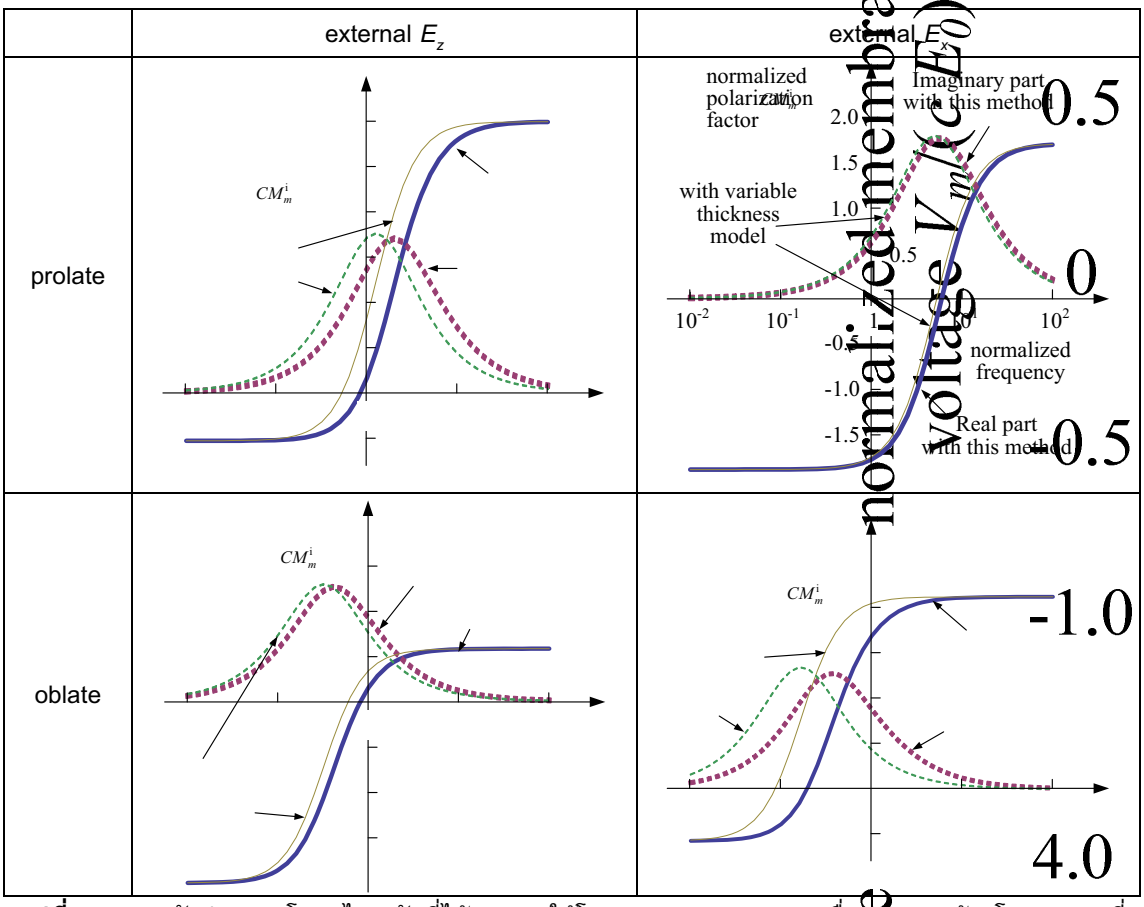
รูปที่ 3.1.2.2 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของแต่ละฮาร์มอนิกส์ของแรงดันเมมเบรน.



รูปที่ 3.1.2.3 การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของผลรวมทุกฮาร์มอนิกส์ของแรงดันเมมเบรน.



รูปที่ 3.1.2.4 การเปลี่ยนแปลงแรงดันเมมเบรน เมื่อประมาณด้วยโมเดลแบบที่ความหนาของเมมเบรนไม่คงที่.



รูปที่ 3.1.2.5 ตัวประกอบโพลาไรเซชันที่ได้จากการใช้โมเดลแบบแม่นยำ และเมื่อประมาณด้วยโมเดลแบบที่ความหนาของเมมเบรนไม่คงที่.

3.1.2.7 สมการสำหรับกรณีของทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว

ในระบบพิกัด (η, θ, φ) ของทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว พิกัดทั้งสามสัมพันธ์กับพิกัดคาร์ทีเซียนตามสมการด้านล่าง

$$\begin{aligned} x &= a\cosh(\eta)\sin\theta\cos\phi \\ y &= a\cosh(\eta)\sin\theta\sin\phi \\ z &= a\sinh(\eta)\cos\theta \end{aligned} \tag{3.1.2.62}$$

เมื่อพื้นผิว $\eta = \eta_0$ เป็นทรงคล้ายทรงกลมแบนขั้ว

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{3.1.2.63}$$

โดยที่

$$b = a\cosh\eta_0;\quad c = a\sinh\eta_0 \tag{3.1.2.64}$$

และ

$$a=\sqrt{b^2-c^2} \tag{3.1.2.65}$$

เมื่อใช้ความเยื้องศูนย์กลาง e เป็นพารามิเตอร์

$$e=\sqrt{1-\left(\frac{c}{b}\right)^2}=\frac{a}{b};\qquad 0\le e\le 1 \tag{3.1.2.66}$$

เราจะได้สมการความสัมพันธ์ระหว่าง $\cosh\eta_0$ และ $\sinh\eta_0$ เป็น

$$\cosh\eta_0 = 1/e;\qquad \sinh\eta_0=\sqrt{(1/e)^2-1} \tag{3.1.2.67}$$

คำตอบของสมการลาปลาซสำหรับระบบพิกัดนี้เป็น

$$\phi=\begin{Bmatrix} P_{n,m}(j\sinh\eta) \\ Q_{n,m}(j\sinh\eta)\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} P_{n,m}(\cos\theta) \\ Q_{n,m}(\sin\theta)\end{Bmatrix} cs\ m\varphi \tag{3.1.2.68}$$

ศักย์ไฟฟ้าภายในและภายนอกทรงคล้ายทรงกลมแป้น สามารถเขียนได้ในรูปของ

$$\begin{aligned} \phi_{out} &= \phi_{app}+\phi_{ind} \\ &=\sum_{n,m} E_{n,m}a^n j^n P_{n,m}(j\sinh\eta)P_{n,m}(\cos\theta)\mathrm{cs}m\varphi \\ &\quad+\sum_{n,m} C_{n,m}j^{n-1}Q_{n,m}(j\sinh\eta)P_{n,m}(\cos\theta)\mathrm{cs}m\varphi \end{aligned} \tag{3.1.2.69}$$

และ

$$\phi_{in}=\sum_{n,m} A_{n,m}j^n P_{n,m}(j\sinh\eta)P_{n,m}(\cos\theta)\mathrm{cs}m\varphi \tag{3.1.2.70}$$

ในสมการด้านบนนี้ เราเพิ่มพจน์ของจำนวนจินตภาพ j เพื่อทำให้สัมประสิทธิ์ของศักย์ไฟฟ้าที่เกี่ยวข้องมีค่าเป็นจำนวนจริง.

ถ้าเรากระจายความหนาแน่นประจุไดโพล σ ในรูปของฮาร์มอนิกส์ดังสมการที่ (3.1.2.22) และประยุกต์ใช้สมการเงื่อนไขขอบเขต เราจะได้ว่า

$$A_{n,m}=\frac{(-j)^n Q'_{n,m}(j\sinh\eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j\sinh\eta_0)}\frac{S_{n,m}}{C_m}-\frac{H_{n,m}(j\sinh\eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j\sinh\eta_0)}a^n E_{n,m} \tag{3.1.2.71}$$

และ

$$\begin{aligned}C_{n,m}=\kappa_\mu&\frac{(-1)^n j^{n+1}P'_{n,m}(j\sinh\eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j\sinh\eta_0)}\frac{S_{n,m}}{C_m}\\&+j(\kappa_\mu-1)\frac{P_{n,m}(j\sinh\eta_0)P'_{n,m}(j\sinh\eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j\sinh\eta_0)}a^n E_{n,m}\end{aligned} \tag{3.1.2.72}$$

เมื่อ

$$P'_{n,m}(j\sinh\eta_0)=\frac{d}{d\eta}P_{n,m}(j\sinh\eta_0)\bigg|_{\eta=\eta_0} \tag{3.1.2.73}$$

$$Q'_{n,m}(j\sinh\eta_0)=\frac{d}{d\eta}Q_{n,m}(j\sinh\eta_0)\bigg|_{\eta=\eta_0} \tag{3.1.2.74}$$

$$\begin{aligned}&G_{n,m}(\kappa_\mu, j\sinh\eta_0)=\\&\quad\kappa_\mu Q_{n,m}(j\sinh\eta_0)P'_{n,m}(j\sinh\eta_0)-P_{n,m}(j\sinh\eta_0)Q'_{n,m}(j\sinh\eta_0)\end{aligned} \tag{3.1.2.75}$$

$$\begin{aligned}&H_{n,m}(j\sinh\eta_0)=\\&\quad Q_{n,m}(j\sinh\eta_0)P'_{n,m}(j\sinh\eta_0)-P_{n,m}(j\sinh\eta_0)Q'_{n,m}(j\sinh\eta_0)\end{aligned} \tag{3.1.2.76}$$

การเปลี่ยนแปลงตามเวลาของประจุบนเมมเบรน จะเป็นไปตามสมการ

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dt}&=\mu_{in}g_\eta^{-1}\frac{\partial\phi_{in}}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=\eta_0}\\&=\frac{\mu_{in}}{c\sqrt{1-(e\sin\theta)^2}}\sum_{n,m}A_{n,m}\tanh\eta_0 P'_{n,m}(j\sinh\eta_0)P_{n,m}(\cos\theta)\mathrm{cs}m\varphi\end{aligned} \tag{3.1.2.77}$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ทางเรขาคณิต g_η มีค่าเป็น

$$g_\eta=a\sqrt{\sinh^2\eta_0+\cos^2\theta}=a\sqrt{\cosh^2\eta_0+\sin^2\theta}=\frac{c}{\tanh\eta_0}\sqrt{1-(\sin\theta/\cosh\eta_0)^2}$$

และสามารถกระจายพจน์ได้ดังนี้.

$$\frac{1}{\sqrt{1-(e\sin\theta)^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left(e\sin\theta\right)^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left(e^2\left[1-\cos^2\theta\right]\right)^k \tag{3.1.2.78}$$

ดังนั้น สมการที่ (3.1.2.77) จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dt}=\frac{\mu_{in}}{c}&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left(e^2\left[1-\cos^2\theta\right]\right)^k\\&\times\sum_{n,m}A_{n,m}\tanh\eta_0 P'_{n,m}(j\sinh\eta_0)P_{n,m}(\cos\theta)\mathrm{cs}m\varphi\end{aligned} \tag{3.1.2.79}$$

สมการนี้มีพจน์ของ $(\cos\theta)^{2k}P_{n,m}(\cos\theta)$ ซึ่งสามารถกระจายพจน์ใหม่เป็นอนุกรมของฮาร์มอนิกส์ฟังก์ชันเลอจองดร์ โดยใช้

$$[\mathbf{D}_2^T] = [\mathbf{D}_1^T]^2 \tag{3.1.2.80}$$

และ

$$[\mathbf{D}^O] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} e^{2k} \tanh\eta_0 P'_{n,m}(j\sinh\eta_0) \left\lfloor \mathbf{U} - \mathbf{D}_2^T \right\rfloor^k \tag{3.1.2.81}$$

เมื่อดัชนีบน O แสดงว่าสมการนี้ ใช้สำหรับทรงคล้ายทรงกลมแบบแป้น, และ $\mathbf{U}$ เป็นเมกตริกซ์เอกลักษณ์. ดังนั้น เราจะได้

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{s}] = \frac{\mu_{in}}{cC_m}[\mathbf{D}^O][\mathbf{M}^O][\mathbf{s}] - \frac{\mu_{in}}{c}[\mathbf{D}^O][\mathbf{N}^O][\mathbf{e}] \tag{3.1.2.82}$$

เมื่อ $\mathbf{M}^O$ และ $\mathbf{N}^O$ เป็นเมตริกซ์แนวทแยงที่มีสมาชิกเป็น

$$M_n^O = \frac{(-j)^n Q'_{n,m}(j\sinh\eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j\sinh\eta_0)}, \qquad N_n^P = a^n \frac{H_{n,m}(j\sinh\eta_0)}{G_{n,m}(\kappa_\mu, j\sinh\eta_0)} \tag{3.1.2.83}$$

3.1.3 วิธีคำนวณสนามไฟฟ้าแบบสองมิติ

งานวิจัยในส่วนนี้เกี่ยวข้องกับการคำนวณสนามไฟฟ้าในบริเวณสองมิติด้วยวิธีเงามัลติโพล. ดังที่ได้กล่าวมาในหัวข้อก่อนหน้านี้ว่า การวิเคราะห์สนามไฟฟ้ามีความสำคัญในการศึกษาระบบฉนวนและการใช้งานอื่นๆ ของวัสดุฉนวนไฟฟ้าอย่างมาก. ในหลายกรณี การจัดเรียงทางกายภาพที่สนใจ อาจสามารถลดรูปลงเป็นการประมาณแบบสองมิติได้ เพื่อให้ปัญหามีความซับซ้อนน้อยลง. การจัดเรียงสองมิติยังมีประโยชน์สำหรับศึกษาลักษณะสมบัติพื้นฐานของสนามไฟฟ้าอีกด้วย. ตัวอย่างเช่น การจัดเรียงแบบสองมิติถูกใช้สำหรับวิเคราะห์สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสระหว่างตัวนำและฉนวนแข็ง [29-30]. โดยปกติแล้ว เราสามารถคำนวณสนามไฟฟ้าในการจัดเรียงแบบสองมิติได้โดยง่าย โดยใช้เทคนิคการคำนวณสนามไฟฟ้าเชิงเลขต่างๆ เช่น วิธีชิ้นไฟไนต์เอลิเมนต์ หรือวิธีชิ้นประกอบขอบเขต. อย่างไรก็ตาม การคำนวณด้วยวิธีเชิงเลขจะให้ความแม่นยำต่ำ ในกรณีที่สนามไฟฟ้าเป็นแบบไม่สม่ำเสมอสูง.

วิธีเชิงวิเคราะห์จึงเป็นทางเลือกประการหนึ่ง สำหรับคำนวณสนามไฟฟ้า ถ้าหากการจัดเรียงทางกายภาพไม่ซับซ้อนมากเกินไป. ดังเป็นที่ทราบกันดีแล้วว่า วิธีเงาประจุ (ซึ่งเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์) สามารถใช้ได้กับการจัดเรียงที่ประกอบด้วยวัตถุที่มีรูปทรงง่ายๆ เช่น ทรงกระบอก หรือระนาบ[31-32]. ทว่า วิธีนี้ไม่เหมาะกับการใช้งานในทางปฏิบัติ ถ้ามีจำนวนวัตถุมากกว่าสองขึ้นไป. ทั้งนี้ เนื่องจากว่า การคำนวณตำแหน่งของเงา และการพิจารณาปฏิกิริยาระหว่างวัตถุยุ่งยากขึ้นมาก. เร็วๆ นี้ Giordano ได้เสนอการวิเคราะห์สนามไฟฟ้าในวัสดุที่มีโครงสร้างเป็นเส้นใย โดยใช้มัลติโพลคำนวณในบริเวณสองมิติ[33]. ในงานชิ้นนี้ ศักย์ไฟฟ้าถูกแสดงเป็นอนุกรมฮาร์มอนิกส์ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์คำนวณได้จากการแก้ระบบสมการเชิงเส้น. ลักษณะการหาสัมประสิทธิ์นี้ถูกใช้ในการคำนวณสนามบนบริเวณสามมิติด้วย [12,34].

งานวิจัยในส่วนนี้ได้พัฒนาวิธีเชิงเคราะห์ โดยมีพื้นฐานจากวิธีเงาประจุ สำหรับการคำนวณสนามในระบบสองมิติ. วิธีที่พัฒนาขึ้นนี้คล้ายคลึงกับที่ได้นำเสนอสำหรับบริเวณสมมาตรรอบแกนหมุน[34] และบริเวณสามมิติ [35]. ผู้วิจัยใช้การกระจายมัลติโพลใหม่ เพื่อให้ระบบการวางเงา(มัลติโพล)ง่ายขึ้น เมื่อเปรียบเทียบกับการใช้วิธีเงาประจุทั่วไป. สำหรับวิธีคำนวณที่ได้พัฒนาขึ้นในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยยังได้ประยุกต์ใช้การกระจายมัลติโพลใหม่ทั้งสิ้นสามชนิด เพื่อให้วิธีที่นำเสนอสามารถใช้ได้กับปัญหาที่มีรูปแบบหลากหลายมากขึ้น. รายละเอียดของวิธีเงามัลติโพลสำหรับบริเวณสองมิติจะแสดงอยู่ในหัวข้อย่อยต่อไปนี้.

3.1.3.1 การแสดงศักย์ไฟฟ้าในบริเวณสองมิติด้วยจำนวนเชิงซ้อน

สำหรับการวิเคราะห์สนามไฟฟ้าบนบริเวณสองมิติ เราจะใช้ระนาบเชิงซ้อน z แทนบริเวณสองมิติจริงทางกายภาพ. นั่นคือ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ แทนพิกัด (x_0, y_0) จริงของปัญหา. จากทฤษฎีของฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน[35] เราทราบว่า ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของฟังก์ชันวิเคราะห์ Φ ของ z ทำให้สมการลาปลาซในบริเวณสองมิติเป็นจริง. ฟังก์ชัน Φ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ได้ ก็ต่อเมื่อเงื่อนไขของ Cauchy-Riemann เป็นจริง:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Re}\{\Phi\} = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Im}\{\Phi\} \qquad (3.1.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}\{\Phi\} = -\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{Im}\{\Phi\} \qquad (3.1.3.2)$$

ในงานวิจัยนี้ คำตอบศักย์ไฟฟ้า ϕ คำนวณหาเป็นส่วนจริงของฟังก์ชันวิเคราะห์ Φ ซึ่งเราจะเรียกต่อไปว่าเป็น “ศักย์เชิงซ้อน”. ศักย์เชิงซ้อน Φ นี้ สามารถแสดงสำหรับจุด z บนบนระนาบเชิงซ้อนได้ ในรูปแบบทั่วไป ซึ่งเป็นอนุกรมอนันต์รอบจุดศูนย์กลางการกระจายที่ $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ เป็น

$$\Phi = \Phi_B + \Phi_L \tag{3.1.3.3}$$

เมื่อ Φ_B เป็นศักย์ในรูปมัลติโพล (ซึ่งต่อไปนี้จะเรียกสั้นๆ ว่า*ศักย์มัลติโพล*)

$$\Phi_B = B_0 \ln(z - z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^n} \tag{3.1.3.4}$$

และ Φ_L เป็นศักย์ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์ (ซึ่งต่อไปนี้จะเรียกสั้นๆ ว่า*ศักย์เฉพาะที่*)

$$\Phi_L = \sum_{n=0}^{\infty} L_n (z - z_0)^n \tag{3.1.3.5}$$

ในสมการที่ (3.1.3.4) และ (3.1.3.5) B_n และ L_n เป็นสัมประสิทธิ์จำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเราจะคำนวณหาออกมา เพื่อทำให้เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องกับปัญหาเป็นจริง. ในสมการที่ (3.1.3.4) ศักย์มัลติโพล ซึ่งมีค่าเป็นเอกฐานที่จุด z_0 เป็นศักย์ที่เกิดจากแหล่งกำเนิดภายในวงกลมรัศมี $|z - z_0|$ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ z_0 บนระนาบเชิงซ้อน. นอกจากนี้ เราสามารถมองได้ว่า สำหรับประสิทธิ์ B_n ในสมการที่ (3.1.3.4) เป็นขนาดของมัลติโพลอันดับที่ n ซึ่งอยู่ที่ z_0 และมีศักย์ไฟฟ้าเป็นเอกฐานที่ z_0. ยกตัวอย่างเช่น ถ้าหากมีเส้นประจุความยาวอนันต์ ที่มีความหนาแน่นประจุเท่ากับ q_0 อยู่ที่ (x_0, y_0) ในบริเวณจริง ซึ่งมีสภาพยอมเท่ากับ ε ประจุนี้จะถูกแสดงด้วยโมโนโพล(มัลติโพลอันดับศูนย์) โดย $B_0 = -q_0 / 2\pi\varepsilon$ ที่ z_0 บนระนาบเชิงซ้อน.

3.1.3.2 การกระจายพจน์ใหม่แบบต่าง ๆ ของศักย์ไฟฟ้า

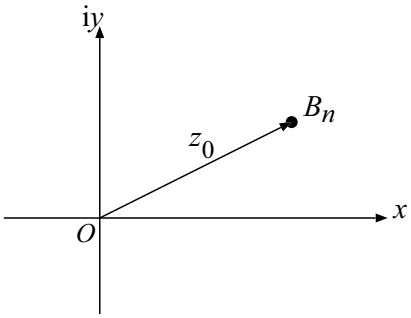
หัวข้อนี้อธิบายการกระจายพจน์ใหม่สามชนิด สำหรับศักย์เชิงซ้อนในสมการที่ (3.1.3.4) และ (3.1.3.5). ในที่นี้ เรานิยาม *การกระจายพจน์ใหม่* ว่าเป็นกระบวนการที่กระจายฟังก์ชัน Φ รอบจุดศูนย์กลางจุดใหม่ ในรูปแบบของศักย์มัลติโพลในสมการที่ (3.1.3.4) หรือศักย์เฉพาะที่ในสมการที่ (3.1.3.5). การกระจายพจน์ใหม่สองชนิดแรกเพียงแต่ย้ายจุดศูนย์กลางการกระจายของศักย์ โดยที่ยังคงรูปแบบการกระจายเป็นแบบเดิมอยู่. การกระจายพจน์ใหม่ชนิดสุดท้าย เป็นการย้ายจุดศูนย์กลางกระจาย พร้อมทั้งเปลี่ยนรูปแบบการกระจายของศักย์ไฟฟ้าจากแบบมัลติโพล มาเป็นแบบเฉพาะที่. การใช้ประโยชน์การกระจายพจน์ใหม่สามชนิดนี้ ทำให้การคำนวณด้วยวิธีเงามัลติโพลบนปัญหารูปแบบหลากหลายต่างๆ เป็นไปได้.

การย้ายจุดศูนย์กลางการกระจายของศักย์มัลติโพล (M2M)

พิจารณามัลติโพล B_n อันดับที่ n ซึ่งอยู่ที่ $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ บนระนาบเชิงซ้อน ดังแสดงในรูปที่ 3.1.3.1. ศักย์เชิงซ้อน Φ_{Bn} เนื่องจากมัลติโพลนี้เท่ากับ $B_0 \ln(z - z_0)$ เมื่อ $n = 0$ และเท่ากับ $B_n / (z - z_0)^n$ เมื่อ $n \geq 1$. เราสามารถย้ายจุดศูนย์กลางการกระจายของศักย์ไฟฟ้านี้ ไปยังจุดกำเนิด O โดยที่สมการศักย์เชิงซ้อนใหม่ใช้ได้บนบริเวณที่ $|z| > |z_0|$. นั่นคือ ภายนอกวงกลมรัศมี $|z_0|$ จุดศูนย์กลางที่ O. การกระจายพจน์ใหม่ได้ศักย์ในรูปของ

$$\Phi_{Bn} = \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{Cj} \tag{3.1.3.6}$$

เมื่อ $C_j \quad (j = n, n+1, \ldots)$ เป็นมัลติโพลซึ่งอยู่ที่ O.



รูปที่ 3.1.3.1 มัลติโพล B_n ที่ตำแหน่ง z_0 บนระนาบเชิงซ้อน.

นั่นคือ $\Phi_{C0} = C_0 \ln z$ และ $\Phi_{Cj} = C_j / z^j$ สำหรับ $j \geq 1$. มัลติโพลชุดใหม่ C_j คำนวณหาจาก B_n เมื่อ $(j \geq n)$ ดังสมการความสัมพันธ์ต่อไปนี้.

สำหรับ $j = 0$

$$C_0 = B_0 \tag{3.1.3.7}$$

สำหรับ $j \geq 1$

$$C_j = -\frac{z_0^j B_0}{j} \qquad \text{เมื่อ } n = 0 \text{ และ} \tag{3.1.3.8}$$

$$C_j = z_0^{j-n} \frac{(j-1)!}{(j-n)!(n-1)!} B_n \qquad \text{เมื่อ } n \neq 0 \tag{3.1.3.9}$$

การกระจายศักย์เชิงซ้อนใหม่แบบนี้จะเรียกสั้นๆ ต่อไปว่าเป็น *การกระจายแบบ M2M*

การย้ายจุดศูนย์กลางการกระจายของศักย์เฉพาะที่ (L2L)

ให้ $\Phi_{Ln} = L_n (z - z_0)^n$ เป็นศักย์เชิงซ้อนอันดับที่ n ที่กระจายรอบจุด z_0 ในรูปแบบเฉพาะที่. เราสามารถย้ายจุดศูนย์กลางการกระจายของศักย์เชิงซ้อนนี้ ไปยังจุดกำเนิด O และเขียน Φ_{Ln} ใหม่ได้เป็น

$$\Phi_{Ln} = \sum_{j=0}^{n} \Phi_{Mj} \tag{3.1.3.10}$$

$$\Phi_{Mj} = M_j z^j \tag{3.1.3.11}$$

เมื่อ M_j ($j = 0,1,\ldots,n$) เป็นสัมประสิทธิ์จำนวนเชิงซ้อน. เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่าง M_j และ L_n ($n \geq j$) โดยใช้ทฤษฎีการกระจายพหุนาม ได้เป็น

$$M_j = (-z_0)^{n-j} \frac{n!}{j!(n-j)!} L_n \tag{3.1.3.12}$$

การกระจายศักย์เชิงซ้อนใหม่แบบนี้จะเรียกสั้นๆ ต่อไปว่าเป็น *การกระจายแบบ L2L*

การย้ายจุดศูนย์กลางการกระจายของศักย์มัลติโพลและเขียนเป็นศักย์เฉพาะที่ (M2L)

พิจารณามัลติโพลตัวเดิมในรูปที่ 3.1.3.1. เราสามารถเขียนศักย์เชิงซ้อน Φ_{Bn} ใหม่ ในรูปแบบของอนุกรมเทย์เลอร์โดยมีจุดศูนย์กลางการกระจายที่ O สำหรับจุด $|z| < |z_0|$ ได้. (นั่นคือ ศักย์เชิงซ้อนใหม่นี้ใช้ได้กับบริเวณภายในทรงกลมรัศมี $|z_0|$ และจุดศูนย์กลางที่ O.) ศักย์ไฟฟ้าหลังการกระจายพจน์ใหม่เขียนได้เป็น

$$\Phi_{Bn} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{Mj} \qquad (3.1.3.13)$$

เมื่อ M_j โดย $j = 0,1,\ldots$ เป็นสัมประสิทธิ์ศักย์ที่เกิดจากการกระจายพจน์ใหม่. สังเกตว่า ขีดจำกัด $|z| < |z_0|$ ของสมการที่ (3.1.3.13) มีที่มาจากทฤษฎีของเทย์เลอร์[35]. สัมประสิทธิ์ M_j คำนวณจาก B_n ได้จากความสัมพันธ์ต่อไปนี้.[36, 37]

สำหรับ $j = 0$

$$M_0 = B_0 \ln(-z_0) \quad \text{ถ้า } n = 0 \text{ และ} \qquad (3.1.3.14)$$

$$M_0 = B_n /(-z_0)^n \quad \text{ถ้า } n \neq 0 \qquad (3.1.3.15)$$

สำหรับ $j \geq 1$

$$M_j = -B_n / j z_0^j \quad \text{ถ้า } n = 0 \text{ และ} \qquad (3.1.3.16)$$

$$M_j = (-1)^n \frac{B_n}{z_0^{n+j}} \frac{(j+n-1)!}{j!(n-1)!} \quad \text{ถ้า } n \neq 0 \qquad (3.1.3.17)$$

การกระจายศักย์เชิงซ้อนใหม่แบบนี้จะเรียกสั้นๆ ต่อไปว่าเป็น *การกระจายแบบ M2L*

3.1.3.3 เงามัลติโพลสำหรับการจัดเรียงพื้นฐาน

หัวข้อนี้กล่าวถึงเงามัลติโพลสำหรับการจัดเรียงพื้นฐานที่ประกอบด้วยวัตถุภายในเพียงหนึ่งชิ้น โดยมีผิวขอบเขตของวัตถุเป็นทรงกระบอกหรือระนาบ. เงามัลติโพลซึ่งทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนวัตถุนั้นๆ เป็นจริงได้จะถูกนำมาใช้ในการคำนวณแบบทำซ้ำ เมื่อบริเวณของปัญหาประกอบด้วยวัตถุมากกว่าหนึ่งชนิด.

เงาที่เกิดจากระนาบตัวนำต่อลงดิน

พิจารณามัลติโพล B_n ที่ตำแหน่ง $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ เหนือระนาบตัวนำต่อลงดินที่อยู่บนแกนจริงของระนาบ z ดังแสดงในรูปที่ 3.1.3.2. เงื่อนไขขอบเขตที่ต้องทำให้เป็นจริงในที่นี้ก็คือ เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์บนระนาบตัวนำ ซึ่งทำได้โดยวางมัลติโพล B'_n เป็นเงาของ B_n ณ ตำแหน่ง $\bar{z}_0 = x_0 - \mathrm{i}y_0$. นั่นคือ บนแกนจริง ($y = 0$) ของระนาบ z

$$\mathrm{Re}\{\Phi_{Bn} + \Phi_{Bn'}\} = 0 \qquad (3.1.3.18)$$

เนื่องจาก Φ_{Bn} และ $\Phi_{Bn'}$ เป็นฟังก์ชันลอการิทึมของ z ถ้า $n = 0$ แต่เป็นฟังก์ชันกำลังถ้า $n \geq 1$ เราจึงพิจารณาหาค่าเงา แยกเป็นสองกรณีคือ เมื่อ $n = 0$ และเมื่อ $n \geq 1$.

ถ้า $n = 0$

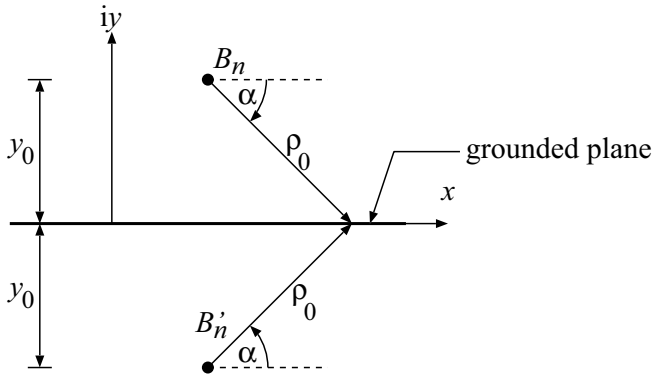
$$\Phi_{B0} + \Phi_{B0'} = B_0(\ln \rho_0 - i\alpha) + B'_0(\ln \rho_0 + i\alpha) \qquad (3.1.3.19)$$

โดย $(\rho_0, -\alpha)$ เป็นพิกัดเชิงขั้วของจุดบนระนาบตัวนำ ที่มี $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ เป็นจุดกำเนิด.

นั่นคือ $z - z_0 = \rho_0 \exp(-i\alpha)$. เนื่องจากสมการที่ (3.1.3.19) ต้องเป็นจริงที่มุม α ใดๆ เราได้ว่า

$$B'_0 = -\overline{B}_0 \qquad (3.1.3.20)$$

โดย $\overline{B}_0$ เป็นสังยุคของ B_0.



รูปที่ 3.1.3.2 มัลติโพล B_n และเงา B_n' ที่เกิดขึ้นระนาบตัวนำต่อลงดินที่แกนจริงของระนาบเชิงซ้อน.

ถ้า $n \geq 1$ สมการเงื่อนไขขอบเขต (3.1.3.18) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\Phi_{Bn} + \Phi_{Bn'} = \frac{B_n}{\rho_0^n}\exp(in\alpha) + \frac{B_n'}{\rho_0^n}\exp(-in\alpha) \qquad (3.1.3.21)$$

ซึ่งทำให้ได้ความสัมพันธ์ในลักษณะเดียวกับ (3.1.3.20). ดังนั้น เราสรุปได้ว่า

$$B_n' = -\overline{B}_n \qquad (3.1.3.22)$$

สำหรับทุกค่า *n*.

เงาที่เกิดจากระนาบฉนวนความหนากึ่งอนันต์

พิจารณาการจัดเรียงในรูปที่ 3.1.3.2 แต่คราวนี้ให้ระนาบตัวนำถูกแทนด้วยฉนวนแข็งที่มีความหนากึ่งอนันต์. สภาพยอมของฉนวนแข็งและตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบแทนด้วยสัญลักษณ์ ε_I และ ε_E ตามลำดับ. เราสามารถใช้มัลติโพลสองตัว คือ B_n' ที่ $\bar{z}_0$ และ B_n'' ที่ z_0 ทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนรอยต่อระหว่างตัวกลางที่ $y = 0$ เป็นจริงได้. ในบริเวณตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบ ศักย์เชิงซ้อน Φ_E เป็นผลจากมัลติโพล B_n และ B_n' และสามารถเขียนได้เป็น

$$\Phi_E = \Phi_{Bn} + \Phi_{Bn'} \qquad (3.1.3.23)$$

ภายในฉนวนแข็ง ศักย์เชิงซ้อน Φ_I เกิดจากมัลติโพล B_n'' และเขียนได้เป็น

$$\Phi_I = \Phi_{Bn''} \qquad (3.1.3.24)$$

สำหรับสภาวะที่กำลังพิจารณาอยู่นี้ เงื่อนไขขอบเขตที่เกี่ยวข้องคือ เงื่อนไขความต่อเนื่องของศักย์ไฟฟ้า(จริง) และฟลักซ์ไฟฟ้าในแนวตั้งฉากบนรอยต่อระหว่างตัวกลาง. เพื่อหาค่าของ B_n' และ B_n'' เราแสดงเงื่อนไขขอบเขตในรูปของศักย์เชิงซ้อนได้เป็น

$$\mathrm{Re}\{\Phi_I\} = \mathrm{Re}\{\Phi_E\} \qquad (3.1.3.25)$$

$$\Gamma\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}\{\Phi_I\} = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{Re}\{\Phi_E\} \qquad (3.1.3.26)$$

โดย $\Gamma = \varepsilon_I / \varepsilon_E$ เป็นอัตราส่วนของสภาพยอม. จากสมการเงื่อนไขขอบเขตทั้งสองนี้ และเงื่อนไขของ Cauchy-Riemann เราสามารถสรุปได้ว่า

$$B_n' = -\frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1}\overline{B}_n \qquad (3.1.3.27)$$

$$B_n'' = \frac{2}{\Gamma + 1}B_n \qquad (3.1.3.28)$$

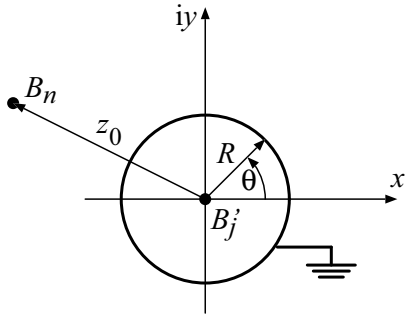
สังเกตว่า เงามัลติโพลที่ได้อธิบายในที่นี้ สามารถใช้ได้กับกรณีทั่วไป ซึ่งตัวกลางสองชนิดมีรอยต่อเป็นแบบระนาบ โดยสภาพยอม ε_I และ ε_E แทนตัวกลางในด้านของมัลติโพล B_n และในอีกด้านหนึ่งตามลำดับ.

เงาที่เกิดจากตัวนำทรงกระบอกต่อลงดิน

ต่อไป พิจารณาตัวนำทรงกระบอกที่ถูกต่อลงดินอยู่ (มีศักย์ไฟฟ้าจริงคงที่เท่ากับศูนย์) โดยทรงกระบอกมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของระนาบเชิงซ้อน และมีรัศมีเท่ากับ R ดังแสดงในรูปที่ 3.1.3.3. ให้แหล่งกำเนิดสนามเป็นมัลติโพล B_n ที่ตำแหน่ง z_0 ซึ่งอยู่ภายนอกทรงกระบอก ($|z_0| > R$). โดยใช้วิธีการกระจายพจน์ใหม่แบบ M2L กับศักย์เชิงซ้อนเนื่องจาก B_n เราสามารถเขียนศักย์ในรูปเฉพาะที่ได้ สำหรับจุด $|z| < |z_0|$ เป็น

$$\Phi_{Bn} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{Mj} \tag{3.1.3.29}$$

โดย M_j คำนวณหาได้จากสมการที่ (3.1.3.14) ถึง (3.1.3.17).



รูปที่ 3.1.3.3 มัลติโพล B_n และตัวนำทรงกระบอกต่อลงดิน. B'_j เป็นเงาของ B_n ที่เหนี่ยวนำให้เกิดขึ้นโดยทรงกระบอกตัวนำ.

เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์ไฟฟ้า(เท่ากับศูนย์)บนผิวของทรงกระบอกเป็นจริง เราใช้มัลติโพลจำนวนอนันต์ B'_j โดย $j = 0,1,\ldots$ วางที่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก เป็นเงาของ B_n. เมื่อจับคู่ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากสัมประสิทธิ์ทั้งสอง เราสามารถทำให้ได้

$$\mathrm{Re}\{\Phi_{Mj} + \Phi_{Bj'}\} = 0 \tag{3.1.3.30}$$

สำหรับแต่ละค่าของ j. เช่นเดียวกับในหัวข้อที่แล้ว เราจะแยกพิจารณาเงาเป็นสองกรณีคือ $j = 0$ และ $j \geq 1$.

ถ้า $j = 0$ สมการเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$B'_{0,r} \ln R - B'_{0,i}\theta + M_{0,r} = 0 \tag{3.1.3.31}$$

เมื่อ $R(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นผิวของทรงกระบอก. จากสมการที่ (3.1.3.31) ความสัมพันธ์ระหว่างเงามัลติโพลกับแหล่งกำเนิดเป็น

$$B'_0 = -\mathrm{Re}\left\{\frac{M_0}{\ln R}\right\} \tag{3.1.3.32}$$

สำหรับ $j \geq 1$ สมการเงื่อนไขขอบเขตเป็น

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{B'_j \exp(-ij\theta)}{R^j} + M_j R^j \exp(ij\theta)\right\} = 0 \tag{3.1.3.33}$$

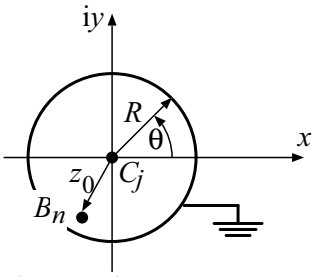
จากสมการนี้ เราสามารถสรุปได้ว่า

$$B'_j = -R^{2j}\overline{M}_j \text{ เมื่อ } j \geq 1. \quad (3.1.3.34)$$

ต่อมา เราจะพิจารณาสภาวะตรงกันข้ามกับที่ได้กล่าวมาแล้ว. นั่นคือ มัลติโพล B_n อยู่ที่ z_0 ภายในตัวนำทรงกลมกลวงที่มีรัศมี R และมีจุดศูนย์กลางอยู่จุดกำเนิด ($|z_0| < R$) ดังแสดงในรูปที่ 3.1.3.4. เพื่อให้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์บนผิวทรงกระบอก $|z| = R$ เป็นจริง เราใช้การกระจายพจน์ใหม่แบบ M2M กับศักย์เชิงซ้อนเนื่องจาก B_n รอบจุดศูนย์กลางของทรงกลม ($z = 0$). ดังนั้น ศักย์เชิงซ้อน Φ_{Bn} สามารถเขียนได้สำหรับ $|z| > z_0$ เป็น

$$\Phi_{Bn} = \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{Cj} \quad (3.1.3.35)$$

โดยที่ C_j $(j = n, n+1, \ldots)$ เป็นมัลติโพล ณ จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก ที่ได้จากการกระจายพจน์ใหม่. สังเกตว่า Φ_{Bn} ถูกกระจายพจน์ใหม่แบบ M2L ในกรณีแรก($|z_0| > R$) และแบบ M2M ในกรณีนี้ ($|z_0| < R$).



รูปที่ 3.1.3.4 สภาวะที่มัลติโพล B_n อยู่ที่จุด z_0 ซึ่งอยู่ภายในทรงกระบอกกลวงที่ต่อลงดิน.

ศักย์เชิงซ้อนลัพธ์ที่เกิดขึ้น เป็นผลรวมของ Φ_{Bn} และศักย์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากประจุที่ถูกเหนี่ยวนำขึ้นบนผิวของตัวนำทรงกระบอก. ถ้าให้ศักย์ตัวหลังแทนด้วย Φ_{Mj} ซึ่งอยู่ในรูปเฉพาะที่ เราจะเขียนศักย์ลัพธ์ภายในทรงกระบอกกลวงนี้ได้เป็น

$$\Phi = \Phi_{Bn} + \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{Mj} = \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{Cj} + \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{Mj} \quad (3.1.3.36)$$

โดย $\Phi_{Mj} = M_j z^j$. เงื่อนไขศักย์เท่ากับศูนย์บนผิวของทรงกระบอกเป็นจริงได้เมื่อ

$$M_0 = -C_0 \ln R \quad (3.1.3.37)$$

และ

$$M_j = -\frac{\overline{C}_j}{R^{2j}} \text{ เมื่อ } j \geq 1 \quad (3.1.3.38)$$

เงาที่เกิดจากฉนวนทรงกระบอก

พิจารณาการจัดเรียงในรูปที่ 3.1.3.5. ฉนวนทรงกระบอกมีรัศมีเท่ากับ R และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของระนาบเชิงซ้อน. แหล่งกำเนิดศักย์เป็นมัลติโพล B_n ที่ตำแหน่ง z_0 ซึ่งอยู่นอกทรงกระบอก ($|z_0| > R$). ให้สภาพยอมของทรงกระบอกและตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบแทนด้วยสัญลักษณ์ ε_I และ ε_E ตามลำดับ.

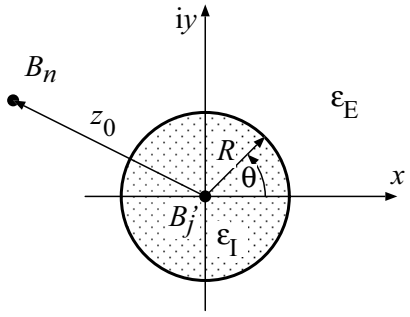
สำหรับการจัดเรียงแบบนี้ เราแยกเขียนศักย์เชิงซ้อน Φ_I สำหรับบริเวณภายในทรงกระบอก และศักย์เชิงซ้อน Φ_E สำหรับบริเวณภายนอกทรงกระบอก. ศักย์ทั้งสองจะถูกหาออกมาให้ได้เงื่อนไขขอบเขต

$$\mathrm{Re}\{\Phi_I\} = \mathrm{Re}\{\Phi_E\} \tag{3.1.3.39}$$

และ

$$\Gamma \frac{\partial}{\partial \rho} \mathrm{Re}\{\Phi_I\} = \frac{\partial}{\partial \rho} \mathrm{Re}\{\Phi_E\} \tag{3.1.3.40}$$

เป็นจริง.



รูปที่ 3.1.3.5 มัลติโพล B_n และฉนวนทรงกระบอก. B_j' เป็นเงาของ B_n ที่เหนี่ยวนำให้เกิดขึ้นโดยฉนวนทรงกระบอก.

สนามไฟฟ้าเนื่องจาก B_n เหนี่ยวนำให้เกิดโพลาไรเซชันในทรงกระบอกฉนวน เป็นผลให้เกิดประจุบนผิวของทรงกระบอกขึ้น เว้นแต่ $\Gamma = 1$. ดังนั้น ศักย์ภายในทรงกระบอกเป็นผลของมัลติโพล B_n และประจุเหนี่ยวนำบนผิวของทรงกระบอก. ศักย์เชิงซ้อนลัพธ์ Φ_I ภายในทรงกระบอกจึงสามารถเขียนได้ในรูปการกระจายเฉพาะที่ รอบจุดศูนย์กลางของทรงกระบอก

$$\Phi_I = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{Lj} \tag{3.1.3.41}$$

เมื่อ L_j ($j = 0,1,\ldots$) เป็นสัมประสิทธิ์ศักย์ที่จะคำนวณหาออกมา.

ในทำนองเดียวกัน ศักย์ Φ_E ภายนอกทรงกระบอกฉนวนก็เกิดจากมัลติโพล B_n และประจุเหนี่ยวนำบนผิวทรงกระบอก. เราใช้เงามัลติโพล B_j' โดย $j = 1,2,\ldots$ ที่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก เพื่อแสดงศักย์ไฟฟ้าในบริเวณภายนอก ที่เกิดจากประจุเหนี่ยวนำบนผิวทรงกระบอก. ดังนั้น สำหรับจุดที่ $|z| \geq R$ ศักย์เชิงซ้อน Φ_E เขียนได้เป็น

$$\Phi_E = \Phi_{Bn} + \Phi_{B'} = \Phi_{Bn} + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{Bj'} \tag{3.1.3.42}$$

เมื่อทำการกระจายพจน์ใหม่แบบ M2L กับ Φ_{Bn} ดังสมการที่ (3.1.3.29) เราสามารถเขียน Φ_{Bn} สำหรับ $R \leq |z| < |z_0|$ ได้เป็น

$$\Phi_E = +\sum_{j=0}^{\infty} \left(\Phi_{Mj} + \Phi_{Bj'} \right) \tag{3.1.3.43}$$

สังเกตว่า ข้อจำกัด $|z| < |z_0|$ เกิดขึ้นจากการกระจายพจน์ซ้ำของ Φ_{Bn} เป็น Φ_{Mj}.

จากเงื่อนไขขอบเขตในสมการที่ (3.1.3.39) และ (3.1.3.40) ความสัมพันธ์ระหว่าง L_j และ B_j' กับ M_j สามารถเขียนได้เป็น

$$L_0 = \mathrm{Re}\{M_0\} \tag{3.1.3.44}$$

$$B_0' = 0 \tag{3.1.3.45}$$

และเมื่อ $j \geq 1$

$$L_j = \frac{2}{\Gamma+1} M_j \tag{3.1.3.46}$$

$$B_j' = -\frac{\Gamma-1}{\Gamma+1} R^{2j} \overline{M}_j \tag{3.1.3.47}$$

เช่นเดียวกับในการจัดเรียงของตัวนำทรงกระบอก เราจะพิจารณาสภาวะตรงกันข้าม นั่นคือ สภาวะที่ B_n อยู่ภายในฉนวนทรงกระบอก. พิจารณามัลติโพล B_n ในรูปที่ 3.1.3.4 แต่ให้ทรงกระบอกเป็นฉนวนที่มีสภาพยอมเท่ากับ ε_I. หลังจากการใช้วิธีกระจายพจน์ศักย์ใหม่แบบ M2M เราได้ศักย์ไฟฟ้าในรูปของสมการที่ (3.1.3.35). ศักย์เชิงซ้อนลัพธ์ในกรณีเป็น

$$\Phi_I = \Phi_{Bn} + \Phi_M = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\Phi_{Cj} + \Phi_{Mj} \right) \tag{3.1.3.48}$$

ภายในทรงกระบอก โดยที่ $\Phi_M = M_j z^j$ และเป็น

$$\Phi_E = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{Cj'} \tag{3.1.3.49}$$

ภายนอกทรงกระบอก โดยที่ C_j' เป็นเงามัลติโพล. สัมประสิทธิ์ M_j และ C_j' ของศักย์ หาได้จาก C_j เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตเป็นจริงได้ดังนี้.

$$C_0' = \Gamma C_0 \tag{3.1.3.50}$$

$$M_0 = (\Gamma - 1) C_0 \ln R \tag{3.1.3.51}$$

และสำหรับ $j \geq 1$

$$C_j' = \frac{2\Gamma}{\Gamma+1} C_j \tag{3.1.3.52}$$

$$M_j = \frac{\Gamma-1}{\Gamma+1} \overline{C}_j R^{2j} \tag{3.1.3.53}$$

3.1.3.4 ค่าเริ่มต้นของศักย์ไฟฟ้าเชิงซ้อนสำหรับเริ่มต้นคำนวณ

โดยปกติแล้ว การคำนวณด้วยวิธีเงาประจุ(หรือวิธีเงามัลติโพลในที่นี้) เริ่มต้นจากศักย์ไฟฟ้าเชิงซ้อนซึ่งทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนวัตถุหนึ่งในบริเวณที่เราพิจารณาเป็นจริง. ตัวอย่างเช่น เงื่อนไขเริ่มต้นนี้อาจเป็นเงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเท่าบนผิวตัวนำ หรืออาจเป็นเงื่อนไขของศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก. ในกรณีที่บริเวณที่เราสนใจมีจำนวนวัตถุมากกว่าหนึ่ง การคำนวณสนามจะเป็นแบบทำซ้ำ โดยอาศัยค่าศักย์เริ่มต้นนี้. หัวข้อนี้กล่าวถึงการตั้งค่าศักย์เชิงซ้อนสำหรับเริ่มต้นคำนวณด้วยวิธีเงามัลติโพล.

ตัวนำทรงกระบอกที่มีศักย์ไฟฟ้าทราบค่า

สมมติให้มีตัวนำทรงกระบอกจุดศูนย์กลาง (x_0, y_0) รัศมี R_0 ศักย์ไฟฟ้า ϕ_0. ในระนาบเชิงซ้อนที่ใช้แทนบริเวณสองมิตินี้ เราสามารถวางมัลติโพล B_0 อันดับศูนย์ ที่จุด $z_0 = x_0 + iy_0$ เพื่อให้ได้ $\mathrm{Re}\{\Phi_{B0}\} = \phi_0$ ณ จุด z ใดๆ บนผิวทรงกระบอก ($|z - z_0| = R_0$). จากสมการที่ (3.1.3.4) เป็นที่ชัดเจนว่า B_0 สามารถคำนวณหาได้เป็น

$$B_0 = \phi_0 / \ln R_0 \qquad (3.1.3.54)$$

ศักย์เชิงซ้อนเริ่มต้นจึงเขียนได้เป็น

$$\Phi = B_0 \ln(z - z_0) \qquad (3.1.3.55)$$

ตัวนำทรงกระบอกที่ทราบค่าศักย์ไฟฟ้าและระนาบตัวนำต่อลงดิน

สมมติให้มีตัวนำทรงกระบอกที่มีศักย์ไฟฟ้า ϕ_0 รัศมี R_0 และจุดศูนย์กลางที่ (x_0, y_0) อยู่เหนือระนาบอิเล็กโตรดต่อลงดินที่ $y = 0$ ดังแสดงในรูปที่ 3.1.3.6. บนระนาบเชิงซ้อนที่ตรงกันกับการจัดเรียงแบบนี้ เราใช้เงาเพื่อให้ได้ศักย์ไฟฟ้าเชิงซ้อนที่ทำให้เงื่อนไขสองประการเป็นจริง คือ (1) $\mathrm{Re}\{\Phi\} = \phi_0$ ที่จุด z ใดๆ ซึ่ง $|z - z_0| = R_0$ และ (2) $\mathrm{Re}\{\Phi\} = 0$ บนแกนจริง. เงามัลติโพลอันดับที่ศูนย์สองตัว B_0 และ $-B_0$ ถูกวางที่ $z_B = x_0 + iy_B$ และ $\bar{z}_B$ ตามลำดับ. ความสูง y_B สามารถคำนวณได้จาก y_0 และรัศมี R_0 ของทรงกระบอกตามสมการ[38]

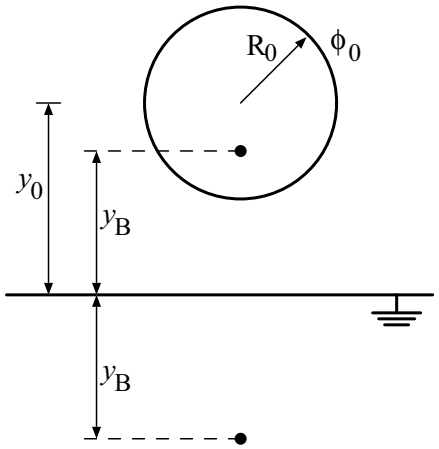
$$y_B = \sqrt{y_0^2 - R_0^2} \qquad (3.1.3.56)$$

ศักย์เชิงซ้อนเนื่องจากมัลติโพลสองตัวนี้ ณ จุด z มีค่าเท่ากับ

$$\Phi = B_0 \ln\left(\frac{z - z_B}{z - \bar{z}_B}\right) \qquad (3.1.3.57)$$

ดังนั้น ขนาดของมัลติโพลคำนวณจากศักย์ ϕ_0 ได้เป็น

$$B_0 = \frac{\phi_0}{\ln\left[R_0 / (y_0 + \sqrt{y_0^2 + R_0^2})\right]} \qquad (3.1.3.58)$$



รูปที่ 3.1.3.6 ตัวนำทรงกระบอกที่ได้รับค่าศักย์ไฟฟ้า ϕ_0 อยู่เหนือระนาบตัวนำต่อลงดินเป็นระยะห่าง y_0.

สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก

ถ้าหากการจัดเรียงทางกายภาพที่กำลังพิจารณาได้รับสนามไฟฟ้าภายนอก เราจะใช้ศักย์เชิงซ้อนเนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอกเป็นค่าเริ่มต้นในการคำนวณ. สมมติให้มีสนามไฟฟ้า E_y ปรากฏอยู่ในแนวดิ่งทิศพุ่งลงด้านล่าง(-y). ศักย์จริง ϕ_{Ey} เนื่องจากสนามไฟฟ้านี้ ที่จุด (x, y) มีค่าเท่ากับ

$$\phi_{Ey} = \phi_0 + yE_y \qquad (3.1.3.59)$$

เมื่อ ϕ_0 เป็นศักย์ไฟฟ้าอ้างอิง ณ จุดกำเนิด. ศักย์เชิงซ้อนสามารถเขียนได้ ในรูปการกระจายเฉพาะที่เป็น

$$\Phi_{Ey} = M_0 + M_1 z \qquad (3.1.3.60)$$

เมื่อ $M_0 = \phi_0$ และ $M_1 = -iE_y$.

ถ้าหากสนามไฟฟ้าภายนอกอยู่ในแนว x ในทิศจากซ้ายไปขวา (+x) ศักย์จริง ϕ_{Ex} ที่จุด (x, y) เท่ากับ

$$\phi_{Ey} = \phi_0 - xE_x \qquad (3.1.3.61)$$

และศักย์เชิงซ้อน Φ_{Ex} เนื่องจากสนามไฟฟ้านี้ยังคงอยู่ในรูปของสมการที่ (3.1.3.60) โดยมี $M_0 = \phi_0$ และ $M_1 = -E_x$.

3.1.3.5 ขั้นตอนการคำนวณ

วิธีเงามัลติโพลเริ่มต้นด้วยศักย์เชิงซ้อนที่ทำให้เงื่อนไขขอบเขตหนึ่งภายในบริเวณที่พิจารณาเป็นจริง ดังที่ได้อธิบายในหัวข้อที่ผ่านมา. จากศักย์เริ่มต้น เราวางเงามัลติโพลที่เกิดจากวัตถุแต่ละตัวภายในการจัดเรียง เพื่อจัดการกับเงื่อนไขขอบเขตบนวัตถุนั้นๆ โดยใช้เงาที่ได้อธิบายมาแล้ว. อย่างไรก็ตาม ถ้าหากการจัดเรียงประกอบด้วยวัตถุมากกว่าหนึ่งชิ้น การวางเงามัลติโพลของวัตถุชิ้นหนึ่งจะทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนวัตถุชิ้นอื่นไม่เป็นจริง. ดังนั้น การคำนวณต้องใช้เงามัลติโพลในลักษณะทำซ้ำ จนกระทั่งค่าคำตอบที่ได้ลู่เข้าสู่คำตอบจริง. ตัวอย่างรายละเอียดของวิธีทำซ้ำได้ถูกอธิบายไว้แล้วในเอกสารอ้างอิง [10,11,39]. การใช้การกระจายพจน์ศักย์ไฟฟ้าใหม่ในลักษณะเดียวกัน กับปัญหาบริเวณสามมิติ ก็ได้มีการนำเสนอใน[40].

ข้อควรสังเกตประการหนึ่งที่สำคัญในที่นี้ก็คือ การปรากฏอยู่ของตัวนำทรงกระบอกที่ได้รับการให้พลังงาน (ป้อนศักย์ไฟฟ้าหรืออัดประจุ) อาจทำให้เกิดปัญหาเชิงเลขในการคำนวณ. ทั้งนี้ เนื่องจากว่า ศักย์เนื่องจากมัลติโพล B_j โดย $j \geq 1$ มีค่าเข้าสู่ศูนย์เมื่อ $|z| \to \infty$ แต่ศักย์เนื่องจากโมโนโพล B_0 มีค่าเป็นเอกฐาน. ลักษณะสมบัตินี้นำไปสู่ความไม่มีเสถียรภาพเชิงเลข เมื่อคำนวณด้วยการกระจายพจน์ใหม่และการใช้เงามัลติโพล. ในที่นี้ ผู้วิจัยสังเกตว่า $|\phi_{B0}|$ มีค่าลดลงเข้าสู่ศูนย์ ขณะที่ $|z|$ เพิ่มขึ้นจากศูนย์ถึงหนึ่ง. ดังนั้น วิธีการแก้ปัญหาเสถียรภาพเชิงเลขทำได้โดยการจำกัดขนาดมิติของปัญหา ให้มีค่าต่ำกว่าหนึ่ง. (การจัดเรียงทางกายภาพจริงที่มีขนาดใหญ่กว่านี้ สามารถสเกลมิติให้อยู่ในช่วงต่ำกว่าหนึ่งสำหรับการคำนวณได้.) อย่างไรก็ตาม การแก้ไขด้วยวิธีนี้ก็ยังคงมีผลเสียตามมาประการหนึ่ง นั่นคือ อันดับของมัลติโพลที่สามารถใช้ได้ในการคำนวณลดลง เนื่องจากการหารค่าด้วย z^j ในสมการการกระจายพจน์ซ้ำ ด้วย z ค่าเล็กมากๆ อาจนำไปสู่ปัญหาเชิงเลขอื่นได้.

3.1.3.6 ตัวอย่างการคำนวณ

หัวข้อนี้นำเสนอตัวอย่างการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเงามัลติโพล ในปัญหาศักย์ไฟฟ้าสี่ข้อที่แตกต่างกัน โดยมีรายละเอียดดังแสดงในหัวข้อย่อยต่อไปนี้.

ตัวอย่างที่ 1: ตัวนำทรงกระบอกลอยภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

การจัดเรียงประกอบด้วยตัวนำทรงกระบอกลอย ซึ่งมีรัศมีเท่ากับ R และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $z_0 = x_0 + iy_0$ ภายใต้สนามไฟฟ้า $E_0 = -iE_y$. เราเริ่มการคำนวณด้วยศักย์เชิงซ้อนภายนอก Φ_{Ey} ตามที่ได้อธิบายในสมการที่ (3.1.3.60)

$$\Phi_{Ey} = \Phi_M = M_0 + M_1(z - z_0) \tag{3.1.3.62}$$

โดย M_0 เป็นศักย์ที่จุด z_0 และ $M_1 = -iE_y$. สังเกตว่า ในสมการนี้ ศักย์เชิงซ้อนเขียนในรูปฟังก์ชันที่กระจายรอบ z_0. ต่อไป วางเงามัลติโพล B'_j โดย $j = 0$ และ 1 ที่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขต $\Phi_{Ey} = \Phi_M = M_0 + M_1(z - z_0)$

$$\mathrm{Re}\{\Phi\} = \mathrm{const} \tag{3.1.3.63}$$

เป็นจริงบนผิวทรงกระบอก โดยที่

$$\Phi = \Phi_M + \Phi_{B'} = \sum_{j=0}^{1} \left(\Phi_{Mj} + \Phi_{Bj'} \right) \tag{3.1.3.64}$$

เนื่องจากตัวนำทรงกระบอกไม่ได้ต่ออยู่กับแหล่งจ่ายพลังงาน จึงมีประจุลัพธ์บนตัวมันเท่ากับศูนย์. นั่นคือ

$$B'_0 = 0 \tag{3.1.3.65}$$

เมื่อเราใช้สมการที่ (3.1.3.34) จะได้

$$B'_1 = -iR^2 E_y \tag{3.1.3.66}$$

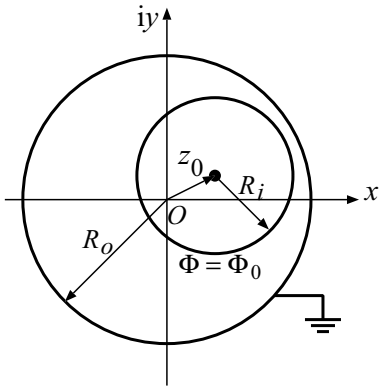
ดังนั้น คำตอบของศักย์จริง ϕ สามารถเขียนได้เป็น

$$\phi = \mathrm{Re}\{\Phi\} = \phi_0 + \left(\rho - \frac{R^2}{\rho} \right) E_y \sin\theta \tag{3.1.3.67}$$

เมื่อ ϕ_0 เป็นศักย์ไฟฟ้าที่ (x_0, y_0) และ (ρ, θ) เป็นพิกัดเชิงขั้วที่มีจุดศูนย์กลางของทรงกระบอกเป็นจุดกำเนิด. สมการที่ (3.1.3.67) เป็นคำตอบที่เราทราบกันดีของการจัดเรียงนี้ ซึ่งปรากฏอยู่ในหนังสือทางสนามแม่เหล็กไฟฟ้าทั่วไป.

ตัวอย่างที่ 2: ตัวนำทรงกระบอกซ้อนที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน

ตัวอย่างที่จะอธิบายต่อไป เป็นตัวเก็บประจุที่ประกอบขึ้นด้วยทรงกระบอกซ้อนสองตัว ที่มีจุดศูนย์กลางต่างตำแหน่งกัน. ตัวนำทรงกระบอกด้านในมีรัศมี R_i และถูกกระตุ้นให้มีศักย์เท่ากับ ϕ_0 โดยที่ตัวนำทรงกระบอกด้านนอกมีรัศมี R_o และถูกต่อลงดิน. รูปที่ 3.1.3.7 แสดงการจัดเรียงนี้บนระนาบเชิงซ้อน โดยเราให้จุดกำเนิด O และจุด z_0 ($|z_0| + R_i < R_o$) เป็นจุดศูนย์กลางของตัวนำทรงกระบอกด้านนอกและด้านใน ตามลำดับ. แม้ว่าการจัดเรียงแบบนี้สามารถหาคำตอบของศักย์ได้ ด้วยระบบพิกัดทรงกระบอกคู่[26] วิธีที่ได้นำเสนอในที่นี้มีข้อดีตรงที่ สามารถใช้ได้กับปัญหาทั่วไป ที่ประกอบด้วยทรงกระบอกมากกว่าสองตัวได้.



รูปที่ 3.1.3.7 ตัวทรงกระบอกซ้อนที่มีจุดศูนย์กลางต่างตำแหน่งกัน และมีความต่างศักย์ ϕ_0.

ขั้นตอนวิธีการทำซ้ำ เพื่อให้ได้คำตอบของการจัดเรียงในรูปที่ 3.1.3.7 สามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้ โดยมีดัชนีบน (i) แสดงขั้นตอนของการทำซ้ำ

(1) วางมัลติโพลเริ่มต้น $B^{(1)}$ ที่ z_0 เพื่อให้เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้า ϕ_0 บนผิวของตัวนำด้านในเป็นจริง. จากสมการที่ (3.1.3.4) เราได้

$$B_0^{(1)} = \frac{\phi_0}{\ln R_i} \tag{3.1.3.68}$$

และ $B_j^{(1)} = 0$ สำหรับ $j \geq 1$. ศักย์ Φ ระหว่างตัวนำทรงกระบอกแสดงได้เป็น

$$\Phi = \Phi_{B(1)} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{Bj(1)} \tag{3.1.3.69}$$

(2) ย้ายมัลติโพล $B^{(1)}$ ที่ z_0 ไปเป็นมัลติโพล $C_j^{(1)}$ ที่ O ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของทรงกระบอกด้านนอก โดยอาศัยการกระจายพจน์ใหม่แบบ M2M ในสมการที่ (3.1.3.6) ถึง (3.1.3.9). เราได้

$$\Phi_{B(1)} = \Phi_{C(1)} \tag{3.1.3.70}$$

เมื่อ $\Phi_{C(1)}$ เป็นศักย์รวมเนื่องจาก $C_j^{(1)}$ ทั้งหมด.

(3) ใช้ศักย์ $\Phi_{Mj(1)}$ ในรูปการกระจายแบบเฉพาะที่รอบจุด O เพื่อหักล้างกับศักย์เนื่องจาก $C_j^{(1)}$ แต่ละตัว. นั่นคือ บนผิวของทรงกระบอกด้านนอก

$$\Phi = \Phi^{(1)} = \Phi_{C(1)} + \Phi_{M(1)} = 0 \tag{3.1.3.71}$$

$$\Phi_{Cj(1)} + \Phi_{Mj(1)} = 0 \tag{3.1.3.72}$$

ในที่นี้ $\Phi_{M(1)}$ เป็นศักย์เนื่องจากประจุที่ถูกเหนี่ยวนำขึ้นบนผิวของตัวนำทรงกระบอกด้านนอก. สัมประสิทธิ์ของศักย์นี้คำนวณหาจาก $C^{(1)}$ โดยใช้สมการที่ (3.1.3.37) และ (3.1.3.38).

(4) ย้ายจุดศูนย์กลางการกระจายของ $\Phi_{M(1)}$ มายัง z_0 เป็นแบบ L2L และ ให้ศักย์ที่ได้ใหม่เป็น $\Phi_{M'(1)}$. เราจะได้ว่า

$$\Phi_{M'(1)} = \Phi_{M(1)} \tag{3.1.3.73}$$

เมื่อ $M'^{(1)}$ เป็นสัมประสิทธิ์ที่คำนวณได้จาก $M^{(1)}$ โดยใช้สมการที่ (3.1.3.10) และ (3.1.3.12).

(5) เนื่องจาก $\Phi_{M'(1)}$ มีผลต่อศักย์บนผิวของตัวนำทรงกระบอกด้นใน เราต้องวางเงามัลติโพล $B^{(2)}$ ที่จุด z_0 เพื่อหักล้างกับศักย์ $\Phi_{M'(1)}$ บนผิวทรงกระบอกนี้. ศักย์ไฟฟ้าบนผิวตัวนำในจึงเป็น

$$\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi_{B(2)} = \Phi_0 \qquad (3.1.3.74)$$

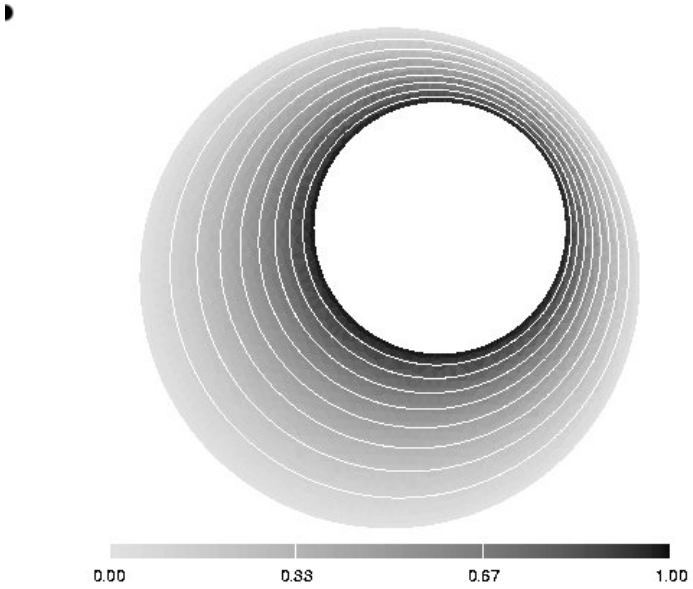
หรือ

$$\Phi_{M'j(1)} + \Phi_{Bj(2)} = 0 \qquad (3.1.3.75)$$

เมื่อ $B_j^{(2)}$ สัมพันธ์กับ $M_j'^{(1)}$ ด้วยสมการที่ (3.1.3.32) และ (3.1.3.34).

(6) ทำขั้นตอนที่ 2 ถึง 5 ซ้ำ จนกระทั่งศักย์ Φ ลู่เข้าสู่คำตอบ.

รูปที่ 3.1.3.8 แสดงผลการคำนวณที่ได้เมื่อ $R_i = 0.5R_o$ และ $z_0 = (0.2R_o, 0.2R_o)$. ศักย์ไฟฟ้าที่แสดงถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย ϕ_0. การคำนวณนี้ใช้อันดับมัลติโพลสูงสุดถึงอันดับที่แปด และลู่เข้าสู่คำตอบที่ประมาณ 20 รอบการทำซ้ำ โดยให้ระดับความคลาดเคลื่อน $\varepsilon = 10^{-5}$ % ของค่าศักย์ขั้นสุดท้าย.

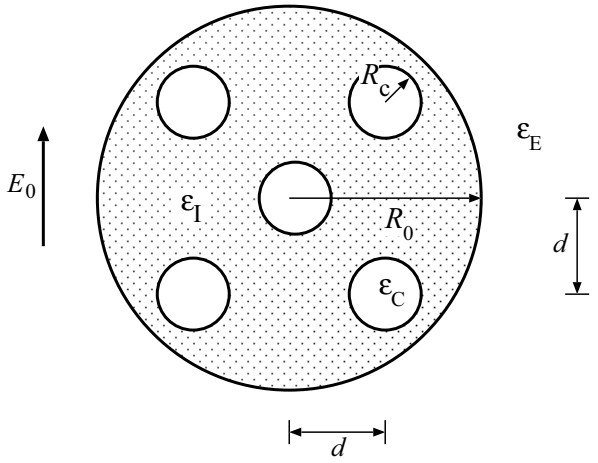


รูปที่ 3.1.3.8 การกระจายศักย์ที่ได้ภายในตัวนำทรงกระบอกซ้อนในรูปที่ 3.1.3.7 เมื่อ $R_i = 0.5R_o$ และ $z_0 = (0.2R_o, 0.2R_o)$.

ตัวอย่างที่ 3: ฉนวนทรงกระบอกแบบหลายแกนภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

ตัวอย่างนี้ (รูปที่ 3.1.3.9) เป็นรูปแบบง่ายของวัสดุที่มีโครงสร้างเป็นเส้นใย. ในรูป ฉนวนทรงกระบอกรัศมี R_0 ประกอบด้วยฉนวนที่มีสภาพยอม ε_I และแกนกลางจำนวน 5 แกนที่มีรัศมีเท่ากับ R_c. แกนจำนวนสี่แกนวางตัวอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของทรงกระบอกภายนอก เป็นระยะห่างเท่ากับ d ทั้งในแนวระดับและแนวดิ่ง. ฉนวนทรงกระบอกทั้งหมดถูกวางอยู่ภายในตัวกลางที่มีสภาพยอม ε_E และได้รับสนามไฟฟ้าภายนอกในแนวดิ่งขนาดสม่ำเสมอเท่ากับ E_0. ผู้วิจัยได้คำนวณสนามไฟฟ้าในการจัดเรียงนี้ โดยมีค่า

$R_c = 0.2R_o$, $d = 0.5R_o$ และ $\varepsilon_I / \varepsilon_E = 4$. แกนภายในทรงกระบอกฉนวนถูกพิจารณาเป็นสองกรณีที่แตกต่างกันคือ (a) แกนในเป็นฉนวนที่มีสภาพยอม $\varepsilon_C = \varepsilon_E$ และ (b) แกนในเป็นตัวนำไฟฟ้า.



รูปที่ 3.1.3.9 ทรงกระบอกฉนวนภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ E_0.

ผลการคำนวณที่ได้แสดงอยู่ในรูปที่ 3.1.3.10. ศักย์ไฟฟ้าซึ่งถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย $E_0 R_0$ แสดงด้วยสเกลสีเท่า ซึ่งมีค่าสเกลอยู่ที่ด้านล่างของรูป. เราสามารถเห็นได้จากรูป 3.1.3.10a ว่า สนามไฟฟ้าภายในทรงกระบอกนอกไม่ได้แตกต่างไปจากกรณีของทรงกระบอกฉนวนเนื้อเดียวมากนัก. ทั้งนี้ สนามในกรณีของทรงกระบอกเนื้อเดียวมีค่าเท่ากับ $0.5E_0$ เมื่อ $\varepsilon_I / \varepsilon_E = 4$. ในอีกด้านหนึ่ง สนามในรูปที่ 3.1.3.10b มีค่าน้อยกว่าในกรณีแรก โดยเราสามารถสังเกตได้จากสเกลค่าศักย์ซึ่งแสดงอยู่ที่ด้านล่างของรูป. สำหรับการคำนวณทั้งสองกรณีของแกนใน คำตอบได้ลู่เข้าภายใน 8 รอบการทำซ้ำ เมื่อยอมให้ศักย์คลาดเคลื่อนได้ $\varepsilon = 10^{-5}$ %.

ตัวอย่างที่ 4: ฉนวนทรงกระบอกที่วางตัวอยู่บนระนาบตัวนำต่อลงดิน ภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ

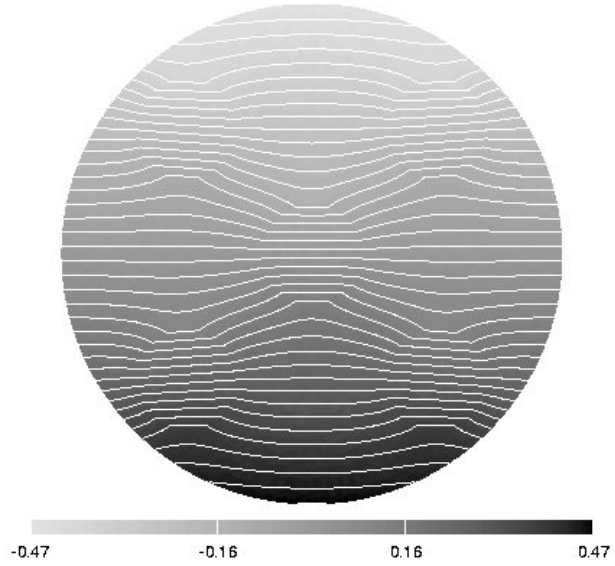
ตัวอย่างสุดท้ายนี้เป็นการจัดเรียงของฉนวนทรงกระบอกรัศมี R ซึ่งวางตัวอยู่บนระนาบตัวนำต่อลงดิน โดยได้รับสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอก E_0 ในทิศทางแนวดิ่ง ดังแสดงในรูปที่ 3.1.3.11. ให้สภาพยอมของทรงกระบอก และของตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบเป็น ε_I และ ε_E ตามลำดับ. การจัดเรียงนี้ถูกใช้สำหรับตรวจสอบสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสระหว่างฉนวนพื้นผิวโค้งกับตัวนำไฟฟ้าใน[41]. การคำนวณในที่นี้ เริ่มจากศักย์

$$\Phi = \Phi_{E0} = M_1^{(1)} z \qquad (3.1.3.76)$$

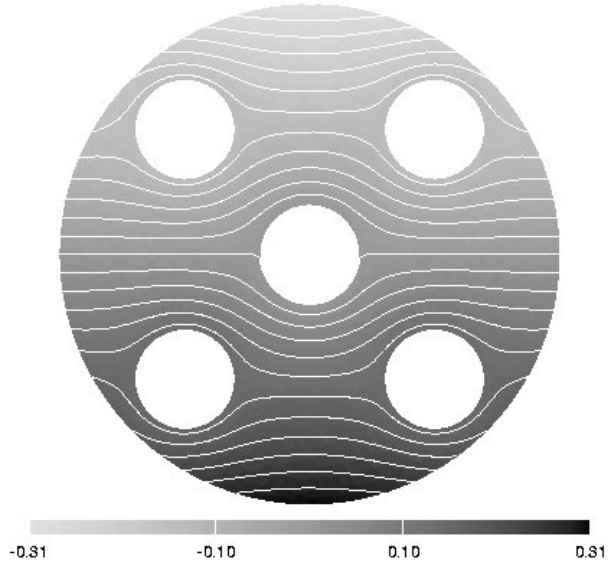
เมื่อ $M_1^{(1)} = iE_0$ ดังที่ได้อธิบายในหัวข้อที่ผ่านมา.

ในขั้นตอนต่อไป เงามัลติโพล $B^{(1)}$ ถูกวางที่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก โดยคำนวณหา $B_j^{(1)}$ ได้จาก $M_j^{(1)}$ ด้วยสมการที่ (3.1.3.45) และ (3.1.3.47). ขั้นตอนนี้ทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนผิวทรงกระบอกฉนวนเป็นจริง. เมื่อใช้เงามัลติโพลของระนาบตัวนำ $B_j'^{(1)}$ ในสมการที่ (3.1.3.22) ที่ตำแหน่ง R ใต้ผิวระนาบตัวนำ เราจะได้เงื่อนไขขอบเขตที่ผิวระนาบตัวนำเป็นจริง.

ต่อมา ด้วยสมการที่ (3.1.3.14) ถึง (3.1.3.17) ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจาก $B_j'^{(1)}$ ทั้งหมด จะถูกการะจายพจน์ใหม่แบบ M2L มายังจุดศูนย์กลางของทรงกระบอก. การกระจายพจน์ใหม่ทำให้ได้ $M^{(2)}$ สำหรับการทำซ้ำในขั้นต่อไป. เมื่อทำกระบวนการทำซ้ำไปจนถึงรอบที่ *n* เราจะเขียนศักย์ไฟฟ้าภายนอกทรงกระบอกฉนวนเป็น

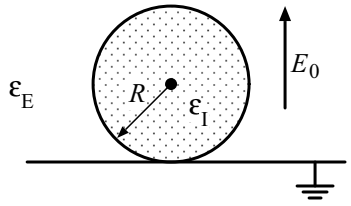


(a)



(b)

รูปที่ 3.1.3.10 ศักย์ไฟฟ้าภายในทรงกระบอกฉนวนเมื่อแกนเป็น (a) ฉนวน และ (b) ตัวนำ. ศักย์ไฟฟ้าที่ทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย $E_0 R_0$ แสดงตามสเกลสีที่ด้านล่างของแต่ละรูป.



รูปที่ 3.1.3.11 ฉนวนทรงกระบอกอยู่บนระนาบตัวนำต่อลงดินภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก E_0.

$$\Phi = \Phi_{E0} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{N_j}\left[\Phi_{Ej(k)} + \Phi_{E'j(k)}\right] \qquad (3.1.3.77)$$

เมื่อ N_j เป็นอันดับสูงสุดของมัลติโพลที่ใช้ในการคำนวณ.

รูปแบบการจัดเรียงนี้ถูกเลือกมาเป็นตัวอย่างในงานวิจัย เนื่องจากว่าเราสามารถหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ของสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสได้. สนามไฟฟ้า E_c ณ จุดสัมผัสระห่างทรงกระบอกและระนาบดิน คำนวณได้ด้วยวิธีเงาประจุ โดยใช้เพียงเงาไดโพลเท่านั้น[41]. สนามไฟฟ้าในด้านของ ε_E เป็น

$$\frac{E_c}{E_0} = \frac{\varepsilon_I}{\varepsilon_E} \qquad (3.1.3.78)$$

เมื่อ $\varepsilon_I / \varepsilon_E >> 1$ สนามไฟฟ้าใกล้กับจุดสัมผัสมีค่าไม่สม่ำเสมอสูงมาก ทำให้การคำนวณด้วยวิธีเชิงเลขต่างๆ ให้แม่นยำสูง ทำได้ยาก. เราจึงใช้การจัดเรียงนี้มาตรวจสอบความแม่นยำของผลการคำนวณที่ได้จากวิธีเงามัลติโพล. รูปที่ 3.1.3.12 แสดงความคลาดเคลื่อนของค่า E_c เมื่อเปรียบเทียบกับคำตอบจริงในสมการที่ (3.1.3.78). จากรูปนี้ เราเห็นได้ว่า วิธีเงามัลติโพลให้ความแม่นยำสูง โดยมีความคลาดเคลื่อนต่ำกว่า 1% ที่อัตราส่วนสภาพยอม $\varepsilon_I / \varepsilon_E$ สูงถึง 64 เมื่อใช้ $N_j = 500$. รูปที่ 3.1.3.13 แสดงอันดับของ N_j ที่ต้องการ เพื่อให้ E_c มีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่า 1% โดยแสดงเป็นฟังก์ชันของอัตราส่วนสภาพยอม. รูปที่ 3.1.3.13 แสดงว่า N_j เพิ่มขึ้นตามอัตราส่วนสภาพยอม เป็นฟังก์ชันกำลังโดยประมาณ.

3.2 อนุภาคในระบบที่มีชั้นฉนวนแข็ง

ดังที่ได้กล่าวมาในหัวข้อที่ 2 แล้วว่า ในระบบฉนวนบางชนิด จะมีการเคลือบผิวของตัวนำด้วยชั้นฉนวนบางๆ ซึ่งจะทำให้ไม่มีการสัมผัสโดยตรงระหว่างฉนวนกับอนุภาค. นอกจากนี้ ในระบบดีสชาร์จเงียบ (silent discharge หรือ dielectric barrier discharge) ซึ่งมีการใช้งานอย่างกว้างขวางในปัจจุบัน ก็เป็นการป้อนแรงดันไฟฟ้าในระบบที่มีชั้นฉนวนแข็งบนอิเล็กโตรดเช่นเดียวกัน. งานวิจัยในส่วนนี้ แบ่งออกเป็นสองขั้นตอน ก็คือ 1) การวิเคราะห์ในกรณีที่ชั้นฉนวนแข็งมีความหนากึ่งอนันต์ ซึ่งเป็นกรณีพื้นฐานที่สุด และ 2) การวิเคราะห์ในกรณีที่ชั้นฉนวนแข็งมีความหนาจำกัด.

3.2.1 สนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคตัวนำทรงกลมที่สัมผัสอยู่กับฉนวนแข็งความหนากึ่งอนันต์

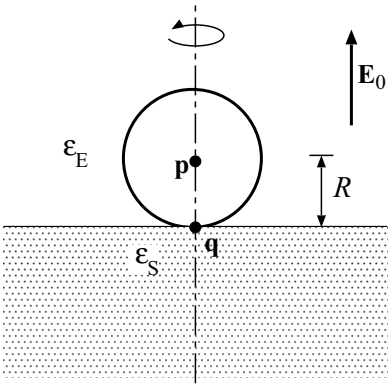
สนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคตัวนำทรงกลมมีความสำคัญในการใช้งานทางด้านต่างๆ ของไฟฟ้าสถิต [15]. อย่างไรก็ตาม การวิเคราะห์สนามและแรงที่มีอยู่ยังไม่ครบถ้วนสมบูรณ์ โดยถูกจำกัดอยู่เฉพาะในกรณีที่อนุภาคตัวนำถูกอัดประจุหรือได้รับแรงดันคงที่ค่าหนึ่ง หรือเป็นกรณีที่อนุภาคมีศักย์ไฟฟ้าลอย(ไม่ทราบค่า) ภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก. สำหรับในกรณีแรก สนามไฟฟ้าได้ถูกวิเคราะห์ด้วยวิธีเงาประจุ โดยอาศัยเงาไฟฟ้าจำนวนอนันต์[29,42]. กรณีนี้ใช้ศึกษาผลการเพิ่มขึ้นในปัญหาสนามไฟฟ้าเนื่องจุดสัมผัสมุมศูนย์องศา. งานวิจัยในโครงการนี้ ศึกษาสนามไฟฟ้าและแรงไฟฟ้าในกรณีที่สอง ซึ่งเราไม่ทราบศักย์ไฟฟ้าของตัวนำทรงกลมอยู่ก่อน.

รูปแบบการจัดเรียงที่ใช้ในการศึกษาเป็นรูปแบบของตัวนำทรงกลม ที่สัมผัสอยู่กับฉนวนแข็งความหนากึ่งอนันต์ ภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ. รูปแบบการจัดเรียงนี้เป็นแบบพื้นฐานที่สุด สำหรับศึกษาเป็นพื้นฐานการใช้งานจริง เช่น การใช้ฉนวนแข็งในระบบฉนวนด้ายก๊าซ. ในที่นี้ เรากำหนดให้อนุภาคตัวนำทรงกลมไม่ได้รับการอัดประจุ (มีประจุไฟฟ้าลัพธ์เป็นศูนย์). อย่างไรก็ตาม วิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์นี้ สามารถใช้ได้กับกรณีที่อนุภาคถูกอัดประจุค่าหนึ่ง(ที่ทราบ) หรืออนุภาคได้รับแรงดันคงที่ โดยอาศัยหลักการวิธีทับซ้อน (Superposition) หาคำตอบ.

การวิเคราะห์สนามในการจัดเรียงนี้ ใช้วิธีเงาประจุ ซึ่งเป็นวิธีวิเคราะห์ในการหาค่าศักย์และสนามไฟฟ้าของอนุภาคตัวนำ. ทั้งนี้ เนื่องจากการคำนวณด้วยวิธีเชิงเลขให้ได้ความแม่นยำสูง ทำได้ยาก เพราะมีขนาดแกปแคบๆ ระหว่างอนุภาคตัวนำและฉนวนแข็ง. เงาประจุสำหรับจุดประจุและฉนวนแข็งความหนากึ่งอนันต์เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้ว[31]. ในที่นี้ ผู้วิจัยได้ขยายหลักการเงาประจุนี้ สำหรับกรณีทั่วไปของประจุ ซึ่งอาจเป็นจุดประจุ ไดโพล หรือมัลติโพลที่มีอันดับสูงขึ้นไปได้.

3.2.1.1 รายละเอียดการจัดเรียง

รายละเอียดการจัดเรียงแสดงอยู่ในรูปที่ 3.2.1.1. เราพิจารณาตัวนำทรงกลมรัศมี R ที่ไม่ได้รับการอัดประจุวางตัวอยู่บนฉนวนแข็งที่มีสภาพยอม ε_S. ทรงกลมและฉนวนแข็งและตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบทำให้เกิดเป็นรอยต่อสามทางที่จุด **q** ในรูป. ข้อกำหนดให้ความหนาของฉนวนแข็งความยาวกึ่งอนันต์จะเหมาะสม เมื่ออนุภาคมีรัศมีเล็กกว่าความหนาจริงของฉนวนแข็งมากๆ. ระบบการจัดเรียงได้รับสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}_0$ ในแนวดิ่ง. สภาพยอมของตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบแทนด้วยสัญลักษณ์ ε_E.



รูปที่ 3.2.1.1 ตัวนำทรงกลมรัศมี R วางตัวอยู่บนฉนวนแข็งความหนากึ่งอนันต์ ได้รับสนามไฟฟ้าภายนอกสม่ำเสมอ E_0.

ถ้าหากไม่มีฉนวนแข็งอยู่ในการจัดเรียงที่ได้กล่าวมาข้างต้น สนามไฟฟ้าสูงสุดจะเกิดขึ้นที่ด้านบนและล่างสุดของตัวนำทรงกลม. การมีอยู่ของฉนวนแข็งทำให้ความเข้มสนามไฟฟ้าที่จุด **q** สูงมากขึ้น. ดังนั้น ในที่นี้ เราสนใจสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส **q** นี้ โดยจะอ้างอิงค่าทางด้านตัวกลางภายนอก (ด้าน ε_E) ซึ่งเป็นค่าสนามไฟฟ้าสูงสุดในการจัดเรียง.

3.2.1.2 วิธีการคำนวณ

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า การวิเคราะห์สนามไฟฟ้าทำโดยใช้วิธีเงาประจุ. ในที่นี้ใช้ประจุสองชนิด คือ จุดประจุและไดโพล ในการคำนวณ โดยมีหลักการคำนวณคล้ายคลึงกับกรณีที่ตัวนำทรงกลมได้รับศักย์ไฟฟ้าคงที่ค่าหนึ่ง. อย่างไรก็ตาม สถานการณ์ในการวิเคราะห์นี้ซับซ้อนมากขึ้น เนื่องจากเราต้องทำให้ประจุลัพธ์บนตัวนำทรงกลมมีค่าเท่ากับศูนย์ด้วย. การคำนวณนี้แสดงค่าศักย์และสนามไฟฟ้าในรูปของมัลติโพลอันดับศูนย์ B_0 และมัลติโพลอันดับที่หนึ่ง B_1 แทนจุดประจุ Q และไดโพล P เพื่อให้สมการของศักย์และสนามไฟฟ้าอยู่ในรูปที่ง่ายขึ้น.

ศักย์ไฟฟ้า ϕ ที่จุด $\mathbf{r}$ ใดๆ เนื่องจาก B_0 หรือ B_1 ที่ตำแหน่ง $\mathbf{r}_B$ ถูกนิยามเป็น

$$\phi = \frac{B_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B\|} \tag{3.2.1.1}$$

$$\phi = \frac{B_1 \cos\theta}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B\|^2} \tag{3.2.1.2}$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\mathbf{r} - \mathbf{r}_B$ กับทิศทางของไดโพล. จากสมการที่ (3.2.1.1) และ (3.2.1.2) ความสัมพันธ์ระหว่างประจุและไดโพล กับมัลติโพลเป็น $Q = 4\pi\varepsilon_E B_0$ และ $P = 4\pi\varepsilon_E B_1$.

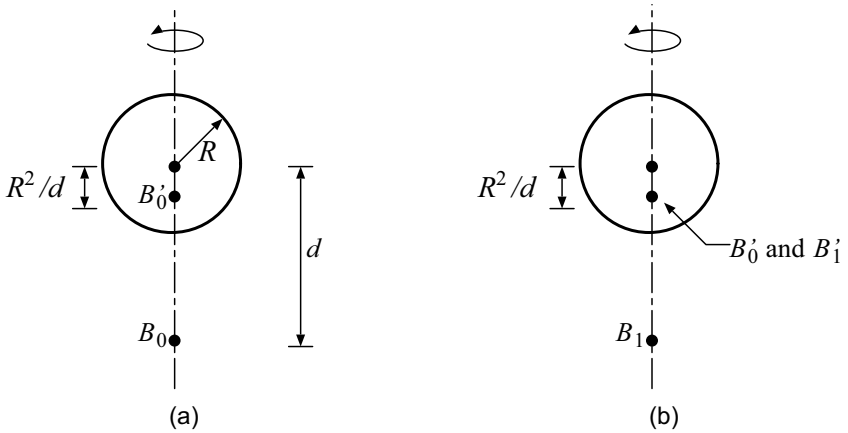
เงาของมัลติโพลเนื่องจากตัวนำทรงกลมที่ต่อลงดิน

พิจารณาตัวนำทรงกลมที่ต่อลงดิน(ศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์) และมัลติโพลอันดับศูนย์ B_0 ซึ่งอยู่ที่ระยะห่าง d จากจุดศูนย์กลางของตัวนำทรงกลม. เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์บนทรงกลมสามารถเป็นจริงได้ ด้วยการ

วางเงามัลติโพล B_0' ที่ตำแหน่ง R^2/d จากจุดศูนย์กลางทรงกลม ดังแสดงในรูปที่ 3.2.1.2(a). ขนาดของเงา B_0' นี้ สัมพันธ์กับ B_0 โดย [31]

$$B_0' = -\frac{R}{d}B_0 \tag{3.2.1.3}$$

สำหรับตัวนำทรงกลมลอย ซึ่งไม่มีประจุลัพธ์ เราต้องเพิ่มประจุ $B_0'' = -B_0'$ ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม เพื่อให้ประจุลัพธ์เท่ากับศูนย์ โดยที่ยังคงรักษาเงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าเท่าบนผิวทรงกลมไว้อยู่.



รูปที่ 3.2.1.2 เงาประจุสำหรับตัวนำทรงกลมที่ต่อลงดินสำหรับ (a) จุดประจุ และ (b) จุดไดโพล

เงาสำหรับตัวนำทรงกลมต่อลงดิน และมัลติโพลอันดับที่หนึ่ง B_1 แสดงอยู่ในรูปที่ 3.2.1.2(b) โดยต้องใช้เงาสองชุด คือ B_1' และ B_0' ในกรณีนี้[43]. ความสัมพันธ์ระหว่างเงากับมัลติโพล B_1 เป็นไปตามสมการ

$$B_1' = \left(\frac{R}{d}\right)^3 B_1 \tag{3.2.1.4}$$

$$B_0' = -\frac{R}{d^2}B_1 \tag{3.2.1.5}$$

ในทำนองเดียวกันกรณีของมัลติโพลอันดับศูนย์ สำหรับตัวนำทรงกลมลอย เราจะใช้เงา $B_0'' = -B_0'$ เพิ่มที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม เพื่อให้ประจุรวมบนทรงกลมเท่ากับศูนย์. เงาสำหรับมัลติโพลอันดับสูงขึ้นไป ก็สามารถคำนวณได้ในลักษณะเดียวกัน [44].

เงาของมัลติโพลเนื่องจากฉนวนแข็ง

พิจารณา B_n ซึ่งเป็นมัลติโพลอันดับที่ n อยู่ที่จุด $\mathbf{p}$ เหนือฉนวนแข็งที่มีความหนากึ่งอนันต์ ด้วยความสูง d ดังแสดงในรูปที่ 3.2.1.3. ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพลนี้เขียนได้เป็น [10]

$$\phi_B = \frac{B_n}{r_p^{n+1}}P_n(\cos\theta_p) \tag{3.2.1.6}$$

เมื่อ r_p และ θ_p เป็นพิกัดทรงกลมซึ่งมี $\mathbf{p}$ เป็นจุดกำเนิด และ P_n เป็นฟังก์ชันเลอจองด์.

ในลักษณะเดียวกันกับกรณีของจุดประจุและฉนวนแข็งใน [31] เราวางเงามัลติโพลสองชุด เพื่อทำให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์ และสนามไฟฟ้า บนผิวของฉนวนแข็งเป็นจริง. เงาทั้งสองคือ B_n' ที่ $\mathbf{p}'$ และ B_n'' ที่ $\mathbf{p}$

ดังแสดงในรูปที่ 3.2.1.4. โดยอาศัยวิธีเงาประจุ เราแยกเขียนศักย์ไฟฟ้าลัพธ์ ϕ_S ในฉนวนแข็ง และ ϕ_E ในบริเวณภายนอกได้เป็น

$$\phi_S = \frac{B_n''}{r_p^{n+1}} P_n(\cos\theta_p) \tag{3.2.1.7}$$

$$\phi_E = \frac{B_n'}{r_{p'}^{n+1}} P_n(\cos\theta_{p'}) + \phi_B \tag{3.2.1.8}$$

โดยที่ $r_{p'}$ และ $\theta_{p'}$ มีนิยามในลักษณะเดียวกันกับ r_p และ θ_p ตามลำดับ.

ขนาดของเงา B_n' และ B_n'' สัมพันธ์กับ B_n โดย

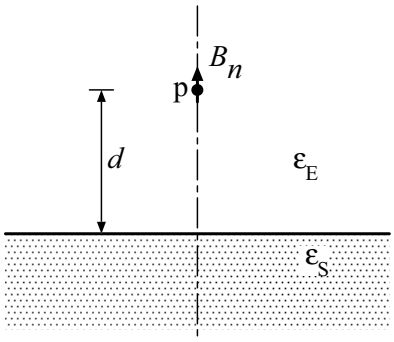
$$B_n' = (-1)^{n+1} K B_n \tag{3.2.1.9}$$

$$B_n'' = (1-K) B_n \tag{3.2.1.10}$$

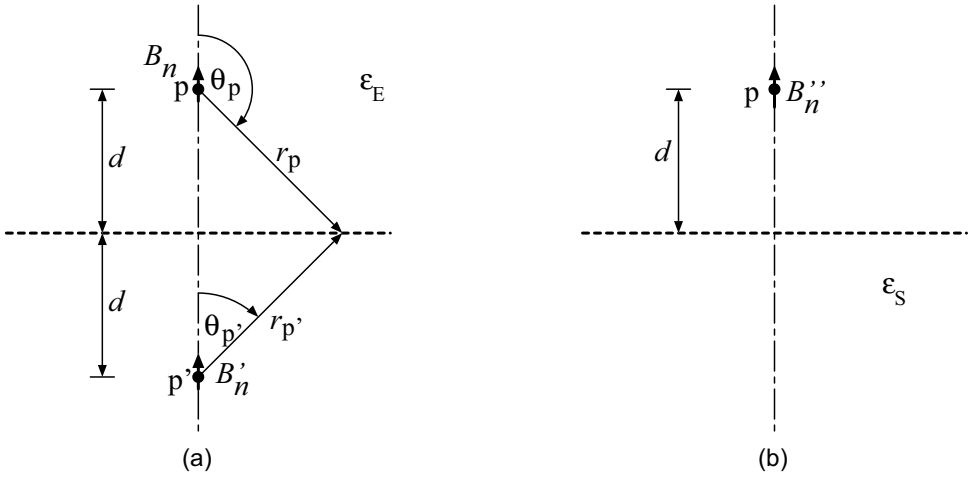
ซึ่งมี K นิยามเป็นฟังก์ชันของสภาพยอม

$$K = \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_E}{\varepsilon_S + \varepsilon_E} \tag{3.2.1.11}$$

สังเกตว่า $0 \le K < 1$ สำหรับ $\varepsilon_E \le \varepsilon_S < \infty$. เงาประจุที่อธิบายในหัวข้อนี้ สามารถใช้ในการคำนวณสนามไฟฟ้าด้วยวิธีเงาประจุในเอกสารอ้างอิง [10-11].



รูปที่ 3.2.1.3 มัลติโพลอันดับที่ *n* และฉนวนแข็ง.



รูปที่ 3.2.1.4 เงามัลติโพลสำหรับศักย์ (a) ภายนอก และ (b) ภายในฉนวนแข็ง.

3.2.1.3 การคำนวณด้วยวิธีเงาประจุ

ผู้วิจัยได้คำนวณสนามไฟฟ้าในการจัดเรียงรูปที่ 3.2.1.1 ด้วยวิธีเงาประจุ โดยใช้ขั้นตอนการคำนวณหลักสามขั้นตอน ซึ่งสามารถอธิบายสั้นๆ ได้ดังต่อไปนี้.

ขั้นตอนที่ 1 การคำนวณเริ่มต้นจากสนามไฟฟ้าภายนอก E_0 และมัลติโพล $B_1^{(1)}$ ที่เกิดจากสนามไฟฟ้าภายนอก. มัลติโพล $B_1^{(1)}$ ทำให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์ไฟฟ้าบนผิวของตัวนำทรงกลมเป็นจริง (เมื่อยังไม่คิดถึงผลของฉนวนแข็ง). ขนาดของ $B_1^{(1)}$ คำนวณได้จากสนามไฟฟ้า โดย

$$B_1^{(1)} = R^3 E_0 \tag{3.2.1.12}$$

การมีอยู่ของฉนวนแข็งเหนี่ยวนำให้เกิดเงาของ $B_1^{(1)}$ ในฉนวนแข็งตามสมการที่ (3.2.1.9) ซึ่งมีการกระทำกับตัวนำทรงกลมต่อไป ตามสมการที่ (3.2.1.4) และ (3.2.1.5). เพื่อให้การวิเคราะห์ในขั้นตอนนี้ง่ายขึ้น เราจะพิจารณาชั่วคราวว่า ตัวนำทรงกลมถูกต่อลงดิน และละเลยมัลติโพลอันดับศูนย์ไปก่อน. ผลของการเป็นตัวนำลอย และมัลติโพลอันดับศูนย์ที่เกิดขึ้น จะถูกพิจารณาต่อไปภายหลัง. ขั้นตอนที่ 1 นี้สนใจเฉพาะมัลติโพลอันดับที่หนึ่ง และวิเคราะห์หาอนุกรมอนันต์ของเงามัลติโพลภายในทรงกลม และภายในฉนวนแข็ง.

ขั้นตอนที่ 2 เราสนใจมัลติโพลอันดับศูนย์ ที่เกิดขึ้นเป็นเงาของมัลติโพลอันดับที่หนึ่งในขั้นตอนที่ 1 โดยยังคงพิจารณาว่าทรงกลมยังต่อลงดินอยู่ เช่นเดียวกับในขั้นตอนที่แล้ว. สังเกตว่า เงามัลติโพลอันดับศูนย์แต่ละตัวนำไปสู่อนุกรมอนันต์ของเงาภายในทรงกลมและภายในฉนวนแข็ง.

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นตอนสุดท้ายทำให้เงื่อนไขประจุลัพธ์เท่ากับศูนย์ของตัวนำทรงกลมเป็นจริง. เพื่อที่จะหักล้างกับมัลติโพลอันดับศูนย์ที่ได้ใช้มาทั้งหมด เราวางเงามัลติโพลอันดับศูนย์ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม. อย่างไรก็ดี เงาประจุที่วางทำให้เกิดอนุกรมของเงาต่อไปเช่นเดียวกับในขั้นตอนที่ 2. ขั้นตอนนี้แตกต่างกับขั้นตอนที่ 2 ตรงที่ การวางเงาทุกครั้ง เราจะรักษาสภาวะประจุลัพธ์เท่ากับศูนย์เอาไว้ตลอด.

เงามัลติโพลทั้งหมดที่ใช้ใน**ขั้นตอนที่ 1** ถึง**ขั้นตอนที่ 3** สามารถจัดรวมกลุ่มกันได้ ตามตำแหน่ง(ความสูงจากรอยต่อผิวฉนวนแข็ง). ณ แต่ละความสูง $h = R/i$ เหนือฉนวนแข็ง เมื่อ $i = 1,2,\ldots$ ขนาดรวมของมัลติโพล $(B_0)_i$ อันดับศูนย์และ $(B_1)_i$ อันดับที่หนึ่ง สามารถเขียนได้ดังนี้.

$$\frac{(B_o)_i}{B_1^{(1)}} = -\frac{K^{i-1}}{R}\frac{1}{i}\left\{\frac{i-1}{i} - \frac{\alpha_K}{K}\left[\ln\left(\frac{1}{1-K}\right) - \beta_K\right]\right\} \tag{3.2.1.13}$$

$$\frac{(B_1)_i}{B_1^{(1)}} = \left(\frac{1}{i^3}\right)K^{i-1} \tag{3.2.1.14}$$

ฟังก์ชัน α_K และ β_K ในสมการที่ (3.2.1.13) มีนิยามเป็น

$$\alpha_K = \sum_{k=0}^{\infty} S_k \tag{3.2.1.15}$$

$$\beta_K = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{K^j}{j^2} = \int_0^K \frac{1}{t}\ln\left(\frac{1}{1-t}\right)dt \tag{3.2.1.16}$$

เมื่อ S_k เป็นอันดับที่เริ่มต้นจาก $S_0 = 1.0$ และ

$$S_k = \sum_{l=0}^{k-1} -\frac{K^{k-l}}{k-l+1} S_l \qquad (3.2.1.17)$$

ขนาดรวมของมัลติโพล $(B_0')_i$ และ $(B_1')_i$ ณ แต่ละตำแหน่ง $h = -R/i$ เมื่อ $i = 1,2,\ldots$ สัมพันธ์กับ $(B_0)_i$ และ $(B_1)_i$ ตามสมการ

$$(B_0')_i = -K(B_0)_i \qquad (3.2.1.18)$$

$$(B_1')_i = K(B_1)_i \qquad (3.2.1.19)$$

ท้ายสุด สนามไฟฟ้า E_c ณ จุดสัมผัส (จุด $\mathbf{q}$ ในรูปที่ 3.2.1.1) เป็นผลรวมของสนามไฟฟ้าภายนอก และสนามไฟฟ้าเนื่องจากเงาทั้งหมด ที่ได้จากขั้นตอนที่ 1 ถึง 3. ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสได้เป็น

$$E_c = E_0 + E_{c1} + E_{c2} + E_{c3} \qquad (3.2.1.20)$$

เมื่อ E_{c1}, E_{c2} และ E_{c3} เป็นสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุในขั้นตอนที่หนึ่ง สอง และสาม ตามลำดับ.
สนามไฟฟ้า E_c เขียนในรูปของ K ได้เป็น

$$\frac{E_c}{E_0} = 1 + \frac{1+K}{1-K}\left\{2 + \frac{K}{1-K} - \frac{\alpha_K}{K(1-K)}\left[\ln\left(\frac{1}{1-K}\right) - \beta_K\right]\right\} \qquad (3.2.1.21)$$

หรือในรูปของสภาพยอมได้เป็น

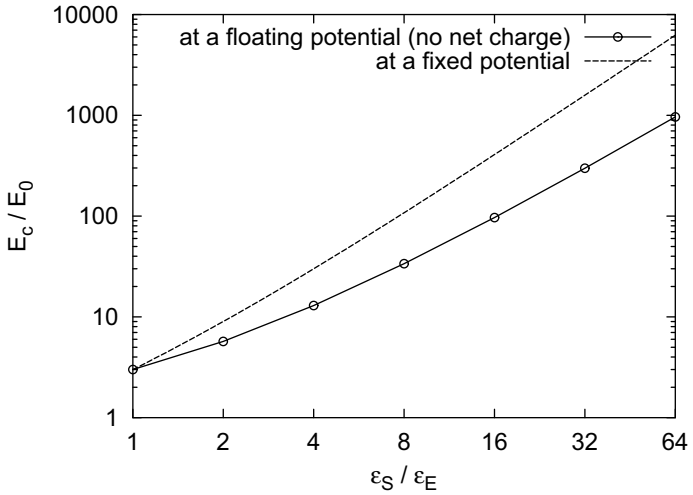
$$\frac{E_c}{E_0} = 1 + \frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E}\left\{2 + \frac{\varepsilon_S - \varepsilon_E}{2\varepsilon_E} - \frac{\alpha_K(\varepsilon_S + \varepsilon_E)^2}{2\varepsilon_E(\varepsilon_S - \varepsilon_E)}\left[\ln\left(\frac{\varepsilon_S + \varepsilon_E}{2\varepsilon_E}\right) - \beta_K\right]\right\} \qquad (3.2.1.22)$$

3.2.1.4 ผลการคำนวณและวิเคราะห์

ค่าเชิงเลขของฟังก์ชัน α_K และ β_K

สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสได้ถูกแสดงในรูปของ α_K และ β_K ดังในหัวข้อที่ผ่านมา. แม้ว่าเราไม่สามารถเขียนแสดงฟังก์ชันทั้งสองในรูปปิด (closed form) ได้ อนุกรมที่ใช้หาค่าฟังก์ชันเหล่านี้ลู่เข้าอย่างดี ถ้า K มีค่าไม่ใกล้กับหนึ่งมาก. เงื่อนไขนี้ของค่า K เป็นจริงสำหรับค่าของสภาพยอมของฉนวนไฟฟ้าที่ใช้อยู่ทั่วไป. ตัวอย่างเช่น K มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 0.818 เมื่อ $1 \le \varepsilon_S/\varepsilon_E \le 10$. รูปที่ 3.2.1.5 และ 3.2.1.6 แสดงค่าของฟังก์ชัน α_K และ β_K สำหรับคำนวณค่าสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสด้วยสมการที่ (3.2.1.21) และ (3.2.1.22). รูปที่ 3.2.1.5 แสดงการแปรผันของ α_K เมื่อ $K = 0$ ถึง 0.999. เราสามารถมองได้จากรูปนี้ว่า $\alpha_K = 1$ ที่ $K = 0$ และ α_K ลงลงเมื่อ K เพิ่มขึ้น. การลดลงของ α_K ตามการเปลี่ยนแปลงค่า K เป็นเชิงเส้นโดยประมาณที่ค่า K ต่ำๆ แต่ไม่เป็นเชิงเส้นเมื่อ K สูงขึ้น.

ในอีกทางหนึ่ง สมการที่ (3.2.1.16) แสดงว่า β_K แปรค่าตั้งแต่ศูนย์ จนถึง $\zeta(2) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} = \pi/6$ (Riemann zeta function) เมื่อ $K = 0$ ถึง 1. การคำนวณค่า β_K เป็นตัวเลขในทางปฏิบัติ ไม่มีปัญหาแต่อย่างใด.



รูปที่ 3.2.1.7 สนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส แสดงเป็นฟังก์ชันของอัตราส่วนสภาพยอม.

เพื่อการเปรียบเทียบ เส้นประในรูปที่ 3.2.1.7 แสดงสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัส ในกรณีที่ตัวนำทรงกลมถูกได้รับศักย์ไฟฟ้าคงที่(โดยสัมผัสอยู่กับระนาบฉนวนเช่นเดียวกัน แต่ไม่มีสนามไฟฟ้าภายนอก). E_c บนตัวนำทรงกลมในกรณีนี้ เป็นไปตามสมการ [29, 42]

$$\frac{E_c}{E_0} = \frac{3}{2}\left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E}\right)\left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E}+1\right) \qquad (3.2.1.23)$$

ประจุบนตัวนำทรงกลมในกรณีที่ได้รับศักย์ไฟฟ้าคงที่ถูกเลือกให้ได้ขนาดของ E_c เมื่อ $\varepsilon_S = \varepsilon_E$ เป็นค่าเดียวกับในกรณีของตัวทรงกลมภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ $\mathbf{E}_0$. นั่นคือ ขนาดของ E_c เท่ากับ $3E_0$. เราสามารถเห็นได้จากรูปที่ 3.2.1.7 ว่า สำหรับค่า $\varepsilon_S > \varepsilon_E$ สนามไฟฟ้าสัมผัส E_c บนตัวนำทรงกลมที่รับศักย์ไฟฟ้าค่าคงที่ มีค่าสูงกว่าค่าในกรณีของตัวนำทรงกลมภายใต้สนามไฟฟ้าสม่ำเสมอ. ความแตกต่างของค่า E_c ระหว่างสองกรณีนี้มากขึ้น เมื่ออัตราส่วนสภาพยอมเพิ่มขึ้น.

แม้ว่าสนามไฟฟ้า E_c ณ จุดสัมผัส สามารถคำนวณด้วยสมการที่ (3.2.1.21) และ (3.2.1.22) โดยใช้ค่าฟังก์ชัน α_K และ β_K ผู้วิจัยได้พบว่า เราสามารถแสดงค่าสนามไฟฟ้าได้ด้วยสมการง่ายๆ ซึ่งได้จากการปรับค่ากับเส้นโค้งผลการคำนวณ

$$\frac{E_c}{E_0} \approx 0.696\left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E}+\sqrt{\frac{7}{4}}\right)^{\sqrt{3}} \qquad (3.2.1.24)$$

สมการที่ (3.2.1.24) ประมาณสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสได้อย่างดีในช่วง $\varepsilon_S = \varepsilon_E$ ถึง $64\varepsilon_E$. ตารางที่ 3.2.1.1 เปรียบเทียบค่าได้จากการประมาณด้วยสมการที่ (3.2.1.24) เทียบกับผลเฉลยที่ได้. จากตารางที่ 3.2.1.1 เราเห็นได้ว่าความคลาดเคลื่อนของการประมาณต่ำกว่า 3% สำหรับอัตราส่วนสภาพยอมถึง 64.

ตารางที่ 3.2.1.1 เปรียบเทียบสนามไฟฟ้า ณ จุดสัมผัสที่ได้จากการคำนวณจริง และจากการประมาณด้วยสมการที่ (2.2.1.24)

$\varepsilon_S / \varepsilon_E$	E_c / E_0		ความแตกต่าง (%)
	คำนวณ	ประมาณ	
1	3.000	2.996	0.133
2	5.710	5.571	2.435
4	12.94	12.60	2.640
8	33.68	33.26	1.237
16	96.80	97.27	0.478
32	298.2	302.0	1.286
64	964.3	969.2	0.504

แรงบนตัวนำทรงกลม

ในที่นี้ แรงบนตัวนำทรงกลมถูกคำนวณหาจากผลรวมของแรงปฏิกิริยาระหว่างเงาประจุและไดโพลในทรงกลม. แรง F_z ในแนว +z คำนวณได้จาก

$$\frac{F_z}{4\pi\varepsilon_E} = -\frac{K}{R^2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(B_0)_j(B_0)_k\left(\frac{jk}{j+k}\right)^2 - \frac{6K}{R^4}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(B_1)_j(B_1)_k\left(\frac{jk}{j+k}\right)^4 + \frac{4K}{R^3}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(B_0)_j(B_1)_k\left(\frac{jk}{j+k}\right)^3 \quad (3.2.1.25)$$

จากสมการที่ (3.2.1.13), (3.2.1.14) และ (3.2.1.25) เราได้แรง F_z เป็นค่าลบ ซึ่งแสดงว่าตัวนำทรงกลมถูกดึงดูดให้ติดอยู่กับฉนวนแข็ง. ทิศทางของแรงในกรณีนี้ ตรงข้ามกันกับแรงในกรณีของตัวนำทรงกลมที่สัมผัสอยู่กับระนาบตัวนำ (ซึ่งเกิดแรงผลักอนุภาคออกจากระนาบตัวนำ) [15, 45]. ทั้งนี้เพราะว่า สำหรับกรณีของระนาบตัวนำ ประจุจะถูกส่งผ่านระหว่างระนาบตัวนำกับทรงกลม. หลังการถ่ายเทประจุ เราจะได้แรงคูลอมบ์เป็นแรงผลัก. ในทางกลับกัน สำหรับกรณีของฉนวนแข็ง ไม่มีประจุส่งผ่านระหว่างฉนวนแข็งกับตัวนำทรงกลม ทำให้ทิศทางของแรงยังคงเป็นแรงดึงดูดอยู่.

รูปที่ 3.2.1.8 แสดงการแปรผันของขนาดแรงกับอัตราส่วนสภาพยอม $\varepsilon_S / \varepsilon_E$. เพื่อให้สามารถแสดงค่าแรง F_z ในรูปที่ 3.2.1.8 สำหรับกรณีทั่วไปของ ε_E, E_0 และ R ค่าของแรง F_z ในรูปจึงถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย $F_0 = \varepsilon_E E_0^2 R^2$. สังเกตว่าดัชนี j และ k ที่ผู้วิจัยใช้สำหรับคำนวณแรงในสมการที่ (3.2.1.25) เพิ่มขึ้นตาม $\varepsilon_S / \varepsilon_E$. (ใช้ 850 สำหรับกรณี $\varepsilon_S / \varepsilon_E = 64$) แรงจะมีค่าเป็นศูนย์เมื่อ $\varepsilon_S = \varepsilon_E$ และสูงขึ้นเมื่อ $\varepsilon_S / \varepsilon_E$ สูงขึ้น.

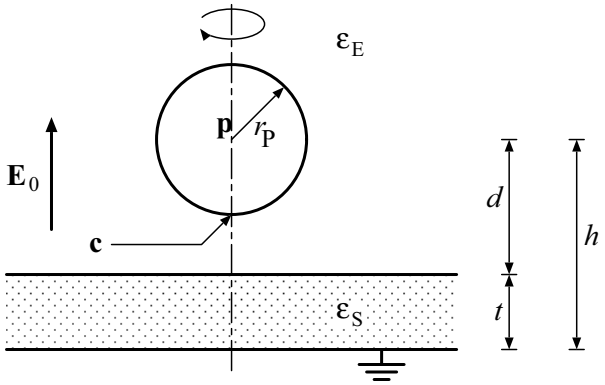
สมการต่อไปนี้ ซึ่งได้จากการปรับเส้นโค้งความสัมพันธ์ ใช้ประมาณขนาดของแรงได้

$$\left|\frac{F_z}{F_0}\right| \approx 1.8\left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E} - 1\right)\left(\frac{\varepsilon_S}{\varepsilon_E} + 1\right)^{0.31} \quad (3.2.1.26)$$

สม่ำเสมอภายนอก. การจัดเรียงนี้เป็นรูปแบบพื้นฐาน ที่พบอยู่ในการใช้งานจริงต่างๆ. ตัวอย่างเช่น ผิวฉนวนแข็งอาจปรากฏเป็นสารที่เคลือบอยู่บนอิเล็กโตรดในสวิทช์เกียร์ไฟฟ้าแรงสูง[52,53] หรือเป็นผิวเคลือบบนอิเล็กโตรดที่ใช้ในการทดลองเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของอนุภาค [54] หรือในการทดลองของของไหลอีอาร์ [55]. สังเกตว่า การวิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงเป็นที่สนใจ เพราะว่าสนามไฟฟ้ามีความเกี่ยวข้องกับการเกิดดีสชาร์จภายในระบบ และแรงสามารถดึงดูดอนุภาคให้เคลื่อนที่เข้าใกล้อิเล็กโตรดมากขึ้น ทำให้สนามไฟฟ้าสูงขึ้นโดยอ้อม.

การหาค่าสนามไฟฟ้าทำได้ยาก ในการจัดเรียงแบบนี้ด้วยวิธีเชิงเลข เนื่องจากว่า (1) สนามไฟฟ้ามีความไม่สม่ำเสมอสูงมาก เมื่ออนุภาคอยู่ใกล้กับอิเล็กโตรด (2) เมื่อฉนวนแข็งมีขนาดบางมากๆ ความคลาดเคลื่อนเชิงเลขจะเกิดขึ้น. วิธีแก้ไขปัญหาทางหนึ่งก็คือ การประมาณชั้นฉนวนแข็งบางด้วยตัวกลางที่มีความหนาเป็นศูนย์ ซึ่งเป็นที่นิยมทำในการคำนวณสนามด้วยวิธีเชิงเลข. อย่างไรก็ดี การประมาณด้วยตัวกลางไร้ความหนาจะไม่เหมาะสม ถ้าหากความหนาของฉนวนแข็งไม่น้อยเพียงพอ หรือสภาพยอมของฉนวนแข็งไม่สูงเพียงพอ[56].

เพื่อให้ได้ความแม่นยำที่ดีเพียงพอ การวิเคราะห์สนามไฟฟ้าในที่นี้ ใช้วิธีเงามัลติโพล ซึ่งเป็นวิธีเชิงวิเคราะห์. ผู้วิจัยได้ใช้วิธีเงามัลติโพลวิเคราะห์สนามไฟฟ้าและแรงที่เกิดขึ้น โดยพิจารณาความหนาของชั้นฉนวนแข็งอยู่ในช่วงที่กว้างกว่าใน [50, 51] มาก. สังเกตว่า ขั้นตอนการคำนวณนี้ยังสามารถใช้ได้กับการจัดเรียงของทรงกลมและทรงกลม หรือการจัดเรียงของทรงกลมและระนาบ ที่ใช้ในการทดสอบการพังทลายของฉนวนไฟฟ้าโดยที่ทรงกลมตัวนำไม่ได้รับสนามไฟฟ้าภายนอก แต่ได้รับการป้อนแรงดันที่ทราบค่าโดยตรง [57].



รูปที่ 3.2.2.1 รูปแบบการจัดเรียงที่ประกอบด้วยตัวนำทรงกลมและระนาบดิน โดยมีฉนวนแข็งคั่นอยู่ระหว่างตัวนำทั้งสอง.

3.2.2.1 รูปแบบการจัดเรียงทางกายภาพ

รูปที่ 3.2.2.1 แสดงการจัดเรียงทางกายภาพที่ใช้การศึกษาสำหรับกรณีฉนวนแข็งความหนาจำกัด. การจัดเรียงประกอบด้วยตัวนำทรงกลมลอย(ไม่ได้รับการป้อนพลังงานด้วยการสัมผัสโดยตรง และมีประจุลัพธ์เป็นศูนย์) รัศมีเท่ากับ r_P มีจุดศูนย์กลางอยู่เหนือระนาบตัวนำ(อิเล็กโตรด)ที่ต่อลงดินเป็นความสูง h. บนอิเล็กโตรดมีฉนวนแข็งความหนาเท่ากับ t อยู่ ทำให้ตัวนำทรงกลมไม่สามารถสัมผัสกับระนาบอิเล็กโตรดได้โดยตรง. การจัดเรียงนี้ได้รับสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอกเท่ากับ $\mathbf{E}_0$ โดยมีทิศทางในแนวดิ่ง ดังแสดงในรูปที่ 3.2.2.1. สภาพยอมของฉนวนแข็งและของตัวกลางที่อยู่โดยรอบแทนด้วยสัญลักษณ์ ε_S และ ε_E

ตามลำดับ. การใช้อิเล็กโตรดระนาบในการจัดเรียงนี้ มีความเหมาะสมภายใต้เงื่อนไขปกติทั่วไป ซึ่งตัวนำทรงกลมมักมีขนาดต่ำกว่าขนาดของอิเล็กโตรดระนาบที่ปรากฏอยู่มาก. เพื่อให้ผลการวิจัยสามารถใช้ประโยชน์ได้ทั่วไป ผู้วิจัยได้แปรค่าอัตราส่วน t/r_P ตั้งแต่ 0.001 ถึง 100 และอัตราส่วน $\varepsilon_S/\varepsilon_E$ ตั้งแต่ 1 ถึง 10 เพื่อให้เห็นผลของพารามิเตอร์ดังกล่าว ต่อสนามไฟฟ้าและแรงบนตัวนำทรงกลมได้อย่างชัดเจน.

3.2.2.2 วิธีวิเคราะห์

การวิเคราะห์สนามไฟฟ้าในการจัดเรียงที่แสดงในรูปที่ 3.2.2.1 ทำด้วยวิธีเงามัลติโพล[10, 11] ซึ่งเป็นวิธีที่มีหลักการเดียวกับวิธีเงาประจุ แต่ใช้เงาเป็นมัลติโพลที่มีอันดับสูงขึ้นไป เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตเป็นจริงตามต้องการ. เงามัลติโพลที่ใช้ในกรณีของฉนวนแข็งความหนาจำกัด คำนวณได้จากพื้นฐานของเงาในกรณีของฉนวนแข็งความหนากึ่งอนันต์ ซึ่งได้อธิบายไว้แล้วในหัวข้อที่ 3.2.1. ในที่นี้จึงขอสรุปสมการที่ใช้สั้นๆ ดังนี้.

เงาสำหรับมัลติโพลและฉนวนแข็งความหนากึ่งอนันต์

พิจารณามัลติโพลอันดับที่ n ซึ่งมีขนาดเท่ากับ B_n และอยู่ที่จุด $\mathbf{p}$ เหนือฉนวนแข็งความยาวกึ่งอนันต์เป็นระยะห่าง d. ศักย์ไฟฟ้า ϕ_B เนื่องจากมัลติโพลแสดงได้เป็น

$$\phi_B = \frac{B_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos\theta_p) \tag{3.2.2.1}$$

เมื่อ r_p และ θ_p เป็นพิกัดทรงกลมที่มี $\mathbf{p}$ เป็นจุดกำเนิด และ P_n เป็นฟังก์ชันเลอจองดร์. เราสามารถใช้เงามัลติโพลสองตัวในการทำให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์และสนามไฟฟ้าบนผิวของฉนวนแข็งเป็นจริง. เงาทั้งสองคือ B'_n ณ จุด $\mathbf{p}'$ ซึ่งอยู่ด้านล่างของผิวฉนวนแข็ง โดยอยู่ต่ำลงไปเป็นระยะ d และ B''_n ณ จุด $\mathbf{p}$. (รูปที่ 3.2.1.4) ด้วยวิธีเงามัลติโพล ศักย์ไฟฟ้า ϕ_S ภายใน และศักย์ไฟฟ้า ϕ_E ภายนอกฉนวนแข็งสามารถเขียนแยกเป็นสองสมการได้ดังนี้.

$$\phi_S = \frac{B''_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos\theta_p) \tag{3.2.2.2}$$

$$\phi_E = \frac{B'_n}{r_{p'}^{n+1}} P_n(\cos\theta_{p'}) + \phi_B \tag{3.2.2.3}$$

โดย $(r_{p'}, \theta_{p'})$ มีนิยามในลักษณะเดียวกับ (r_p, θ_p).

ขนาดของเงามัลติโพลสัมพันธ์กับมัลติโพล ด้วยฟังก์ชันของ $K = \dfrac{\varepsilon_S - \varepsilon_E}{\varepsilon_S + \varepsilon_E}$.

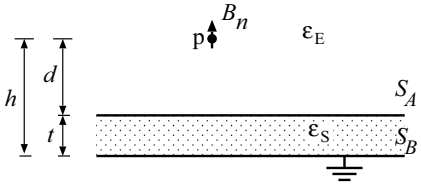
$$B'_n = (-1)^{n+1} K B_n \tag{3.2.2.4}$$

$$B''_n = (1-K) B_n \tag{3.2.2.5}$$

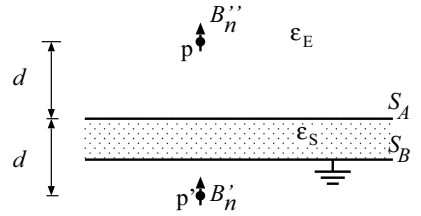
เงาสำหรับมัลติโพลและระนาบอิเล็กโตรดที่มีฉนวนแข็งความหนาจำกัดคั่นอยู่

พิจารณามัลติโพล B_n ที่จุด $\mathbf{p}$ เหนือระนาบอิเล็กโตรดที่ต่อลงดิน โดยมีฉนวนแข็งคั่นอยู่ระหว่างมัลติโพลและระนาบอิเล็กโตรด ดังแสดงในรูปที่ 3.2.2.2. มัลติโพลอยู่ห่างจากผิวอิเล็กโตรด S_B เป็นระยะเท่ากับ h และห่างจากผิวของฉนวนแข็ง S_A เป็นระยะ $d = h - t$ โดย t เป็นความหนาของฉนวนแข็ง. ในกรณีนี้

เราต้องใช้เงามัลติโพลในลักษณะทำซ้ำ เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าบนผิวรอยต่อ S_A เป็นจริง และให้ผิวอิเล็กโตรด S_B มีศักย์ไฟฟ้าเท่ากับศูนย์.



รูปที่ 3.2.2.2 มัลติโพล B_n และฉนวนแข็งที่มีความหนาจำกัดอยู่บนระนาบตัวนำต่อลงดิน.



รูปที่ 3.2.2.3 เงามัลติโพลชุดแรก B_n' และ B_n'' ซึ่งถูกเหนี่ยวนำโดยฉนวนแข็ง.

กระบวนการทำซ้ำสำหรับหาคำตอบศักย์และสนามไฟฟ้าเป็นไปตามลำดับขั้นต่อไปนี้ โดยมี $d^{(i)}$ และ $h^{(i)}$ เป็นระยะห่างจากผิวรอยต่อ S_A และ S_B ของเงามัลติโพลในรอบที่ i ของการทำซ้ำ ตามลำดับ.

1. วาง B'_n และ B''_n เป็นเงาของมัลติโพล B_n โดยใช้สมการที่ (3.2.2.4) และ (3.2.2.5) สำหรับฉนวนแข็ง (ดูรูปที่ 3.2.2.3). เงามัลติโพลทั้งสองทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนผิว S_A ของฉนวนแข็งเป็นจริง. ศักย์ไฟฟ้า ϕ_E ภายนอก และศักย์ไฟฟ้า ϕ_S ภายในฉนวนแข็งแสดงได้เป็น

$$\phi_E = \phi_B + \phi_{B'} = \frac{B_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos\theta_p) + \frac{B'_n}{r_{p'}^{n+1}} P_n(\cos\theta_{p'}) \qquad (3.2.2.6)$$

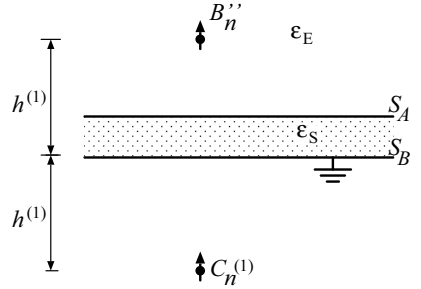
$$\phi_S = \phi_{B''} = \frac{B''_n}{r_p^{n+1}} P_n(\cos\theta_p) \qquad (3.2.2.7)$$

2. วางมัลติโพล $C_n^{(1)}$ ที่ตำแหน่ง $h^{(1)} = h$ ภายในระนาบอิเล็กโตรด เป็นเงาของมัลติโพล B''_n ที่เกิดจากผิวของระนาบอิเล็กโตรด S_B (ดูรูปที่ 3.2.2.4). $C_n^{(1)}$ สัมพันธ์กับ B''_n ด้วยสมการ [10]

$$C_n^{(1)} = (-1)^{n+1} B''_n \qquad (3.2.2.8)$$

ศักย์ไฟฟ้าภายในฉนวนแข็งจึงกลายเป็น

$$\phi_S = \phi_{B''} + \phi_{C^{(1)}} \qquad (3.2.2.9)$$

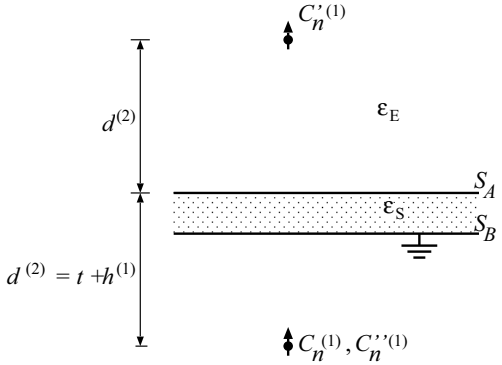


รูปที่ 3.2.2.4 เงามัลติโพล C_n ที่ถูกเหนี่ยวนำโดยระนาบอิเล็กโตรด.

3. วาง $C'^{(1)}_n$ และ $C''^{(1)}_n$ เป็นเงาของมัลติโพล $C^{(1)}_n$ ซึ่งถูกเหนี่ยวนำให้เกิดขึ้นโดยตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบ เพื่อทำให้เงื่อนไขขอบเขตของผิวฉนวนแข็ง S_A เป็นจริง (ดูรูปที่ 3.2.2.5). สังเกตว่าค่าคงที่ K ในขั้นตอนนี้เท่ากับ $(\varepsilon_E - \varepsilon_S)/(\varepsilon_E + \varepsilon_S)$ ซึ่งแตกต่างกับในขั้นตอนที่ 1. ทั้งนี้เนื่องจากว่า $C^{(1)}_n$ เป็นมัลติโพลที่ทำให้เกิดศักย์ไฟฟ้าที่ภายในฉนวนแข็ง(ไม่ใช่ภายในตัวกลาง ε_E ที่อยู่ล้อมรอบ). ศักย์ไฟฟ้าจึงเขียนได้เป็น

$$\phi_E = \phi_B + \phi_{B'} + \phi_{C''^{(1)}} \tag{3.2.2.10}$$

$$\phi_S = \phi_{B''} + \phi_{C^{(1)}} + \phi_{C'^{(1)}} \tag{3.2.2.11}$$



รูปที่ 3.2.2.5 เงามัลติโพลของ $C^{(1)}_n$ เหนี่ยวนำโดยระนาบอิเล็กโตรด.

4. เนื่องจาก $C'^{(1)}_n$ ไปรบกวนศักย์ไฟฟ้าในฉนวนแข็ง เราจึงต้องวาง $C^{(2)}_n$ ใต้ผิวระนาบอิเล็กโตรด S_B เป็นระยะ $h^{(2)} = d^{(2)} + t$ เพื่อเป็นเงาของ $C'^{(1)}_n$ เนื่องจากผิวระนาบอิเล็กโตรด โดย

$$C^{(2)}_n = (-1)^{n+1} C'^{(1)}_n \tag{3.2.2.12}$$

5. ทำขั้นตอนที่ 3 และ 4 ซ้ำ จนกระทั่งศักย์ไฟฟ้า ϕ_E และ ϕ_S ลู่เข้าสู่คำตอบ.

อัตราการลู่เข้าสู่คำตอบของขั้นตอนที่ได้กล่าวมา ขึ้นอยู่กับความหนา t ของฉนวนแข็ง และค่าของอัตราส่วนสภาพยอม $\varepsilon_S / \varepsilon_E$. ศักย์ไฟฟ้าจะลู่เข้าเร็วขึ้น เมื่อ t มีค่าสูงขึ้นหรือ $\varepsilon_S / \varepsilon_E$ มีค่าต่ำลง. สังเกตว่า เราอาจมองว่ามัลติโพล B'_n, B''_n, $C^{(i)}_n$, $C'^{(i)}_n$ และ $C''^{(i)}_n$ ทั้งหมด เป็นชุดของเงาของ B_n ที่ถูกเหนี่ยวนำขึ้นจากระนาบอิเล็กโตรดที่มีฉนวนแข็งคั่นอยู่.

ขั้นตอนรวมในการคำนวณสนามไฟฟ้าในการจัดเรียงรูปที่ 3.2.2.1

ขั้นตอนการคำนวณรวมซับซ้อนกว่าที่ได้กล่าวถึงในกรณีของ B_n เพียงตัวเดียว เนื่องจากการมีอยู่ของตัวนำทรงกลม. เราสามารถมองได้ว่า การจัดเรียงในรูปที่ 3.2.2.1 ประกอบด้วยวัตถุสองชุด ได้แก่ (1) ทรงกลมตัวนำ และ (2) ระนาบอิเล็กโตรดที่มีฉนวนแข็งวางอยู่ด้านบน. เงื่อนไขเพิ่มในการคำนวณ ก็คือ เงื่อนไขศักย์ไฟฟ้าคงที่บนผิว และเงื่อนไขประจุรวมเท่ากับศูนย์ของตัวนำทรงกลม. การคำนวณเริ่มจากการวางมัลติโพล B ที่จุดศูนย์กลางของทรงกลม **p** เพื่อให้เงื่อนไขของวัตถุที่ 1 (ตัวนำทรงกลม) เป็นจริง ถ้าไม่มีวัตถุที่สองอยู่. เนื่องจากศักย์ไฟฟ้า ϕ_{ext} ของสนามไฟฟ้าสม่ำเสมอภายนอกสามารถเขียนได้เป็น

$$\phi_{ext} = -E_0 h - E_0 r_p \cos\theta_p \tag{3.2.2.13}$$

จากเงื่อนไขขอบเขตของทรงกลม เราได้ว่า

$$B_1 = E_0 r_P^3 \tag{3.2.2.14}$$

โดยการใช้ขั้นตอนวิธีที่ได้อธิบายมาแล้ว เราสามารถหาชุดเงาของ B ซึ่งทำให้เงื่อนไขขอบเขตบนผิวของวัตถุที่ 2 (ระนาบอิเล็กโตรดและฉนวนแข็ง) เป็นจริงได้. ตัวอย่างมัลติโพลตัวแรกๆ ของชุดเงาแสดงได้ดังนี้

$$B'_1 = KE_0 r_P^3 \tag{3.2.2.15}$$

$$B''_1 = (1-K)E_0 r_P^3 \tag{3.2.2.16}$$

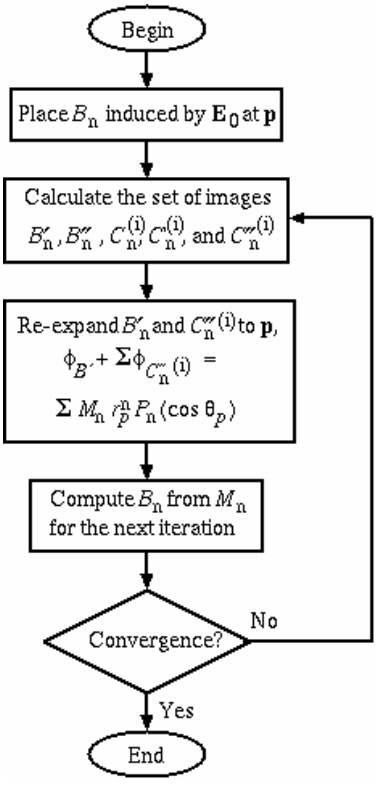
$$C_1^{(1)} = (1-K)E_0 r_P^3 \tag{3.2.2.17}$$

$$C'^{(1)}_1 = -(1-K)KE_0 r_P^3 \tag{3.2.2.18}$$

$$C''^{(1)}_1 = (1-K)(1+K)E_0 r_P^3 \tag{3.2.2.19}$$

โดยมี $K = (\varepsilon_S - \varepsilon_E)/(\varepsilon_S + \varepsilon_E)$.

ต่อไป เราจะทำการกระจายพจน์ของศักย์ไฟฟ้าเนื่องจาก B' และ C'' ที่ได้ทุกตัวใหม่ โดยมีจุดศูนย์กลางการกระจายที่ **p** และใช้เงามัลติโพล B ชุดใหม่ เพื่อทำให้เงื่อนไขขอบเขตของวัตถุที่ 1 เป็นจริงอีกครั้งหนึ่ง. รายละเอียดของการกระจายพจน์ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพล และการใช้เงาของทรงกลมตัวนำ แสดงอยู่ในเอกสารอ้างอิง[10,11]. สังเกตว่า เริ่มจากการทำซ้ำในรอบที่สอง จะเกิดมัลติโพลที่อันดับสูงขึ้น ($B_2, B_3, \ldots$) ในการคำนวณ. เราจะวางเงามัลติโพลในลักษณะนี้ซ้ำไปมา จนกระทั่งได้ค่าของ ϕ_E และ ϕ_S ลู่เข้าสู่คำตอบ. รูปที่ 3.2.2.6 แสดงขั้นตอนการคำนวณรวม. สำหรับผลการคำนวณที่จะนำเสนอในหัวข้อต่อไป ผู้วิจัยได้ใช้มัลติโพลจนถึงอันดับที่ 400 และใช้จำนวนการทำซ้ำระหว่าง 5 ถึง 110 รอบ ขึ้นอยู่กับความหนาของฉนวนแข็งและอัตราส่วนสภาพยอม.

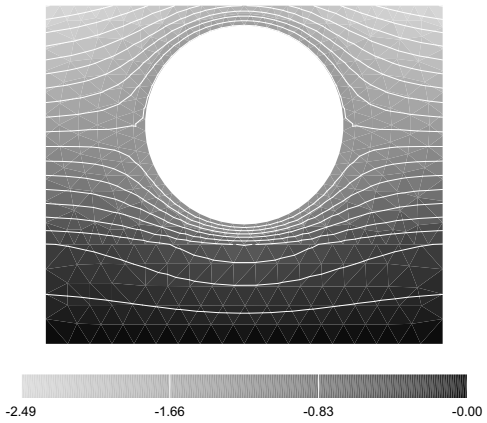


รูปที่ 3.2.2.6 ขั้นตอนวิธีการคำนวณ.

3.2.2.3 ผลการคำนวณและการวิเคราะห์ผล

ความสัมพันธ์ระหว่างระยะห่าง d ต่อสนามไฟฟ้าและแรง

รูปที่ 3.2.2.7 แสดงการกระจายของศักย์ไฟฟ้าในบริเวณใกล้กับตัวนำทรงกลม สำหรับกรณีของ $t/r_P = 1.0$, $d/r_P = 1.2$ และ $\varepsilon_S/\varepsilon_E = 4$. ศักย์ไฟฟ้าในรูปถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วยตัวประกอบ $E_0 r_P$ และแสดงค่าตามสเกลสีเทา ซึ่งมีรายละเอียดตามแถบสีทางด้านล่าง. จากเส้นศักย์ไฟฟ้าเท่า เราเห็นได้ว่า การเพิ่มขึ้นของสนามเกิดขึ้นอย่างชัดเจนที่บริเวณใกล้กับผิวของตัวนำทรงกลม. สนามไฟฟ้าที่เพิ่มสูงนี้จะเกิดขึ้นอย่างมากที่แกประหว่างตัวนำทรงกลมและฉนวนแข็ง. สนามไฟฟ้าค่าสูงสุดเกิดขึ้นที่จุด **c** ในรูปที่หนึ่ง และมีค่าเท่ากับ $3E_0$ ในสภาวะที่ไม่มีระนาบอิเล็กโตรดและฉนวนแข็งอยู่. เมื่อมีระนาบอิเล็กโตรด แต่ไม่มีฉนวนแข็ง (นั่นคือกรณีที่ $\varepsilon_S/\varepsilon_E = 1$) สนามไฟฟ้าสูงสุดมีค่าเพิ่มขึ้นเป็น $3.14E_0$. การมีอยู่ของฉนวนแข็งที่มี $\varepsilon_S/\varepsilon_E > 1$ ทำให้สนามไฟฟ้าสูงสุดมีค่าเพิ่มขึ้นไปอีก ซึ่งเท่ากับ $4.44E_0$ ในกรณีที่แสดงในรูปที่ 3.2.2.7.



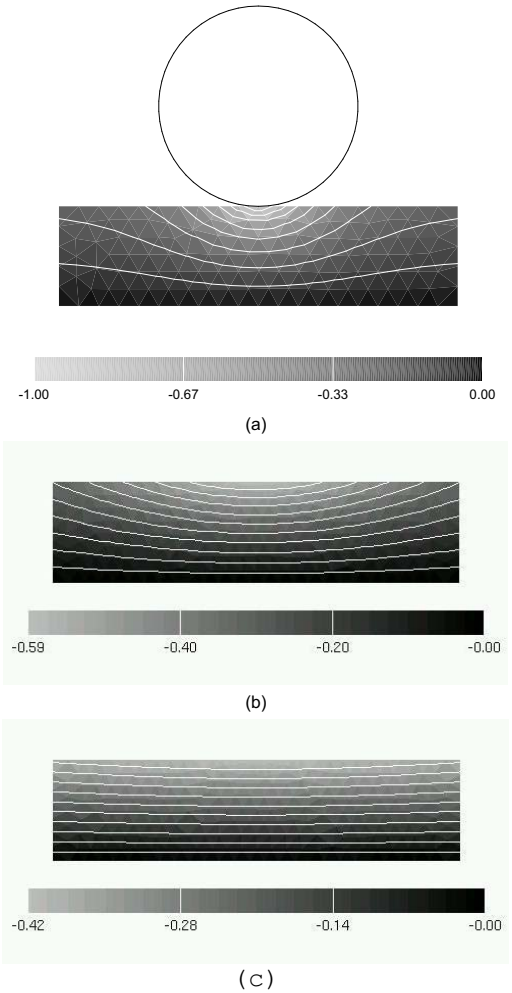
รูปที่ 3.2.2.7 การกระจายของศักย์ไฟฟ้าในกรณีของ $t/r_P = 1.0$, $d/r_P = 1.2$ และ $\varepsilon_S/\varepsilon_E = 4$.

รูปที่ 3.2.2.8 แสดงค่าสนามไฟฟ้าสูงสุด เป็นฟังก์ชันของระยะห่าง $d/r_P - 1$ ซึ่งถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานแล้ว สำหรับกรณีของ $t/r_P = 1$ และ 0.01. จากรูป เราสามารถเห็นได้อย่างชัดเจนว่า ผลของฉนวนแข็งสามารถละเลยได้ถ้า $d/r_P \geq 2$. ที่ค่า d/r_P ต่ำกว่านี้ สนามไฟฟ้าสูงสุดเพิ่มขึ้นตามการลดลงของระยะห่าง. การเพิ่มของอัตราส่วนสภาพยอมก็ทำให้สนามไฟฟ้าสูงสุดมีค่าสูงขึ้นเช่นเดียวกัน. ถ้าหากระยะห่างมีค่าต่ำเพียงพอ สนามไฟฟ้าจะลู่เข้าสู่ค่าอิ่มตัว ซึ่งขึ้นอยู่กับอัตราส่วนสภาพยอม $\varepsilon_S/\varepsilon_E$. สังเกตว่า สนามไฟฟ้าเปลี่ยนค่าเป็นฟังก์ชันของระยะห่างแม้ $\varepsilon_S/\varepsilon_E = 1$ เนื่องจากผลของระนาบอิเล็กโตรด ดังที่ได้กล่าวมาแล้วนั่นเอง.

การจัดเรียงของปัญหาที่เราสนใจเป็นแบบสมมาตรรอบแกนหมุน ทำให้ได้แรงลัพธ์บนตัวนำทรงกลมมีทิศทางอยู่ในแนวดิ่งเท่านั้น. แรง F_z ในแนวดิ่ง มีทิศทางลง ดึงดูดให้ตัวนำทรงกลมเข้าสู่ระนาบอิเล็กโตรด. รูปที่ 3.2.2.9 แสดงค่าของ F_z ซึ่งทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย $F_0 = \varepsilon_E E_0^2 r_P^2/2$ เป็นฟังก์ชันของระยะห่าง. แรงที่เกิดขึ้นมีพฤติกรรมใกล้เคียงกับสนามไฟฟ้าสูงสุดในรูปที่ 3.2.2.8. อย่างไรก็ตาม ขนาดของแรงไม่สามารถประมาณจากการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าสูงสุด $E_{\max}$ ได้ เนื่องจากสนามไฟฟ้ามีค่าไม่สม่ำเสมอสูงมาก

สนามไฟฟ้าและแรงภายในฉนวนแข็ง เมื่อทรงกลมสัมผัสกับฉนวนแข็ง

รูปที่ 3.2.2.10 แสดงการกระจายของสนามไฟฟ้าภายในฉนวนแข็งซึ่งสัมผัสกับตัวนำทรงกลม($d/r_P = 1$) เมื่อ $t/r_P = 1$, 0.1 และ 0.01. รูปที่ 3.2.2.10b และ c แสดงภาพขยายขนาด $4t \times t$ ของฉนวนแข็ง ในกรณีของ $d/r_P = 0.1$ และ 0.01 ตามลำดับ เพื่อให้สามารถเห็นการกระจายของศักย์ไฟฟ้าได้อย่างชัดเจนมากขึ้น. จุดสัมผัส **c** อยู่ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของผิวขอบเขตด้านบนของฉนวนแข็งในรูป. ในรูปที่ 3.2.2.10 ศักย์ไฟฟ้ามีค่าต่ำที่สุดที่ **c** และสูงที่สุด(เป็นศูนย์)ที่ขอบเขตล่างซึ่งติดกับระนาบอิเล็กโตรด. เราสนใจค่าสนามไฟฟ้าเฉลี่ยตามแนวแกนสมมาตร ซึ่งเป็นเส้นในแนวดิ่งที่ผ่าน **c**. ทั้งนี้เนื่องจากว่าเส้นแนวนี้เป็นระยะที่สั้นที่สุดระหว่างตัวนำทรงกลมกับระนาบอิเล็กโตรด. จากค่าศักย์ไฟฟ้าต่ำที่สุดที่แสดงในรูปที่ 3.2.2.10 เราเห็นได้อย่างชัดเจนว่า สนามไฟฟ้าเฉลี่ยบนเส้นนี้เพิ่มขึ้นเมื่อ t ลดลง.



รูปที่ 3.2.2.10 การกระจายศักย์ไฟฟ้าภายในฉนวนแข็งที่สัมผัสอยู่กับตัวนำทรงกลมเมื่อ (a) $t/r_P = 1$, (b) $t/r_P = 0.1$ และ (c) $t/r_P = 0.01$.

รูปที่ 3.2.2.11 แสดงค่าเฉลี่ยของสนามไฟฟ้า E_{av} บนแกนสมมาตร เป็นฟังก์ชันของ t/r_P สำหรับค่า $\varepsilon_S/\varepsilon_E$ ต่างๆ. รูปนี้แสดงว่า E_{av} มีค่าประมาณเท่ากับ $\varepsilon_E E_0/\varepsilon_S$ สำหรับฉนวนแข็งที่หนา. E_{av} เพิ่มขึ้นเมื่อความหนา t/r_P ลดลง. การเพิ่มขึ้นของ E_{av} มีเพียงเล็กน้อยที่ t/r_P ค่าสูง แต่จะเร็วขึ้นอย่าง

3.3 การสร้างตัวเป็นโซ่ของอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้า

หัวข้อนี้เป็นผลการศึกษาพลศาตร์ของอนุภาคเมื่อได้รับการกระตุ้นจากสนามไฟฟ้าภายนอก. การศึกษาแบ่งเป็นสองขั้นตอนหลักๆ ก็คือ การศึกษากับอนุภาคจำนวนน้อย(20 อนุภาค) ซึ่งทำให้เกิดเพียงโซ่เดี่ยวในตัวกลางของเหลว และการศึกษากับอนุภาคจำนวนมากขึ้น (67 อนุภาค) ซึ่งทำให้เกิดเป็นกลุ่มโซ่ในตัวกลางของเหลว.

3.3.1 การก่อตัวของอนุภาคเป็นโซ่เดี่ยว

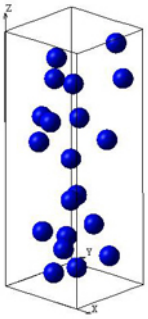
ระบบของอนุภาคฉนวนหลายชนิดที่ใช้งานอยู่ในปัจจุบัน เช่น ของไหลอีอาร์ อาศัยปรากฏการณ์การรวมตัวของอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้า ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงทางกายภาพ (ความหนืดปรากฏ). ในการใช้งานเหล่านี้ การจำลองด้วยคอมพิวเตอร์เป็นเครื่องมือที่สำคัญอย่างหนึ่ง สำหรับศึกษาคุณสมบัติของระบบ. โดยการจำลองเชิงเลข เราสามารถแยกพิจารณาพารามิเตอร์ต่างๆ ทางกายภาพของระบบ ซึ่งในทางปฏิบัติปรากฏอยู่พร้อมกัน และเปลี่ยนแปลงไปด้วยกัน. การศึกษาด้วยการจำลองเชิงพลศาสตร์ของของไหลอีอาร์ ที่มีอยู่ในปัจจุบัน มักใช้โมเดลไดโพลสำหรับคำนวณแรงระหว่างอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้า [58 – 61]. อย่างไรก็ตาม แรงที่ประมาณด้วยโมเดลไดโพล มีขนาดเล็กกว่าแรงจริงที่เกิดขึ้นมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่ออนุภาคอยู่ใกล้กัน. มีโมเดลที่แม่นยำกว่านี้ สำหรับการประมาณแรงโดยใช้สมการแรงที่รวมผลของพจน์มัลติโพลอันดับสูงขึ้นไป [62] แต่ก็เป็นเฉพาะกรณีของสองอนุภาคเท่านั้น. วิธีที่รวมคิดผลของแรงระหว่างมัลติโพลอย่างสมบูรณ์ก็มีการนำเสนอแล้วเช่นเดียวกัน [63]. ทว่า วิธีนี้ต้องใช้การตั้งระบบสมการเชิงเส้น และแก้ระบบสมการนี้ ทำให้ไม่เหมาะสมต่อการนำมาใช้ในการจำลองเชิงพลศาสตร์ตามเวลาของอนุภาค.

การวิจัยในที่นี้ใช้โมเดลมัลติโพลในการประมาณแรงระหว่างอนุภาค. ผู้วิจัยใช้วิธีเงามัลติโพล และวิธีกระจายมัลติโพลใหม่ ในการคำนวณสนามไฟฟ้าและเงาของมัลติโพลที่เหมาะสม [11]. หลังจากนั้น แรงจะถูกคำนวณด้วยสมการเชิงวิเคราะห์ที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ เช่นเดียวกัน. ข้อดีของวิธีนี้ เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีที่ใช้โมเดลไดโพล ก็คือ ปฏิกิริยารวมระหว่างอนุภาคจะถูกพิจารณาในการคำนวณ. นอกจากนี้ เราสามารถปรับเวลาที่ใช้ในการคำนวณ และความแม่นยำของการประมาณแรงได้ โดยการเลือกอันดับสูงสุดของมัลติโพลที่ใช้ในการคำนวณ และจำนวนรอบการทำซ้ำที่ใช้ในวิธีเงาประจุ. ในขั้นต้นนี้ ผู้วิจัยได้ทำการจำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาค ซึ่งก่อนตัวเป็นโซ่เดี่ยวในของไหลอีอาร์ และเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากการใช้โมเดลไดโพล.

3.3.1.1 ระบบทางกายภาพที่พิจารณาในการวิจัย

ระบบของอนุภาคที่ศึกษาเป็นระบบของอนุภาคฉนวนภายในฉนวนเหลว ที่อยู่ระหว่างอิเล็กโตรดคู่ขนานขนาดเท่ากับ $L_x \times L_y$ ณ $z = 0$ และ $z = L_z$. อนุภาคฉนวนเป็นทรงกลม มีค่าคงตัวไดอิเล็กตริก $\varepsilon_p = 8$, มีความหนาแน่น $\rho = 1 \ \ \mathrm{g/cm^3}$ และมีเส้นผ่านศูนย์กลาง $\sigma = 10 \ \mu\mathrm{m}$. ฉนวนเหลวมีค่าคงตัวไดอิเล็กตริก $\varepsilon_f = 2$. ความหนืดของของไหลเท่ากับ 0.02 Pa-s. พารามิเตอร์สำหรับการจำลองเหล่านี้อ้างอิงจากของไหลอีอาร์จริงของอนุภาคอลูมินาในน้ำมันซิลิโคน [59, 61 – 62]. สนามไฟฟ้าภายนอกขนาด 3 kV/mm ถูกป้อนให้กับของไหลผ่านทางอิเล็กโตรดคู่ขนาน. (ค่าสนามไฟฟ้านี้เป็นค่าที่สามารถทำให้เกิดสายโซ่ภายในของ

ไหลได้ [61].) ขนาดของอิเล็กโตรดที่ใช้ในการจำลองคือ $L_x = L_y = 5\sigma$, $L_z = 14\sigma$ และจำนวนของอนุภาคที่ใช้คือ 20. สังเกตว่า มิติของระบบ และจำนวนอนุภาคในที่นี้ ถูกเลือกให้สามารถเกิดสายโซ่เดี่ยวภายในระบบได้ เมื่อสนามไฟฟ้าที่ใช้มีขนาดเพียงพอ. สภาวะเริ่มต้นของระบบของไหลอีอาร์แสดงอยู่ในรูปที่ 3.3.1.1 โดยมีตำแหน่งของอนุภาคถูกกำหนดแบบสุ่ม.



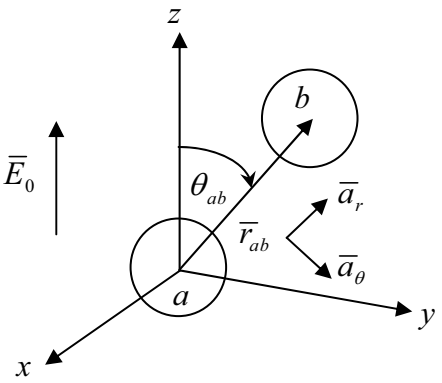
รูปที่ 3.3.1.1 ตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคซึ่งกระจายอยู่แบบสุ่ม.

3.3.1.2 วิธีการจำลอง

ก. การคำนวณแรงไดอิเล็กโตรโฟเรติก

ก-1. แรงจากโมเดลไดโพล

พิจารณาแรงคู่ปฏิกิริยาระหว่างอนุภาค a ที่ $\bar{r}_a$ และอนุภาค b ที่ $\bar{r}_b$ ดังแสดงในรูปที่ 3.3.1.2. โมเดลไดโพลประมาณแรงระหว่างอนุภาคทั้งสองแบบง่ายที่สุด โดย [58]



รูปที่ 3.3.1.2 ระบบพิกัดของคู่อนุภาค.

$$\bar{F}_{ab}^{dip} = \left(\frac{3|\bar{\mathrm{p}}|^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_f |\bar{r}_{ab}|^4} \right) \left[\left(1 - 3\cos^2\theta_{ab}\right)\bar{a}_r - \sin\left(2\theta_{ab}\right)\bar{a}_\theta \right] \qquad (3.3.1.1)$$

เมื่อ

$$\bar{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\pi\varepsilon_0\varepsilon_f\sigma^3 \frac{\left(\varepsilon_p - \varepsilon_f\right)}{\left(\varepsilon_p + 2\varepsilon_f\right)} \bar{E}_0$$

เป็นไดโพลที่ถูกเหนี่ยวนำขึ้นที่แต่ละอนุภาคเนื่องจากสนามไฟฟ้า $\overline{E}_0$. $\overline{r}_{ab} = \overline{r}_a - \overline{r}_b$ และ θ_{ab} เป็นมุมระหว่าง $\overline{r}_{ab}$ และแกน z. $\overline{a}_r = \overline{r}_{ab} / |\overline{r}_{ab}|$, $\overline{a}_\theta = \overline{a}_r \times (\overline{a}_r \times \overline{a}_z) / |\overline{a}_r \times (\overline{a}_r \times \overline{a}_z)|$ และ $\overline{a}_z$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแกน z ดังแสดงในรูปที่ 3.3.1.2.

ก-2 แรงจากโมเดลมัลติโพล

ดังที่ได้กล่าวมาแล้วว่า โมเดลไดโพลให้การประมาณแรงที่ไม่ดี เมื่ออนุภาคทั้งสองอยู่ใกล้กัน สาเหตุของความคลาดเคลื่อนก็คือ ผลของมัลติโพลอันดับที่สูงขึ้นไป ซึ่งถูกละเลยในโมเดลไดโพล. แรงไดอิเล็กโตรโฟเรติกที่รวมผลของมัลติโพลบนอนุภาค a สามารถแสดงได้ตามอินทิกรัล

$$\overline{F}_a^{dep} = \int_{r=\sigma/2} \varepsilon_f q_{total} \left[-\nabla (\psi_a)_{ext} \right] dS_a \qquad (3.3.1.2)$$

เมื่อ q_{total} เป็นความหนาแน่นประสิทธิผลของประจุ ซึ่งเท่ากับขนาดของประจุจริงบนตำแหน่งผิวอนุภาค ที่ทำให้เกิดแรงดันเหนี่ยวนำเท่ากับกรณีที่มีอนุภาคฉนวนอยู่ [8], S_a เป็นผิวของอนุภาค และ $(\psi_a)_{ext}$ เป็นศักย์ไฟฟ้าสถิตบนอนุภาค เนื่องจากแหล่งกำเนิดศักย์ทั้งหมดที่อยู่นอกอนุภาค a.

สมการที่ (3.3.1.2) แสดงในรูปทั่วไป สำหรับอนุภาคฉนวนใดๆ. ในกรณีของอนุภาคสองตัวที่อยู่ใกล้เคียงกัน ดังแสดงในรูปที่ 3.3.1.2, $(\psi_a)_{ext}$ เป็นศักย์ไฟฟ้ารอบอนุภาคเนื่องจากสนามไฟฟ้าภายนอก และเนื่องจากประจุที่เหนี่ยวนำขึ้นที่อนุภาค b. เพื่อให้ได้สมการที่ (3.3.1.2) ในรูปของมัลติโพล เราจะให้จุดศูนย์กลางของอนุภาค a เป็นจุดกำเนิด และแสดงศักย์ไฟฟ้า $(\psi_a)_I$ ภายในอนุภาค และศักย์ไฟฟ้า $(\psi_a)_E$ ภายนอกอนุภาค ดังต่อไปนี้ [11]

$$(\psi_a)_{\mathrm{I}} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{j} L_{j,k} r^j \overline{P}_{j,|k|} (\cos\theta) e^{ik\varphi} \qquad (3.3.1.3)$$

$$(\psi_a)_{\mathrm{E}} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{j} \left[M_{j,k} r^j + \frac{B_{j,k}}{r^{j+1}} \right] \overline{P}_{j,|k|} (\cos\theta) e^{ik\varphi} \qquad (3.3.1.4)$$

เมื่อ (r, θ, φ) เป็นพิกัดทรงกลม. ในสมการข้างบนนี้ $L_{j,k}$, $M_{j,k}$, และ $B_{j,k}$ เป็นสัมประสิทธิ์ของศักย์ไฟฟ้า ที่จะถูกคำนวณหาออกมา. $\overline{P}_{j,|k|}$ เป็นฟังก์ชันเลอจองดร์ที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานด้วย $\sqrt{\frac{(j-|k|)!}{(j+|k|)!}}$.

สัมประสิทธิ์ทั้งสามไม่ได้เป็นอิสระต่อกันและกัน แต่เราสามารถกำหนดความสัมพันธ์ที่ทำให้คำนวณ $L_{j,k}$ และ $B_{j,k}$ จาก $M_{j,k}$ ได้ เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตของศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าบนผิวของอนุภาคเป็นจริง [11]. จากสมการที่ (3.3.1.3) และ (3.3.1.4) ความหนาแน่นของประจุประสิทธิผล และศักย์ไฟฟ้าภายนอกบนผิวของอนุภาค a สามารถเขียนได้เป็น

$$q_{total} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{j} \left[\frac{\varepsilon_0 (2j+1)}{(\sigma/2)^{j+2}} \right] B_{j,k} \overline{P}_{j,|k|} (\cos\theta) e^{ik\varphi} \qquad (3.3.1.5)$$

$$(\psi_a)_{ext} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{j} M_{j,k} r^j \overline{P}_{j,|k|} (\cos\theta) e^{ik\varphi} \qquad (3.3.1.6)$$

โดยการใช้สมการที่ (3.3.1.2), (3.3.1.5) และ (3.3.1.6) องค์ประกอบในพิกัดคาร์ทีเซียนทั้งสามของแรงไดอิเล็กโตรโฟเรติกสามารถคำนวณหาได้จาก $B_{j,k}$ และ $M_{j,k}$ ดังต่อไปนี้. (ดัชนีบน dep ชี้บ่งว่าแรงที่กล่าวถึงเป็นแรงไดอิเล็กโตรโฟเรติก)

$$\frac{F_{a,x}^{dep}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_f}=\sum_{j=0}^{\infty}2\mathrm{Re}\left[M_{j+1,1}\right]\left(B_{j,0}\right)\beta\left(j+1\right)-\sum_{j=1}^{\infty}2\mathrm{Re}\left[B_{j,1}\right]\left(M_{j+1,0}\right)\beta\left(j\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}2\mathrm{Re}\left[\left(B_{j,1}\right)\left(M_{j+1,-2}\right)\right]\beta\left(j+2\right)$$

$$+\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{j}2\mathrm{Re}\left[B_{j,k}\left(M_{j+1,-(k+1)}-M_{j+1,-(k-1)}\right)\right]\beta\left(j+k+1\right) \qquad (3.3.1.7)$$

$$\frac{F_{a,y}^{dep}}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_f}=-\sum_{j=0}^{\infty}2\,\mathrm{Im}\left[M_{j+1,1}\right]\left(B_{j,0}\right)\beta\left(j+1\right)+\sum_{j=1}^{\infty}2\,\mathrm{Im}\left[B_{j,1}\right]\left(M_{j+1,0}\right)\beta\left(j\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}2\,\mathrm{Im}\left[\left(B_{j,1}\right)\left(M_{j+1,-2}\right)\right]\beta\left(j+2\right)$$

$$+\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{j}2\,\mathrm{Im}\left[B_{j,k}\left(M_{j+1,-(k+1)}+M_{j+1,-(k-1)}\right)\right]\beta\left(j+k+1\right) \qquad (3.3.1.8)$$

$$\frac{F_{a,z}^{dep}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_f}=-\sum_{j=0}^{\infty}\left(B_{j,0}\right)\left(M_{j+1,0}\right)\left(j+1\right)-\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}2\,\mathrm{Re}\left[\left(B_{j,k}\right)\left(M_{j+1,-k}\right)\right]\sqrt{\left(j+1\right)^2-k^2} \qquad (3.3.1.9)$$

เมื่อ $\beta\left(j\right)=\sqrt{j\left(j+1\right)}$. สัญลักษณ์ $\mathrm{Re}[\ ]$ และ $\mathrm{Im}[\ ]$ แทนส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน.

ก-3. การคำนวณหาค่าของสัมประสิทธิ์ $B_{j,k}$ และ $M_{j,k}$

โดยใช้หลักการของวิธีเงาประจุ เราคำนวณหาค่าของ $B_{j,k}$ และ $M_{j,k}$ ในลักษณะของกระบวนการทำซ้ำด้วยขั้นตอนตามที่แสดงไว้แล้วในเอกสารอ้างอิง [39, 64]. สำหรับแต่ละอนุภาคในระบบที่มี N อนุภาค ขั้นตอนการคำนวณสามารถอธิบายอย่างย่อๆ ได้ โดยมีดัชนีบน *(n)* แสดงถึงจำนวนรอบของการทำซ้ำดังต่อไปนี้.

1. กำหนด $M_{j,k}^{(0)}$ ซึ่งแสดงค่าศักย์ไฟฟ้าเริ่มต้น ψ_{E_0} เนื่องจากระนาบอิเล็กโตรด. สำหรับการจัดเรียงที่พิจารณาในที่นี้ ถ้าอนุภาคอยู่ ณ จุด $\bar{c}$ เราจะได้ ψ_{E_0} ณ จุด $\bar{p}$ เป็น
   $$\psi_{E_0}=M_{0,0}^{(0)}+M_{1,0}^{(0)}r\bar{P}_{1,0}\left(\cos\theta\right) \qquad (3.3.1.10)$$
   เมื่อ $M_{0,0}^{(0)}$ เป็นศักย์ไฟฟ้าที่ $\bar{c}$ เนื่องจาก $\bar{E}_0$ และ $M_{1,0}^{(0)}=E_0$.
2. คำนวณ $B_{j,k}^{(n)}$ จาก $M_{j,k}^{(n)}$ ตามวิธีการในเอกสารอ้างอิง [11] ดังนี้

$$B_{j,k}^{(n)} = \left[\frac{\left(\varepsilon_f - \varepsilon_p\right)}{\left(\varepsilon_f + \varepsilon_p\right) j + \varepsilon_f} \right] \left(\frac{\sigma}{2} \right)^{2j+1} M_{j,k}^{(n)} \qquad (3.3.1.11)$$

3. วางเงามัลติโพล $\tilde{B}_{j,k}^{(n)}$ เนื่องจากอิเล็กโตรดทั้งสอง เพื่อให้เงื่อนไขขอบเขตบนระนาบอิเล็กโตรดเป็นจริง.
4. กระจายศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากมัลติโพล $\tilde{B}_{j,k}^{(n)}$ ที่เกิดจากระนาบอิเล็กโตรด และที่เกิดจาก $B_{j,k}^{(n)}$ ของอนุภาคอื่น ๆ อีก $N-1$ อนุภาค มายังรอบจุด $\overline{c}$. ดังนั้น จะได้สนามไฟฟ้าภายนอก สำหรับอนุภาคที่กำลังพิจารณา เป็น

$$\psi_{ext} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-j}^{j} M_{j,k}^{(n+1)} r^j \overline{P}_{j,|k|}\left(\cos\theta\right) e^{ik\varphi} \qquad (3.3.1.12)$$

เมื่อ $M_{j,k}^{(n+1)}$ ได้จากกระจายมัลติโพลใหม่ในขั้นตอนนี้.

5. ทำขั้นตอนที่ 2 ถึง 4 ซ้ำ. ศักย์ไฟฟ้าจะอยู่ในรูปสุดท้ายเป็น

$$\psi_{\mathrm{E}} = \sum_{j=1}^{N_{mp}} \sum_{k=-j}^{j} \sum_{n=1}^{N_{iter}} \left[M_{j,k}^{(n+1)} r^j + \frac{B_{j,k}^{(n+1)}}{r^{j+1}} \right] \overline{P}_{j,|k|}\left(\cos\theta\right) e^{ik\varphi} \qquad (3.3.1.13)$$

เมื่อ N_{mp} และ N_{iter} เป็นอันดับสูงสุดของมัลติโพลที่ใช้ และจำนวนรอบการทำซ้ำในการคำนวณตามลำดับ.

ค่าที่ถูกต้องของแรงสามารถคำนวณได้จากขั้นตอนดังกล่าว โดยใช้อันดับ N_{mp} ของมัลติโพลที่มากเพียงพอ และ ใช้จำนวนรอบการทำซ้ำ N_{iter} จนกระทั่งได้ค่าศักย์ลู่เข้าสู่คำตอบจริง. อย่างไรก็ตาม ถ้าหากค่าของพารามิเตอร์ทั้งสองสูงเกินไป การคำนวณจะใช้เวลานานมาก ทำให้ไม่เหมาะสมที่จะใช้ในการจำลองแบบพลศาตร์ ซึ่งเราต้องการทำในที่นี้. ดังนั้น ผู้วิจัยจึงได้ทดลองใช้อันดับ N_{mp} จนถึงอันดับที่ 4 และใช้จำนวนรอบในการทำซ้ำ 2 รอบ. ผลของ N_{mp} และ N_{iter} ต่อค่าที่ได้จากการคำนวณจะแสดงอยู่ในหัวข้อถัดไป. เนื่องจากปฏิกิริยาระหว่างอนุภาคทั้งหมดที่อยู่ในระบบ ถูกรวมผลในการคำนวณแล้ว เราจึงสามารถคาดหวังว่า แรงที่ได้จะมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงคล้ายคลึงกับค่าแรงที่แม่นยำ ซึ่งได้จากการคำนวณโดยใช้ $N_{mp} = 100$.

ข. การคำนวณตำแหน่งของอนุภาคที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

ให้อนุภาค a มีมวล m อยู่ที่ตำแหน่ง $\overline{r}_a$ ภายในฉนวนเหลว ณ เวลา t . การเคลื่อนที่ของอนุภาคเป็นไปตามสมการ

$$m \frac{d^2 \overline{r}_a}{dt^2} = \overline{F}_a^{dep} + \overline{F}_a^{rep} + \overline{F}_a^{hyd} \qquad (3.3.1.14)$$

เมื่อ $\overline{F}_a^{dep}$ เป็นแรงไดอิเล็กโตรโฟเรติก ดังที่ได้อธิบายไว้แล้ว. $\overline{F}_a^{rep}$ เป็นแรงผลักที่เรากำหนดให้มี เพื่อป้องกันการซ้อนทับของอนุภาค และการซ้อนทับของอนุภาคกับอิเล็กโตรด. $\overline{F}_a^{hyd}$ เป็นแรงไฮโดรไดนามิกส์บนอนุภาค. แรง $\overline{F}_a^{hyd}$ สำหรับอนุภาคทรงกลมเป็นไปตามสมการของสโตรก

$$\overline{F}_a^{hyd} = -3\pi\sigma\eta \frac{d\overline{r}_a}{dt} \qquad (3.3.1.15)$$

สำหรับของไหลอีอาร์ทั่วไป เราสามารถละเลยผลของความเร่งทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (3.3.1.14) ได้ เนื่องจากแรงเนื่องจากความหนืดมีความเด่นกว่ามาก. ดังนั้น เราจะได้ว่า

$$3\pi\sigma\eta\frac{d\bar{r}_a}{dt}=\bar{F}_a^{dep}+\bar{F}_a^{rep} \qquad (3.3.1.16)$$

เพื่อให้สะดวกต่อการคำนวณ องค์ประกอบต่อไปนี้ถูกนำมาใช้ปรับสมการที่ (3.3.1.16) ให้เป็นบรรทัดฐาน

$$F_0=\frac{1}{16}\varepsilon_0\varepsilon_f\alpha^2\sigma^2E_0^2$$

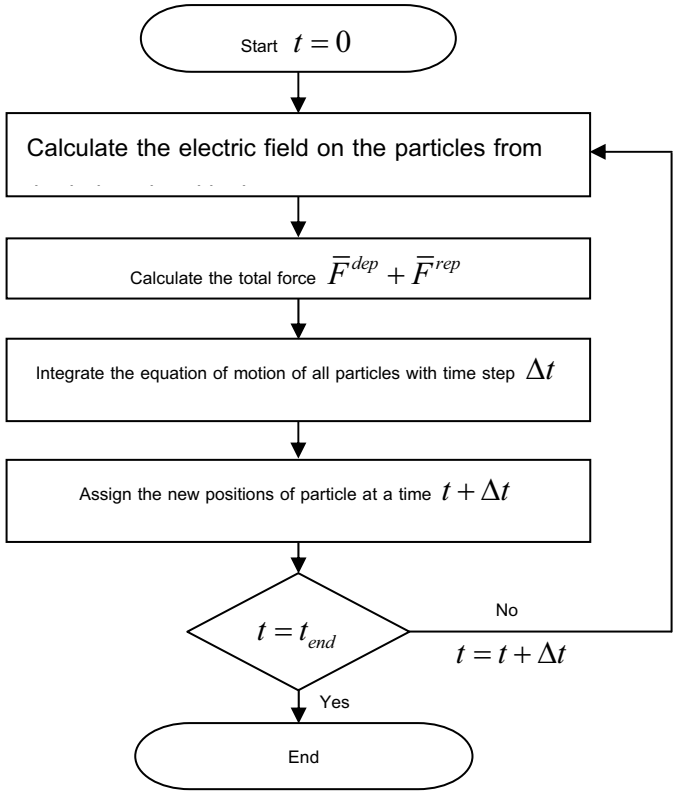
$$t_0=3\pi\eta\sigma^2/F_0$$

$$r_0=\sigma$$

เมื่อ $\alpha=\left(\varepsilon_p-\varepsilon_f\right)/\left(\varepsilon_p+2\varepsilon_f\right)$. เราสามารถเขียนสมการที่ (3.3.1.16) ในรูปที่ไม่มีหน่วยได้เป็น

$$\frac{d\bar{r}_a^*}{dt^*}=\bar{F}_a^{dep*}+\bar{F}_a^{rep*} \qquad (3.3.1.17)$$

สัญลักษณ์ * ในสมการบ่งชี้ตัวแปรที่ถูกทำให้เป็นบรรทัดฐานแล้ว. โดยการใช้สมการที่ (3.3.1.17) เราสามารถคำนวณตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา t^* ด้วยกระบวนขั้นตอนวิธี Runge-Kutta อันดับที่ 4. รูปที่ 3.3.1.3 แสดงขั้นตอนสำหรับคำนวณตำแหน่งของอนุภาค. เราติดตามการเคลื่อนที่ของอนุภาค เพื่อตรวจดูการเกิดโซ่ที่เชื่อมต่ออิเล็กโตรด โดยทดลองใช้โมเดลไดโพล และโมเดลมัลติโพลในการประมาณแรง. ทั้งนี้เนื่องจากว่า การก่อตัวเป็นโซ่ของอนุภาคในของเหลว ส่งผลโดยตรงต่อการเปลี่ยนแปลงความหนืดปรากฏของของไหลอีอาร์นั่นเอง.

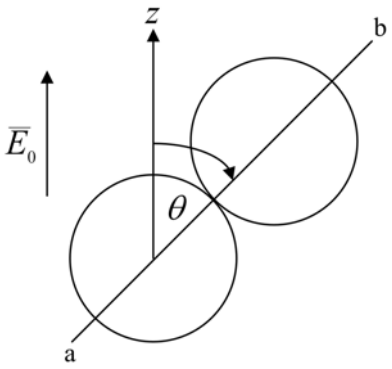


รูปที่ 3.3.1.3 ขั้นตอนการคำนวณตำแหน่งของอนุภาค.

3.3.1.3 ผลการคำนวณ

ก. แรงระหว่างอนุภาคทรงกลมที่สัมผัสกันอยู่

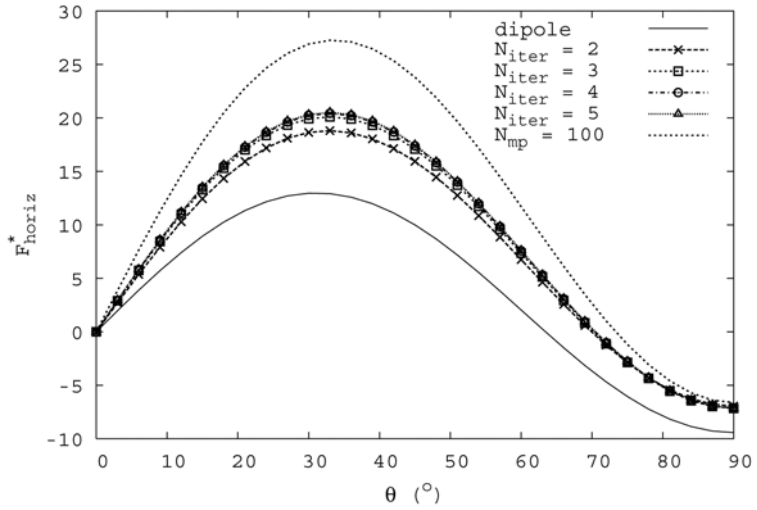
ผลการคำนวณในส่วนนี้แสดงความแตกต่างของแรงที่ได้จากการประมาณด้วยโมเดลไดโพล และแรงที่ได้จากโมเดลมัลติโพล. ผู้วิจัยเริ่มต้นจากกรณีของทรงกลมที่สัมผัสกันอยู่ภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก $\overline{E}_0$ ที่อยู่ในแนวดิ่ง ดังแสดงในรูปที่ 3.3.1.4. นั่นคือ เรามองว่า ระนาบอิเล็กโตรดอยู่ห่างออกไปจากอนุภาคมาก จนสามารถละเลยผลของเงาเนื่องจากอิเล็กโตรดได้. มุม θ เป็นมุมระหว่างแกน z และเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางของอนุภาคทั้งสอง. ค่าคงตัวไดอิเล็กตริกของอนุภาคและของตัวกลางที่อยู่ล้อมรอบเท่ากับ $\varepsilon_p = 8$ และ $\varepsilon_f = 2$ ตามลำดับ. เราเลือกการจัดเรียงแบบนี้ในการพิจารณาค่าแรง เพราะว่าแรงไดอิเล็กโตรโฟเรติกมีค่าสูงสุดเมื่ออนุภาคสัมผัสกัน. แรงที่ถูกคำนวณโมเดลมัลติโพลขึ้นอยู่กับองค์ประกอบของตัวคือ จำนวนรอบ N_{iter} ของการทำซ้ำ และอันดับสูงสุด N_{mp} ของมัลติโพลที่ใช้. เพื่อที่ดูผลขององค์ประกอบทั้งสอง ผู้วิจัยได้คำนวณแรงแบบมัลติโพลที่ทำกับอนุภาคในรูปที่ 3.3.1.4 โดยแปรค่า N_{iter} และ N_{mp} สำหรับ $\sigma = 10$ μm และ E_0 = 3 kV/mm.



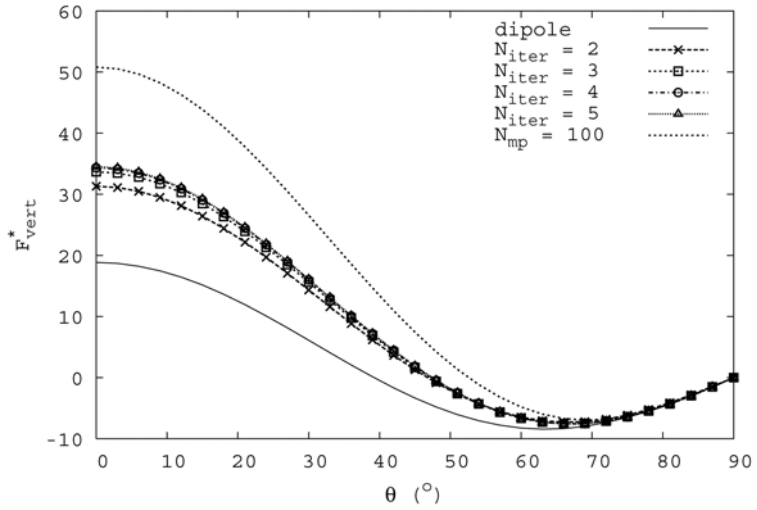
รูปที่ 3.3.1.4 ทรงกลมที่สัมผัสกันภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก.

ผลของ N_{iter} ต่อค่าแรงที่ได้ แสดงอยู่ในรูปที่ 3.3.1.5. แรง F_{horiz} ในแนวระดับ และ F_{vert} ในแนวดิ่ง คำนวณโดยใช้ $N_{mp} = 4$ และ N_{iter} = 2, 3, 4. เมื่อเปรียบเทียบกับแรงที่ได้จากโมเดลไดโพล และค่าแรงจริง(คำนวณด้วย $N_{mp} = 100$) เราสามารถเห็นได้ว่า แรงแบบมัลติโพลแปรกับ θ ในลักษณะเดียวกัน. แรง F_{horiz} และ F_{vert} เปลี่ยนจากแรงดูดเป็นแรงผลัก เมื่อ θ เปลี่ยนแปลงจาก 0 องศาถึง 90 องศา. (เครื่องหมายของแรงเปลี่ยนจากบวกเป็นลบ) แรง F_{horiz} และ F_{vert} เพิ่มขึ้นเมื่อ N_{iter} เพิ่มขึ้น ในขณะที่มีค่าสูงสุดที่ F_{horiz} สำหรับทุกๆ ค่าของ N_{iter} และมีค่าเป็นแรงผลักสูงสุดที่ $\theta = 33°$.

แรง F_{vert} ในแนวดิ่ง มีค่าสูงสุดเป็นแรงดูด เมื่ออนุภาคเรียงตัวตามทิศทางของสนามไฟฟ้าภายนอก $\overline{E}_0$. ค่าสูงสุดของแรง F_{horiz} และ F_{vert} สำหรับ N_{iter} = 2 มีขนาดเป็น 1.45 และ 1.66 เท่าของแรงที่ประมาณได้จากโมเดลไดโพล ตามลำดับ. สำหรับ N_{iter} = 3 และ 4 ขนาดของแรงมีค่าขึ้นกว่าในกรณีของ N_{iter} = 2 เล็กน้อย. เมื่อใช้ N_{iter} ค่าสูงขึ้น ผู้วิจัยพบว่า (ไม่ได้แสดงในที่นี้) การเพิ่มขึ้นของค่าแรงตาม N_{iter} มีอัตราที่ลดลง.

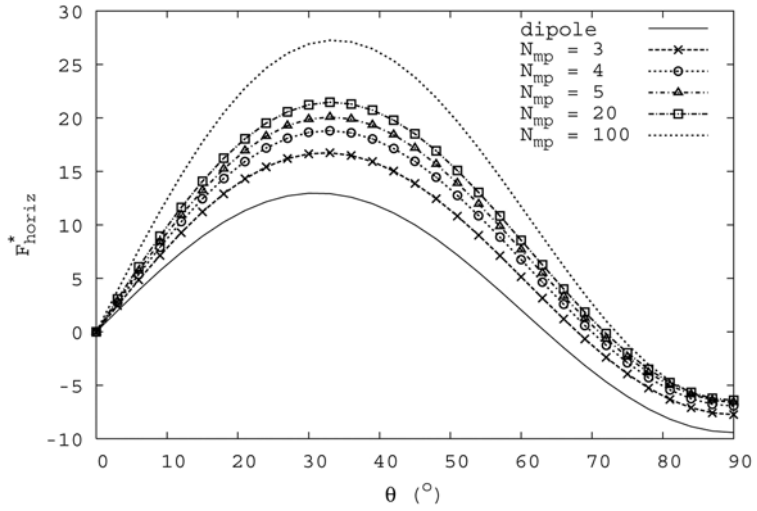


(ก)

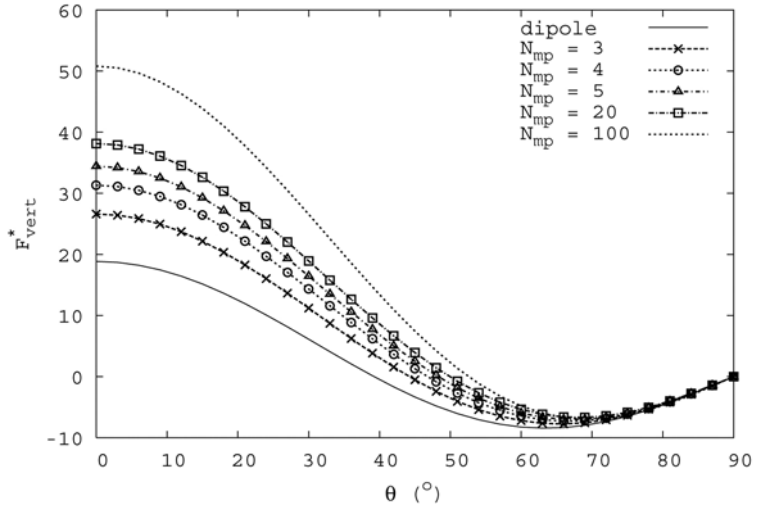


(ข)

รูปที่ 3.3.1.5 ผลของ N_{iter} ต่อแรงที่ทำกับอนุภาคล่างในรูปที่ 3.3.1.4. (ก) แรงในแนวระดับ และ (ข) แรงในแนวดิ่ง.



(ก)



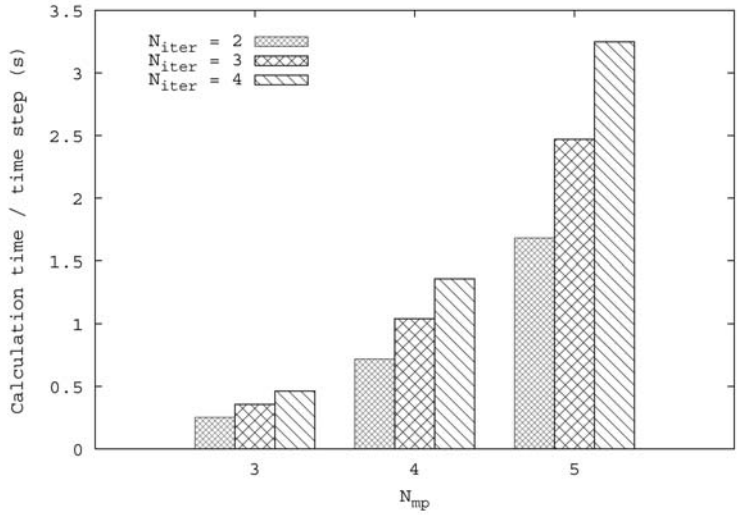
(ข)

รูปที่ 3.3.1.6 ผลของ N_{mp} ต่อแรงที่ทำกับอนุภาคล่างในรูปที่ 3.3.1.4. (ก) แรงในแนวระดับ และ (ข) แรงในแนวดิ่ง.

ในลักษณะเดียวกัน รูปที่ 3.3.1.6 แสดงแรง F_{horiz} และ F_{vert} ที่คำนวณได้จากโมเดลมัลติโพล โดยใช้ N_{iter} คงที่เท่ากับ 2 และใช้ N_{mp} ค่าต่างๆ. จากรูปที่ 3.3.1.6 เราสามารถเห็นได้อย่างชัดเจน ถึงค่าแรงที่ดีขึ้นจากโมเดลไดโพล เมื่อใช้โมเดลมัลติโพล. ตัวอย่างเช่น แรงสูงสุดในแนวระดับที่คำนวณจาก N_{mp} = 3, 4, 5, และ 20 มีค่าสูงกว่าแรงที่ได้จากโมเดลไดโพลถึง 1.29, 1.45, 1.55 และ 1.65 เท่า ตามลำดับ. นอกจากนี้ เรายังสังเกตได้ด้วยว่า อัตราการเพิ่มของ F_{horiz} และ F_{vert} ตาม N_{mp} ลดลง เมื่อ N_{mp} สูงขึ้น.

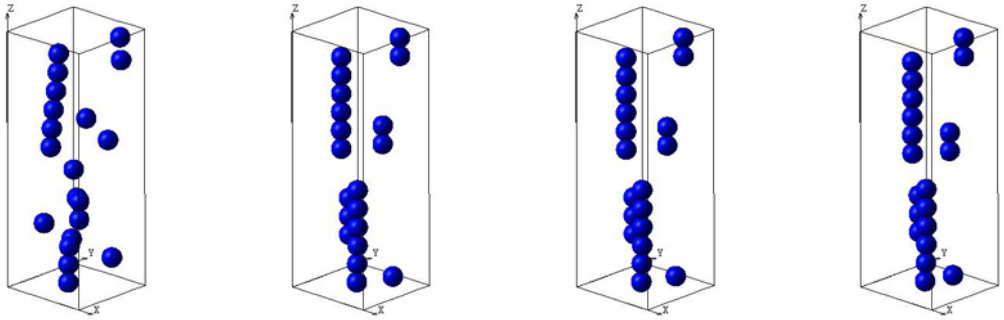
ข. ผลการจำลองของของไหลอีอาร์

สำหรับการจำลองตำแหน่งของอนุภาคในระบบของไหลอีอาร์ที่แสดงอยู่ในรูปที่ 3.3.1.2 ฐานเวลา(ในการทำให้เป็นบรรทัดฐาน)มีค่าเท่ากับ t_0 = 75 ms. กำหนดให้ อนุภาคเริ่มได้รับสนามไฟฟ้า ณ เวลา t = 0 และเคลื่อนที่เนื่องจากแรงไฟฟ้า. เราต้องการคำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคด้วย $\Delta t^* = 8\times10^{-5}$ เป็นจำนวน 50,000 รอบการทำซ้ำตามเวลา. พิจารณาเวลาที่ต้องใช้ในการคำนวณที่ค่าของ N_{iter} และ N_{mp} ต่างๆ กัน. เวลาคำนวณต่อหนึ่งรอบเวลาบนเครื่องคอมพิวเตอร์ที่มี 1.92GHz Pentium4 CPU และใช้ Linux เป็น os มีรายละเอียดแสดงในรูปที่ 3.3.1.7. เราสามารถเห็นได้จากรูปนี้ว่า เมื่อใช้ N_{iter} = 3 และ 4 เวลาที่ใช้ในการคำนวณนานขึ้นอย่างมาก เมื่อเทียบกับเวลาที่ใช้เมื่อ N_{iter} = 2 แต่ค่าของแรงมัลติโพลที่ได้ ไม่ได้เพิ่มขึ้นอย่างมากนัก (ดังที่ได้อธิบายแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา). เนื่องจากการจำลองจนเสร็จสิ้นใช้เวลาประมาณ 15 ชั่วโมงสำหรับ N_{mp} = 4 แต่นานถึง 45 ชั่วโมงสำหรับ N_{mp} = 5 ผู้วิจัยจึงเลือกใช้ N_{iter} = 2 และ N_{mp} = 4ในการจำลองตำแหน่งของอนุภาคตามเวลาในที่นี้.



รูปที่ 3.3.1.7 เวลาที่ใช้ต่อหนึ่งรอบการทำซ้ำตามเวลา ที่ค่าของ N_{iter} และ N_{mp} ต่างๆ.

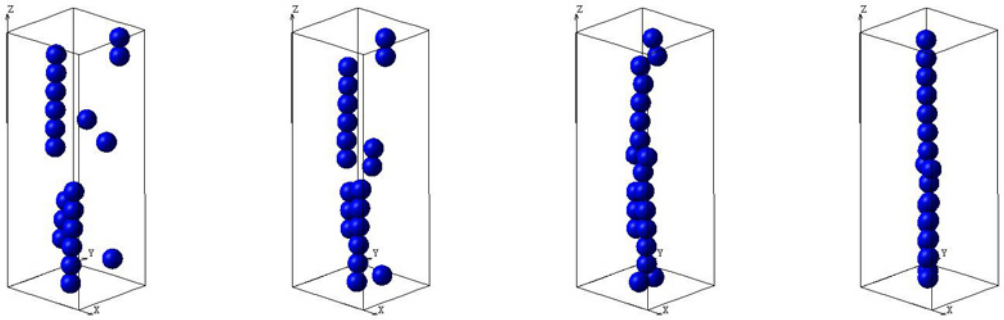
รูปที่ 3.3.1.8 และ 3.3.1.9 แสดงการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของอนุภาคที่ได้จากการใช้โมเดลไดโพล และการใช้โมเดลมัลติโพล ในการประมาณค่าแรงที่ทำบนอนุภาค ตามลำดับ. เราจะเริ่มพิจารณาจากผลที่ได้จากการใช้โมเดลไดโพลก่อน. ในรูปที่ 3.3.1.8(ก) ซึ่งเป็นเวลา 30 ms อนุภาคเริ่มก่อตัวเป็นโซ่สั้นๆ แต่ยังไม่เรียงตัวอย่างดีตามแนวทิศทางของสนามไฟฟ้า. ในรูปที่ 3.3.1.8(ข) อนุภาคก่อตัวเป็นโซ่ที่ยาวขึ้น หรือเป็นคู่ โดยมีอนุภาคเพียงตัวเดียวที่อยู่แยกโดดเดี่ยว ณ เวลา 180 ms. หลังจากเวลา 180 ms โซ่อนุภาคในรูปที่ 3.3.1.8(ค) และ (ง) แตกต่างออกไปจากโซ่ ณ เวลา 180 ms เพียงเล็กน้อยเท่านั้น.



(ก) (ข) (ค) (ง)

t = 30 ms t = 180 ms t = 210 ms t = 300 ms

รูปที่ 3.3.1.8 ตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลาต่างๆ ที่ได้จากการใช้โมเดลไดโพลในการประมาณแรง.



(ก) (ข) (ค) (ง)

t = 30 ms t = 180 ms t = 210 ms t = 300 ms

รูปที่ 3.3.1.9 ตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลาต่างๆ ที่ได้จากการใช้โมเดลมัลติโพลในการประมาณแรง.

เมื่อเราพิจารณาผลที่ได้จากการใช้โมเดลมัลติโพลในรูปที่ 3.3.1.9 ที่เวลา 30 ms อนุภาคเริ่มก่อตัวเป็นโซ่ในทิศทางของสนามไฟฟ้า. ลักษณะการเรียงตัวของโซ่มีลักษณะขนานกับแนวของสนามไฟฟ้ามากกว่า โซ่ที่ได้จากโมเดลแบบไดโพล. ในรูปที่ 3.3.1.9(ข) ลักษณะการเรียงตัวของโซ่ดีมากขึ้น และโซ่เคลื่อนที่เข้าใกล้กันเรื่อยๆ เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น. ในรูปที่ 3.3.1.9(ค) เราได้โซ่ที่เชื่อมต่อระหว่างอิเล็กโตรด. สังเกตว่า ที่เวลาเดียวกันนี้ (210 ms) อนุภาคที่ได้จากการจำลองโดยใช้โมเดลไดโพล เพิ่งจากรวมตัวเป็นโซ่หลายๆ เส้นเท่านั้น. ในรูปที่ 3.3.1.9(ง) โซ่ที่ได้มีลักษณะเกือบสมบูรณ์ ซึ่งเรียงตัวตามแนวของสนามไฟฟ้า. จากรูปที่ได้ดังกล่าว เราสามารถกล่าวได้ว่า การใช้โมเดลมัลติโพลทำให้ได้เวลาการก่อตัวเป็นโซ่ที่สั้นกว่าเวลาที่ได้จากการใช้โมเดลไดโพล.

นอกจากการตรวจสอบลักษณะสายโซ่ตามรูปที่ 3.3.1.8 และ 3.3.1.9 แล้ว ผู้วิจัยยังได้ทดลองตรวจสอบการใช้ค่าเฉลี่ยกำลังสองของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่ง $\left\langle R^{*2}\right\rangle$ [58, 65] ในการระบุการรวมตัวของอนุภาค. นิยามของค่ากำลังสองของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของอนุภาค a ณ เวลา t เป็น

$$\left[R_a^*(t)\right]^2=\left[x_a^*(t)-x_a^*(0)\right]^2+\left[y_a^*(t)-y_a^*(0)\right]^2+\left[z_a^*(t)-z_a^*(0)\right]^2 \quad (3.3.1.18)$$

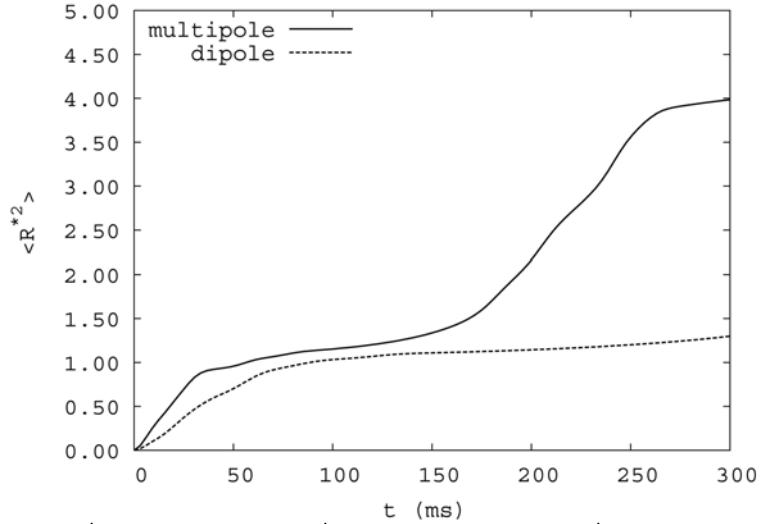
เมื่อ $x_a^*(t), y_a^*(t)$ และ $z_a^*(t)$ เป็นตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา t.

ค่าเฉลี่ย $\left\langle R^{*2}\right\rangle$ คำนวณได้จาก

$$\left\langle R^{*2}\right\rangle=\frac{1}{N}\sum_{a=1}^{N}\left[R_a^*(t)\right]^2 \quad (3.3.1.19)$$

เมื่อ N เป็นจำนวนของอนุภาคในระบบ.

ค่าของ $\left\langle R^{*2}\right\rangle$ ถูกแสดงตามเวลาในรูปที่ 3.3.1.10. รูปนี้แสดงให้เห็นว่า $\left\langle R^{*2}\right\rangle$ ที่คำนวณด้วยโมเดลมัลติโพล มีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็วที่เวลาเริ่มต้น. ทั้งนี้ เนื่องจากอนุภาคเริ่มก่อตัวเป็นคู่และโซ่ โดยมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งอย่างมาก. เมื่ออนุภาคเริ่มเกาะติดกัน อนุภาคจะเปลี่ยนตำแหน่งด้วยอัตราที่ลดลง. ณ t ประมาณ 175 ms โซ่อนุภาครวมตัวกัน และมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของอนุภาคอย่างมาก ซึ่งทำให้ $\left\langle R^{*2}\right\rangle$ สูงขึ้นอีกครั้ง. หลังจากที่โซ่อนุภาครวมกันและกลายเป็นโซ่ยาวที่ต่อระหว่างอิเล็กโตรด การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของอนุภาคมีอัตราที่ช้าลง ที่เวลา $= 250$ ms. ในขณะเดียวกัน เราเห็นว่า $\left\langle R^{*2}\right\rangle$ ของอนุภาคที่ได้จากโมเดลไดโพลค่อยๆ เข้าสู่จุดอิ่มตัวที่เวลาประมาณ 150 ms. เนื่องจากอนุภาคไม่ได้รวมตัวเป็นโซ่เชื่อมระหว่างอิเล็กโตรด ค่าของ $\left\langle R^{*2}\right\rangle$ ยังคงต่ำกว่าค่าที่ได้จากโมเดลมัลติโพลอย่างมาก. ข้อมูลของ $\left\langle R^{*2}\right\rangle$ ดังกล่าวนี้ สอดคล้องกับรูปที่ 3.3.1.8 และ 3.3.1.9.



รูปที่ 3.3.1.10 ค่าเฉลี่ยกำลังสองของการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งอนุภาคที่ได้จากการใช้โมเดลทั้งสองในการประมาณค่าแรง.

3.3.2 การก่อตัวเป็นกลุ่มโซ่อนุภาค

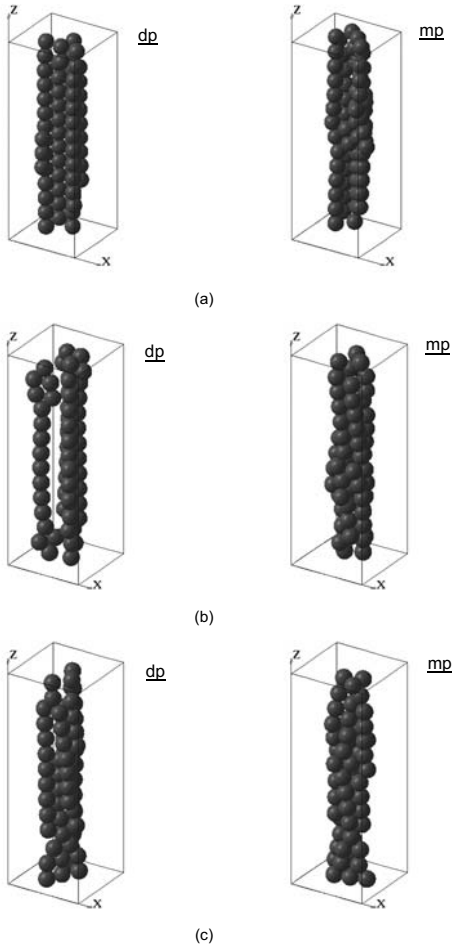
หัวข้อนี้เป็นการศึกษาต่อจากหัวข้อที่ 3.3.1 โดยที่ได้เพิ่มจำนวนอนุภาคขึ้นเป็น 67 อนุภาค ทำให้ได้อัตราส่วนปริมาตรของอนุภาคเป็น 10%. พารามิเตอร์อื่นๆ ยังคงเหมือนกับที่ได้ศึกษามา นั่นคือ ค่าคงตัวไดอิเล็กตริกของอนุภาคฉนวนเท่ากับ 8 และของของเหลวเท่ากับ 2, ความหนาแน่นจำเพาะของอนุภาคเท่ากับ 1 g/cm^3. ปริมาตรที่บรรจุอนุภาคดังกล่าวคือ $L_x = L_y = 5s$ และ $L_z = 14\sigma$ โดยที่ s เป็นรัศมีของอนุภาค.

การจำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้า ทำโดยใช้หลักการเดียวกับที่ได้กล่าวมาแล้ว สำหรับกรณีของอนุภาคจำนวนมากนี้ ผู้จัยได้ใช้ตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคที่แตกต่างกัน 3 แบบ เพื่อดูผลของตำแหน่งเริ่มต้นที่มีต่อลักษณะของโซ่อนุภาคที่เกิดขึ้น. รูปที่ 3.3.2.1 แสดงตัวอย่างหนึ่งของตำแหน่งอนุภาคเริ่มต้นในระบบที่ใช้ในการจำลอง.

รูปที่ 3.3.2.1 ตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาคจำนวน 67 อนุภาค โดยที่พื้นผิวด้านล่างและด้านบนเป็นอิเล็กโตรดซึ่งจะทำให้เกิดสนามไฟฟ้าในแนวดิ่ง.

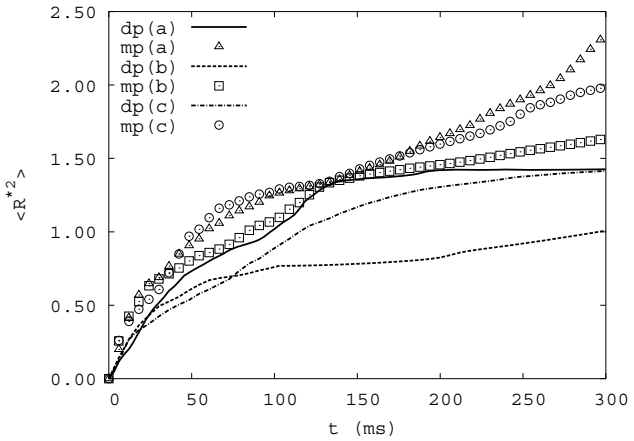
ตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา t = 300 ms ที่ได้จากการจำลองโดยใช้โมเดลไดโพล และผลการจำลองโดยใช้โมเดลมัลติโพลในการคำนวณแรง แสดงอยู่ในรูปที่ 3.3.2.2(a) ถึง (c) สำหรับกรณีของตำแหน่งเริ่มต้นที่แตกต่างกันทั้งสามแบบ. สำหรับทุกกรณี การรวมตัวของอนุภาคขึ้นอยู่กับตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาค. ผลการจำลองด้วยโมเดลไดโพลแสดงการเรียงตัวของโซ่อนุภาคตามแนวสนามไฟฟ้า(แนวดิ่ง)เป็นอย่างดี แต่จะมีช่องว่างระหว่างโซ่อนุภาคอยู่ ซึ่งเราจะเห็นได้ชัดเจนในรูปที่ 3.3.2.2(b) และ 3.3.2.2(c) ทางด้านซ้ายมือยกเว้นกรณีของรูปที่ 3.3.2.2(a) เท่านั้น ที่โซ่อนุภาคเรียงตัวอยู่ชัดและมีช่องว่างเพียงเล็กน้อย.

เมื่อโมเดลมัลติโพลถูกนำใช้คำนวณแรงบนอนุภาคสำหรับการจำลองการเคลื่อนที่ การเรียงตัวของอนุภาคในแนวของสนามไฟฟ้าอาจจะดูไม่เป็นระเบียบเท่ากับผลจากการใช้โมเดลไดโพล. อย่างไรก็ตาม อนุภาคที่ได้จากการจำลองจะอยู่ชิดติดกันมากกว่า และเราไม่สามารถเห็นช่องว่างระหว่างโซ่อนุภาคในรูปที่ 3.3.2.2(b) และ 3.3.2.2(c) ได้อย่างชัดเจน. ดังนั้น เราสรุปได้ว่า การใช้โมเดลแบบมัลติโพลทำให้ได้ผลการจำลองที่มีความสม่ำเสมอมากกว่าการใช้โมเดลแบบไดโพล

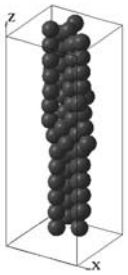


รูปที่ 3.3.2.2 กลุ่มโซ่อนุภาคที่ได้จากการจำลอง เมื่อเวลา t = 300ms.

รูปที่ 3.3.2.3 แสดงค่า MSD ของระบบสำหรับตำแหน่งเริ่มต้นทั้งสามแบบ เมื่อจำลองการเคลื่อนที่โดยใช้โมเดลแบบไดโพลและโมเดลแบบมัลติโพล. รูปนี้แสดงให้เห็นว่า เมื่อใช้โมเดลแบบไดโพล ค่า MSD เข้าสู่จุดอิ่มตัวสำหรับตำแหน่งเริ่มต้นแบบ (a) แต่ยังไม่ลู่เข้าสำหรับตำแหน่งเริ่มต้นแบบ (b) และแบบ (c). เมื่อใช้โมเดลแบบมัลติโพล เราจะยังคงเห็นการเปลี่ยนแปลงของค่า MSD ของทุกระบบ ณ เวลา t = 300 ms. ทว่าเมื่อเราสังเกตลักษณะของโซ่อนุภาคจริง จะพบว่ามีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของอนุภาคหลังเวลา 300 ms น้อยมาก. ตัวอย่างเช่น รูปที่ 3.3.2.4 เป็นโซ่อนุภาคของระบบ (a) ณ เวลา 380 ms ซึ่งเราจะเห็นได้ว่ามีความแตกต่างจะตำแหน่ง ณ เวลา 300 ms เพียงเล็กน้อยเท่านั้น. ดังนั้น ผลการจำลองในที่นี้ แสดงให้เห็นว่า ค่า MSD อาจไม่ใช่ดัชนีที่เหมาะสม สำหรับการระบุว่า ระบบอนุภาคนั้นเข้าสู่ตำแหน่งสุดท้ายหรือไม่ ในการจำลองการเคลื่อนที่ของอนุภาค โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อใช้โมเดลมัลติโพลในการจำลอง.



รูปที่ 3.3.2.3 ค่า MSD ของระบบอนุภาคจำนวน 67 อนุภาค.



รูปที่ 3.3.2.4 ตำแหน่งของอนุภาค ณ เวลา 380 ms ที่ได้จากการจำลองด้วยโมเดลมัลติโพล.

4. สรุปผลการศึกษาที่ได้

โครงการวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาลักษณะสมบัติของสนามไฟฟ้า และแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากสนามไฟฟ้า ตั้งแต่ระดับอนุภาคเดี่ยวภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก ระดับอนุภาคเดี่ยวภายในระบบอิเล็กโตรดที่มีชั้นผิวฉนวน ไปจนถึง ระดับกลุ่มอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้าภายนอก. ผลการศึกษาสามารถสรุปรวมสั้นๆ ได้ดังนี้

- โครงการนี้ได้พัฒนาวิธีคำนวณสนามไฟฟ้าในระบบสองมิติ โดยใช้หลักการของเงามัลติโพล. วิธีคำนวณนี้ สามารถประยุกต์ใช้ประมาณสนามไฟฟ้าและแรง ในกรณีของอนุภาคที่มีลักษณะแหลมยาวได้.
- การศึกษาในระดับอนุภาคเดี่ยว ได้พิจารณากรณีของทรงกลมตัดกัน และกรณีของอนุภาคทรงคล้ายทรงกลมแป้นข้างหรือแป้นขั้ว (Prolate or oblate spheroid). สำหรับอนุภาครูปทรงกลมตัดกัน ผู้วิจัยสามารถครอบคลุมการวิเคราะห์ถึงกรณีที่มุมตัดของทรงกลมเป็นค่าใดๆ ก็ได้ (ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวน 180/n). สำหรับอนุภาครูปทรงรี ผู้วิจัยสามารถหาตัวประกอบโพลาไรเซชันที่ความถี่ต่างๆ และแสดงให้เห็นถึงความแตกต่างเมื่อใช้โมเดลแบบแม่นยำ ที่มีชั้นผิวฉนวนความหนาคงที่ไม่ขึ้นกับมุมบนอนุภาค.
- ในการศึกษาสนามไฟฟ้าและแรงบนอนุภาคในระบบอิเล็กโตรดแบบที่มีชั้นผิวฉนวน ผู้วิจัยใช้วิธีเงาประจุและวิธีเงามัลติโพลสำหรับวิเคราะห์ปัญหา ทำให้ได้คำตอบที่มีความแม่นยำสูงกว่าเมื่อใช้วิธีเชิงตัวเลขทั่วไป. ผลการศึกษาแสดงการเพิ่มขึ้นของสนามไฟฟ้าในบริเวณแกประหว่างอนุภาคกับผิวฉนวน หรือ ณ จุดสัมผัสระหว่างอนุภาคกับผิวฉนวน. นอกจากนี้ ผู้วิจัยยังสามารถหาสมการง่ายๆ สำหรับประมาณค่าแรงและสนามไฟฟ้าในระบบดังกล่าว.
- การจำลองการเคลื่อนที่ของกลุ่มอนุภาคที่ได้รับสนามไฟฟ้าภายนอก ในระบบของไหลอีอาร์แสดงให้เห็นว่า เมื่อใช้โมเดลที่มีความถูกต้องมากขึ้นในการประมาณค่าแรง ผลของการจำลองที่ได้มีความแตกต่างออกไปอย่างมาก. เวลาที่ใช้ในการเกิดโซ่เดี่ยวในของไหลสั้นลง และลักษณะของกลุ่มโซ่ที่เกิดขึ้นมีความสม่ำเสมอ และมีลักษณะที่แตกต่างเมื่อสังเกตจากการพินิจ. นอกจากนี้ ผู้วิจัยยังได้แสดงว่า การใช้ MSD เป็นพารามิเตอร์ในการบ่งชี้การเข้าสู่สภาวะคงตัวของกลุ่มโซ่ อาจไม่เหมาะสมในทางปฏิบัติได้.

5. รายการเอกสารอ้างอิง

[1] T. B. Jones, J. Appl. Phys. **62**(1987), pp.362.

[2] I. W. McAllister, J. Appl. Phys. **63**(1988), pp.2158.

[3] D. Palaniappan and B. U. Felderhof, J. Appl. Phys. **86**(1999), pp.3418.

[4] A. V. Radchik, G. B. Smith, and A. J. Reuben, Phys. Rev. B **46**(1992), pp.6115.

[5] A. V. Paley, A. V. Radchik, and G. B. Smith, J. Appl. Phys. **73**(1993), pp.3446.

[6] A. V. Paley, A. V. Radchik, G. B. Smith, and A. V. Vagov, Appl. Phys. Lett. **64**(1994), pp.3187.

[7] A. V. Radchik, A. V. Paley, G. B. Smith, and A. V. Vagov, J. Appl. Phys. **76**(1994), pp.4827.

[8] A. V. Radchik, A. V. Paley, and G. B. Smith, J. Appl. Phys. **79**(1996), pp.2613.

[9] B. U. Felderhof and D. Palaniappan, J. Appl. Phys. **88**(2000), pp.4947.

[10] B. Techaumnat and T. Takuma, IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul. **10**(2003), pp.623.

[11] B. Techaumnat, B. Eua-arporn, and T. Takuma, J. Appl. Phys. **95**(2004), pp.1586.

[12] M. Washizu and T. B. Jones, IEEE Trans. Ind. Appl. **32**(1996), pp.233.

[13] L. Greengard and V. Rokhlin, Acta Numerica **6**(1997), pp.229.

[14] M. Hara and M. Akazaki, J. Electrostat. **2**(1976/1977), pp.223.

[15] N.-J. Felici, Rev. Gen. Electr. **75**(1966), pp.1145.

[16] K. Asami, T. Hanai and N. Koizumi, Japanese J. Appl. Phys., **19**(1980), p.359-365.

[17] Ruth Douglas Miller and Thomas B. Jones, Biophys. J., **64**(1993), pp.1588-1595.

[18] T.B.Jones, Electromechanics of Particles, Cambridge University Press (1995).

[19] R.Pethig, Automation in Biotechnology, I.Karube ed., pp.159-185, Elsevier Science Publishers (1991)

[20] U. Zimmermann and W.M. Arnold, J. Electrostat.,**21**(1988), pp.309–345.

[21] J. Gimsa and D. Wachner, Biophys. J., **77**(1999), pp.1316-1326.

[22] J. Gimsa and D. Wachner, Biophys. J., **81**(2001), pp.1888–1896.

[23] D. Vrinceanu and E. Gheorghiu, Bioelectrochemistry and Bioengergetics, **40**(1996), pp.167–170.

[24] E. Gheorghiu, Ann. N.Y. Acad. Sci., **873**(1999), pp.262-262.

[25] M. Sancho, G. Martinez, and C. Martin, J. Electrostatics, **57**(2003), pp.143-156.

[26] Moon and Spencer: "Field theory for engineers", Van Nostrand, London (1961).

[27] M. Washizu and B. Techaumnat, J. Electrostatics, **65** (2007), pp.555–561.

[28] B. Techaumnat and M. Washizu, J. Phys. D: Appl. Phys., **40**(2007), p.1831–1837.

[29] T. Takuma, IEEE Trans. Electrical Insulation **26** (1991) pp.500–509.

[30] T. Takuma, T. Kawamoto, IEEE Trans. Power Apparatus System **103** (1984) pp.2486–2494.

[31] W.K.H. Panofsky, M. Phillips, Classical Electricity and Magnetism, second ed., Addison-Wesley Publishing, London, (1962).

[32] D.J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics, third ed., Prentice Hall International Inc., New York, (1999), pp. 121–127.

[33] S. Giordano, J. Electrostatics, **63** (2005), pp.1–9.

[34] Y. Nakajima, T. Matsuyama, J. Electrostatics **55** (2002), pp.203–221.

[35] For example, E. Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, eighth ed., Wiley, Singapore, (2001), p. 669, or C.R. Wylie, L.C. Barrett, Advanced Engineering Mathematics, fifth ed., McGraw-Hill, Singapore, (1985).

[36] V. Rokhlin, J. Comput. Phys. **60** (1983), pp.187–207.

[37] L. Greengard, V. Rokhlin, J. Comput. Phys., **73** (1987), pp.325–348.

[38] N. Yamada, Denkijikigaku, second ed., Denkigakkai, Tokyo, Japan (1999).

[39] B. Techaumnat, B. Eua-arporn, T. Takuma, J. Phys. D: Appl. Phys., **37** (2004), pp.3337–3346.

[40] S. Hamada, O. Yamamoto, T. Kobayashi, IEEJ Trans. FM, **125** (2005), pp.533–543 (in Japanese).

[41] T. Takuma, T. Kawamoto, Electric field at various points of contact between rounded dielectric and electrode, Proceedings of the Fifth International Symposium on High Voltage Engineering, Braunschweig, Germany, 1987.

[42] T. Takuma, T. Kawamoto, Field behavior at a contact point of a round electrode with solid dielectric, Proceedings of the 4th International Symposium on High Voltage Engineering, Athens, 1983, 12.08.

[43] A.T. Pe´rez, J. Electrostat., **56** (2002), pp.199–217.

[44] H. Cheng, SIAM J. Appl. Math., **61** (2000), pp.1324–1337.

[45] K. Sakai, S. Tsuru, D.L. Abella, M. Hara, IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insulat., **6** (1999), pp.122–130.

[46] M. Washizu and T.B. Jones, J. Electrostatics, **33** (1994), pp.187-198.

[47] P.C. Chaumet and J.P. Dufour, J. Electrostatics, **43** (1998), pp.145-159.

[48] Z. Jiang, J. Electrostatics, **58**(2003), pp.247-264.

[49] W.S. Czarnecki and L.B. Schein, J. Electrostatics, **61**(2004), pp.107-115.

[50] B. Techaumnat and T. Takuma, J. Electrostatics., **64** (2006), pp.165–175.

[51] Y.L Chow, K.D. Srivastrava, and C. Charalambous, J. Electrostatics, **11** (1982), pp.167-178.

[52] M.M. Marcos, S. Zhang, and K.D. Srivastrava, CIGRE Paper 15-401 (2002).

[53] H. Hasegawa, K. Yamaji, M. Hatano, F. Endo, T. Rokunohe, and T. Yamagiwa, IEEE Trans. Power Del., **12**(1997), pp.194-202.

[54] K. Sakai, D.L. Abella, J. Suehiro, and M. Hara, IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul., **9** (2002), pp.577-588.

[55] W. Wen and K. Lu, Appl. Phys. Lett., **67**(1995), pp.2147-2148.

[56] B. Techaumnat and T. Takuma, J. Appl. Phys., **96** (2004), pp.5877-5885.

[57] L. Flandin, L. Vouyovitch, A. Beroual, J-L. Bessede, and N.D. Alberola, J. Phys. D: Appl. Phys., **38** (2005), pp.144-155.

[58] D.J. Klingenberg, F. van Swoi, C.F. Zukoski, J. Chem. Phys., **91** (1989), pp.7888–7895.

[59] Y. Enomoto, K. Oba, Physica A, **309** (2002), pp.15–25.

[60] L. Jian, S. Jiapeng, J. Appl. Phys., **79** (1996), pp.7312–7317.

[61] R. Tao, Q. Jiang, Phys. Rev. Lett., **73** (1994), pp.205–208.

[62] D.J. Klingenberg, F. van Swoi, C.F. Zukoski, J. Chem. Phys., **94** (1991), pp.6170–6178.

[63] H.J.H. Clercx, G. Bossis, Phys. Rev. E., **48** (1993), pp.2721–2738.

[64] A. Limsimarat, B. Techaumnat, J. Electrostat., **63** (2005), pp.789–794.

[65] P. Nakroshis, M. Amoroso, J. Legere, C. Smith, Am. J. Phys., **71** (2003), pp.568–573.

6. OUTPUT ที่ได้จากการวิจัยในโครงการ

ผลงานจากโครงงานวิจัยนี้ ได้รับการตีพิมพ์หรือตอบรับสำหรับการตีพิมพ์ ในวารสารทางวิชาการระดับนานาชาติ จำนวนทั้งสิ้น 8 บทความ โดยมีรายละเอียดแยกตามหัวข้อได้ดังต่อไปนี้

เกี่ยวกับการวิเคราะห์อนุภาคที่มีลักษณะเบี่ยงเบนไปจากทรงกลม.

1. Boonchai Techaumnata and Tadasu Takuma, Calculation of electric field in two-dimensional arrangements by the method of multipole images, Journal of Electrostatics, **64** (2006), pp.706–716. มี impact factor เท่ากับ 0.966
2. Boonchai Techaumnata and Tadasu Takuma, Calculation of the electric field in arrangements of intersecting spheres, Journal of Applied Physics, **100** (2006), p.114907. มี impact factor เท่ากับ 2.171
3. Masao Washizu and Boonchai Techaumnat, Polarization and Membrane Voltage of Ellipsoidal Particle with a Constant Membrane Thickness – a Series Expansion Approach, IET Nanobiotechnology, accepted for publication. มี impact factor เท่ากับ 1.882

เกี่ยวกับการวิเคราะห์ระบบอนุภาคที่มีฉนวนผิวคั่นระหว่างอนุภาคกับอิเล็กโตรด

4. Boonchai Techaumnata and Tadasu Takuma, Electric field and force on a conducting sphere in contact with a dielectric solid, Journal of Electrostatics, **64** (2006), pp.165–175. มี impact factor เท่ากับ 0.966
5. Boonchai Techaumnata and Tadasu Takuma, Analysis of the electric field and force in an arrangement of a conducting sphere and a plane electrode with a dielectric barrier, IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, **13** (2006), pp.336-344. มี impact factor เท่ากับ 0.792

เกี่ยวกับการวิเคราะห์พลศาสตร์ของอนุภาคภายใต้สนามไฟฟ้า.

6. Annop Limsimarat and Boonchai Techaumnat, Dynamic simulation using a multipolar model of particles under dielectrophoretic force, Journal of Electrostatics, **65** (2007), pp.672-679. มี impact factor เท่ากับ 0.966
7. Annop Limsimarat and Boonchai Techaumnat, Dynamic simulation including multipolar interactions of a system of dielectric particles under electric field, IEEJ Trans. FMA, **9** (2007), pp.500-504. ไม่ปรากฏ impact factor

เกี่ยวกับการประยุกต์ใช้การวิเคราะห์แรงกับระบบของเซลล์สิ่งมีชีวิต.

8. Boonchai Techaumna, Kinya Tsuda, Osamu Kurosawa, Gel Murat, Hidehiro Oana and Masao Washizu, High-yield electrofusion of biological cells based on field tailoring by microfabricated structures, IET Nanobiotechnology, accepted for publication. มี impact factor เท่ากับ 1.882

ภาคผนวก

ภาคผนวกนี้เป็นสำเนาของบทความ ที่ได้รับการตีพิมพ์ในวารสารทางวิชาการจำนวน 8 บทความ.

Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
Journal of Electrostatics 64 (2006) 706–716
Journal of ELECTROSTATICS
www.elsevier.com/locate/elstat

Calculation of electric field in two-dimensional arrangements by the method of multipole images

Boonchai Techaumnat[a,*], Tadasu Takuma[b,c]

[a]Electrical Engineering Department, Chulalongkorn University, Phyathai, Pathumwan, Bangkok 10330, Thailand
[b]Central Research Institute of Electric Power Industry, 2-11-1 Iwado kita, Komae-shi, Tokyo 201-8511, Japan
[c]Tokyo Denki University, 2-2 Kanda-Nishiki-cho, Chiyoda-ku, Tokyo 201-8457, Japan

Received 7 April 2005; received in revised form 2 January 2006; accepted 7 January 2006
Available online 3 February 2006

Abstract

This paper presents the method of images for calculating electric field in two-dimensional arrangements. The method utilizes multipoles as the images to satisfy boundary conditions. The images are given for planar or cylindrical boundaries between two dielectrics and for those between a dielectric and a conductor. We introduce the use of three kinds of multipole re-expansions, which enables the calculation of images in complicated arrangements. The method has a clear advantage over using only line charges or line dipoles when the arrangement under consideration consists of more than two objects. Calculation examples are given to demonstrate the application of the method. The calculation results show that in an arrangement where the field is highly non-uniform, high accuracy can be attained by using the method.
© 2006 Elsevier B.V. All rights reserved.

Keywords: Electric field; Method of images; Multipole re-expansion; Complex potential

1. Introduction

Electric field analysis is important in electric insulation studies and in other applications of dielectric materials. In many cases, physical arrangements under consideration may be reduced to two-dimensional (2D) approximations to simplify the analysis. Two-dimensional arrangements are also useful in the study of fundamental field behavior. For example, they are used in the analysis of electric field intensification at a contact point between a conductor and a solid dielectric as described, for example, in [1,2]. Usually, for 2D arrangements, it is easy to calculate the field by using numerical field-calculation techniques such as the finite element or the boundary element methods. However, it becomes difficult to attain high accuracy via numerical methods for an arrangement in which the electric field is highly non-uniform.

Analytical methods are an alternative for calculating the electric field where the physical configuration is not very complicated. It is well known that the analytical method of images can be applied for arrangements consisting of simple objects, e.g. planes and cylinders [3,4]. However, the method is not practical if more than two objects are involved, as the determination of image positions and interactions becomes troublesome. Recently, Giordano has presented an analysis of the electric field in fibrous materials using multipoles in 2D arrangements [5]. In this work, the electric potential is expanded as a series of harmonics. To obtain the coefficients of expansion, the multipole re-expansion is applied to form a linear system of equations. This approach is similar to that used in [6,7] for three-dimensional field analysis.

This paper presents an analytical method based on the method of images for 2D field calculations. It is similar to the method that we have proposed for axisymmetrical or three-dimensional arrangements [8,9]. The multipole re-expansion simplifies the image-placement scheme when more than two objects are present in the calculation. In addition to the principles described in [8,9], we propose the use of three kinds of potential re-expansions which greatly extend the application of the method of images. In contrast

*Corresponding author.
E-mail address: boonchai.t@chula.ac.th (B. Techaumnat).

0304-3886/$ - see front matter © 2006 Elsevier B.V. All rights reserved.
doi:10.1016/j.elstat.2006.01.004

to [5], the method does not require the setting up of a linear equation system. For a configuration comprising more than one object, the potential can be solved by repetitively placing appropriate multipole images until the solution converges, thus significantly reducing the memory requirement when the method is implemented on a computer.

2. Method of multipole images

2.1. Expressing the potential

In our method, a complex plane of z is utilized to represent a 2D physical space. That is, the real and imaginary parts of a complex number $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$) represent geometrically the abscissa and ordinate of a point $(x_0,\ y_0)$ in the real space. From the complex function theory [10], we know that real and imaginary parts of an analytic function Φ of z individually satisfy Laplace's equation in two dimensions. The function Φ is analytic only if it satisfies the two Cauchy–Riemann equations:

$$\frac{\partial \mathrm{Re}\{\Phi\}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Im}\{\Phi\}}{\partial y} \quad \text{and} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathrm{Re}\{\Phi\}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathrm{Im}\{\Phi\}}{\partial x}. \tag{2}$$

In this paper, the solution for the potential ϕ is taken as the real part of an analytic function Φ, called the complex potential. The complex potential Φ at a point z in the complex plane may be expressed in the general form of two infinite series expanded about a point $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ as

$$\Phi = \Phi_B + \Phi_L, \tag{3}$$

where Φ_B is the potential of multipoles,

$$\Phi_B = B_0 \ln(z - z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^n}, \tag{4}$$

and Φ_L is the potential of Taylor or local expansion,

$$\Phi_L = \sum_{n=0}^{\infty} L_n (z - z_0)^n. \tag{5}$$

B_n and L_n are the complex-number potential coefficients to be determined so as to fulfill the boundary conditions involved. In Eq. (3), Φ_B, singular at z_0, is the potential due to all sources located inside a circle of radius $|z - z_0|$ with center at z_0 in the complex plane, whereas Φ_L is due to all sources located outside this circle. The coefficient B_n can also be regarded as the magnitude of an nth-order multipole located at z_0 and having its potential singular at z_0. If a line charge with charge density q_0 is located at $(x_0,\ y_0)$ in a medium of permittivity ε, for example, then the charge is presented by a monopole or zero-order multipole $B_0 = -q_0/2\pi\varepsilon$ at z_0 in the complex plane.

2.2. Re-expansion of the complex potential

This section describes three types of re-expansion of the potentials in Eqs. (4) and (5). Here we use the term "re-expansion" for processes that expand the function Φ about a different center in the form of a multipole potential in Eq. (4) or a local expansion in Eq. (5). The first two re-expansions only translate the center of expansion (without changing the form of expression), whereas the last one rewrites the multipole potential into the form of local expansion about a translated center of expansion. Combination of these types of re-expansion makes possible the application of the method of multipole images for various arrangements.

2.2.1. Translation of multipole expansion

Consider an nth-order multipole B_n located at $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ in a complex plane, as shown in Fig. 1. The complex potential Φ_{B_n} due to this multipole is equal to $B_0 \ln(z - z_0)$ for $n = 0$ and $B_n/(z - z_0)^n$ for $n \geqslant 1$. With the center of expansion moved to the origin O, we can re-expand Φ_{B_n} for $|z| > |z_0|$, i.e., outside the circle of radius $|z_0|$ and center O. The potential is expressed as

$$\Phi_{B_n} = \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{C_j}, \tag{6}$$

where C_j $(j = n, n+1, \ldots)$ are the multipoles located at O. That is, $\Phi_{C_0} = C_0 \ln z$ and $\Phi_{C_j} = C_j/z^j$ for $j \geqslant 1$. The new multipoles, C_j, are determined from B_n $(j \geqslant n)$ as follows [11,12]:

For $j = 0$,

$$C_0 = B_0. \tag{7}$$

For $j \geqslant 1$,

$$C_j = -\frac{z_0^j B_0}{j} \quad \text{if } n = 0, \tag{8}$$

$$= z_0^{j-n} \frac{(j-1)!}{(j-n)!(n-1)!} B_n \quad \text{if } n \neq 0. \tag{9}$$

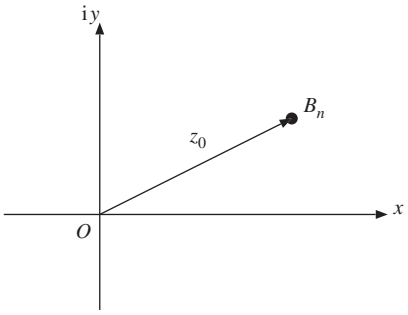


Fig. 1. Multipole B_n at z_0 in the complex plane.

2.2.2. Translation of local expansion

Let $\Phi_{L_n} = L_n(z - z_0)^n$ be an nth-order complex potential expanded about z_0 in the form of a local expansion. We can translate the center of expansion to the origin O and rewrite Φ_{L_n} as

$$\Phi_{L_n} = \sum_{j=0}^{n} \Phi_{M_j}, \tag{10}$$

$$\Phi_{M_j} = M_j z^j, \tag{11}$$

where M_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ are complex-number coefficients. Using the polynomial expansion, we obtain the following relation between the coefficients M_j and L_n $(n \geqslant j)$:

$$M_j = \frac{n!}{j!(n-j)!}(-z_0)^{n-j} L_n. \tag{12}$$

2.2.3. Conversion from multipole expansion to local expansion

Consider the same multipole in Fig. 1. We can express the complex potential Φ_{B_n} in the form of local expansion with the center at the origin O for $|z| < |z_0|$, i.e., inside the circle of radius $|z_0|$ and center O. The potential is re-expressed as

$$\Phi_{B_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{M_j}, \tag{13}$$

where M_j $(j = 0, 1, \ldots)$ are the potential coefficients of the re-expansion. The limit $|z| < |z_0|$ of Eq. (13) is based on the Taylor's theorem [10]. We can determine M_j from B_n as follows [11,12]:

For $j = 0$,

$$M_0 = \ln(-z_0) B_0 \quad \text{for } n = 0, \tag{14}$$

$$M_0 = \frac{B_n}{(-z_0)^n} \quad \text{for } n \geqslant 1. \tag{15}$$

For $j \geqslant 1$,

$$M_j = -\frac{B_0}{j z_0^j} \quad \text{for } n = 0, \tag{16}$$

$$M_j = (-1)^n \frac{B_n}{z_0^{n+j}} \frac{(j+n-1)!}{j!(n-1)!} \quad \text{for } n \geqslant 1. \tag{17}$$

2.3. Multipole images for fundamental arrangements

This section describes multipole images for fundamental arrangements that consist of only one object whose boundary is a plane or a cylinder surface. The images, which satisfy the boundary conditions on their corresponding objects, are used in the repetitive procedure for arrangements composed of two or more objects.

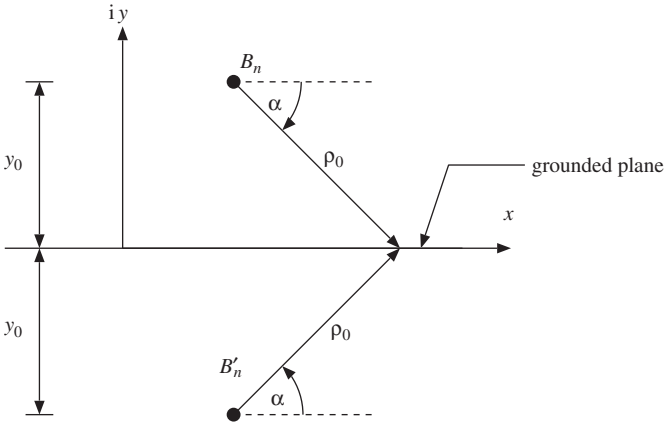


Fig. 2. Multipole B_n and image B'_n induced by the ground plane on the real axis of the complex plane.

2.3.1. Image for a ground plane

Consider a multipole B_n located at $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ above a ground plane on the real axis of a z plane, as shown in Fig. 2. The condition to be fulfilled is that of zero potential on the ground plane. This can be done by placing an image B'_n of the same order as B_n at $\overline{z}_0 = x_0 - \mathrm{i}y_0$. That is, on the real axis $(y = 0)$ of the z plane,

$$\mathrm{Re}\{\Phi_{B_n} + \Phi_{B'_n}\} = 0. \tag{18}$$

Because Φ_{B_n} and $\Phi_{B'_n}$ are a logarithm function of z for $n = 0$ but a power function for $n \geqslant 1$, we derive the relation between B'_n and B_n separately for $n = 0$ and for $n \geqslant 1$.

If $n = 0$,

$$\Phi_{B_0} + \Phi_{B'_0} = B_0(\ln \rho_0 - \mathrm{i}\alpha) + B'_0(\ln \rho_0 + \mathrm{i}\alpha), \tag{19}$$

where $(\rho_0, -\alpha)$ are the polar coordinates of an arbitrary point in x on the ground plane when z_0 is treated as the origin. That is, $z - z_0 = \rho_0 \exp(-\mathrm{i}\alpha)$. Because Eq. (18) must be true for any angle α, we get, from Eq. (19)

$$B'_0 = -\overline{B}_0, \tag{20}$$

where $\overline{B}_0$ is the complex conjugate of B_0.

If $n \geqslant 1$, the equation of the potential on the ground plane becomes, for any n:

$$\Phi_{B_n} + \Phi_{B'_n} = \frac{B_n}{\rho_0^n} \exp(\mathrm{i}n\alpha) + \frac{B'_n}{\rho_0^n} \exp(-\mathrm{i}n\alpha). \tag{21}$$

From the boundary condition in Eq. (18), we obtain

$$B_{n,r} \cos n\alpha - B_{n,i} \sin n\alpha + B'_{n,r} \cos n\alpha + B'_{n,i} \sin n\alpha = 0. \tag{22}$$

Here we denote the real and imaginary parts of any potential coefficient A_n by $A_{n,r}$ and $A_{n,i}$, respectively. Obviously, Eq. (22) leads to the same relation between B'_n and B_n as that in Eq. (20). Therefore, we conclude that

$$B'_n = -\overline{B}_n \quad \text{for } n \geqslant 0. \tag{23}$$

2.3.2. Images for a semi-infinite dielectric solid

Consider the arrangement of Fig. 2, but for the case where the ground plane is replaced by a semi-infinite dielectric solid. The permittivities of the dielectric solid and the surrounding (external) medium are denoted by ε_I and ε_E, respectively. Two multipole images, B'_n at $\bar{z}_0$ and B''_n at z_0, are used to satisfy the boundary conditions on the planar dielectric interface at $y = 0$. In the surrounding medium, the complex potential Φ_E resulting from the multipoles B_n and B'_n can be expressed as

$$\Phi_E = \Phi_{B_n} + \Phi_{B'_n}. \tag{24}$$

Inside the dielectric solid, the complex potential Φ_I is due to B''_n:

$$\Phi_I = \Phi_{B''_n}. \tag{25}$$

For this situation, the boundary conditions on the dielectric interface are the continuities of the real potential and normal electric flux density. To determine the multipole images, B'_n and B''_n, we express the boundary conditions in terms of the complex potentials as

$$\mathrm{Re}\{\Phi_E\} = \mathrm{Re}\{\Phi_I\} \tag{26}$$

$$\text{and} \quad \Gamma \frac{\partial \mathrm{Re}\{\Phi_I\}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{Re}\{\Phi_E\}}{\partial y}, \tag{27}$$

where $\Gamma = \varepsilon_I/\varepsilon_E$ defines the permittivity ratio. From the Cauchy–Riemann equations, we obtain

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \mathrm{Im}\{\Phi\}}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{Re}\{\Phi\}}{\partial y} = -\mathrm{i}\left(\frac{\partial \mathrm{Re}\{\Phi\}}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{Im}\{\Phi\}}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mathrm{i}\frac{\partial \Phi}{\partial z}. \tag{28}$$

Using this relation, Eq. (27) may be rewritten as

$$\Gamma \cdot \mathrm{Re}\left\{\mathrm{i}\,\frac{\partial \Phi_I}{\partial z}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{i}\,\frac{\partial \Phi_E}{\partial z}\right\}. \tag{29}$$

As in Section 2.3.1, at any point z on the interface, $z - z_0 = \rho_0 \exp(-\mathrm{i}\alpha)$ and $z - \bar{z}_0 = \rho_0 \exp(\mathrm{i}\alpha) = \overline{z - z_0}$. Using Eqs. (26) and (29), we can evaluate B'_n and B''_n from B_n by

$$B'_n = -\frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1}\,\overline{B}_n, \tag{30}$$

$$B''_n = \frac{2}{\Gamma + 1}\,B_n. \tag{31}$$

It should be noted here that the relations above describe the most general case of a planar interface between two dielectrics, where ε_I and ε_E are the permittivities of the medium on the multipole side and that on the other side of the interface, respectively.

2.3.3. Images for a grounded conducting cylinder

Consider next a grounded conducting cylinder of radius R centered at the origin of a complex plane, as shown in Fig. 3. Let B_n be a source multipole located at z_0 outside the cylinder ($|z_0| > R$). Using the multipole re-expansion

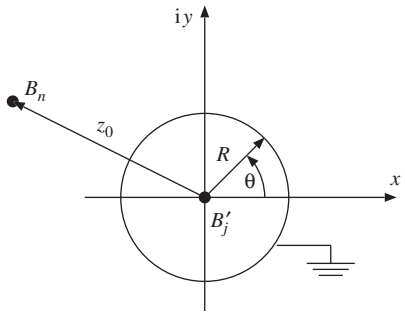


Fig. 3. Multipole B_n and a grounded conducting cylinder. B'_j ($j = 1, 2, \ldots$) are the images of B_n induced by the conducting cylinder.

method, the complex potential due to B_n can be rewritten in the form of a local expansion for $|z| < |z_0|$:

$$\Phi_{B_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{M_j}, \tag{32}$$

where M_j are determined by using Eqs. (14)–(17).

To satisfy the zero-potential condition on the cylinder surface, an infinite number of multipoles B'_j ($j = 0, 1, \ldots$) are inserted at the cylinder center as the images of B_n. Matching the resultant potential to get

$$\mathrm{Re}\{\Phi_{B'_j} + \Phi_{M_j}\} = 0 \tag{33}$$

on the surface for each j, we can relate B'_j to M_j. As in the previous section, we consider B'_j separately for $j = 0$ and for $j \geqslant 1$.

For $j = 0$,

$$B'_{0,r} \ln R - B'_{0,i}\theta + M_{0,r} = 0, \tag{34}$$

where $R(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ represents the cylinder surface. It follows from Eq. (34) that

$$B'_0 = -\mathrm{Re}\left\{\frac{M_0}{\ln R}\right\}. \tag{35}$$

For $j \geqslant 1$,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{B'_j \exp(-\mathrm{i}j\theta)}{R^j} + M_j R^j \exp(\mathrm{i}j\theta)\right\} = 0. \tag{36}$$

From Eq. (36), we can conclude that

$$B'_j = -R^{2j}\overline{M}_j \quad \text{for } j \geqslant 1. \tag{37}$$

It is worth noting that the images described in this section can apply to a conducting sphere on which the net charge is given. In the most common case where the conductor possesses no net charge, we obtain $B'_0 = 0$, and also obtain the same relation for the other B'_j as that for the grounded cylinder in Eq. (37).

An inverse situation should be noted here for a multipole B_n located at z_0 inside a hollow conducting cylinder of radius R centered at the origin, $|z_0| < R$, as shown in Fig. 4. To satisfy the potential condition on the cylinder surface ($|z| = R$), we re-expand the potential of B_n about the

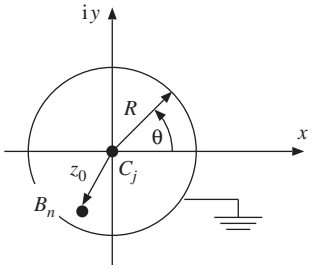


Fig. 4. Source multipole B_n located at z_0 inside a hollow, grounded conducting cylinder.

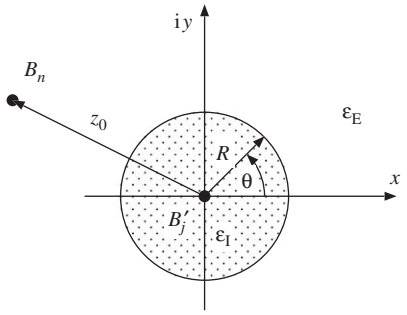


Fig. 5. Multipole B_n and a dielectric cylinder. B'_j $(j = 1, 2, \ldots)$ are the images of B_n induced by the dielectric cylinder.

cylinder center ($z = 0$) using the translation of multipole potential in Eqs. (7)–(9). Then, Φ_{B_n} can be expressed for $|z| > |z_0|$ as

$$\Phi_{B_n} = \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{C_j}, \tag{38}$$

where C_j are the multipoles at the cylinder center. C_j can be determined from B_n using Eqs. (7)–(9). [Note that Φ_{B_n} is re-expanded in the form of a multipole potential in Eq. (38) but in the form of a local expansion in Eq. (32).] The resultant potential is the sum of Φ_{B_n} and the potential due to charges induced on the conducting cylinder surface. The latter can be expressed by a local expression of Eq. (11) about the cylinder center. Denoting this potential by Φ_{M_j}, we write the resultant potential inside the hollow cylinder for this case as

$$\Phi = \Phi_{B_n} + \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{M_j} = \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{C_j} + \sum_{j=n}^{\infty} \Phi_{M_j}, \tag{39}$$

where $\Phi_{M_j} = M_j z^j$. To satisfy the zero-potential condition, we get the following relations:

$$M_0 = -\ln R \cdot C_0 \tag{40}$$

and

$$M_j = -\frac{\overline{C}_j}{R^{2j}} \quad \text{for } j \geqslant 1. \tag{41}$$

2.3.4. Images for a dielectric cylinder

Consider an arrangement shown in Fig. 5. A dielectric cylinder having a radius R is centered at the origin of a complex plane. The source is a multipole B_n located at z_0 outside the cylinder. We denote the permittivities of the cylinder and the surrounding medium by ε_I and ε_E, respectively. For this arrangement, we separately express the complex potentials Φ_I in the interior and Φ_E in the exterior of the cylinder. The potentials are then determined to satisfy the following boundary conditions on the cylinder surface:

$$\mathrm{Re}\{\Phi_I\} = \mathrm{Re}\{\Phi_E\}, \tag{42}$$

$$\Gamma \frac{\partial \mathrm{Re}\{\Phi_I\}}{\partial \rho} = \frac{\partial \mathrm{Re}\{\Phi_E\}}{\partial \rho}. \tag{43}$$

The electric field of B_n induces polarization in the dielectric cylinder, resulting in surface monopoles (i.e., surface charges in the real space) on the cylinder unless $\Gamma = 1$. Hence, the potential inside the cylinder is the sum of the potential of B_n and that of the monopoles. The resultant potential Φ_I can be written in the form of a local expansion about the cylinder center

$$\Phi_I = \Phi_L = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{L_j}, \tag{44}$$

where L_j $(j = 0, 1, \ldots)$ are the potential coefficients to be determined.

Similar to Φ_I, the potential Φ_E also results from the source multipole B_n and the surface charges. We use multipole images B'_j $(j = 1, 2, \ldots)$ at the cylinder center to express the potential in the exterior due to the surface charges. Therefore, Φ_E is written for $|z| \geqslant R$ in the form

$$\Phi_E = \Phi_{B_n} + \Phi_{B'} = \Phi_{B_n} + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{B'_j}. \tag{45}$$

Re-expanding the multipole potential Φ_{B_n} into the form of Eq. (32), we can rewrite Φ_E for $R \leqslant |z| < |z_0|$ as

$$\Phi_E = \sum_{j=0}^{\infty} (\Phi_{M_j} + \Phi_{B'_j}). \tag{46}$$

Note that the limit $|z| < |z_0|$ arises from the re-expansion of Φ_{B_n} to Φ_{M_j}. [The solution for $|z| > |z_0|$ is expressed in Eq. (45).]

From the boundary conditions in Eqs. (42) and (43), it follows that L_j in Eq. (44) and B'_j in Eq. (46) are related to M_j as follows:

$$L_0 = \mathrm{Re}\{M_0\}, \tag{47}$$

$$B'_0 = 0, \tag{48}$$

and for $j \geqslant 1$,

$$L_j = \frac{2}{\Gamma + 1} M_j, \tag{49}$$

$$B'_j = -\frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1} R^{2j} \overline{M}_j. \tag{50}$$

Note that classical books on electromagnetics (for example, [3]) usually treat the problem of a line charge and a dielectric cylinder by placing a line-charge image at the center of the cylinder and another image at the inversion point of the source. (If the source is at a distance r from the cylinder center, the inversion point will be at a distance R^2/r on the straight line connecting the source and the center.) In our approach, an infinite number of the multipole images are inserted only at the center of the cylinder. It can be shown by using the multipole re-expansion that these two approaches give an equivalent solution. Because the image position is restricted to the center of the cylinder, the application of the method of images to arrangements comprising more than two objects becomes much simplified.

An inverse situation, where B_n is located inside the cylinder, can also be treated in a manner similar to that of the previous case. Consider the multipole B_n in Fig. 4, but in this case let have a dielectric permittivity ε_I. After applying the re-expansion, we obtain its potential in the form of Eq. (38). The resultant potentials are

$$\Phi_I = \Phi_{B_n} + \Phi_M = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{C_j} + \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{M_j} \tag{51}$$

inside the cylinder, where $\Phi_{M_j} = M_j z^j$; and

$$\Phi_E = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{C'_j} \tag{52}$$

outside the cylinder, where C'_j are the multipole images. The coefficients M_j and C'_j are determined from C_j to fit the boundary conditions as follows:

$$C'_0 = \Gamma C_0, \tag{53}$$

$$M_0 = (\Gamma - 1)\ln R \cdot C_0, \tag{54}$$

and for $j \geqslant 1$,

$$C'_j = \frac{2\Gamma}{\Gamma + 1} C_j, \tag{55}$$

$$M_j = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma + 1} R^{2j} \overline{C}_j. \tag{56}$$

2.4. Initial expression of complex potential for calculation

Solution by the method of images usually begins with an initial complex potential that fulfills a boundary condition on an object in the arrangement under consideration. For example, the boundary condition may be a constant potential on a conductor or may be a potential due to an external uniform electric field. For cases that the arrangement comprises more than one object, field calculation is performed in an iterative manner after the initial potential is obtained. This section explains the setting up of the initial complex potential.

2.4.1. Stressed conducting cylinder

Suppose a conducting cylinder of potential ϕ_0 and radius R_0 is centered at (x_0, y_0). In the corresponding complex plane, we can place a zero-order multipole B_0 at $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ to yield $\mathrm{Re}\{\Phi_{B_0}\} = \phi_0$ at any point z on the cylinder surface ($|z - z_0| = R_0$). From Eq. (4), it is obvious that B_0 can be determined by

$$B_0 = \frac{\phi_0}{\ln R_0}. \tag{57}$$

The initial potential is then written as

$$\Phi = B_0 \ln(z - z_0). \tag{58}$$

2.4.2. Stressed conducting cylinder and a ground plane

Suppose a conducting cylinder of potential ϕ_0 and radius R_0 is centered at (x_0, y_0) above a ground plane located at $y = 0$, as shown in Fig. 6. In the corresponding complex plane, we use images to obtain a complex potential Φ that satisfies two conditions: (1) $\mathrm{Re}\{\Phi\} = \phi_0$ at any point z that $|z - z_0| = R_0$ and (2) $\mathrm{Re}\{\Phi\} = 0$ on the real axis. Two multipole images B_0 and $-B_0$ are inserted at $z_B = x_0 + \mathrm{i}y_B$ and $\overline{z}_B$, respectively, to fulfill both conditions. The height y_B can be calculated from y_0 the radius R_0 of the cylinder by [13]

$$y_B = \sqrt{y_0^2 - R_0^2}. \tag{59}$$

The complex potential due to the two multipoles at a point z is

$$\Phi = B_0 \ln \frac{z - z_B}{z - \overline{z}_B}. \tag{60}$$

From Eq. (60), the two multipoles can be determined from ϕ_0 by

$$B_0 = \frac{\phi_0}{\ln\left[R_0 \Big/ \left(y_0 + \sqrt{y_0^2 - R_0^2}\right)\right]}. \tag{61}$$

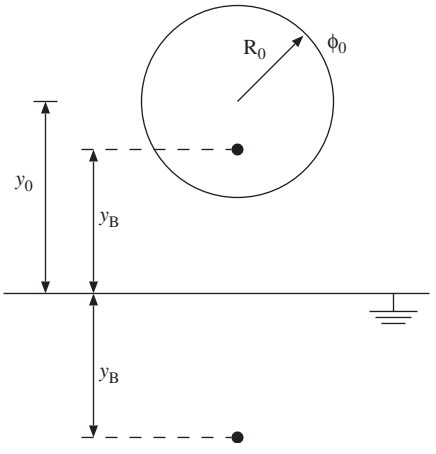


Fig. 6. Electrically stressed conducting cylinder centered above a ground plane by a distance y_0.

2.4.3. External uniform field

Consider a physical configuration subjected to an external uniform field. The potential due to the external field is used as the initial complex potential. If an electric field E_y exists in the downward vertical $(-y)$ direction, for example, the real potential ϕ_{E_y} due to this external field at any point (x, y) is equal to

$$\phi_{E_y} = \phi_0 + yE_y, \tag{62}$$

where ϕ_0 is the potential at the origin. The corresponding complex potential Φ_{E_y} at any point $z = x + \mathrm{i}y$ can be expressed in the form of a local expansion as

$$\Phi_{E_y} = M_0 + M_1 z, \tag{63}$$

where $M_0 = \phi_0$ and $M_1 = -\mathrm{i}E_y$.

If an external uniform field E_x is in the left-to-right, horizontal $(+x)$ direction, the real potential ϕ_{E_x} at a point (x, y) is equal to

$$\phi_{E_x} = \phi_0 - xE_x, \tag{64}$$

and the complex potential Φ_{E_x} is also in the form of Eq. (63) with $M_0 = \phi_0$ and $M_1 = -E_x$.

Note that the potentials ϕ_{E_y} in Eq. (62) and ϕ_{E_x} in Eq. (64) are the well-known solution of Laplaces's equation for the uniform fields, whereas the complex potentials Φ_{E_y} and Φ_{E_x} are the analytic functions of z having their real parts identical to ϕ_{E_y} and ϕ_{E_x}, respectively.

2.5. Calculation procedure

The method of images begins with the initial complex potential that satisfies a boundary condition in the arrangement of calculation, as described in Section 2.4. From the initial potential, we place multipole images for each object in the arrangement to fulfill the boundary conditions on the object by using the images described in Section 2.3. However, for an arrangement composed of more than one object, each application of the images perturbs the potential in the arrangement, making the boundary conditions on the other objects unsatisfied. Thus, the images shall be applied repetitively until the solution converges. (That is, the magnitudes of multipole images to be inserted are so small that their potential is lower than a required error level.) More details on the repetitive procedure have been described in [8,9,14]. A similar application of the potential re-expansions has also been presented for three-dimensional electric field calculation in [15].

It should be noted here that the presence of an energized conducting cylinder may introduce a numerical problem in calculation. This is because the potential due to a multipole B_j $(j \geqslant 1)$ vanishes as $|z| \to \infty$ (infinitely far from the multipole), but that due to a monopole B_0 becomes singular. This characteristic leads to numerical instability when applying the multipole re-expansion and fundamental solutions during iteration, although the relations are theoretically correct. Here, noting that $|\phi_{B_0}|$ consistently decreases to zero as $|z|$ increases from zero to unity, we solve this problem by restricting the spatial dimensions of the calculation arrangement to be smaller than unity. (An arrangement with larger dimensions can be scaled so as to conform to this restriction.) However, this approach has a disadvantage, when it is implemented on a computer, that the possible order of expansion to be used for the potential is reduced, as dividing by z^j [for example, in Eqs. (15) and (16)] for a very small z may give a too large value (numerical overflow).

3. Calculation examples

3.1. Conducting cylinder in a uniform field

A configuration of an electrically floating, conducting cylinder of radius R and center z_0 under a uniform electric field $E_0 = -\mathrm{i}E_y$ is taken as the first example. We begin with the calculation with the external potential Φ_{E_y} similar to that in Eq. (63),

$$\Phi_M = \Phi_{E_y} = M_0 + M_1(z - z_0), \tag{65}$$

where M_0 is the potential at z_0 and $M_1 = -\mathrm{i}E_y$. Note that the potential is expanded about z_0 in Eq. (65). Next, multipole images B'_j, $j = 0$ and 1, are placed at the cylinder center to satisfy the boundary condition

$$\mathrm{Re}\{\Phi\} = \text{constant} \tag{66}$$

on the cylinder surface, where

$$\Phi = \Phi_M + \Phi_{B'_j} = \sum_{j=0}^{1} \Phi_{M_j} + \sum_{j=0}^{1} \Phi_{B'_j}. \tag{67}$$

Because the cylinder is a electrically floating conductor, the net charge on it must be zero, that is,

$$B'_0 = 0. \tag{68}$$

Making use of Eq. (37), we get

$$B'_1 = -\mathrm{i}R^2 E_y. \tag{69}$$

Therefore, the solution of the real potential ϕ is expressed as

$$\phi = \mathrm{Re}\{\Phi\} = \phi_0 + \left(\rho - \frac{R^2}{\rho}\right) E_y \sin\theta, \tag{70}$$

where ϕ_0 is the potential at (x_0, y_0), and (ρ, θ) are polar coordinates when the cylinder center is taken as the origin. Note that Eq. (70) gives the well known solution of this arrangement [3].

3.2. Eccentric cylinders

The next example is a capacitor formed by two eccentric conducting cylinders. The inner cylinder of radius R_i is energized to a potential ϕ_0, whereas the outer cylinder of radius R_o is grounded. Fig. 7 shows the configuration on the complex plane, in which we take the origin, O, and the

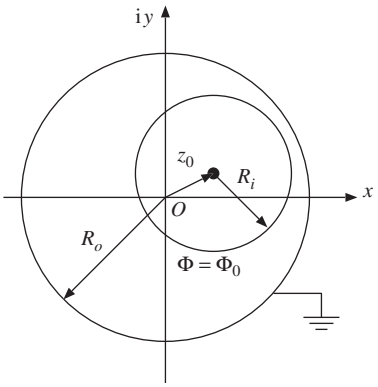


Fig. 7. Eccentric cylinders of potential difference ϕ_0.

point z_0, $|z_0| + R_i < R_o$, as the centers of the outer and inner cylinders, respectively. Although the solution of this arrangement can be obtained using the bicylindrical coordinate system [16], the method presented here is applicable to general problems consisting of more than one inner cylinder.

The repetitive procedure for the arrangement of Fig. 7 can be described as follows, in which the superscript $^{(i)}$ denotes the step of repetition.

(1) Place initial multipoles $B^{(1)}$ at z_0 to fit the potential ϕ_0 on the inner cylinder. From Eq. (4), we have

$$B_0^{(1)} = \frac{\phi_0}{\ln R_i}, \tag{71}$$

and $B_j^{(1)} = 0$ for $j \geqslant 1$. The potential Φ between the cylinders is then expressed by

$$\Phi = \Phi_{B^{(1)}} = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_{B_j^{(1)}}. \tag{72}$$

(2) Translate all the multipoles $B^{(1)}$ at z_0 to multipoles $C_j^{(1)}$ at O, the center of the outer cylinder. By using Eqs. (6)–(9), we have

$$\Phi_{B^{(1)}} = \Phi_{C^{(1)}}, \tag{73}$$

where $\Phi_{C^{(1)}}$ is the total potential due to all $C_j^{(1)}$.

(3) Apply the potential $\Phi_{M^{(1)}}$ in the form of local expansion about O to match the potential due to each $C_j^{(1)}$. That is, on the outer cylinder,

$$\Phi = \Phi^{(1)} = \Phi_{C^{(1)}} + \Phi_{M^{(1)}} = 0, \tag{74}$$

$$\Phi_{C_j^{(1)}} + \Phi_{M_j^{(1)}} = 0. \tag{75}$$

Here $\Phi_{M^{(1)}}$ is the potential due to charges induced on the outer cylinder. Its coefficients are calculated from $C^{(1)}$ by using Eqs. (40) and (41).

(4) Translate the center of expansion for $\Phi_{M^{(1)}}$ to z_0. Denoting the re-expanded expression of $\Phi_{M^{(1)}}$ by $\Phi_{M'^{(1)}}$, we have

$$\Phi_{M^{(1)}} = \Phi_{M'^{(1)}}, \tag{76}$$

where $M'^{(1)}$ is calculated from $M^{(1)}$ by using Eqs. (10) and (12).

(5) Since $\Phi_{M'^{(1)}}$ influences the potential on the inner cylinder, we place images $B^{(2)}$ at z_0 to cancel the potential $\Phi_{M'^{(1)}}$ on the surface. The potential on the inner cylinder becomes

$$\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi_{B^{(2)}} = \Phi_0 \tag{77}$$

or

$$\Phi_{M_j'^{(1)}} + \Phi_{B_j^{(2)}} = 0, \tag{78}$$

where $B_j^{(2)}$ is related to $M'^{(1)}_j$ by Eqs. (35) and (37).

(6) Repeat Steps 2–5 until the potential Φ converges.

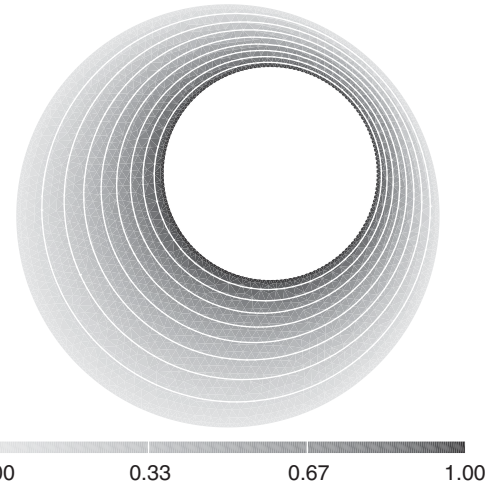


Fig. 8. Potential within the eccentric cylinders for $R_i = 0.5R_o$ and $z_0 = (0.1R_o, 0.1R_o)$.

Fig. 8 shows the calculation results for $R_i = 0.5R_o$ and $z_0 = (0.2R_o, 0.2R_o)$. The potential, normalized by ϕ_0, is displayed on the gray scale at the bottom of the figure. The calculation uses up to eighth-order ($j = 0, 1, \ldots, 8$) for the expansion of potential and converges in about 20 steps to an error level $\varepsilon = 10^{-5}\%$ of the potential.

3.3. Multi-core dielectric cylinder under an external field

This example (Fig. 9) represents a simple model for fibrous materials. In Fig. 9, a dielectric cylinder of radius R_0 is composed of a dielectric of permittivity ε_I and five cores having radius R_c. Four of them are displaced from the center of the dielectric cylinder by a distance d in both horizontal and vertical directions, whereas the last core is located at the center. The cylinder is placed in a surrounding medium of permittivity ε_E under a vertical, uniform external field E_0. We have calculated this arrangement for $R_c = 0.2R_0$, $d = 0.5R_0$, and $\varepsilon_I/\varepsilon_E = 4$. Two cases are treated here in which the cores are (a) dielectrics having permittivity $\varepsilon_C = \varepsilon_E$ and (b) conductors.

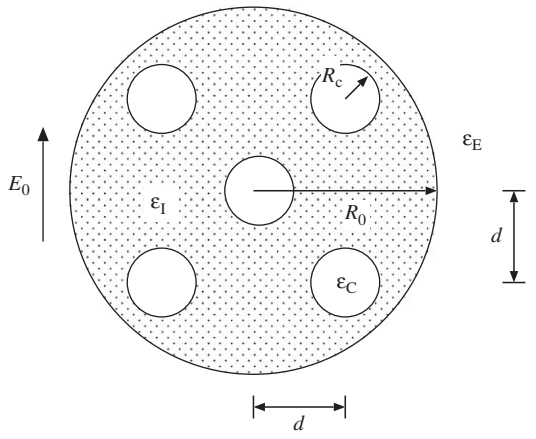


Fig. 9. Dielectric cylinder under an external field E_0.

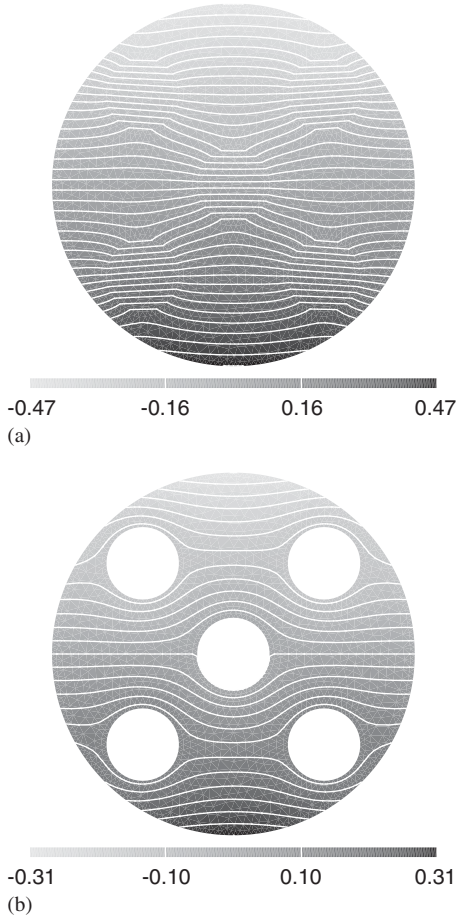


Fig. 10. Potential in the dielectric cylinder with (a) dielectric cores and (b) conducting cores. The potential, normalized to E_0R_0, is expressed on the gray scales in the figures.

We omit the calculation procedure for this arrangement, as it is principally the same as those for Section 3.2. However, all the three types of multipole re-expansion described in Section 2.2 must be used in the calculation. The calculation results are shown in Fig. 10. The potential, normalized to E_0R_0, is expressed on the gray scale at the bottom. It can be seen from Fig. 10(a) that the electric field inside the outer cylinder does not significantly deviate from that of a homogeneous dielectric cylinder, in which the field is uniform and equal to $0.5E_0$ for $\varepsilon_I/\varepsilon_E = 4$. On the other hand, the field in Fig. 10(b) is less intensified in the dielectric cylinder than that in Fig. 10(a) as we can readily notice from the potential scale. For both types of the cores, we use up to 10th-order for the potential expansion and the solutions converge within eight steps to an error level $\varepsilon = 10^{-5}\%$.

3.4. Dielectric cylinder lying on a ground plane under an electric field

The last example is an arrangement of a dielectric cylinder of radius R lying on a ground plane under an external uniform field E_0 in the vertical direction (Fig. 11). We denote the permittivities of the dielectric cylinder and the surrounding medium by ε_I and ε_E, respectively. This arrangement has been used to investigate the electric field behavior at the contact point between a solid dielectric and a conductor [17]. It is also equivalent, with respect to electric field, to an arrangement of two dielectric cylinders in contact under E_0. The calculation procedure for this arrangement begins with

$$\Phi = \Phi_{E_0} = M_1^{(1)} z, \tag{79}$$

where $M_1^{(1)} = iE_0$, as explained in Section 2.4.3.

In the next step, multipoles $B^{(1)}$ are inserted at the center of the cylinder. For each j, $B_j^{(1)}$ is calculated from $M_j^{(1)}$ with Eqs. (48) and (50). This step satisfies the boundary condition on the dielectric interface. According to Eq. (23), The ground plane also induces multipoles $B'^{(1)}_j$, at the distance R below the plane, as the images of $B_j^{(1)}$.

Next, with Eqs. (14)–(17), the potential due to all $B'^{(1)}$ is re-expanded about the cylinder center in the form of local expansion. The re-expansion gives $M^{(2)}$ for the next iteration. The application of images is repetitively done in this manner. At the nth iteration, the potential outside the dielectric cylinder is expressed by

$$\Phi = \Phi_{E_0} + \sum_{k}^{n} \sum_{j}^{N_j} \left[\Phi_{B_j^{(k)}} + \Phi_{B'^{(k)}_j} \right], \tag{80}$$

where N_j is the highest order of expansion used in the calculation.

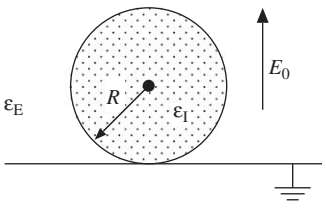


Fig. 11. Dielectric cylinder on a ground plane under an external field E_0.