

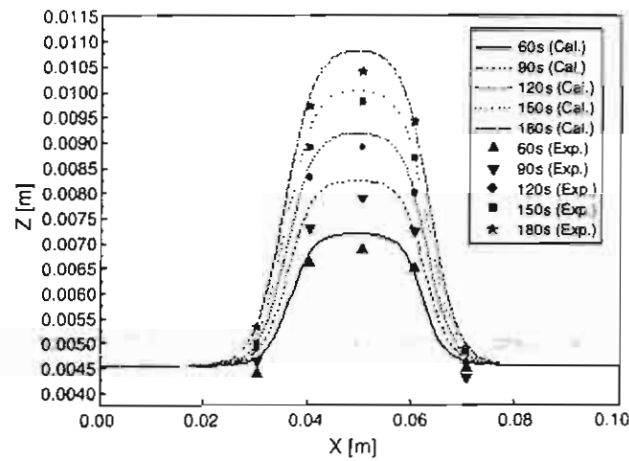


Fig. 5. Comparison of experimental data and simulated freezing front from present numerical study.

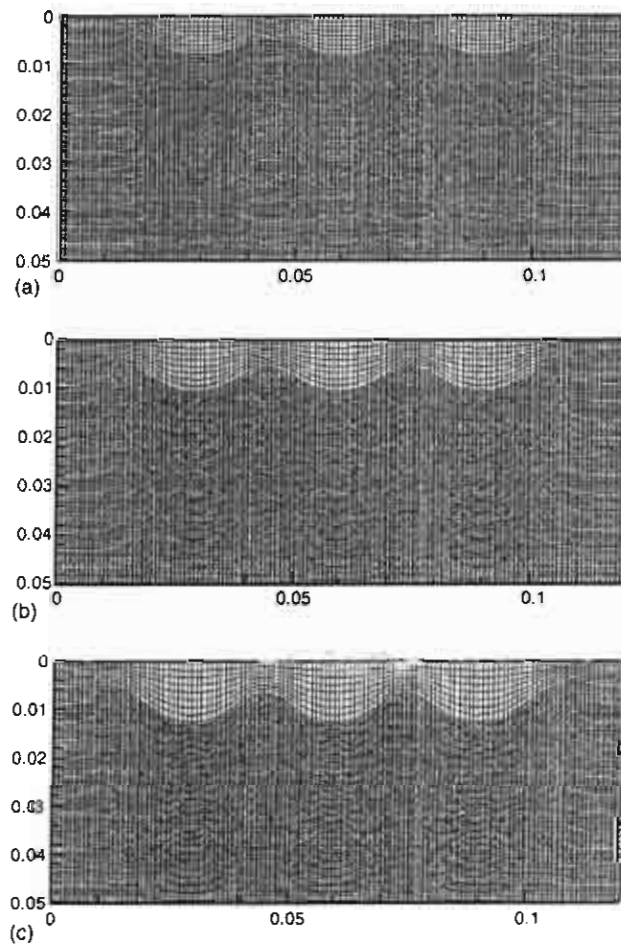


Fig. 6. Grid simulating the deformation of an interface (subjected to multiple constant temperature heat sources): freezing time of (a) 60 s, (b) 120 s, and (c) 180 s.

Transient heat equation for frozen layer:

$$T_s^{n+1}(k, i) = \left(\frac{1}{1 + (2a_s \Delta t / (J^2(k, i)))((\alpha(k, i) / \Delta \zeta \Delta \zeta) + (\gamma(k, i) / \Delta \eta \Delta \eta))} \right) \times \left(T_s^n(k, i) + \frac{a_s \Delta t}{J^2(k, i)} \times \left(\alpha(k, i) \frac{T_s^{n+1}(k, i+1) + T_s^{n+1}(k, i-1)}{\Delta \zeta \Delta \zeta} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & -2\beta(k, i) \left(\left(\frac{T_s^{n+1}(k+1, i+1) - T_s^{n+1}(k-1, i+1)}{2\Delta\eta} \right) \right. \\
 & \left. - \left(\frac{T_s^{n+1}(k+1, i-1) - T_s^{n+1}(k-1, i-1)}{2\Delta\zeta} \right) \right) / 2\Delta\zeta + \gamma(k, i) \left(\frac{T_s^{n+1}(k+1, i) + T_s^{n+1}(k-1, i)}{\Delta\eta\Delta\eta} \right) \\
 & + \frac{a_s \Delta t}{J^3(k, i)} \left(\left(\alpha(k, i) \frac{X(k, i+1) - 2X(k, i) + X(k, i-1)}{\Delta\zeta\Delta\zeta} \right) \times \left(\frac{Z(k, i+1) - Z(k, i-1)}{2\Delta\zeta} \right) \right. \\
 & \times \left(\frac{T_s^{n+1}(k+1, i) - T_s^{n+1}(k-1, i)}{2\Delta\eta} \right) - \left(\frac{Z(k+1, i) - Z(k-1, i)}{2\Delta\eta} \right) \\
 & \times \left(\frac{T_s^{n+1}(k, i+1) - T_s^{n+1}(k, i-1)}{2\Delta\zeta} \right) \left. \right) + \alpha(k, i) \left(\frac{Z(k, i+1) - 2Z(k, i) + Z(k, i-1)}{\Delta\zeta\Delta\zeta} \right) \\
 & - 2\beta(k, i) \left(\left(\frac{Z(k+1, i+1) - Z(k-1, i+1)}{2\Delta\eta} \right) - \left(\frac{Z(k+1, i-1) - Z(k-1, i-1)}{2\Delta\eta} \right) \right) / 2\Delta\zeta \\
 & + \gamma(k, i) \left(\frac{Z(k+1, i) - 2Z(k, i) + Z(k-1, i)}{\Delta\eta\Delta\eta} \right) \times \left(\frac{X(k, i+1) - X(k, i-1)}{2\Delta\zeta} \right) \\
 & \times \left(\frac{T_s^{n+1}(k+1, i) - T_s^{n+1}(k-1, i)}{2\Delta\eta} \right) + \frac{1}{J(k, i)} \left(\frac{X(k, i+1) - X(k, i-1)}{2\Delta\zeta} \right) \\
 & \times \left(\frac{T_s^{n+1}(k+1, i) - T_s^{n+1}(k-1, i)}{2\Delta\eta} \right) \times dz(k, i)
 \end{aligned} \tag{14}$$

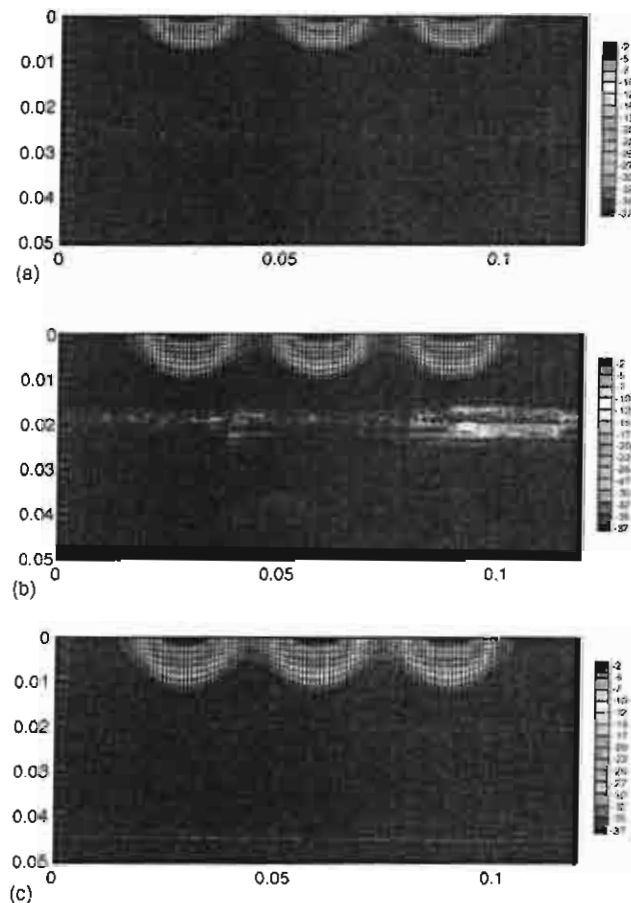


Fig. 7. The simulations of temperature distribution ($^{\circ}\text{C}$) within rectangular phase change slab (subjected to multiple constant temperature heat sources): freezing time of (a) 60 s, (b) 120 s, and (c) 180 s.

Stefan condition:

$$\begin{aligned}
 Z^{n+1}(k, i) = Z^n(k, i) + \frac{\Delta T}{\rho_s L_s} \times & \left[\left(\frac{\lambda_s}{J(k-1, i)} \times \left(\frac{X(k-1, i+1) - X(k-1, i-1)}{2\Delta\zeta} \right) \right. \right. \\
 & \times \left(\frac{3T(k, i) - 4T(k-1, i) + T(k-2, i)}{2\Delta\eta} \right) - \frac{\lambda_l}{J(k+1, i)} \times \left(\frac{X(k+1, i+1) - X(k+1, i-1)}{2\Delta\zeta} \right) \\
 & \times \left(\frac{-3T(k, i) + 4T(k+1, i) - T(k+2, i)}{2\Delta\eta} \right) \Bigg) \\
 & \times \left(1 + \left(\left(\frac{Z(k+1, i) - Z(k-1, i)}{2\Delta\eta} \right) \times \left(\frac{Z^n(k+1, i) - Z^n(k-1, i)}{2\Delta\zeta} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(\frac{Z(k, i+1) - Z(k, i-1)}{2\Delta\zeta} \right) \times \left(\frac{Z^n(k, i+1) - Z^n(k, i-1)}{2\Delta\eta} \right) \right)^2 \right) \Bigg] \quad (15)
 \end{aligned}$$

The details of computational schemes and strategy for solving the combined transfinite interpolation functions (Eqs. (6)–(9)) and PDE (Eqs. (13)–(15)) are illustrated in Fig. 3.

5. Experiment

The freezing experiments are performed in a rectangular test cell filled with a porous medium (porosity, $\phi=0.38$) with inside dimensions of 10 cm in length (x), 5 cm in height (z) and 2.5 cm in depth (y). The partial horizontal top wall and bottom wall and

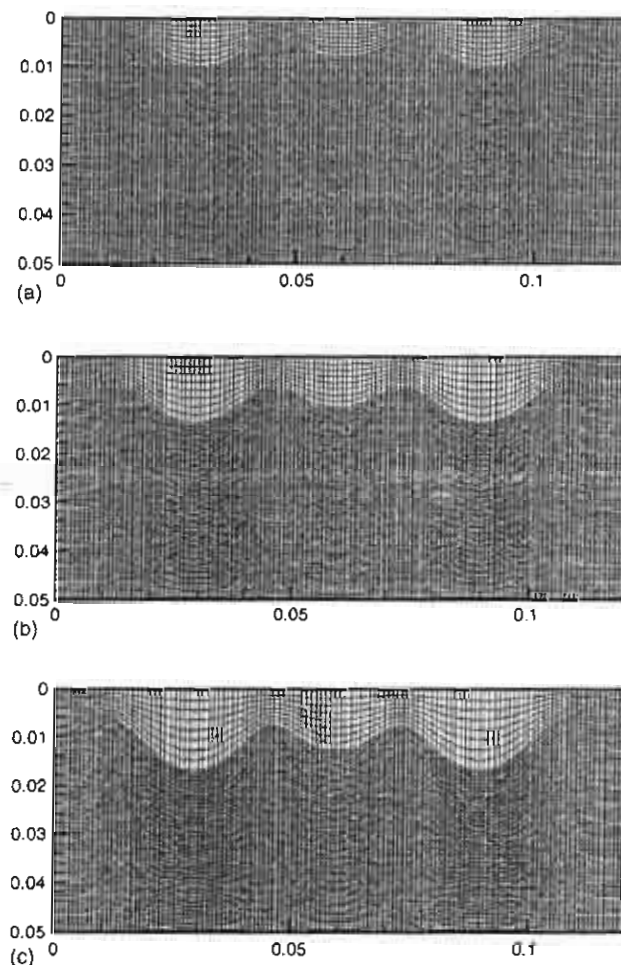


Fig. 8. Grid simulating the deformation of an interface (subjected to multiple heat sources with different temperature): freezing time of (a) 60 s, (b) 120 s, and (c) 180 s.

the vertical front and back walls are made of acrylic resin. The entire test cell is covered with 8 cm thick Styrofoam on all sides to minimize the effect of heat losses and condensation of moisture at the walls. The partial top wall, which serves as a constant temperature heat source, is multi-pass heat exchanger. Heat exchanger is connected through a valve system to constant temperature bath where the liquid nitrogen is used as the cooling medium. Thirty thermocouples with diameter of 0.15 mm are placed at interval of 10 mm throughout the axis of a sample (x and z planes). These thermocouples are connected to data-logger and computer through which the temperatures could be measured and store at preselected time intervals. The positions of freezing front in the sample are determined by interpolating the fusion temperature from the thermocouple reading.

The uncertainty in the results might come from the variations in humidity, room temperature and human error. The calculated uncertainty associated with temperature is less than 2.75%. The calculated uncertainties in all tests are less than 2.85%.

6. Results and discussion

Numerical results are obtained for phase change in a rectangular cavity filled with a porous medium. The calculation are performed under the following conditions:

- (1) The time step of $\Delta t = 0.1$ [s] is used for the computation of temperature field and location of freezing front.
- (2) The number of cells is $N = 120$ (width) $\times$ 100 (depth).
- (3) Iterations are carried out until relative error of 10^{-8} are reached.

In order to verify the accuracy of the present numerical algorithm, it is validated by performing simulations for a planar freezing front in a water-saturated porous media in a rectangular cavity with a dimension of 10 cm (x) $\times$ 5 cm (z). Initially, the temperature of

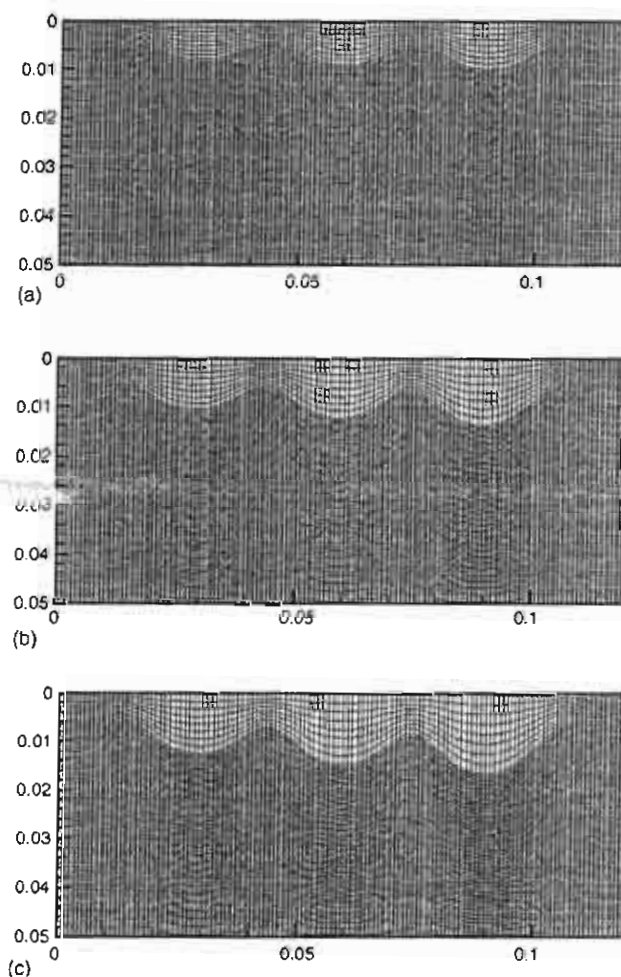


Fig. 9. Grid simulating the deformation of an interface (subjected to multiple heat sources with different temperature): freezing time of (a) 60 s, (b) 120 s, and (c) 180 s.

0°C is assigned throughout each layer. Thereafter, one constant temperature heat source ($T_L = -40^\circ\text{C}$) with strip length of 10 mm is imposed on the top wall. The calculated front location is based on the thermal properties of ice and water. The results are then compared with analytical solution for the freezing of water-saturated porous media in a rectangular cavity at the same condition. Fig. 4 clearly shows a good agreement between simulated and analytical solutions. Therefore, the present method can yield accurate solutions.

Fig. 5 shows the measured and simulated results of the freezing front during freezing of water-saturated porous media in a rectangular cavity with a dimension of 10 cm (x) $\times$ 5 cm (z). In this comparison, one constant temperature heat source, $T_L = -40^\circ\text{C}$, is applied. The observation of the freezing front depicted from the figure reveals that the simulated results and experimental results are qualitatively consistent. However, the experimental data is significantly lower than that simulated results. Discrepancy may be attributed to heat loss and non-uniform heating effect along the surface of supplied load. Numerically, the discrepancy may be attributed to uncertainties in the thermal and physical properties data. In addition, the source of the discrepancy may be attributed to natural convection effect in liquid.

6.1. Freezing process with multiple constant temperature heat sources

The purpose of this subsection is to illustrate the efficiency of the grid generation system during the freezing of water-saturated porous media in a rectangular cavity with a dimension of 12 cm (x) $\times$ 5 cm (z) (porosity, $\phi = 0.38$) subjected to multiple constant temperature heat sources (three heat sources with strip length of 10 mm in each region). Fig. 6(a) through (c) show grids that fit curves that are typical of shapes seen during deformation of an interface with respect to elapsed times. The grid generation corresponds to the initial temperature of 0°C and applied boundary condition ($T_L = -40^\circ\text{C}$) given by Eq. (3). It can be seen how freezing fronts progress with respect to elapsed times. During the initial stages of freezing the shape of the interface in each region becomes flatter as the freezing front moves further away from the fixed boundaries indicating principally one-dimensional heat flow. As later times, the curve on the interface gradually flattens indicating the two-dimensional effect. In all figures, it is found that the grid is able to maintain a significant amount of orthogonality and smoothness both within the interior and along the boundary as the grid points

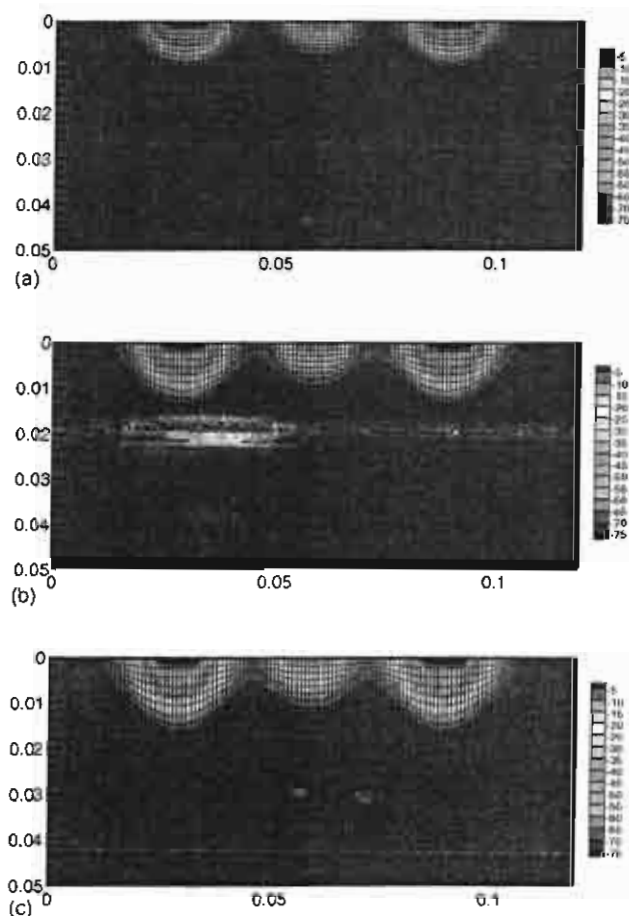


Fig. 10. The simulations of temperature distribution ($^\circ\text{C}$) (subjected to multiple heat sources with different temperature): freezing time of (a) 60 s, (b) 120 s, and (c) 180 s.

redistribute themselves to follow the interface. These results show the efficiency of the present method for the moving boundary problem.

The simulations of temperature distribution within rectangular cavity filled with porous media in the vertical plane (x - z) corresponding to grid simulating the deformation of an interface (Fig. 6(a)-(c)), are shown in Fig. 7(a)-(c). Since the present work is to couple the grid generation algorithm with the transport equations, the thermal analysis during freezing process will be discussed as follows. When multiple constant temperature heat sources are applied during localized freezing process, heat is conducted from the hotter region in unfrozen layer to the cooler region in frozen layer. At the initial stages of freezing, the freezing fronts exhibit to be a small semi-circular shape indicating principally two-dimensional heat conduction as shown in Fig. 7(a). Later, the shape of interface becomes larger semi-circular shape as the freezing front moves further away from the fixed boundary as shown in Fig. 7(b) and (c). However, as the freezing process persists, the freezing rate progresses slowly. This is because most of heat conduction takes place the leading edge of frozen layer (freeze layer), which is located further from unfrozen layer. Consequently, small amount of heat can conduct to the frozen layer due to the freeze region acting as an insulator and causing a freezing front to slowly move with respect to elapsed times. Considering the shapes of the freezing front with respect to elapsed times, each freezing region of the rectangular cavity shows signs of freezing, while the outer edge displays no obvious sign of freezing indicating that the temperature does not fall below 0°C . Nevertheless, at the long stages of freezing, the leading edge of applied boundary condition displays sign of freezing continuously and the spreading of the freeze in the both x - z directions (semi-circular shape) is clearly shown.

6.2. Freezing process with multiple heat sources with different temperature

The following discussion refers to case that the freezing of water-saturated porous media in a rectangular cavity with a dimension of 12 cm (x) $\times$ 5 cm (z) (porosity, $\phi = 0.38$) subjected to multiple heat sources with different temperature. Fig. 8(a) through (c) show grids that fit curves that are typical of shapes seen during deformation of an interface with respect to elapsed times. The grid generation

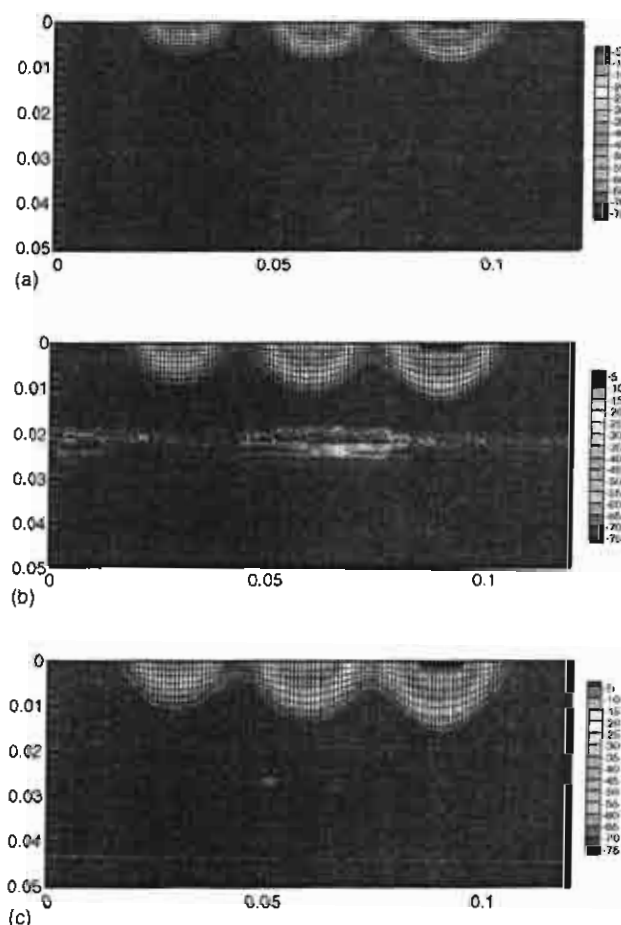


Fig. 11. The simulations of temperature distribution ($^{\circ}\text{C}$) (subjected to multiple heat sources with different temperature): freezing time of (a) 60 s, (b) 120 s, and (c) 180 s.

for the applied boundary condition with different temperature in two cases, namely, $T_{L,l} = -80^\circ\text{C}$, $T_{L,c} = -40^\circ\text{C}$, $T_{L,r} = -80^\circ\text{C}$ and $T_{L,l} = -40^\circ\text{C}$, $T_{L,c} = -60^\circ\text{C}$, $T_{L,r} = -80^\circ\text{C}$, are shown in Figs. 8 and 9. Figs. 8(a)–(c) and 9(a)–(c), respectively. The simulations of temperature distribution corresponding these grid generations (Figs. 8 and 9), are also shown in Figs. 10(a)–(c) and 11(a)–(c), respectively. As similarly mentioned in previous subsection, the simulated results show the reasonable trends of freezing phenomena at specified freezing conditions.

This study shows the capability of the present method to correctly handle the phase change problem with highly complex moving boundaries condition. With further quantitative validation of the present method, this method can be used as a tool for investigating in detail this particular freezing of phase change slab at a fundamental level.

7. Conclusions

Mesh quality has the largest impact on solution quality. A high quality mesh increases the accuracy of the computational flow solution and improves convergence. Therefore, it is important to provide tools for obtaining and improving a mesh.

In this study, the freezing of water-saturated porous media in a rectangular cavity subjected to multiple heat sources with different temperature has been investigated numerically. A generalized mathematical model and an effective calculation procedure is proposed. A preliminary case study indicates the successful implementation of the numerical procedure. A two-dimensional freezing model is then validated against available analytical solutions and experimental results and subsequently used as a tool for efficient computational prototyping. Simulated results are in good agreement with available analytical solution and experimental results. The successful comparison with analytical solution and experiments should give confidence in the proposed mathematical treatment, and encourage the acceptance of this method as useful tool for exploring practical problems.

The next phase, which has already begun, is to couple the grid generation algorithm with the completing transport equations that determine the moving boundary front and buoyancy-driven convection in the unfrozen layer (liquid). Moreover, some experimental studies will be performed to validate numerical results.

Acknowledgement

The authors are pleased to acknowledge Thailand Research Fund (TRF) for supporting this research work.

Appendix A

In this section, we will derive a transformation model of the governing differential equations for using in the numerical calculation.

The details are shown as below:

A.1. General transformation of the first and second derivatives

Considering the first derivative of any parameters can be written as:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(z_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} - z_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \quad (\text{A.1})$$

where J is Jacobian, it can be written as:

$$J = x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi \quad (\text{A.2})$$

$$x_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad (\text{A.3})$$

Considering the second derivative of any parameters, we will establish the second derivative of Laplace equation of parameter A where Eqs. (A.1)–(A.3) are related:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A = \frac{1}{J^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} \right) \\ + \frac{1}{J^3} \left[(\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) \left(z_\xi \frac{\partial A}{\partial \eta} - z_\eta \frac{\partial A}{\partial \xi} \right) + (\alpha z_{\xi\xi} - 2\beta z_{\xi\eta} + \gamma z_{\eta\eta}) \left(x_\eta \frac{\partial A}{\partial \xi} - x_\xi \frac{\partial A}{\partial \eta} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

where

$$\alpha = x_\eta^2 + z_\eta^2, \quad \beta = x_\xi x_\eta + z_\xi z_\eta, \quad \gamma = x_\xi^2 + z_\xi^2 \quad (\text{A.5})$$

x_ξ, x_η, z_ξ and z_η denote partial derivatives, β, α, γ are the geometric factors and η, ξ are the transformed coordinates. The related parameter can be defined as:

$$x = x(\xi, \eta), \quad z = z(\xi, \eta) \quad \text{or} \quad \xi = \xi(x, z), \quad \eta = \eta(x, z)$$

$\Downarrow$

$$x = x(\xi), \quad z = z(\xi, \eta) \quad \text{or} \quad \xi = \xi(x), \quad \eta = \eta(x, z)$$

$$\therefore x_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0 \quad \text{or} \quad \xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$$

Corresponding to the Eq. (A.6), the first derivative of any parameters (Eq. (A.1)) can be rewritten as:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(z_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} - z_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \right)$$

$\Downarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(z_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} - z_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \right)$$

where

$$J = x_\xi z_\eta - x_\eta z_\xi$$

$\Downarrow$

$$J = x_\xi z_\eta$$

The second derivative of any parameters (Eqs. (A.4)–(A.6)) can be also rewritten as:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A = & \frac{1}{J^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} \right) \\ & + \frac{1}{J^3} \left[(\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) \left(z_\xi \frac{\partial A}{\partial \eta} - z_\eta \frac{\partial A}{\partial \xi} \right) + (\alpha z_{\xi\xi} - 2\beta z_{\xi\eta} + \gamma z_{\eta\eta}) \left(x_\eta \frac{\partial A}{\partial \xi} - x_\xi \frac{\partial A}{\partial \eta} \right) \right] \end{aligned}$$

$\Downarrow$

$$\nabla^2 A = \frac{1}{J^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 A}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{J^3} \left[(\alpha x_{\xi\xi}) \left(z_\xi \frac{\partial A}{\partial \eta} - z_\eta \frac{\partial A}{\partial \xi} \right) + (\alpha z_{\xi\xi} - 2\beta z_{\xi\eta} + \gamma z_{\eta\eta}) \left(-x_\xi \frac{\partial A}{\partial \eta} \right) \right]$$

where

$$\alpha = x_\eta^2 + z_\eta^2, \quad \beta = x_\xi x_\eta + z_\xi z_\eta, \quad \gamma = x_\xi^2 + z_\xi^2$$

$\Downarrow$

$$\alpha = z_\eta^2, \quad \beta = z_\xi z_\eta, \quad \gamma = x_\xi^2 + z_\xi^2$$

A.2. The transformation of thermal model

After some mathematical manipulations (Eq. (A.7), (A.9), (1), (2) and (5)), a transformation model of the governing differential equations become:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} = & \frac{a_1}{J^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta^2} \right) + \frac{a_1}{J^3} \left[\left(\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \left(z_\xi \frac{\partial T_1}{\partial \eta} - z_\eta \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \right) + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \left(-x_\xi \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \right) \right] \\ & + \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial T_1}{\partial \eta} \right) \frac{dz}{dt} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_s}{\partial t} = & \frac{a_s}{J^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 T_s}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 T_s}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 T_s}{\partial \eta^2} \right) + \frac{a_s}{J^3} \left[\left(\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \left(z_\xi \frac{\partial T_s}{\partial \eta} - z_\eta \frac{\partial T_s}{\partial \xi} \right) + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \left(-x_\xi \frac{\partial T_s}{\partial \eta} \right) \right] \\ & + \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial T_s}{\partial \eta} \right) \frac{dz}{dt} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\left\{ \lambda_s \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial T_s}{\partial \eta} \right) - \lambda_l \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial T_l}{\partial \eta} \right) \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{J} \left[z_\eta \frac{\partial z_{\text{mov}}}{\partial \xi} - z_\xi \frac{\partial z_{\text{mov}}}{\partial \eta} \right] \right)^2 \right\} = \rho_s L_s \frac{\partial z_{\text{mov}}}{\partial t} \quad (12)$$

References

- Beckett, G., MacKenzie, J. A., & Robertson, M. L. (2001). A moving mesh finite element method for the solution of two-dimensional Stefan problems. *Journal of Computational Physics*, 168(2), 500–518.
- Bonacina, C., Comini, G., Fasano, A., & Primicerio, M. (1973). Numerical solution of phase-change problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 16, 1825.
- Cao, W., Huang, W., & Russell, R. D. (1999). An r-adaptive finite element method based upon moving mesh FDEs. *Journal of Computational Physics*, 149, 221.
- Churn-Jung, K., & Kaviany, M. (1992). Numerical method for phase-change problems with convection and diffusion. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35(2), 457–467.
- Chatterjee, A., & Prasad, V. (2000). A full three-dimensional adaptive finite volume scheme for transport and phase-change processes, Part I: Formulation and validation. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 37(8), 801–821.
- Chelliah, S., & Viskanta, R. (1988). Freezing of saturated and superheated liquid in porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 31, 321–330.
- Cheung, F. B., Chawla, T. C., & Pedersen, D. R. (1984). The effect of heat generation and wall interaction on freezing and melting in a finite slab. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 27, 29.
- Cook, W. A. (1974). Body oriented coordinates for generating three-dimensional meshes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 8, 27–43.
- Coons, S. A. (1967). Surfaces for computer-aided design of space forms, Project MAC. Technical Rep. MAC-TR 44 MIT, MA, USA, Design Div., Dept. Mech. Eng., Available from: Clearing-house for Federal Scientific-Technical Information, National Bureau of Standards, Springfield, VA, USA.
- Crank, J., & Gupta, R. S. (1975). Isotherm migration method in two dimensions. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 18, 1101.
- Crowley, A. B. (1978). Numerical solution of Stefan problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 21, 215.
- Duda, J. L., Malone, M. F., Notter, R. H., & Vrentas, J. S. (1975). Analysis of two-dimensional diffusion controlled moving boundary problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 18, 901.
- Eriksson, L. E. (1982). Generation of boundary-conforming grid around wing-body configurations using transfinite interpolation. *AIAA Journal*, 20, 1313–1320.
- Ettouney, H. M., & Brown, R. A. (1983). Finite-element methods for steady solidification problems. *Journal of Computational Physics*, 49, 118.
- Frivik, P. E., & Comini, G. (1982). Seepage and heat flow in soil freezing. *ASME Journal of Heat Transfer*, 104, 323–328.
- Gong, Z. X., & Mujumdar, A. S. (1998). Flow and heat transfer in convection-dominated melting in a rectangular cavity heated from below. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(17), 2573–2580.
- Gordon, W. J., & Hall, C. A. (1973). Construction of curvilinear coordinate systems and applications to mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 7, 461–477.
- Hasan, M., Mujumdar, A. S., & Weber, M. E. (1991). Cyclic melting and freezing. *Chemical Engineering Science*, 46(7), 1573–1587.
- Hashemi, H. T., & Slepcevich, C. M. (1973). Effect of seepage stream and artificial soil freezing. *ASCE Journal of Mechanics Foundry Division*, 99, 267–289.
- Hsu, C. F., Sparrow, E. M., & Patankar, S. V. (1981). Numerical solution of moving boundary problems by boundary immobilization and a control-volume-based finite difference scheme. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 24, 1335.
- John, D., & Anderson, Jr. (1995). *Computational fluid dynamics*. McGraw-Hill International Editions [Chapter 5].
- Khillarkar, D. B., Gong, Z. X., & Mujumdar, A. S. (2000). Melting of a phase change material in concentric horizontal annuli of arbitrary cross-section. *Applied Thermal Engineering*, 20(10), 893–912.
- Murray, W. D., & Landis, F. (1959). Numerical and machine solutions of transient heat conduction problem involving melting or freezing. *ASME Journal of Heat Transfer*, 81, 106–112.
- Rattanadecho, P. (2004a). Experimental and numerical study of solidification process in unsaturated granular packed bed. *AIAA Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 18(1), 87–93.
- Rattanadecho, P. (2004b). The theoretical and experimental investigation of Microwave thawing of frozen layer using microwave oven (effects of layered configurations and layered thickness). *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(5), 937–945.
- Saitoh, T. (1978). Numerical method for multi-dimensional freezing problems in arbitrary domains. *Journal of Heat Transfer*, 100, 294.
- Shamsundar, N., & Sparrow, E. M. (1976). Effect of density change on multi-dimensional conduction phase change. *Journal of Heat Transfer*, 97, 550.
- Sparrow, E. M., & Broadbent, J. A. (1983). Freezing in a vertical tube. *ASME Journal of Heat Transfer*, 105, 217–225.
- Sparrow, E. M., & Chuck, W. (1984). An implicit/explicit numerical solution scheme for phase-change problems. *Numerical Heat Transfer*, 7, 1.
- Sparrow, E. M., Ramadhyani, S., & Patankar, S. V. (1978). Effect of subcooling on cylindrical melting. *ASME Journal of Heat Transfer*, 100, 395.
- Weaver, J. A., & Viskanta, R. (1986). Freezing of liquid-saturated porous media. *ASME Journal of Heat Transfer*, 108, 654–659.



Unsteady effects on natural convective heat transfer through porous media in cavity due to top surface partial convection

W. Pakdee, P. Rattanadecho *

*Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Thammasat University, Rangsit Campus,
Klong Luang, Pathumtani 12120, Thailand*

Received 2 December 2005; accepted 10 March 2006
Available online 24 April 2006

Abstract

Numerical investigations of transient natural convection flow through a fluid-saturated porous medium in a rectangular cavity with a convection surface condition were conducted. Physical problem consists of a rectangular cavity filled with porous medium. The cavity is insulated except the top wall that is partially exposed to an outside ambient. The exposed surface allows convective transport through the porous medium, generating a thermal stratification and flow circulations. The formulation of differential equations is non-dimensionalized and then solved numerically under appropriate initial and boundary conditions using the finite difference method. The finite difference equation handling the boundary condition of the open top surface is derived. The two-dimensional flow is characterized mainly by two symmetrical vortices driven by the effect of buoyancy. A lateral temperature gradient in the region close to the top wall induces the buoyancy force under an unstable condition. Unsteady effects of associated parameters were examined. It was found that the heat transfer coefficient, Rayleigh number and Darcy number considerably influenced characteristics of flow and heat transfer mechanisms. Furthermore, the flow pattern is found to have a local effect on the heat convection rate.

© 2006 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Natural convection; Saturated porous media; Convection boundary condition

1. Introduction

The heat and fluid flows in cavity that experiences convective heating or cooling at the surface are found in a wide variety of applications including lakes and geothermal reservoirs, underground water flow, solar collector etc. [1]. Associated industrial applications include secondary and tertiary oil recovery, growth of crystals [2], heating and drying process [3–5], solidification of casting, sterilization etc.

Natural or free convection in a porous medium has been studied extensively. Cheng [6] provides a comprehensive review of the literature on free convection in fluid-saturated porous media with a focus on geothermal

systems. Oosthuizen and Patrick [7] performed numerical studies of natural convection in an inclined square enclosure with part of one wall heated to a uniform temperature and with the opposite wall uniformly cooled to a lower temperature and with the remaining wall portions. The enclosure is partially filled with a fluid and partly filled with a porous medium, which is saturated with the same fluid. The main results considered were the mean heat transfer rate across the enclosure.

Nithiarasu et al. [8] examined effects of variable porosity on convective flow patterns inside a porous cavity. The flow is triggered by sustaining a temperature gradient between isothermal lateral walls. The variation in porosity significantly affects natural flow convective pattern. Khanafer and Chankha [9] performed numerical study of mixed convection flow in a lid-driven cavity filled with a fluid-saturated porous media. In this study, the influences of the Richardson number, Darcy number and the

* Corresponding author.

E-mail address: ratphadu@engr.tu.ac.th (P. Rattanadecho).

Nomenclature

c_p	specific heat capacity (J/kg K)	β	coefficient of thermal expansion (1/K)
Da	Darcy number (–)	ε	porosity (–)
g	gravitational constant (m/s ²)	μ	dynamic viscosity (Pa/s)
H	cavity length (m)	ν	kinematics viscosity (m ² /s)
h	convective heat transfer coefficient (W/m ² K)	ρ_f	fluid density (kg/m ³)
k	effective thermal conductivity of the porous medium (W/m K)	τ	dimensionless time
p	pressure (Pa)	θ	dimensionless temperature
Pr	Prandtl number (–)	ω	vorticity (m ² /s)
Ra	Rayleigh number (–)	ψ	stream function
T	temperature (°C)	ζ	dimensionless vorticity
t	time (s)	Ψ	dimensionless stream function
u, v	velocity component (m/s)		
x, y	Cartesian coordinates		
X, Y	dimensionless Cartesian coordinates		
W	cavity width (m)		
Greek letters			
κ	permeability of porous medium (m ²)		
α	thermal diffusivity (m ² /s)		
Subscripts			
∞	ambient condition		
i	initial condition and index for a number of points in x direction		
j	index for a number of points y -direction		

Rayleigh number play an important role on mixed convection flow inside a square cavity filled with a fluid-saturated porous media. Nithiarasu et al. [10] examined effects of applied heat transfer coefficient on the cold wall of the cavity upon flow and heat transfer inside a porous medium. The differences between the Darcy and non-Darcy flow regime are clearly investigated for different Darcy, Rayleigh and Biot numbers and aspect ratio. Variations in Darcy, Rayleigh and Biot numbers and aspect ratio significantly affect natural flow convective pattern. Recently, Al-Amiri [11] performed numerical studies of momentum and energy transfer in a lid-driven cavity filled with a saturated porous medium. In this study, the force convection is induced by sliding the top constant-temperature wall. It was found that the increase in Darcy number induces flow activities causing an increase in the fraction of energy transport by means of convection. With similar description of the domain configuration, Khanafer and Vafai [12] extended the investigation to mass transport in the medium. The buoyancy effects that create the flow are induced by both temperature and concentration gradients. It was concluded that the influences of the Darcy number, Lewis number and buoyancy ratio on thermal and flow behaviors were significant. Furthermore, the state of art regarding porous medium models has been summarized in the recently published books [13–15].

Previous investigations have merely focused on momentum and energy transfer in cavity filled with a saturated porous medium subjected to prescribed temperature and prescribed wall heat flux conditions. However, only a very limited amount of numerical and experimental work on momentum and energy transfer in a cavity filled with a sat-

urated porous medium subjected to heat transfer coefficient boundary condition at the exposed portion of the top wall has been reported. The case, in which the top wall is partially exposed, is considered in our study. In this case, the heating pattern is similar to the heating phenomenon occurring in a microwave heating of water layer in which the microwave energy transfers only partially through the top surface for a particular mode of microwave field [16]. It is found in the present study that the two symmetrical vortices are developed during the early stages of heating process. This suggests the presence of heat convection mechanism due to fluid motion in the transient condition. This distinct phenomenon is different from the case of fully heated top wall to which constant temperature was prescribed in that in this case the heat transfer from the top to bottom surface is exclusively by conduction.

In the present study, the detailed parametric study has been carried out for transient natural convective flow in a fluid-saturated porous medium filled in a square cavity. The top surface is partially open to the ambient, allowing the surface temperature to vary, depending on the influence of convection heat transfer mechanism. The influences of associated parameters such as heat transfer coefficient, Rayleigh number and Darcy number on the flow and thermal configurations were examined.

2. Problem description

The computational domain, depicted in Fig. 1 is a rectangular cavity of size $W \times H$ filled with a fluid-saturated porous medium. Aspect ratio of unity ($A = 1$) is used in the present study. The domain boundary is insulated except

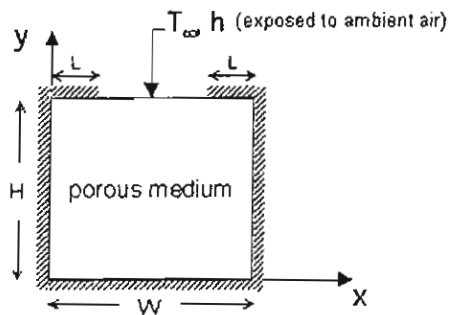


Fig. 1. Schematic representation of the computational domain.

the top wall, which is partially exposed to an ambient air. The initial and boundary conditions corresponding to the problem are of the following forms:

$$u = v = 0, \quad T = T_i \quad \text{for } t = 0, \quad (1)$$

$$u = v = 0 \quad \text{at } x = 0, W \quad 0 \leq y \leq H, \quad (2)$$

$$u = v = 0 \quad \text{at } y = 0, H \quad 0 \leq x \leq W,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = 0, W \quad 0 \leq y \leq H,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0 \quad 0 \leq x \leq W,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = H \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{and} \quad W - L \leq x \leq W. \quad (3)$$

The boundary condition at the exposed portion of the top wall is defined as

$$-k \frac{\partial T}{\partial y} = h[T - T_\infty] \quad \text{at } y = H \quad L \leq x \leq W - L, \quad (4)$$

where k and h are effective thermal conductivity and convection heat transfer coefficient. ε and ν denotes porosity of porous medium and fluid viscosity, respectively. This type of condition corresponds to the existence of convective heat transfer at the surface and is obtained from the surface energy balance.

The porous medium is assumed to be homogeneous and thermally isotropic and saturated with a fluid that is local thermodynamic equilibrium with the solid matrix. The fluid flow is unsteady, laminar and incompressible. The pressure work and viscous dissipation are all assumed negligible. The thermophysical properties of the porous medium are taken to be constant. However, the Boussinesq approximation takes into account of the effect of density variation on the buoyancy force. Furthermore, the solid matrix is made of spherical particles, while the porosity and permeability of the medium are assumed to be uniform throughout the rectangular cavity. Using standard symbols, the governing equations describing the heat transfer phenomenon are given by

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

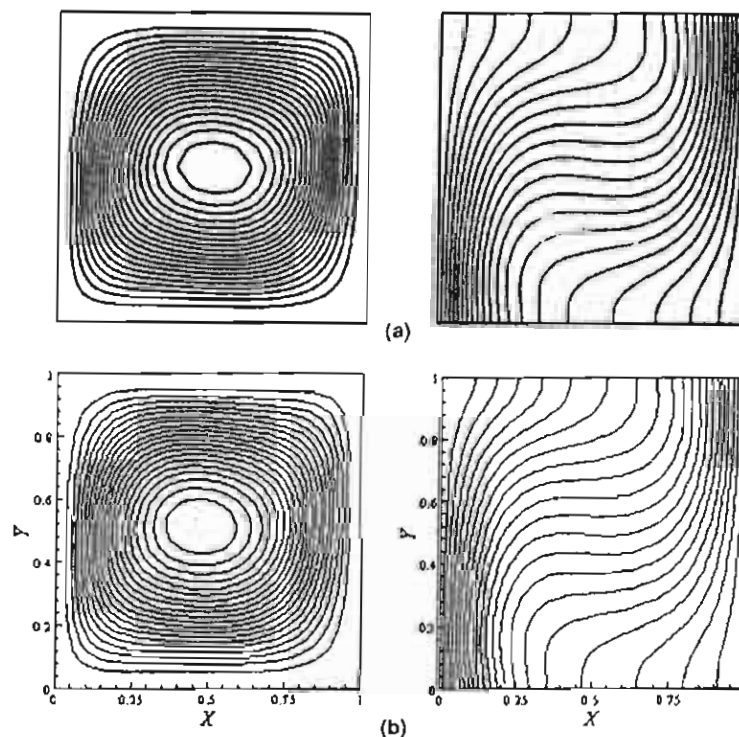


Fig. 2. Test results for validation purpose: (a) previously published results [19] and (b) present numerical simulation.

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\varepsilon^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{\varepsilon^2} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\nu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\mu u}{\rho_f \kappa}, \quad (6)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{\varepsilon^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{\varepsilon^2} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\nu}{\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_\infty) - \frac{\mu v}{\rho_f \kappa}, \quad (7)$$

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{[\varepsilon(\rho c_p)_f + (1 - \varepsilon)(\rho c_p)_s]}{(\rho c_p)_f}, \quad (9)$$

where κ is medium permeability, β is thermal expansion coefficient, α is effective thermal diffusivity of the porous

medium, μ and ν are viscosity and kinematic viscosity of the fluid respectively. In the present study, the heat capacity ratio σ is taken to be unity since the thermal properties of the solid matrix and the fluid are assumed identical. The momentum equation consists of the Brinkmann term, which accounts for viscous effects due to the presence of solid body [17]. This form of momentum equation is known as Brinkmann-extended Darcy model. Lauriat and Prasad [18] employed the Brinkmann-extended Darcy formulation to investigate the buoyancy effects on natural convection in a vertical enclosure. Although the viscous boundary layer in the porous medium is very thin for most engineering applications, inclusion of this term is essential for heat transfer calculations [11]. However, the inertial effect was neglected, as the flow was relatively low.

The variables are transformed into the dimensionless quantities defined as,

Table 1

Comparison of the results obtained in the present study with those of Aydin [14]

	Present work	Published work [14]	Difference (%)
$\psi_{\max}$	5.070	5.087	0.33
$U_{\max}$	16.300	16.225	0.46
$V_{\max}$	19.730	19.645	0.43

Table 2

Comparison of the results obtained in the present study with those of Nithiarasu et al. [8]

	Present work	Published work [8]	Difference (%)
$\psi_{\max}$	2.53	2.56	1.17
$V_{\max}$	9.49	9.34	1.60

($Da = 0.01$, $Ra = 10^3$, porosity = 0.6).

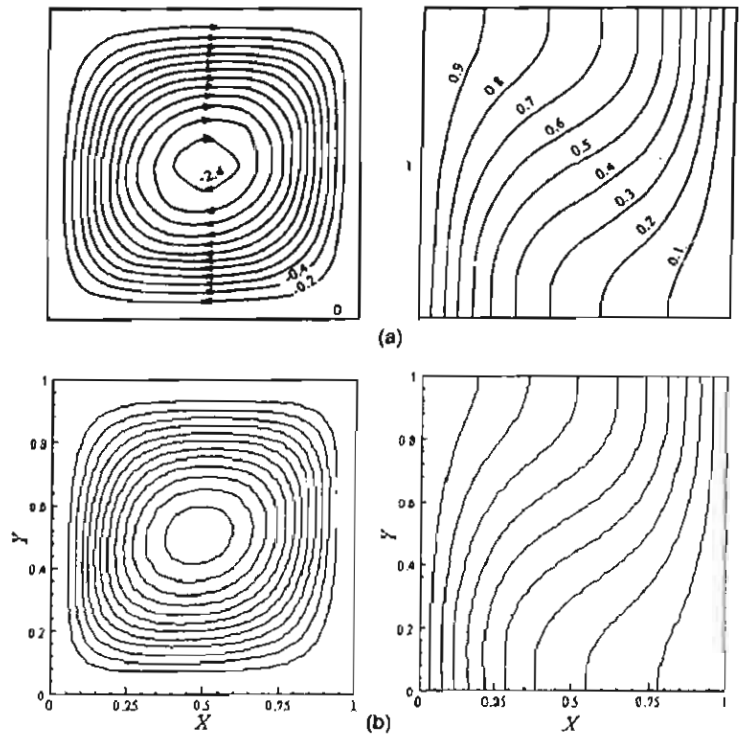


Fig. 3. Test results for validation purpose: (a) Nithiarasu et al. [8]: Non-Darcian model (including inertial and boundary effect) and (b) present simulation: Brinkman-extended Darcy model, which accounts for viscous effects due to the solid boundary.

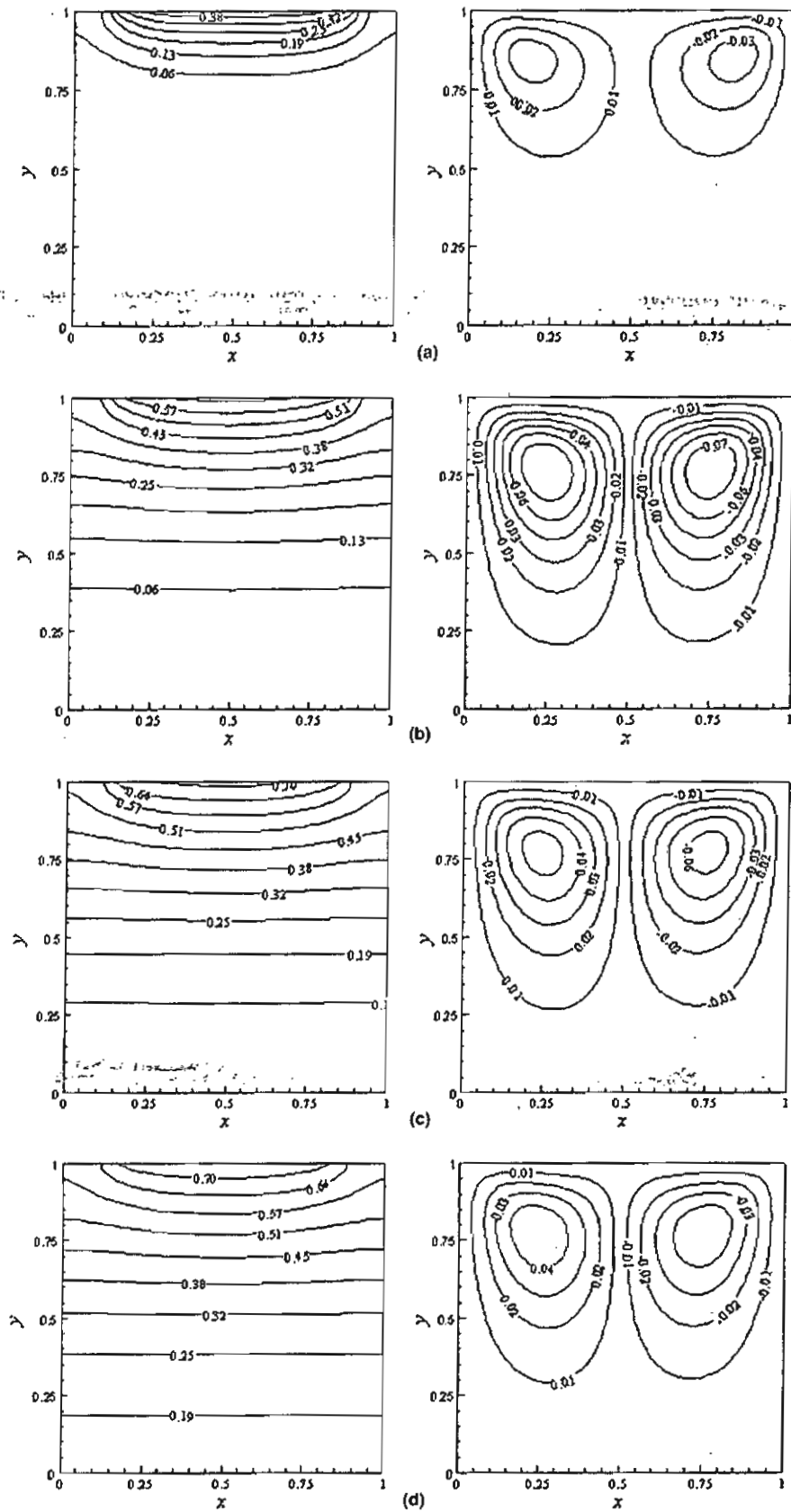


Fig. 4. Sequential files for contours of temperature and streamlines at times $\tau = 0.0125, 0.09, 0.1675$, and 0.2475 . ($Ra = 10^4$, $Da = 0.01$, $Pr = 1.0$, $\varepsilon = 0.8$, and $h = 100 \text{ W/m}^2 \text{ K}$).

$$X = \frac{x}{H}, Y = \frac{y}{H}, \tau = \frac{t\alpha}{H^2}, U = \frac{uH}{\alpha},$$

$$V = \frac{vH}{\alpha}, \zeta = \frac{\omega H^2}{\alpha}, \Psi = \frac{\psi}{\alpha}, \theta = \frac{T - T_i}{T_\infty - T_i}, \quad (10)$$

where ω and ψ represent dimensional vorticity and stream function, respectively. Symbol α denotes thermal diffusivity. The initial temperature and ambient temperature are given by T_i and T_∞ . Thus the dimensionless form of the governing equations can be written as

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\zeta, \quad (11)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \zeta}{\partial X} + V \frac{\partial \zeta}{\partial Y} = \varepsilon Pr \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial Y^2} \right) + \varepsilon^2 Ra Pr \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) - \frac{\varepsilon^2 Pr}{Da} \zeta, \quad (12)$$

$$\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right), \quad (13)$$

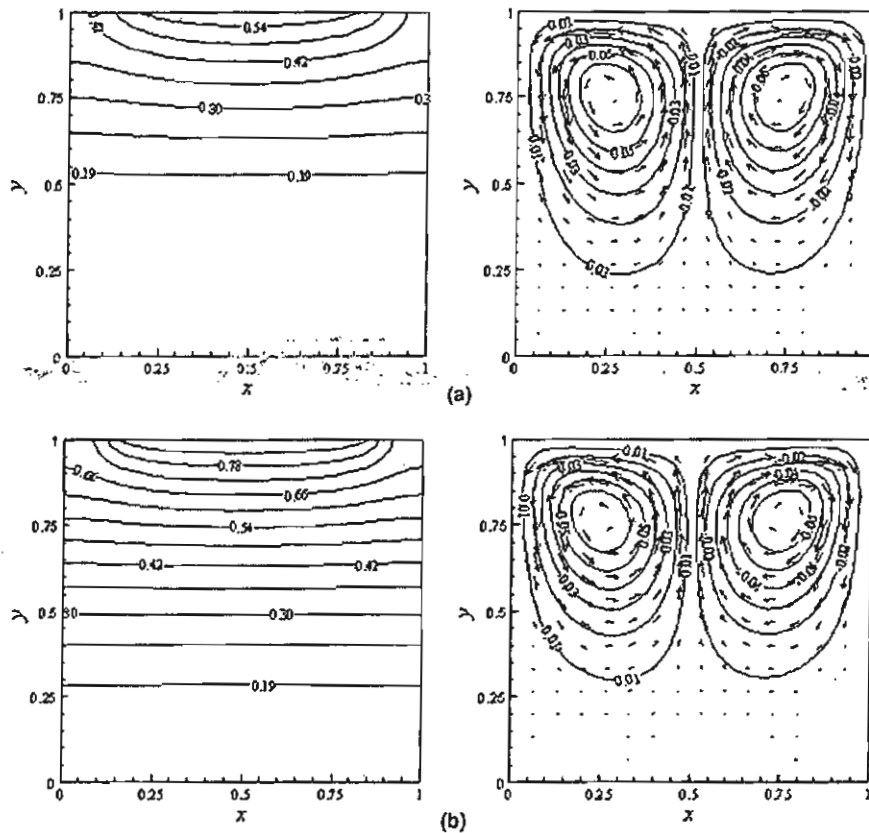
where the Darcy number, Da is defined as κ/H^2 , and $Pr = \nu/\alpha$ is a Prandtl number. The Rayleigh number Ra , which gives the relative magnitude of buoyancy and viscous forces is defined as $Ra = g\beta(T_i - T_\infty)H^3/(\nu\alpha)$.

$Pr = \nu/\alpha$ is the Prandtl number, where $\alpha = k_e/(\rho c_p)_f$ is the thermal diffusivity.

3. Numerical procedure

The thermal properties of the porous medium are taken to be constant. Specific heat ratio of unity is assumed. The effective thermal conductivity of the porous medium considered is 10 W/m K.

In the present study, the iterative finite difference method is used to solve the transient dimensionless governing equations (Eqs. (11)–(13)) subject to their corresponding initial and boundary conditions given in Eqs. (1)–(4). Approximation of convective terms is based on an upwind finite differencing scheme, which correctly represent the directional influence of a disturbance. A uniform grid resolution of 61×61 was found to be sufficient for all smooth computations and computational time required in achieving steady-state conditions. Finer grids did not provide a noticeable change in the computed results. The finite difference form of boundary condition at the open part of the top surface is systematically derived, based on energy conservation principle. The boundary values of dimensionless temperature of a node i, j $\theta_{i,j}$ are expressed as



$$\theta_{ij} = \frac{2\theta_{ij-1} + \theta_{i-1j} + \theta_{i+1j} + 2\frac{h\Delta y}{k}}{2(\frac{h}{k}\Delta Y + 2)} \quad (14)$$

It can be noticed that Eq. (14) is independent of T_∞ as it has been eliminated during the derivation. Thus the solutions can be obtained regardless of a value of T_∞ .

4. Results and discussion

In order to verify the accuracy of the present numerical study, the present numerical model was validated against the results obtained by Aydın [19] for a free convection flow in a cavity, with side-heated isothermal wall, filled with pure

air ($Pr = 0.7$) for Rayleigh number of 10^4 . It was found that the solutions have good agreement with the previously published work. The results of the selected test case are illustrated in Fig. 2 for streamlines and temperature contour lines. Table 1 clearly shows a good agreement of the maximum value of the stream function and the maximum values of the horizontal and vertical velocity components between the present solution and that of Aydın. Also, the results from the present numerical model were compared with the solution of Nithiarasu et al. [8] in the presence of porous medium for additional source of confidence, as shown in Fig. 3. The values of $Ra = 10^4$, $Da = 0.01$ and $\varepsilon = 0.6$ were chosen. Table 2 clearly shows a good agreement of the

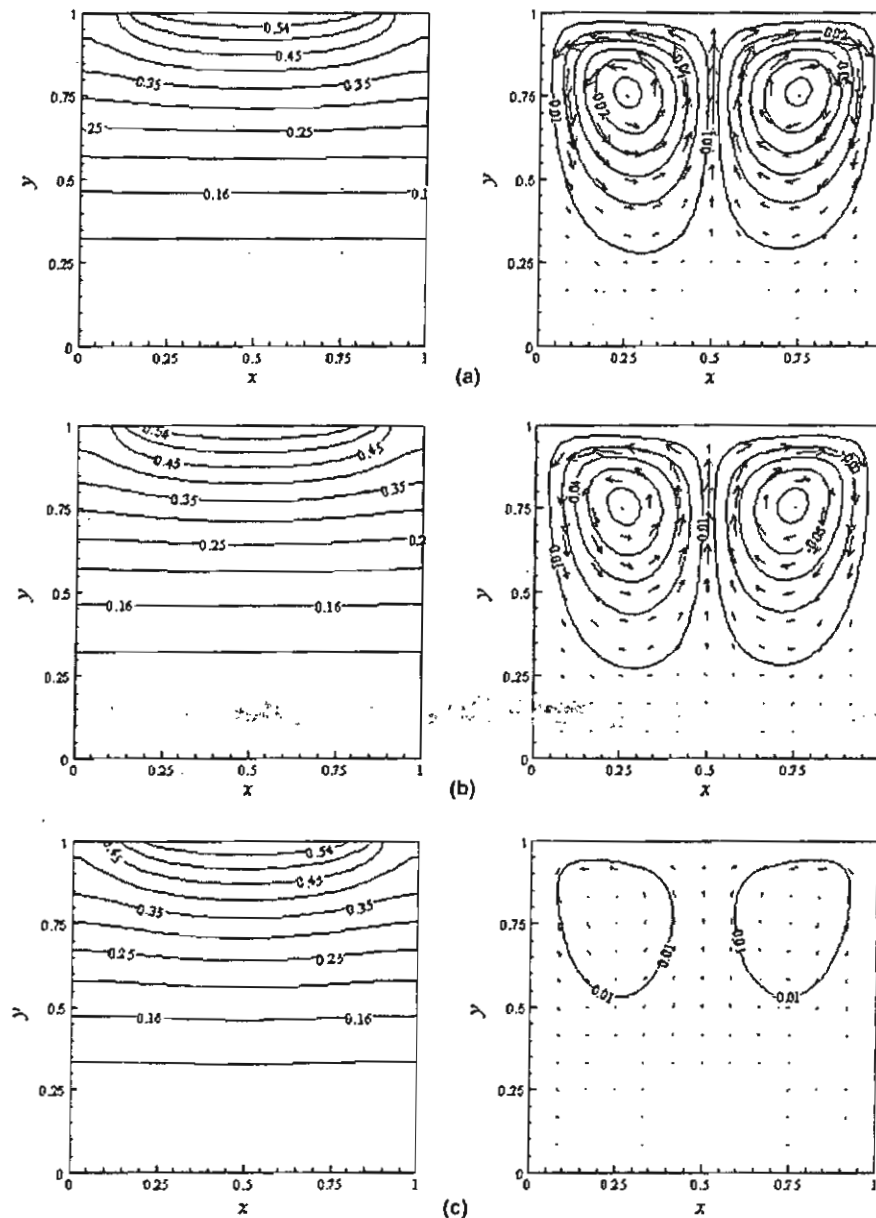


Fig. 6. Contours of temperature and streamlines: (a) $Da = \text{infinity}$, (b) $Da = 0.1$, (c) $Da = 0.001$. ($Ra = 10^4$, $h = 60 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, $Pr = 1.0$, and $\varepsilon = 0.8$).

maximum values of the stream function and vertical velocity component between the present solution and that of Nithiarasu et al [8]. All of these favorable comparisons lend confidence in the accuracy of the present numerical model.

The following discussions include the numerical results from the present study. Initial values of θ for an entire domain are set 1, based on Eq. (14) since the ambient temperature is higher than temperature of the medium in cavity. The investigations were conducted for a range of controlling parameters, which are Darcy number (Da) Rayleigh number (Ra) and convective heat transfer coefficient (h). The porosity ε of 0.8 and unity aspect ratio ($A = 1$) were considered throughout in the present study. In order to assess global effects of these parameters, the streamlines and isotherm distributions inside the entire cavity are presented. All the figures have the same range of contour levels to facilitate direct comparisons.

The resulting computational fields were extracted at the time adequately long to ensure sufficient energy transferred throughout the domain. Fig. 4 displays instantaneous images of the contour plots during the thermal and flow evolution. The Darcy number of 0.01, $Pr = 1.0$, $h = 60 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, and $\varepsilon = 0.8$ are considered. The two columns represent temperature and stream function. With the same contour levels, comparisons can be observed directly. The four snapshots from top to bottom in each column are results taken at the dimensionless times $\tau = 0.0125$, 0.09, 0.1675, and 0.2475 with the time interval. The vertical temperature stratification is observed. The streamline contours exhibit circulation patterns, which are characterized by the two symmetrical vortices. The fluid flows as it is driven by the effect of buoyancy. This effect is distributed from the top wall of cavity where the fluid is heated through the partially open area. This indicates the non-uniform temperature at the top surface, leading to an unstable condition. Thus the buoyancy effect is associated with the lateral temperature gradient at locations near the top surface. Heated portions of the fluid become lighter than the rest of fluid, and are expanded laterally away from the center to the sides, then flow down along the two vertical walls, leading to the clockwise and counter-clockwise flow circulations. These results suggest that the buoyancy forces are able to overcome the retarding influence of viscous forces. An increase in strength of the vortices develops fast during early simulation times, and its maximum magnitude reaches 0.1 at $\tau = 0.0475$. After this time, the vortices are slowly weakened. Similarly, temperature distribution progressively evolves relatively fast in the early times. After the time $\tau = 0.07$, slow evolution is observed. This result corresponds to the decrease in strength of flow circulations. In the remaining area, the fluid is nearly stagnant suggesting that conduction is dominant due to minimal flow activities. This is because the viscous effects are large.

This distinct phenomenon is different from the case of fully heated top wall to which constant temperature was prescribed in that in this case the heat transfer from the top to bottom surface is exclusively by pure conduction.

Fig. 5 illustrates how the convective heat transfer coefficient influences thermal and flow behaviors, while other parameters $Da = 0.1$, $Pr = 1.0$, and $\varepsilon = 0.8$ are fixed. The variable values of h chosen are 60 and $300 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, which may represent a typical free and forced convection, respectively. In all the figures henceforth, directions and magnitudes of the arrows indicate the direction as well as strength of the flows respectively. It is seen on the left column in Fig. 5 that the temperature gradients are steep at the top area near the exposed convective surface and gradually decreases toward the bottom of the domain. In the remaining area of the cavity, the temperature gradients are small and this implies that the temperature differences are very small in the bottom region of the cavity where viscous effects are strong. It can be observed on the right-column plots, which presents streamline contours that the change in h does not contribute a significant modification to the temperature contours. However, an increase in h expands temperature distribution area due to the more energy that is carried away from the location of convection surface condition toward the bottom. Moreover, higher value of h increases maximum temperature resulting in wider temperature range in the domain.

Effects of the Darcy number on the fluid flow and temperature inside the rectangular cavity are depicted in Fig. 6. The contour of isotherms and streamlines are plotted for different Darcy numbers while ε , Pr and h are kept at 0.8, 1.0 and $60 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ respectively. The Darcy number, which is directly proportional to the permeability of the porous medium, was set to 0.001 and 0.1. The case in which the porous medium is absent corresponds to infinite Darcy number. The presence of a porous medium within rectangular enclosure results in a force opposite to the flow direction which tends to resist the flow which corresponds to suppress in the thermal currents of the flow as compared to a medium with no porous (infinite Darcy number). It is evident that the increase in Da enhances the streamline

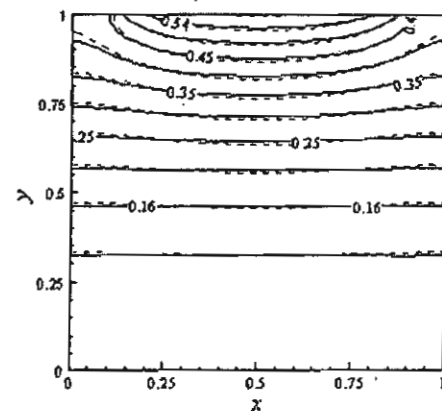


Fig. 7. Temperature distribution contours within a medium in the absent of porous (solid line) overlaid by the temperature distribution contours in a porous medium with Da of 0.001 (dash line). Data is taken from that of Fig. 6.

intensities thereby assisting downward flow penetration, which causes the streamline lines, i.e., two symmetrical vortices to stretch further away from the top surface. This results in expanding the region for which the convection significantly influences an overall heat transfer process. On the other hand, as the Darcy number decreases, the flow circulations as well as thermal penetration are progressively inhibited due to the reduced permeability of the medium except at the region close to the location of convection surface condition where the flow motions are relatively strong. Furthermore, Fig. 6c indicates that as Darcy number approaches zero, the convective heat transfer mechanism is almost suppressed, while the heat transfer by means of conduction plays an important role in heat

transfer. The left column of Fig. 6 shows comparison of temperature in which the contours of different Darcy numbers appear roughly similar.

To gain further insight into the effects of the Darcy number on the thermally stratified layer, temperature contours for pure fluid are overlaid with that for porous fluid with Da of 0.001. The results are given in Fig. 7. It is noticed that temperature stratification layers, near the vertical symmetry line in the case of Da 0.001, move further downward relative to those for pure fluid. This observed incident results from a stronger flow in the upward direction in the central region for the pure medium. The upward flows inhibit the thermal propagation. In contrast, in the areas away from the vertical center line, the downward flows

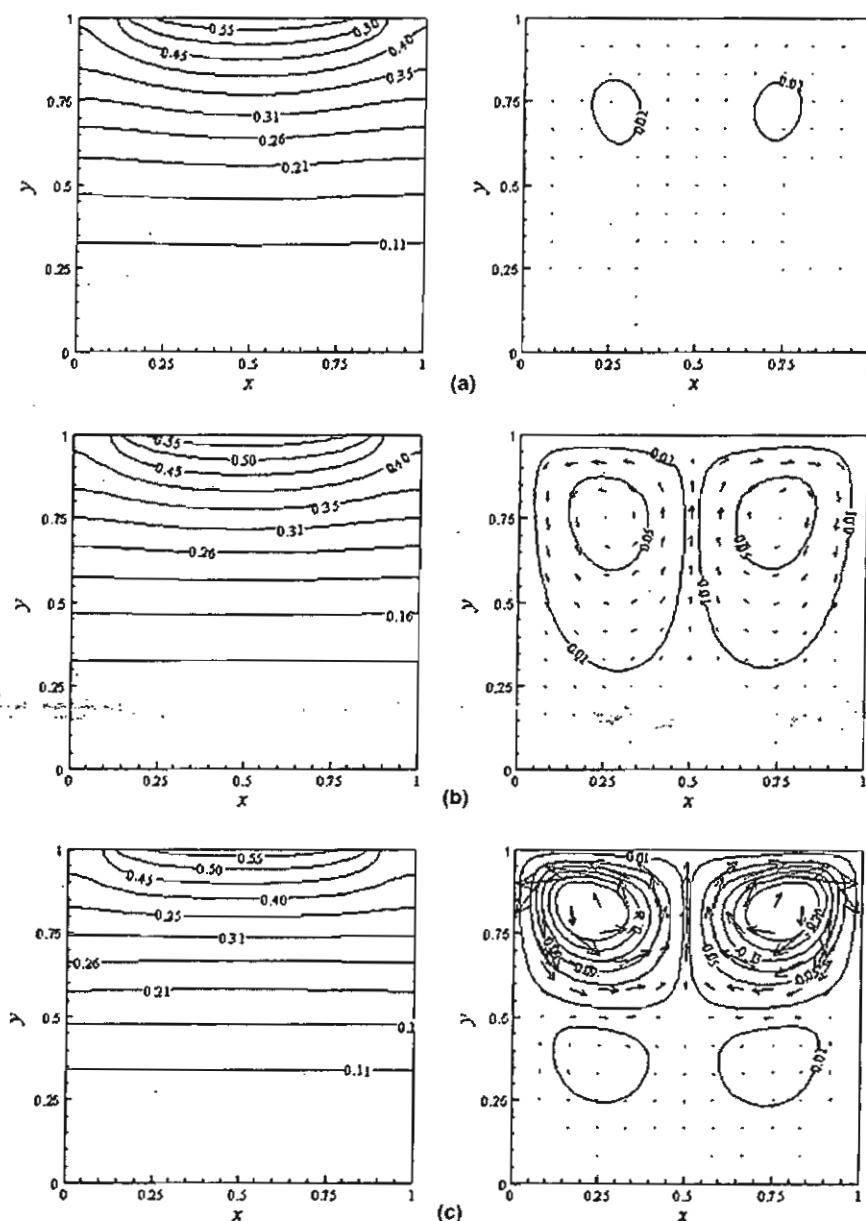


Fig. 8. Contours of temperature and streamlines: (a) $Ra = 10^3$, (b) $Ra = 10^4$ and (c) $Ra = 10^5$. ($Da = 0.1$, $h = 60 \text{ W/m}^2 \text{ K}$, $Pr = 1.0$, and $\epsilon = 0.8$).

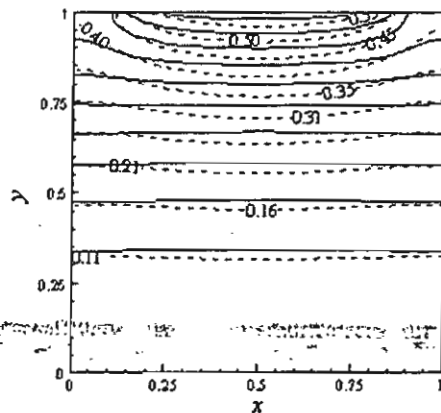


Fig. 9. Temperature distribution contours within a porous medium with $Ra = 10^3$ (dash line) overlaid by the temperature distribution contours in a porous medium with $Ra = 10^5$ (solid line). Data is taken from that of Fig. 8.

assist heat to be transferred towards the bottom of the enclosure.

Fig. 8 shows the isotherms and streamlines obtained for various Rayleigh numbers ($Ra = 10^3$, 10^4 and 10^5) whereas the Darcy number of 0.1, porosity of 0.8, and h of $60 \text{ W/m}^2 \text{ K}$ are fixed. The Rayleigh number provides the ratio of buoyancy forces to change in viscous forces. As Rayleigh number increases, the buoyancy-driven circulations inside the enclosure become stronger as seen from greater magnitudes of stream function. For the large value of Ra ($Ra = 10^5$), there appears a pair of secondary weak circulations in the bottom region of the enclosure. The two vigorous vortices are confined to the upper domain, where convection is a dominant mode of heat transfer.

Although the profiles of temperature contour are qualitative similar, Fig. 9 displays overlaid contours for the two cases which are of $Ra = 10^3$ and $Ra = 10^5$. It is evident in the case of $Ra = 10^3$ that temperature contour lines penetrate faster relative to the low Ra case at the central locations around vertical symmetric line; but they move slower in the regions near the vertical walls. The results are consistent with the thermal behaviors observed in Fig. 7 for the same reasoning, which confirm how a flow direction impacts the convection heat transfer. Therefore it can be concluded to an interesting note that not only an intensity of a flow, but also the direction of the fluid flow locally affects the heat convection process.

5. Conclusions

Numerical simulations of natural convection flow through a fluid-saturated porous medium in a rectangular cavity due to top surface convection were performed. Transient effects of associated controlling parameters were examined. The two-dimensional flow is characterized mainly by two symmetrical eddies that are initiated by the presence of buoyancy effect. The buoyancy effect is associated with the lateral temperature gradient at loca-

tions near the top surface. As the convection heat transfer coefficient increases, the temperature stratification penetrates deeper toward the bottom wall, and temperature range within the domain is extended. Small values of Darcy number hinder the flow circulations. Therefore the heat transfer by convection is considerably suppressed. Large values of Rayleigh number increase streamline intensities, thus enhancing the downward flow penetration. Therefore enlarges the region where convection mode is significant. Moreover, the flow in the direction of heat transfer is found to enhance the rate of convection whereas the flow in the opposed direction retards the heat rate. In our future study, effects of internal heat generation due to microwave energy on heat transfer processes in fluid-saturated porous medium will be considered.

Acknowledgement

This research was financially supported by the Thailand Research Fund (TRF).

References

- [1] T.L. Bergman, F.P. Incropera, R. Viskanta, Correlation of mixed layers growth in double-diffusive, salt-stratified system heated from below, *J. Heat Transfer* 108 (1986) 206–211.
- [2] J. Imberger, P.F. Hamblin, Dynamics of lakes, reservoirs, and cooling ponds, *A. Rev. Fluid Mech.* 14 (1982) 153–187.
- [3] M.A. Stanish, G.S. Schager, F. Kayihan, A mathematical model of drying for hygroscopic porous media, *AIChE J.* 32 (1986) 1301–1311.
- [4] P. Rattanadecho, K. Aoki, M. Akahori, A numerical and experimental investigation of the modeling of microwave drying using a rectangular wave guide, *J. Drying Technol.* 19 (9) (2001) 2209–2234.
- [5] P. Rattanadecho, K. Aoki, M. Akahori, Influence of irradiation time, particle sizes and initial moisture content during microwave drying of multi-layered capillary porous materials, *ASME J. Heat Transfer* 124 (1) (2002) 151–161.
- [6] P. Cheng, Heat transfer in geothermal systems, *Adv. Heat Transfer* 4 (1978) 1–105.
- [7] P.H. Oosthuizen, H. Patrick, Natural Convection in an Inclined Square Enclosure Partly Filled with a Porous Medium and with a Partially Heated Wall, *HTD 302*, American Society of Mechanical Engineers, Heat Transfer Division, (Publication), 1995, pp. 29–42.
- [8] P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu, T. Sundararajan, Natural convective heat transfer in a fluid saturated variable porosity medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* 40 (16) (1997) 3955–3967.
- [9] K.M. Khanafer, A.J. Chamkha, Mixed convection flow in a lid-driven enclosure filled with a fluid-saturated porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* 42 (13) (1998) 2465–2481.
- [10] P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu, T. Sundararajan, Numerical investigation of buoyancy driven flow in a fluid saturated non-Darcian porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* 42 (7) (1998) 1205–1215.
- [11] A.M. Al-Amiri, Analysis of momentum and energy transfer in a lid-driven cavity filled with a porous medium, *Int. J. Heat Mass Transfer* 43 (2000) 3513–3527.
- [12] K. Khanafer, K. Vafai, Double-diffusive mixed convection in a lid-driven enclosure filled with a fluid-saturated porous medium, *Numer. Heat Transfer, Part A* 42 (2002) 465–486.
- [13] D.A. Nield, A. Bejan, *Convection in Porous Media*, Springer, New York, 1999.
- [14] K. Vafai, *Handbook of Porous Media*, Marcel Dekker, New York, 2000.

- [15] I. Pop, D.B. Ingham, *Convective Heat Transfer, Mathematical and Computational Modeling of Viscous Fluids and Porous Media*, Pergamon, Oxford, 2001.
- [16] P. Rattanadecho, K. Aoki, M. Akahori, A numerical and experimental investigation of the modeling of microwave heating for liquid layers using a rectangular wave guide (effects of natural convection and dielectric properties), *Appl. Math. Modelling* 26 (2002) 449–472.
- [17] H.C. Brinkmann, On the permeability of media consisting of closely packed porous particles, *Appl. Sci. Res.* 1 (1947) 81–86.
- [18] G. Lauriat, V. Prasad, Natural convection in a vertical porous cavity: a numerical study for Brinkmann-extended Darcy formulation, *Trans. ASME J. Heat Transfer* 109 (1987) 295–320.
- [19] O. Aydin, Determination of optimum air-layer thickness in double-pane windows, *Energy Buildings* 32 (2000) 303–308.

The simulation of microwave heating of wood using a rectangular wave guide: Influence of frequency and sample size

P. Rattanadecho

Faculty of Engineering, Thammasat University, Rangsit Campus, Pathumthani 12121, Thailand

Received 21 September 2005; received in revised form 27 February 2006; accepted 1 March 2006
Available online 7 March 2006

Abstract

Microwave heating–drying of wood using a wave guide is a relatively new area of research. In order to gain insight into the phenomena that occur within the wave guide together with the temperature distribution in the wood, a detailed knowledge of absorbed power distribution is necessary. In this paper, a two dimensional numerical model is developed to predicted the distribution of electromagnetic fields (TE₁₀-mode), power and temperatures distributions within wood located in rectangular wave guide. A three dimensional finite difference time domain (FDTD) scheme is used to determine electromagnetic fields and absorbed power by solving the transient Maxwell's equations, and finite difference method is used to obtain unsteady temperature profiles. Temperature dependence of wood dielectric properties is simulated through an iterative process. The simulations are performed illustrating the influence of irradiation times, working frequencies and sample size. The presented modeling is used to identify the fundamental parameters and provides guidance for microwave drying of wood.

© 2006 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Microwave heating; Rectangular wave guide; Numerical; Wood

1. Introduction

In the past decade, there are many successful examples of microwave application including; the heating and drying of foods, heating and drying of ceramics, heating and drying of woods and vulcanizations of rubber. A number of other analyses of the microwave heating process have appeared in the recent literature (Ayappa et al., 1991, 1992; Saltiel and Datta, 1997; Tada et al., 1998; Rattanadecho et al., 2001, 2002; Rattanadecho, 2004; Basak, 2003, 2004).

Although most of previous investigations considered simulations of microwave heating in solid sample, a little effort has been reported on study of microwave heating of wood in a rectangular wave guide particularly full comparison between mathematical simulations and experimental data.

Generally, the microwave power absorbed was assumed to decay exponentially into the sample following the Lambert's law. However, this assumption is valid for the large dimension

samples where the depth of sample is much larger than the penetration depth (all microwave energy, except the reflected wave from the upper surface of the sample, is dissipated within the sample). For the thin samples where the depth of sample is much smaller than the penetration depth, heat transfer rate by microwave is faster. The reason is that the reflection and transmission components at each interface will contribute to the resonance of standing wave configuration inside the sample whereas resonance is completely absent for greater length scales (Ayappa et al., 1991).

In perspective, Lambert's exponential decay law cannot predict resonance. Therefore, the spatial variations of the electromagnetic field within thin samples must be obtained by solution of the Maxwell's equations. The two-dimensional models of the interactions between electromagnetic field and dielectric materials have been used previously to study numerous heating processes of wood in a variety of microwave applicator configurations such as rectangular wave guide and cavities (Perre and Turner, 1997; Zhao and Turner, 2000). Readers may refer to Metaxas and Meridith (1983) and Mujumdar (1995) for an introduction to heat and mass transfer in microwave processing.

E-mail address: ratphadu@engr.tu.ac.th.

Due to the limited amount of theoretical and experimental work on microwave heating of hygroscopic porous media such as wood reported to date, the various effects are not fully understood and numbers of critical issues remain unresolved. These effects of the irradiation time, working frequencies and sample size on heating pattern have not been systematically studied. This work, the formulation of mathematical model for the microwave heating of wood inside a rectangular wave guide, in which the microwave of TE_{10} mode operating at the specified frequencies, is employed. The mathematical models are solved numerically and compared with experimental data. In the present analysis, the effects of the irradiation time, working frequencies and sample size on heating pattern are investigated in details.

The result presented here provides a basis for fundamental understanding of microwave drying of wood.

2. Experimental configuration

Fig. 1 shows the experimental apparatus for microwave heating system. It was developed for the heating tests to validate the model simulation. This system (Fig. 1(a)) consisted of a microwave supply system and a hot air system. In the microwave supply system a magnetron generated the monochromatic wave of TE_{10} mode operating at a frequency of 2.45 GHz, a wave-guide transmitted the wave to the heating cavity, a directional coupler with power meters measured power components. A circulator with a air cooling-load was installed in the system to absorb the reflected wave, a three-stub tuner was used to adjust the matching impedance into the heating cavity. In experiments, the microwave was transmitted along the z -direction of the rectangular wave guide with inside dimensions of 11 cm $\times$ 5.461 cm toward a water load that was situated at the end of the wave

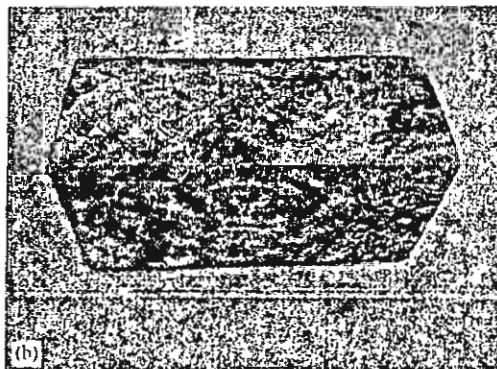
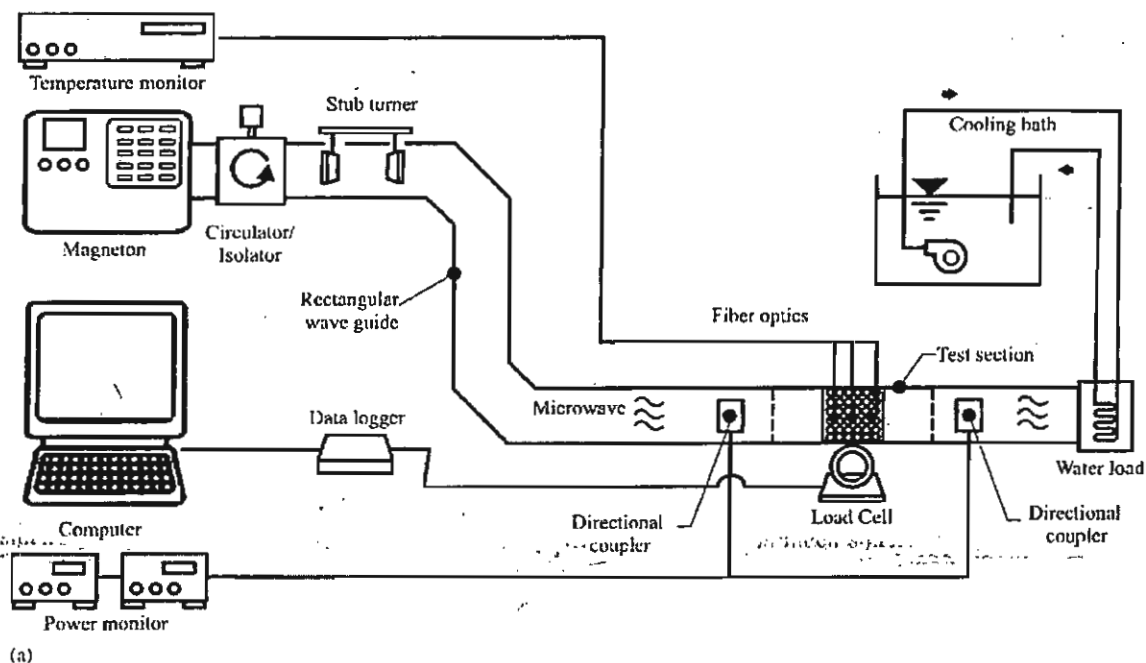


Fig. 1. Experimental apparatus: (a) microwave heating system; (b) wood sample.

Table 1
Dielectric properties of wood ($T = 25^\circ\text{C}$)

Frequency	2.45 GHz	5 GHz
Dielectric constant, ϵ'	1.591	1.591
Loss factor, ϵ''	0.033	0.033
Penetration depth (m)	0.0357	0.0175

guide. The water load ensured that only a minimal amount of microwave was reflected back to the sample. A cooling tower with an air cooled load was installed in the system to reduce the temperature in the water load system.

The wood sample with dimensions of $11\text{ cm} \times 5\text{ cm} \times 5.5\text{ cm}$ (Fig. 1(b)) filled in container is arranged in perpendicular to direction of irradiation via a rectangular wave guide. A sample container was made from polypropylene with a thickness of 0.075 cm , it did not absorb microwave energy.

During the experiment, output of magnetron was adjusted at the specified power (1000 W). The temperature distributions within the wood sample were measured using fiberoptic (LUXTRON Fluoroptic Thermometer, Model 790, accurate to $\pm 0.5^\circ\text{C}$). An infrared camera was used to detect the temperature distribution in the sample. All dielectric properties of wood are measured by using network analyzer which performs all of the necessary control functions, treatment of microwave signals, calculation, data processing and the results presentations. The dielectric properties of wood are listed in Table 1.

3. Analysis of microwave heating using a rectangular wave guide physical model

Fig. 2 shows the physical model of the microwave heating of wood using rectangular wave guide. Since the microwave field in the TE_{10} mode has no variation of field in the direction between the broad faces of rectangular wave guide, this means that the microwave is uniform in the y -direction. Consequently, it is assumed that two dimensional heat transfer model in the x and z directions would be sufficient to identify the microwave heating phenomena in a rectangular wave guide (Rattanadecho et al., 2001, 2002). The wood samples are assumed to be homogeneous and isotropic. Since the average moisture content of wood sample is low and the overall heating time is fast, the moisture loss is neglected. The other assumptions are as follows:

1. The absorption of microwave by air in rectangular wave guide is negligible.
2. The walls of rectangular wave guide are perfect conductors.
3. All materials are non-magnetic.
4. The effect of the sample container (made of poly propylene) on the electromagnetic and temperature fields can be neglected.

3.1. Maxwell's equation

Assuming the microwave is TE_{10} mode, the governing equations for the electromagnetic field can be written in term of the

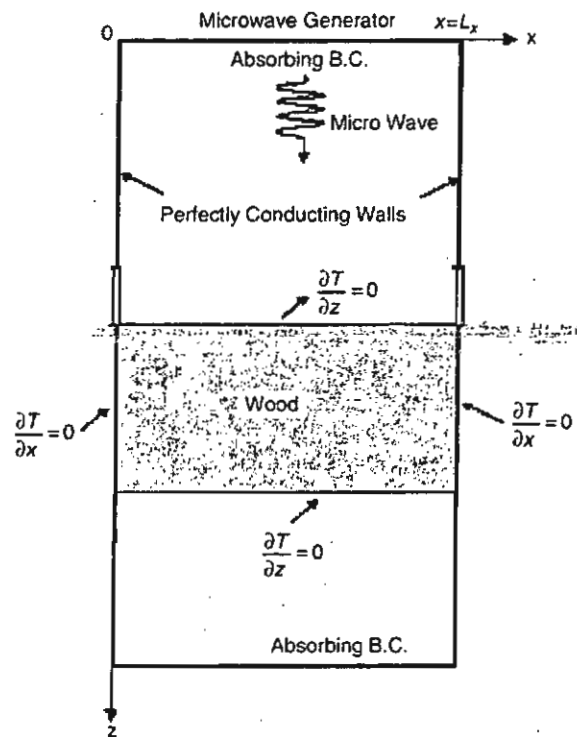


Fig. 2. Physical model.

component notations of electric and magnetic field intensities (Rattanadecho et al., 2002)

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (2)$$

$$-\left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}\right) = \sigma E_y + \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (3)$$

where E and H denote electric field intensity and magnetic field intensity, respectively. Subscripts x , y and z represent x , y and z components of vectors, respectively. Further, permittivity or dielectric constant ϵ , magnetic permeability μ and electric conductivity σ are given by

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r, \quad \mu = \mu_0, \quad \sigma = 2\pi f \epsilon \tan \delta. \quad (4)$$

In addition, if magnetic effects are negligible, which is proven to be a valid assumption for most dielectric materials used in microwave heating applications, the magnetic permeability (μ) is well approximated by its value μ_0 in the free space.

Corresponding to the physical model shown in Fig. 2, boundary conditions are given as follows:

(a) Perfectly conducting boundaries; boundary conditions on the inner wall surface of a rectangular waveguide are given by using Faraday's law and Gauss' theorem:

$$E_t = 0, \quad H_n = 0. \quad (5)$$

The subscripts t and n denote the components of tangential and normal directions, respectively. (b) Continuity boundary condition; boundary conditions along the interface between different materials, for example between air and dielectric material surfaces, are given by using Ampere's law and Gauss theorem:

$$E_t = E'_t, \quad H_t = H'_t, \quad D_n = D'_n, \quad B_n = B'_n. \quad (6)$$

The superscript ' denotes one of the different materials.

(c) Absorbing boundary condition; at both ends of the rectangular wave guide, the first order absorbing conditions are applied:

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \pm v \frac{\partial E_y}{\partial z}. \quad (7)$$

Here, the symbol $\pm$ represents forward or backward waves and v is phase velocity of the microwave.

(d) Oscillation of the electric and magnetic field intensities by magnetron; incident wave due to magnetron is given by the following equations:

$$E_y = E_{yin} \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin(2\pi f t),$$

$$H_x = \frac{E_{yin}}{Z_H} \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin(2\pi f t), \quad (8)$$

where E_{yin} is the input value of electric field intensity, L_x is the length of rectangular wave guide in x -direction. Z_H is the wave impedance defined as

$$Z_H = \frac{\lambda_g Z_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda_g}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}. \quad (9)$$

3.2. Heat transport equation

The temperature of wood exposed to incident wave is obtained by solving the heat conduction equation with the microwave power absorbed included as a local electromagnetic heat generation term:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{Q}{\rho \cdot C_p}, \quad (10)$$

where, T is temperature, a is thermal diffusivity, ρ is density and C_p is heat capacity at constant pressure. The local electromagnetic heat generation term Q is directly depended upon the electric field distribution defined as:

$$Q = 2\pi \cdot f \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r (\tan \delta) E_y^2. \quad (11)$$

The initial condition of wood sample defined as: $T = T_0$ at $t = 0$. The boundary conditions for solving heat transport equation are shown in Fig. 2.

4. Numerical technique

In order to predict the electromagnetic field, a finite difference time domain (FDTD) method is applied. In this study, the leapfrog scheme is applied to the set of Maxwell's

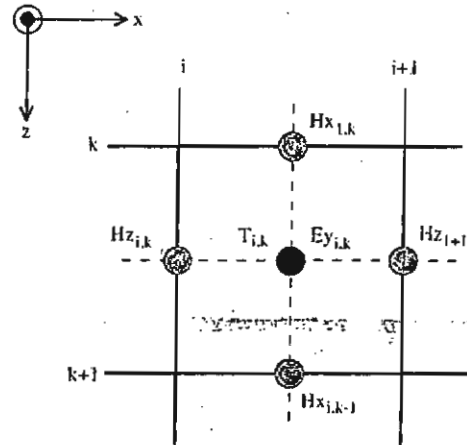


Fig. 3. Grid system configuration.

equations. The electric field vector components are offset one half cell in the direction of their corresponding components, while the magnetic field vector components are offset one half cell in each direction orthogonal to their corresponding components. The electric field and magnetic field are evaluated at alternative half time steps. For TE mode, the electric and magnetic field components are expressed by the total field FDTD equations as

$$E_y^n(i, k) = \frac{1 - (\sigma(i, k)\Delta t)/(2\epsilon(i, k))}{1 + (\sigma(i, k)\Delta t)/(2\epsilon(i, k))} E_y^{n-1}(i, k) + \frac{1}{1 + (\sigma(i, k)\Delta t)/(2\epsilon(i, k))} \frac{\Delta t}{\epsilon(i, k)} \times \left\{ \frac{-(H_z^{n-1/2}(i + 1/2, k) - H_z^{n-1/2}(i - 1/2, k))}{\Delta x} + \frac{(H_x^{n-1/2}(i, k + 1/2) - H_x^{n-1/2}(i, k - 1/2))}{\Delta z} \right\}, \quad (12)$$

$$H_x^{n+1/2}(i, k + 1/2) = H_x^{n-1/2}(i, k + 1/2) + \frac{\mu(i, k + 1/2)}{\Delta t} \times \left\{ \frac{E_y^n(i, k + 1) - E_y^n(i, k)}{\Delta z} \right\}, \quad (13)$$

$$H_z^{n+1/2}(i + 1/2, k) = H_z^{n-1/2}(i + 1/2, k) - \frac{\mu(i + 1/2, k)}{\Delta t} \times \left\{ \frac{E_y^n(i + 1, k) - E_y^n(i, k)}{\Delta x} \right\}. \quad (14)$$

Furthermore, the heat transport equation (Eq. (10)) is solved by the method of finite differences. The spatial and the temporal terms are approximated spatially using finite difference equations for electromagnetic field and temperature field, as shown in Fig. 3. Eqs. (12)–(14) and discretized heat transport equation

are solved on this grid system. The choice of spatial and temporal resolution is motivated by reasons of stability and accuracy.

To insure stability of the time-stepping algorithm, Δt must be chosen to satisfy the courant stability condition:

$$\Delta t \leq \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2}}{v} \quad (15)$$

and the spatial resolution of each cell is defined as:

$$\Delta x, \Delta z \leq \frac{\lambda_g}{10\sqrt{\epsilon_r}} \quad (16)$$

Corresponding to Eqs. (15) and (16), the calculation conditions are as follows [4]:

- (1) To ensure that each wavelength of the microwave in the computational domain for each frequency has more than 10 subdivisions in the numerical calculation, thus, the computational domain is conservatively set such that the spatial resolution of each cell is $\Delta x = \Delta z \leq \lambda_{mg}/10\sqrt{\epsilon_r} \approx 1.0$ mm.
- (2) It should be noted that the time step length for the heat transfer Δt is of the order of one second, which is very large compared with the time step required for the FDTD scheme, which is of order of several picoseconds (Rattanadecho et al., 2002). Consequently, the different time steps of $\Delta t = 1$ [s] and $\Delta t = 1$ [ps] are used for the computation of temperature field and the electromagnetic field, respectively.
- (3) Relative errors in the iteration procedure of 10^{-8} were chosen.

5. The iterative computational schemes

Since the dielectric properties of wood are temperature dependent, to understand the influence of electromagnetic field on microwave heating realistically, it is necessary to consider the coupling between electric field and temperature field. For this reason, the iterative computational schemes are required to resolve the coupled non-linear Maxwell's equations and heat transport equations.

The computational scheme is to compute a local heat generation term by running an electromagnetic calculation with uniform properties, determined from initial temperature data. The electromagnetic calculation is performed until a sufficient period is reached in which a representative average rms (root-mean-square) of the electric field at each spatial point is obtained, typically 30 000 time steps. The microwave power absorption at each point is computed and used to solve the time dependent temperature field. Using these temperatures new values of the dielectric properties are calculated and used to re-calculate the electromagnetic fields and then microwave power absorption. The all steps are repeated until the required heating time is reached. The details of computational schemes and strategy are illustrated in Fig. 4.

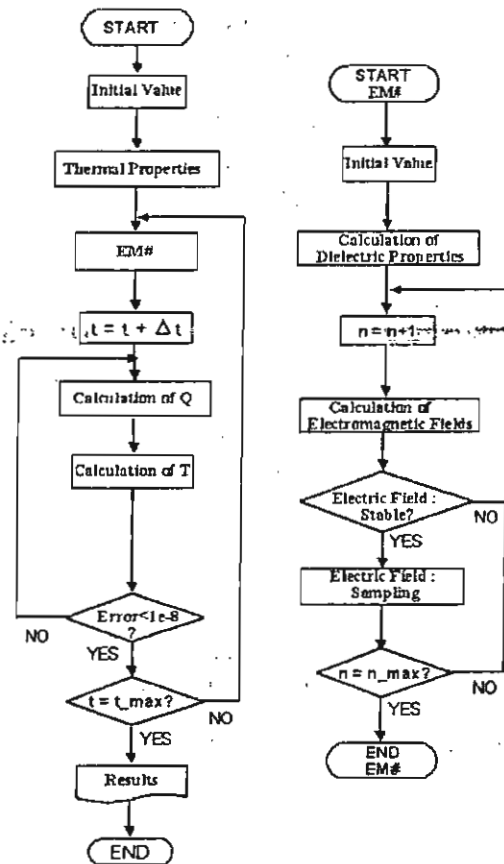


Fig. 4. Computational schemes.

6. Results and discussion

The experimental results for the microwave heating of wood were compared with predictions from mathematical model. The wood sample with a dry basis density of 721 kg/m^3 , moisture content of 12.5% and initial temperature of 25°C are used for the present analysis. Since the average moisture content of wood sample is very low and the overall heating time is fast, the moisture content was treated to be constant throughout the numerical calculation of microwave heating process. In the microwave industries, only a few frequencies are available. Currently, two frequencies, 2.45 and 5 GHz are utilized for testing the model.

The dielectric properties of wood were directly taken from present experiment. Some numerical values for dielectric constant and loss factor are listed in Table 1. The penetration depth D_p of wood at 25°C is approximately $D_p = 0.0357$ m (frequency of 2.45 GHz) and $D_p = 0.0175$ m (frequency of 5 GHz) according to the theoretical value

$$D_p = \frac{1}{2\pi f \sqrt{\epsilon_r' \sqrt{1 + (\epsilon_r''/\epsilon_r')^2} - 1}} = \frac{1}{\frac{2\pi f}{v} \sqrt{\epsilon_r' \sqrt{1 + (\tan \delta)^2} - 1}} \quad (17)$$

the penetration depth values are listed in Table 1.

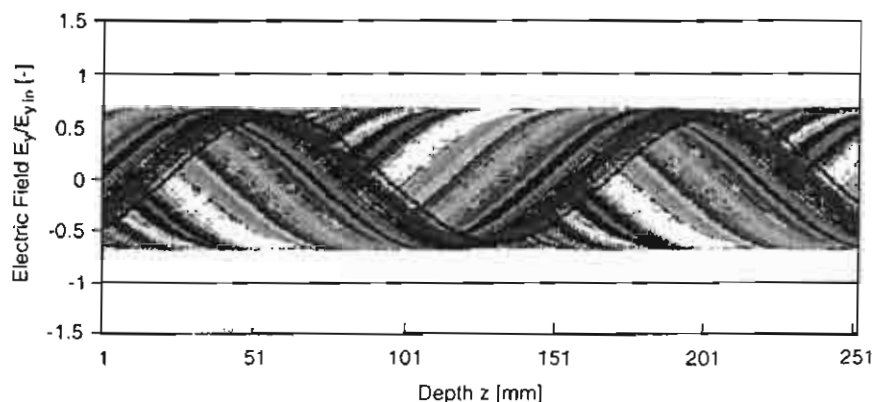


Fig. 5. The electric field distribution (Case 1).

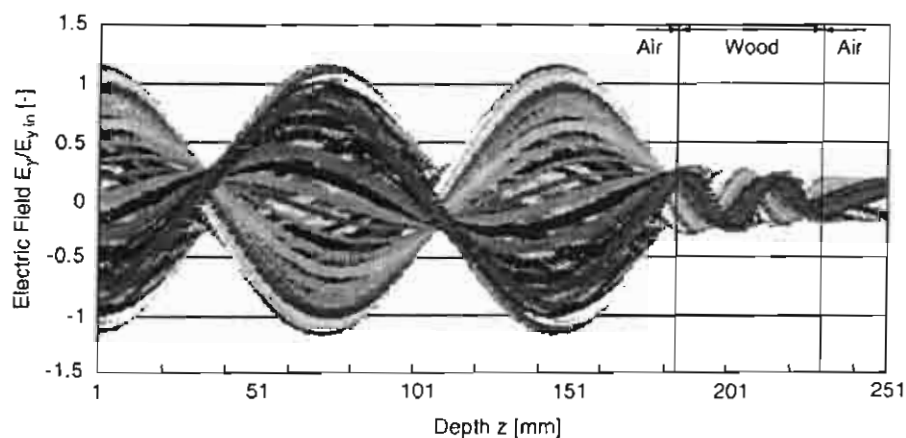


Fig. 6. The electric field distribution (Case 2).

From the definition of the penetration depth D_p the electric field intensity is the dielectric falls to approximately $1/e$ of its strength with distance D_p from the dielectric surface.

In this study, the effects of microwave frequencies and sample sizes on heating process are discussed in details.

6.1. The electric field distribution

To understand the electrical field distribution inside the rectangular wave guide and wood sample during microwave heating, the simulation analysis is required. The simulations of the typical electric field of TE_{10} mode along the center axis ($x=55$) of rectangular wave guide for specified heating conditions; $P=1000$ W, $t=30$ s and size = 11 cm (x : width) $\times$ 5 cm (z : depth) are presented as follows:

- (1) Rectangular wave guide is empty, its dielectric constant is unity (which corresponds to that of air).
- (2) Rectangular wave guide is filled with wood sample, operating at the microwave frequency of 2.45 GHz (30 s).
- (3) Rectangular wave guide is filled with wood sample, operating at the microwave frequency of 5 GHz (30 s).

Fig. 5 shows the stationary wave inside the rectangular wave guide with completely absorbed power at the end of the wave guide (Case 1). It is observed that the electric field distribution displays a wavy behavior with an almost uniform amplitude along a rectangular wave guide without the sample. Fig. 6 shows the electric field distribution inside a rectangular wave guide during microwave heating with the frequency of 2.45 GHz (Case 2). Since the typical depth of wood is close to the penetration depth of microwave (see Table 1), thus a large part of microwaves are able to penetrate through the sample. The reflected wave will occur on each interface, from air (cavity) to upper surface and from lower surface of sample to air (cavity). The reflection and transmission components at each interface will contribute to the resonance of standing wave configuration inside the sample and give rise to a microwave absorption peak further from the surface exposed to incident microwaves. Furthermore, focusing attention of electric field pattern inside the cavity (left hand side), a stronger standing wave with a large amplitude is formed by interference between the incident and reflected wave from the surface of sample due to the difference of dielectric properties of materials (air and sample) at this interface. Owing to energy absorption, it is

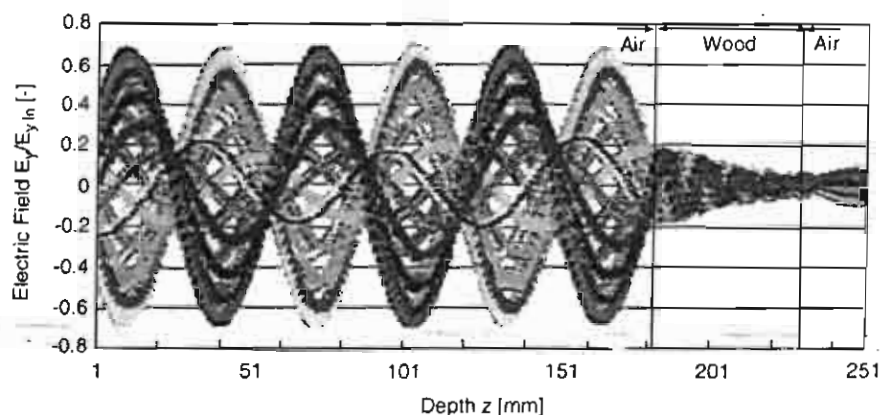
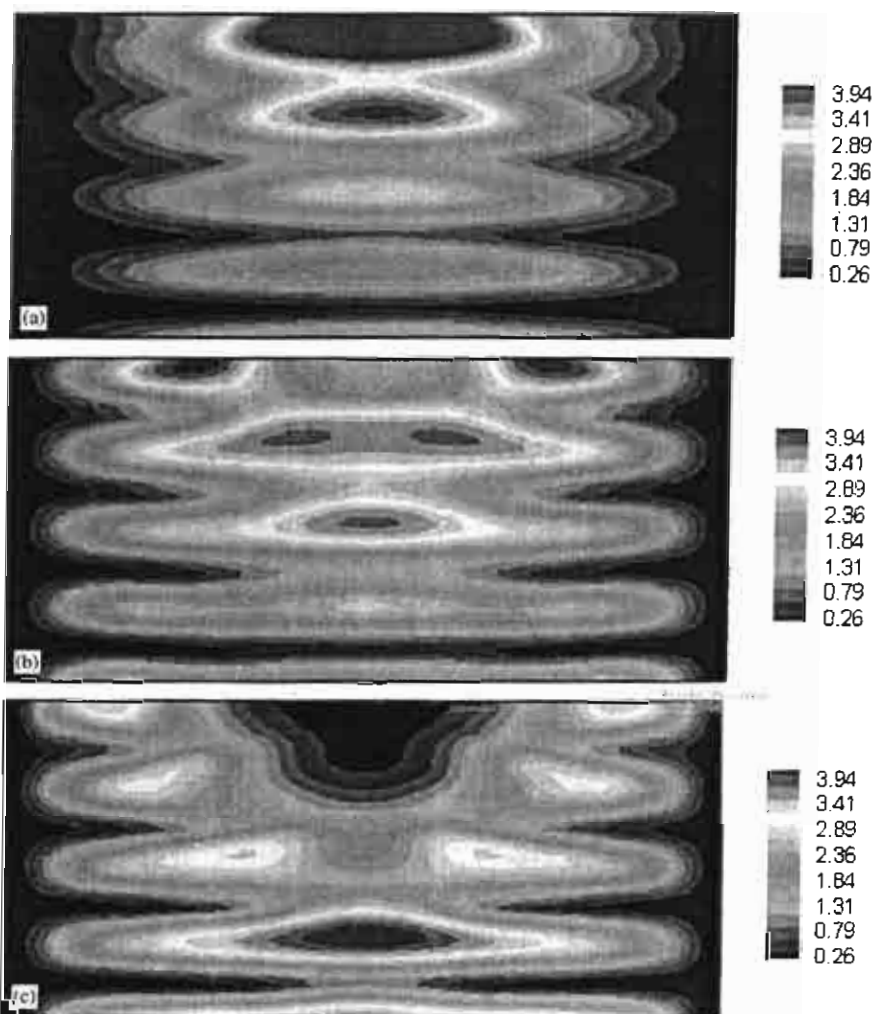


Fig. 7. The electric field distribution (Case 3).

Fig. 8. Microwave power absorbed (MW/m^3) at various heating times: (a) 10 s; (b) 20 s; (c) 30 s ($f = 2.45 \text{ GHz}$, size = 11 cm (x) $\times$ 5 cm (z)).

evident from the results that the electric field within the sample attenuates, and thereafter the absorbed energy is converted to the thermal energy, which increases the sample temperature.

Fig. 7 shows the electric field distribution when a sample of wood is inserted in the rectangular wave guide during microwave heating with a frequency of 5 GHz (Case 3). In contrast

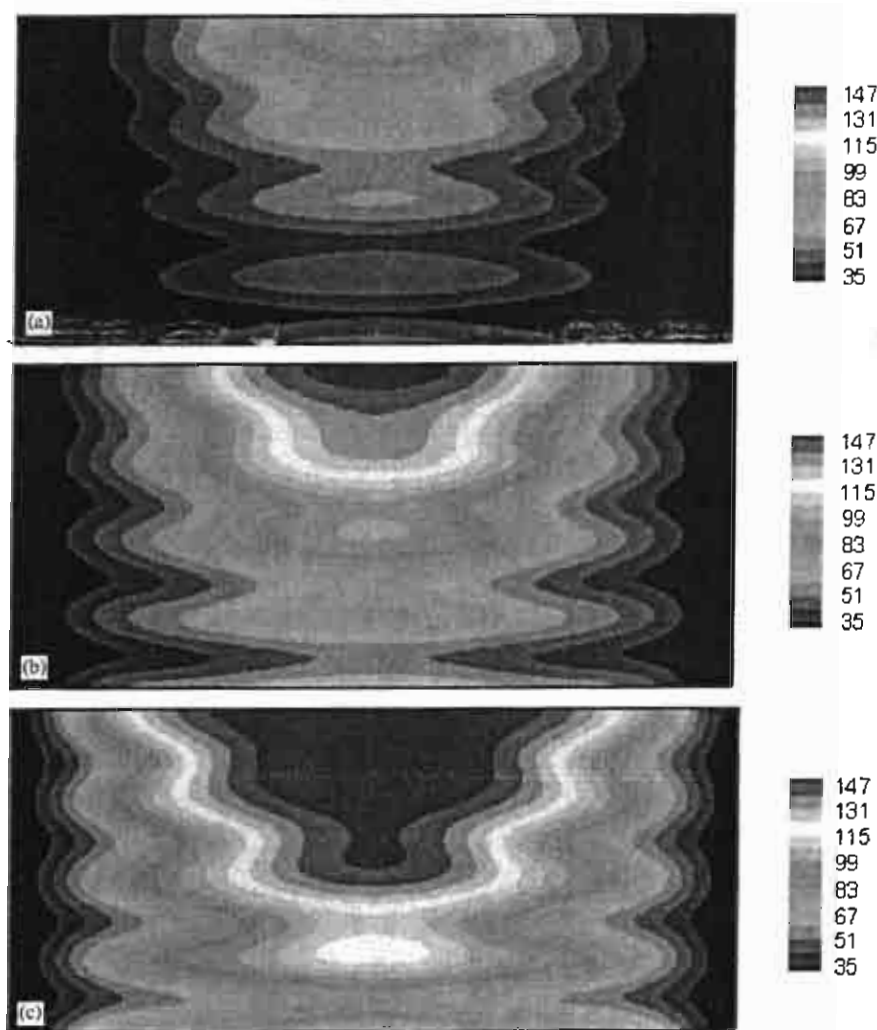


Fig. 9. Temperature distribution ($^{\circ}\text{C}$) at various heating times: (a) 10 s; (b) 20 s; (c) 30 s ($f = 2.45$ GHz, size = 11 cm (x) $\times$ 5 cm (z)).

to the electric field configuration in case 2, which is a result of a transmitted wave at the incident face and a reflected wave from the lower surface of the sample. This is due to the fact that microwave operates at a high frequency has a short wavelength which corresponds to a smaller penetration depth of microwave (see Table 1) when compared with the depth of sample. Consequently, all microwaves, except the reflected wave from the upper surface of the sample, is absorbed by the sample. It is found that the wave amplitude diminishes after $z = 2$ cm, which results in a low microwave power absorbed. This phenomenon explains why the electric field and therefore the microwave power absorbed are the greatest at the surface exposed to incident microwaves and decay exponentially along the along the propagating direction with a very small wavelength.

6.2. Effect of frequency on temperature distribution

The predictions of temperature distribution for microwave heating of wood are shown in Figs. 8 and 9, which corresponds

to the initial temperature of 25°C and microwave power level of 1000 W. Here, microwaves are transmitted along the z -direction of the rectangular wave guide toward the top surface of a wood sample with a dimension of 11 cm (x : width) $\times$ 5 cm (z : depth) in the xz -plane. Most importantly, the effects of the variation of frequency on temperature distribution are discussed by considering the two microwave frequencies ($f = 2.45$ GHz and 5 GHz).

For microwave heating of wood with the microwave frequency of 2.45 GHz, the temperature profile within the sample (Fig. 9) displays a wavy behavior corresponding to the resonance of electric field (Fig. 6). This is because the electric field within the sample attenuates owing to energy absorption, and thereafter the absorbed energy is converted to the thermal energy, which increases the sample temperature. It is found that the temperatures decay slowly along the propagation direction following the absorption of microwave (Fig. 8). The temperature distributions are shown for $t = 10, 20$ and 30 s, respectively. The maximum temperature within the sample is around 147°C at $t = 30$ s.

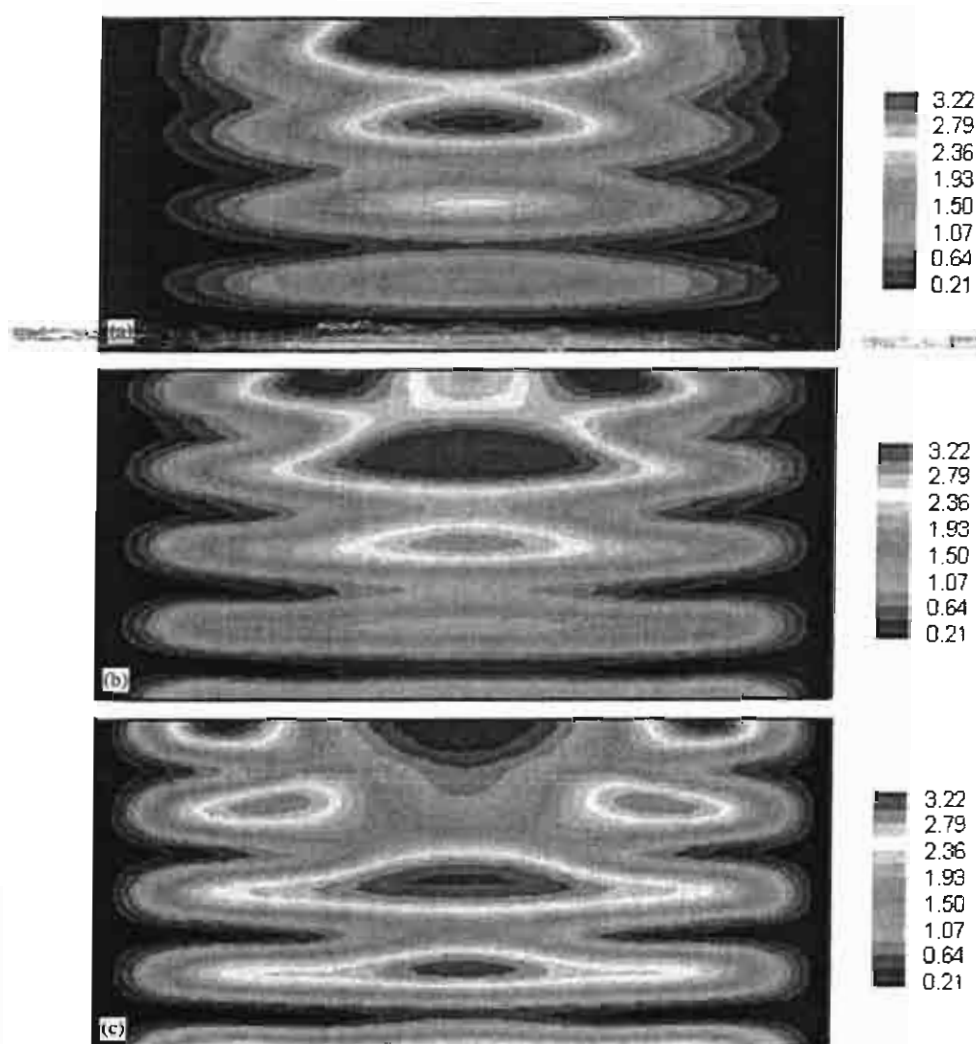


Fig. 10. Microwave power absorbed (MW/m^3) at various heating times: (a) 10 s; (b) 20 s; (c) 30 s ($f = 5 \text{ GHz}$, size = 11 cm (x) $\times$ 5 cm (z)).

For microwave heating of wood, with the microwave frequency of 5 GHz, the predictions of microwave power absorbed and temperature distributions are shown in Figs. 10 and 11, respectively. Since the higher microwave frequency leads to a much smaller penetration depth, and the electric field decays much faster as compared to that in the case of microwave frequency of 2.45 GHz. In contrast to that case of microwave frequency of 2.45 GHz, which results in a transmitted wave at the incident face and a reflected wave from the lower surface of the sample. In this case, the microwave that operates at a high frequency has a short wavelength which corresponds to a smaller penetration depth of microwave (see Table 1) compared with the depth of sample. Consequently, all microwaves, except the reflected wave from the upper surface of the sample, is absorbed by the sample. It is found that the wave amplitude diminishes after $z = 2 \text{ cm}$, which results in a low microwave power absorbed. This phenomenon explains why the electric field (Fig. 7) and therefore the microwave power absorbed are the greatest at the surface exposed to the incident microwaves,

and decay exponentially along the propagating direction with a very small wavelength, resulting in a thinner thermally stratified layer (Fig. 11). It is observed that the wavy behavior of the temperature distribution within the sample disappears and it is totally different from the previous case (as referred to Fig. 9). This is because the penetration depth of microwave drops dramatically and the wavelength is very small for this case. Since the reflected wave from the lower surface of the sample is almost negligible, no standing wave or resonance is formed within the sample (Fig. 7). Therefore, the microwave power absorbed decreases sharply to small value along the propagating direction ($z > 2 \text{ cm}$). Similar to the microwave power absorbed (Fig. 10), the temperature distribution significantly varies from the maximum temperature to the minimum temperature in a short distance and decays quickly. It is evident from the Fig. 11 that, in this case, there is only one peak appearing on the temperature distribution. The temperature distributions are shown for $t = 10, 20$ and 30 s , respectively. The maximum temperature within the sample is around 145°C at $t = 30 \text{ s}$.

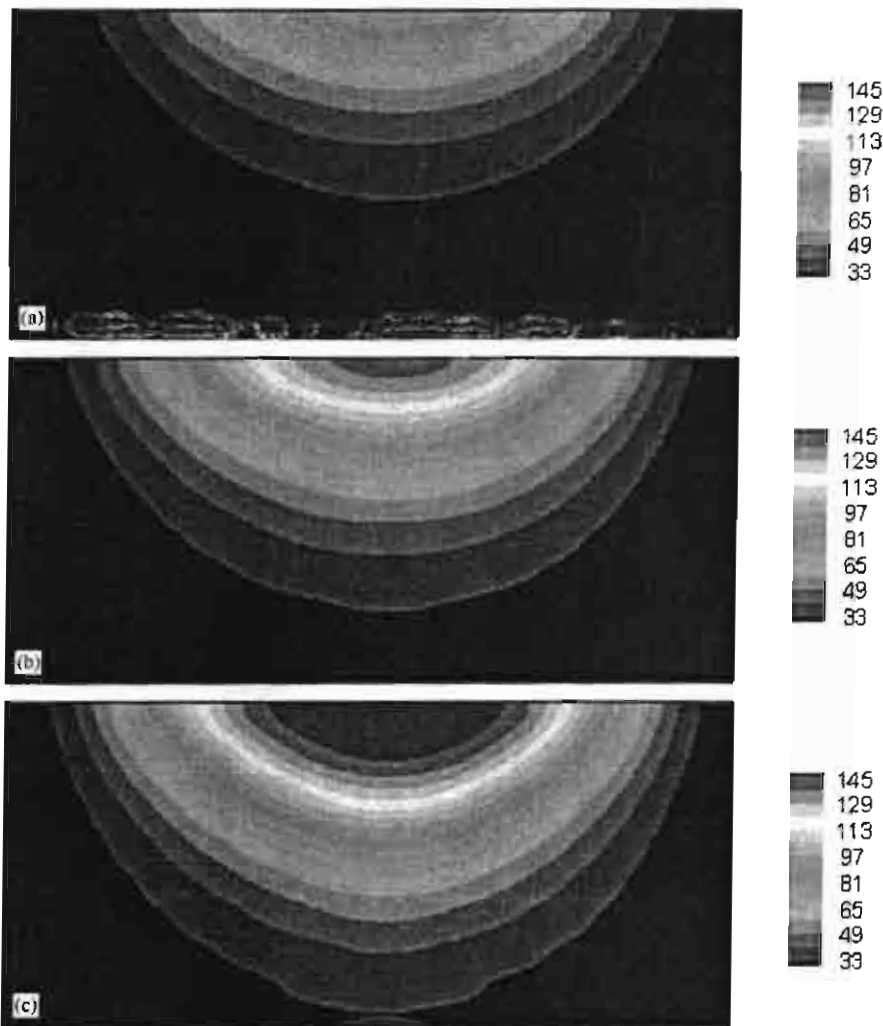


Fig. 11. Temperature distribution ($^{\circ}\text{C}$) at various heating times: (a) 10 s; (b) 20 s; (c) 30 s ($f = 5\text{ GHz}$, size = 11 cm (x) $\times$ 5 cm (z)).

Considering the region along the propagation direction, the temperature distribution drops dramatically, and after $z > 2\text{ cm}$, the temperature distribution is almost unchanged within the heating time of 10 s.

6.3. Effect of sample size on temperature distribution

The predictions of temperature distribution for microwave heating of wood are discussed, which corresponds to the initial temperature of 25°C and microwave power level of 1000 W. The effects of the variation of sample sizes on temperature distribution are discussed by considering the two sample sizes (thin sample; size = 11 cm (width) $\times$ 5 cm (depth) and thicker sample; size = 11 cm (width) $\times$ 8 cm (depth)).

In Fig. 13, which corresponds to the microwave heating of thicker sample (size = 11 cm (width) $\times$ 8 cm (depth)) in the xz -plane, it can be seen that the temperature distributions along the propagating wave does not show a clear evidence of wavy

behavior, which is inconsistent with what was exhibited in Fig. 9 for the thin sample. This figure highlights that the thicker sample has a different heating characteristics compared with the thin sample. This is because the standing wave or resonance has a substantial effect on the shape of the transient microwave power absorbed.

Furthermore, the maximum power absorbed (Fig. 12) and maximum temperature (Fig. 13) are lower for this case compared with those shown in Figs. 8 and 9. The temperature distributions are shown for $t = 10, 20$ and 30 s. The maximum temperature within the sample is around 146°C at $t = 30\text{ s}$.

Fig. 14 shows the predicted and experimental results of temperature distribution within the wood sample along with the horizontal axis of rectangular wave guide ($z = 0.5\text{ cm}$), which corresponds to the initial temperature of 25°C , microwave power level of 1000 W and frequency of 2.45 GHz. The result shows the greatest temperature displays in the center of wood sample with the temperature decreasing towards the side walls

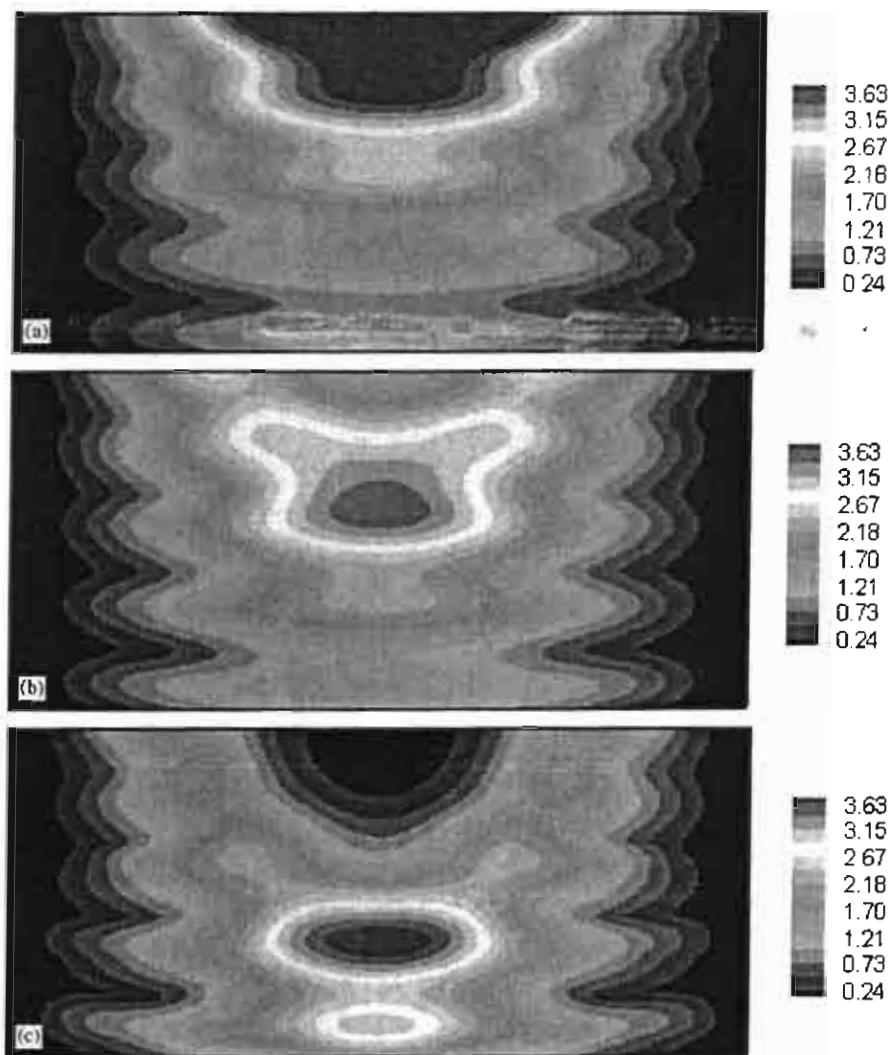


Fig. 12. Microwave power absorbed (MW/m^3) at various heating times: (a) 10 s; (b) 20 s; (c) 30 s ($f = 2.45 \text{ GHz}$, size = 11 cm (x) $\times$ 8 cm (z)).

of sample. This phenomenon occurs because the TE_{10} field pattern displays a maximum E -field at the center of wave guide. It is shown that the predicted results agree well with the experimental result for the microwave heating of wood. The prediction of temperature from the mathematical model is also compared with the experimental data measured by infrared camera for microwave heating of wood as shown in Fig. 15 ($t = 30 \text{ s}$). It can be seen that the agreement between two heating patterns is qualitatively consistent, particularly in the hot spot region.

Therefore, the capability of the mathematical model to correctly handle the field variations is shown. With further quantitative validation of the mathematical model, it is clear that the model can be used as a real tool for the detail investigation in this particular microwave heating of wood samples at a fundamental level.

7. Conclusion

The numerical analysis presented in this paper describes many important interactions within wood samples during microwave heating using a rectangular wave guide. The following paragraph summarizes the conclusions of this study:

(1) A generalized mathematical model for microwave heating of wood is proposed. It is used successfully to describe the heating phenomena under various conditions.

(2) The influence of irradiation times, working frequencies and sample size on the microwave power absorbed and heating pattern that develop within wood samples is clarified in details. The simulated results for the temperature distribution within the wood samples rate are in agreement with experimental results. The main finding of the simulations are summarized again in Table 2. At a microwave frequency of 2.45 GHz the power

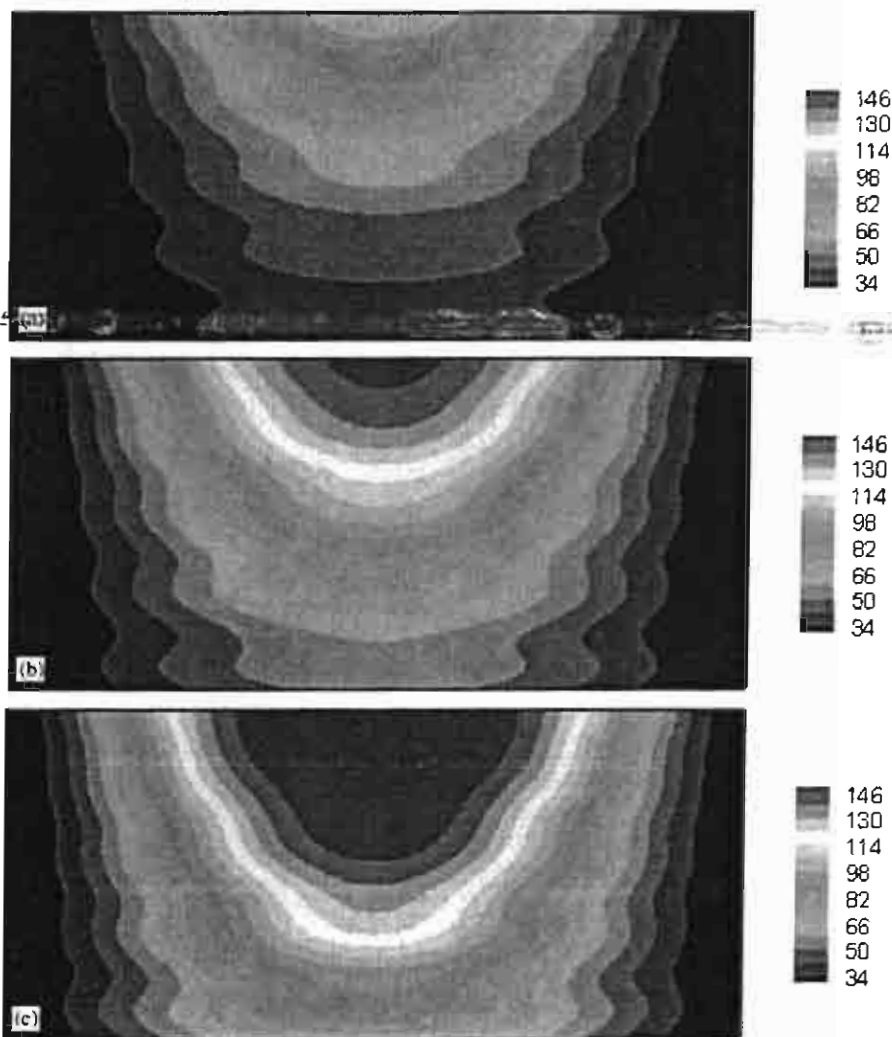


Fig. 13. Temperature distribution ($^{\circ}\text{C}$) at various heating times: (a) 10s; (b) 20s; (c) 30 ($f = 2.45\text{ GHz}$, size = 11 cm (x) $\times$ 8 cm (z)).

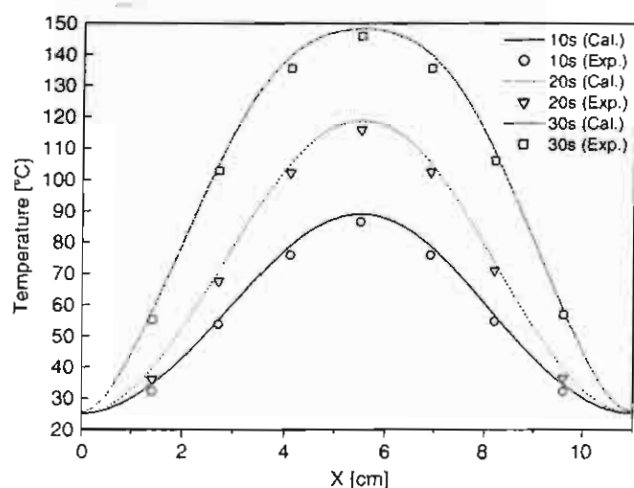


Fig. 14. Temperature distribution in wood sample along horizontal axis ($z = 0.5\text{ cm}$) ($f = 2.45\text{ GHz}$, size = 11 cm (x) $\times$ 5 cm (z)).

distribution as well as temperature distribution within the sample display a wavy behavior due to the thickness of sample is close to the penetration depth. This causes a resultant of a transmitted wave at the incident face and a reflected wave from the end surface. Most of heating occurs at the center of the test sample where the electric field is maximum for this standing wave configuration. The thicker sample leads to lower intensity of the reflected wave, the contribution from reflected wave is weak and the power distribution as well as temperature distribution display a weak wavy behavior similar to that an attenuated transmitted wave. For the higher frequency (frequency of 5 GHz) the power absorbed at the surface increases and the decay in to the sample is more rapid. In this case, the contribution from reflected wave is negligible and power distribution behaves similar to that an attenuated transmitted wave, as in the case of the Lambert law solution.

The presented modeling is used to identify the fundamental parameters, and provides guidance for the study of microwave drying of wood in the future.

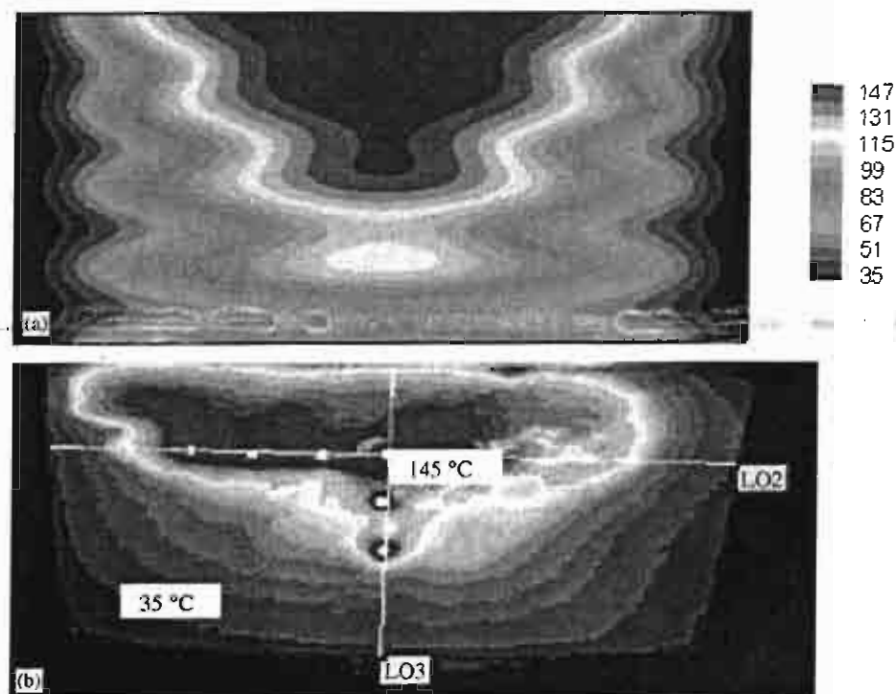


Fig. 15. The comparison of temperature distribution ($^{\circ}\text{C}$) in wood sample: (a) simulated result; (b) experimental result ($f = 2.45 \text{ GHz}$, size = $11 \text{ cm (x)} \times 5 \text{ cm (z)}$).

Table 2

The heating characteristics for various heating conditions due to microwave energy. The darker shaded region represents the hot spot

	$f = 2.45 \text{ GHz}$ size = $11 \text{ cm (x)} \times 5 \text{ cm (z)}$	$f = 5 \text{ GHz}$ size = $11 \text{ cm (x)} \times 5 \text{ cm (z)}$	$f = 2.45 \text{ GHz}$ size = $11 \text{ cm (x)} \times 8 \text{ cm (z)}$
Temperature Distribution			
Microwave Power Absorbed			
Conclusions	Most of heating occurs at the center of the test sample. Heating pattern is influenced by resonance. The strong wavy behavior within the sample is formed.	Most of heating occurs at the center of the test sample. Heating pattern is not influenced by resonance. The wavy behavior within the sample is totally absent.	Most of heating occurs at the center of the test sample. Heating pattern is influenced by resonance. A weak wavy behavior within the sample is formed.

Notation

B	magnetic flux density, Wb/m^2
C_p	specific heat capacity, J/kgK
D	electric flux density, C/m^2
E	electric field intensity, V/m
f	frequency of incident wave, Hz
H	magnetic field intensity, A/m

P	power, W
Q	local electromagnetic heat generation term, W/m^3
T	temperature, $^{\circ}\text{C}$
t	time, s
$\tan \delta$	loss tangent, dimensionless
Z_H	wave impedance, Ω
Z_I	intrinsic impedance, Ω

Greek letters

ε	permittivity, F/m
λ	wavelength, m
μ	magnetic permeability, H/m
v	velocity of propagation, m/s
ρ	density, kg/m ³
σ	electric conductivity, S/m
ω	angular frequency, rad/s

Subscripts

g	wave guide
n	component of normal direction
r	relative
t	component of tangent direction
x, y, z	coordinates
0	free space, initial condition

Acknowledgments

The author is pleased to acknowledge Thailand Research Fund (TRF) and National Metal and Materials Technology Center (MTEC) for supporting this research work. Prof. K. Aoki of the Nagaoka University of Technology has valuable recommendation in this research area the author is also grateful.

References

- Ayappa, K.G., Davis, H.T., Crapiste, G., Davis, E.A., Gordon, J., 1991. Microwave heating: an evaluation of power. *Chemical Engineering Science Journal* 46, 1005–1016.
- Ayappa, K.G., Davis, H.T., Davis, E.A., Gordon, J., 1992. Two-dimensional finite element analysis of microwave heating. *A.I.Ch.E. Journal* 38, 1577–1592.
- Basak, T., 2003. Analysis of resonances during microwave thawing of slabs. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46, 4279–4301.
- Basak, T., 2004. Role of resonances on microwave heating of oil-water emulsions. *A.I.Ch.E. Journal* 50, 2659–2675.
- Metaxas, A.C., Meridith, R.J., 1983. *Industrial Microwave Heating*. Peter Peregrinus Ltd., London.
- Mujumdar, A.S. (Ed.), 1995. *Handbook of Industrial Drying*, second ed., Marcel Dekker, New York.
- Perre, P., Turner, W., 1997. Microwave drying of softwood in an oversized waveguide. *A.I.Ch.E. Journal* 43, 2579–2595.
- Rattanadecho, P., 2004. The theoretical and experimental investigation of microwave thawing of frozen layer using microwave oven (Effects of layered configurations and layered thickness). *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47, 937–945.
- Rattanadecho, P., Aoki, K., Akahori, M., 2001. A numerical and experimental study of microwave drying using a rectangular wave guide. *Drying Technology International Journal* 19, 2209–2234.
- Rattanadecho, P., Aoki, K., Akahori, M., 2002. Influence of irradiation time, particle sizes and initial moisture content during microwave drying of multi-layered capillary porous materials. *ASME Journal of Heat Transfer* 124, 151–161.
- Saltiel, C., Datta, A., 1997. Heat and mass transfer in microwave processing. *Advances in Heat Transfer* 30, 1–94.
- Tada, S., Echigo, R., Kuno, Y., Yoshida, H., 1998. Numerical analysis of electromagnetic wave in partially loaded microwave applicator. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 41, 709–718.
- Zhao, H., Turner, I.W., 2000. The use of a coupled computational model for studying the microwave heating of wood. *Applied Mathematical Modeling* 24, 183–197.



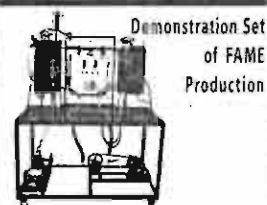
ME-NETTth

The 19th Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand

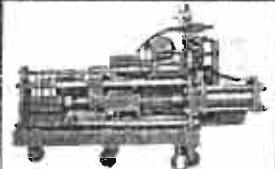
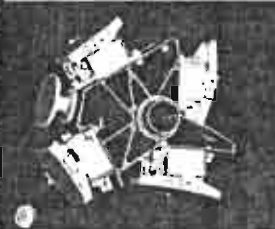
การประชุมวิชาการเครื่องจักรวิศวกรรมเครื่องกล

แห่งประเทศไทย
ครั้งที่ 19

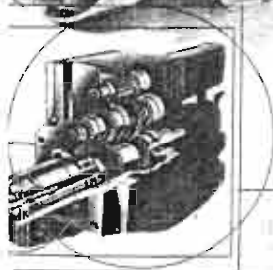
วันที่ 19 - 21 ตุลาคม 2548
ณ โรงแรม เดอะ รอยัล พาราไดส์ ออเกี๊ต



Demonstration Set
of FAME
Production



Development of Prototype of
Wood Dust Solid Fuel Press



สาขาวิชา

Energy Technology and Management
Thermal Systems and Fluid Mechanics
Applied Mechanics, Materials and Manufacturing
Dynamic Systems, Robotics and Control
Aerospace and Marine Engineering
Computational and Simulation Techniques

การวิเคราะห์เชิงทฤษฎีและทดลองสำหรับปัญหาการทำละลายในวัสดุพรุนที่ไม่อิ่มตัวขณะ มีการถ่ายเทความร้อนและมวลสารข้ามขอบเขตที่เคลื่อนที่

Theoretical and Experimental Analysis of Melting Process in Unsaturated Porous Media considered Heat and Mass Transport across Moving Boundaries

ผดุงศักดิ์ รัตนเดโช

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ คลองหลวง ปทุมธานี 12120

*E-mail: ratphadu@engr.tu.ac.th

Phadungsak Rattanadecho

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Thammasat University (Rangsit Campus), Pathumthani, 12120

*E-mail: ratphadu@engr.tu.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยฉบับนี้จะทำการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีและทดลองสำหรับปัญหาการทำละลายในวัสดุพรุนไม่อิ่มตัว ขณะมีการถ่ายเทความร้อนและมวลสารข้ามขอบเขตที่เคลื่อนที่ โดยวัสดุพรุนไม่อิ่มตัวที่นำมาศึกษาจะประกอบไปด้วยเม็ดแก้ว น้ำ โพรงอากาศ และน้ำแข็ง งานวิจัยเริ่มต้นจากการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปสมการอนุพันธ์ย่อยซึ่งประกอบไปด้วยสมการดาร์ซี สมการอนุพันธ์มวล และสมการอนุพันธ์พลังงาน และสมการสเตฟานสำหรับกระบวนการทำละลายที่มีขอบเขตเคลื่อนที่ 2 ตำแหน่ง โดยที่การหาคำตอบของกลุ่มสมการดังกล่าวใช้วิธีไฟไนต์วอลุ่มร่วมกับวิธีแปลงพิกัดแทน ผลลัพธ์ที่ได้จากการทำนายค่าความอิ่มตัว และการกระจายของอุณหภูมิในวัสดุ และตำแหน่งของขอบเขตที่เคลื่อนที่ จะถูกตรวจสอบกับผลที่ได้จากการทดลองจริงในห้องปฏิบัติการ อิทธิพลของค่าความอิ่มตัวเริ่มต้น และ อุณหภูมิของการทำละลาย ที่มีผลต่อจลนศาสตร์ของการทำละลายจะทำการศึกษาย่างละเอียด องค์ความรู้ที่ได้จากงานวิจัยวิเคราะห์จะเป็นประโยชน์ต่องานทางวิศวกรรมที่หลากหลาย เช่น การหลอมโลหะ โลหะ อุตสาหกรรมอาหาร การถนอมเนื้อเยื่อทางการแพทย์ การหลอมละลายของแมกนีเซียในชั้นได้ผิวหยาบและการออกแบบอากาศยาน

คำหลัก ปัญหาการทำละลาย วัสดุพรุนไม่อิ่มตัว สมการดาร์ซี

Abstract

In this paper, the melting process in unsaturated porous media during heat and mass transport across moving boundary has been investigated theoretically and experimentally. The unsaturated porous media are composed of glass beads, water, air pocket and ice. The governing partial-differential equations are Darcy, conservation of mass, conservation of energy and Stefan equations for melting process having two locations of moving boundary. The simulated results are obtained via finite volume method together with coordinate transformation technique. The predicted water saturation and temperature distributions in the material and the location of moving boundary are compared with experimental results. The influences of the initial water saturation and melting temperature on the melting kinetics are clarified in details. Further quantitative validation of results could be very useful for various kinds of engineering work such as melting of alloy, food, preservation of tissue, magma melting and aerospace designed.

Keywords: Melting Problem, Unsaturated Porous Media, Darcy Equation

1. บทนำ

ในอดีตที่ผ่านมา งานการวิจัยในการศึกษาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อนและมวลสารในวัสดุพรุน (porous media) ในระดับนานาชาติยังจำกัดอยู่กับวัสดุพรุนชนิดอิ่มตัว (saturated porous media) ในขณะที่ การวิจัยเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อนและมวลสารในวัสดุพรุนชนิดไม่อิ่มตัว (unsaturated porous media) นั้นมีการวิจัยกันน้อย โดยเฉพาะในภาคทฤษฎีในโครงสร้างระดับจุลภาค (microscopic level) ด้วยเหตุนี้เองความซับซ้อนในปรากฏการณ์ อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงสถานะของสสารหลายชนิด คุณสมบัติด้านความร้อนประสิทธิผล (effective thermal property) ของวัสดุพรุน คุณสมบัติด้านอุทกศาสตร์ (hydrodynamic property) และคุณสมบัติการเคลื่อนย้ายมวลสาร (ของเหลวและก๊าซ) ในวัสดุพรุน รวมถึงปัญหาของการเคลื่อนตัวของขอบเขต (moving boundary problem) ซึ่งที่ผ่านมาก็ได้มีการศึกษาอย่างเป็นระบบ นอกจากนี้ศาสตร์ดังกล่าวยังต้องอาศัยองค์ความรู้ในหลายสาขาเข้าด้วยกัน กล่าวคือ ความรู้ทางด้านกลศาสตร์ ความร้อนและมวลสาร, กลศาสตร์ของไหลในระบบที่มีความซับซ้อน และวัสดุศาสตร์ รวมกันจึงจะเป็นวิธีเชิงคำนวณทางตัวเลขขั้นสูง เพื่อหาคำตอบของปัญหาที่มีความเป็นไม่เชิงเส้นสูง (strongly non-linear problem) และการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีความแม่นยำและมีสมรรถนะสูง

ด้วยเหตุดังกล่าวนี้ทำให้การวิจัยในสาขาดังกล่าวข้างต้นนี้ยังไม่แพร่หลายในระดับนานาชาติและประเทศไทย ในความเป็นจริงแล้วประเทศที่พัฒนาแล้วจะให้ความสนใจในการวิจัยและพัฒนาในสาขานี้เป็นอันมาก การวิจัยในสาขากลศาสตร์ถ่ายเทความร้อนและมวลสารในวัสดุพรุนมีประโยชน์อย่างสูงในศาสตร์วิศวกรรมทุกสาขา ทั้งนี้เพราะวัสดุส่วนใหญ่ที่ใช้ในงานทางวิศวกรรมจัดเป็นวัสดุพรุน กล่าวคือตัววัสดุประกอบด้วย 3 ส่วน คือ ส่วนของแข็งหรือ matrix และช่องเหลวและก๊าซ ที่อยู่ในช่องว่างหรือรูพรุน (void)

เป็นที่ทราบกันดีว่าในทางวิศวกรรมแล้ววัสดุส่วนใหญ่จะเป็นวัสดุพรุน ตัวอย่างวัสดุพรุนที่ใช้ในงานทางวิศวกรรม เช่น ดินและคอนกรีตในงานวิศวกรรมโยธา, Ceramic ในงานวิศวกรรมโลหะ, catalyst ในงานวิศวกรรมเคมี จนวนความร้อนในงานวิศวกรรมเครื่องกลและเคมี, เนื้อเยื่อต่างๆ ผิว หรือ membrane ในงานวิศวกรรมชีวภาพและการแพทย์ รวมถึงอาหารและผลิตภัณฑ์ทางการเกษตรในงานวิศวกรรมการเกษตร จึงพูดได้ว่าความรู้ทางด้านการถ่ายเทความร้อนและมวลสารในวัสดุพรุนมีความสำคัญต่องานวิศวกรรมทุกสาขา อย่างไรก็ตามประเทศไทยก็ยังขาดแคลนนักวิจัยในสาขาการถ่ายเทความร้อนและมวลสารในวัสดุพรุนชนิดอิ่มตัวและชนิดไม่อิ่มตัว รวมถึง เทคโนโลยีวัสดุพรุน ในด้านอื่นๆ

สำหรับงานวิจัยที่ผ่านมาเกี่ยวกับกระบวนการทำละลาย มักจะพิจารณาให้วัสดุตัวอย่างทดลองเป็นก้อนน้ำแข็ง (ice block) หรือเพ็คเบดของวัสดุพรุนชนิดอิ่มตัว (packed bed of saturated porous media) ซึ่งเป็นองค์ประกอบของน้ำแข็งที่อิ่มตัวในช่องรูพรุนและอนุภาคของแข็ง) โดยจะแบ่งลักษณะการไหลของความร้อนหลายรูปแบบ อาทิ เช่น การไหลของความร้อนที่ผิวด้านข้างของระนาบแนวดิ่งของเพ็คเบดโดยที่ผิวด้านอื่นๆทำการหุ้มฉนวนไว้และทำการวิเคราะห์อัตราการละลายตัว

ของน้ำแข็งและรูปร่างและลักษณะการเคลื่อนตัวของขอบเขตผิวละลาย (melting front หรือ moving boundary) ตัวอย่างงานวิจัยเช่นนี้ที่กล่าวมาเกี่ยวกับกระบวนการทำละลายในลักษณะที่กล่าวข้างต้นได้มีงานของ Murray and Landis [1] ซึ่งได้นำเสนอวิธีการคำนวณโดยอาศัยเทคนิคการเปลี่ยนพิกัดของแกน (coordinate transformation technique based on boundary fixing method) ในปัญหาการกระบวนการทำละลายในก้อนน้ำแข็ง ซึ่งเป็นวิธีที่คลาดเคลื่อนที่นักวิจัยนำมาประยุกต์ใช้ในกระบวนการต่างๆที่มีเกี่ยวข้องกับปัญหาที่มีขอบเขตเคลื่อนที่ (moving boundary problem) เช่นการวิเคราะห์เกี่ยวกับการถนอมอาหาร (curing process) กระบวนการแช่แข็ง (freezing process) หรือกระบวนการทำละลาย (melting process) เป็นต้น Viskanta et. al. [2] ได้ศึกษาทั้งเชิงทฤษฎีและผลการทดลอง ผลการศึกษาพบว่าอิทธิพลของพลาสมาความร้อนที่เปลี่ยนและลักษณะการไหลของการถ่ายเทความร้อน (การนำและการพา) มีผลต่ออัตราการละลายตัวของน้ำแข็งและรูปร่างและลักษณะการเคลื่อนตัวของขอบเขตผิวละลาย Gong and Mujumdar [3] ได้ดัดแปลงลักษณะการไหลให้สอดคล้องความร้อนจากการแผ่รังสี โดยทำการไหลของความร้อนที่ผิวด้านข้างของระนาบแนวดิ่งบนเพ็คเบดโดยที่ผิวด้านอื่นๆทำการหุ้มฉนวนไว้ จากการศึกษาพบว่าอิทธิพลของ Rayleigh number และอัตราพลาสมาความร้อนที่เปลี่ยนเข้าไม่มีผลต่อรูปร่างและลักษณะการเคลื่อนตัวของขอบเขตผิวละลายรวมถึงความไม่เสถียรภาพของการพาความร้อนแบบอิสระ อย่างไรก็ตามงานวิจัยฉบับนี้เน้นเฉพาะการทำงานโดยอาศัยระเบียบวิธี Finite element โดยไม่มีการทดลองเปรียบเทียบ

ลักษณะการไหลของความร้อนในรูปแบบอื่นเช่น การละลายตัวของบล็อคน้ำแข็งทรงกระบอกที่อยู่ระหว่างทิศทางกระไหล (forced flow) ของของไหลภายใต้ไหลความร้อนที่เป็นลักษณะการพาแบบธรรมชาติ (natural convection) และการพาแบบบังคับ (forced convection) ตัวอย่างงานที่ศึกษาเช่น Carney and Gebhart [4] และ Huppert and Turner [5] ได้ทำการศึกษาการละลายตัวของบล็อคน้ำแข็งทรงกระบอกที่อยู่ระหว่างทิศทางกระไหลโดยการพาแบบธรรมชาติ Fukusako et.al [6] ได้ศึกษาถึงผลกระทบของ การไหลของความร้อนที่มีลักษณะการพาแบบธรรมชาติ ขนาดรูปทรงของบล็อก น้ำแข็งทรงกระบอก และอัตราความเข้มข้นของสารละลายที่นำมาเป็นของไหลในระบบ ที่มีต่อรูปร่างของผิวละลาย (melting shape) และผลงานวิจัยล่าสุดของนักวิจัยเอง Ratanadecho et.al [7] ได้ศึกษาการการละลายตัวของบล็อคน้ำแข็งทรงกระบอกที่อยู่ระหว่างทิศทางกระไหล โดยให้ไหลความร้อนที่มีลักษณะการพาแบบบังคับ ในที่นี้จะศึกษาถึงอิทธิพลของความเร็วของการไหล คุณสมบัติของของไหล และชนิดของวัสดุตัวอย่าง บล็อคน้ำแข็งทรงกระบอก (ทำจากน้ำธรรมดา) และบล็อคน้ำแข็งที่ทำจาก sodium carbonate aqueous solution of eutectic concentration ที่มีต่อรูปร่างของผิวละลายของวัสดุตัวอย่าง

นอกเหนือจากนี้ งานวิจัยเกี่ยวกับกระบวนการทำละลายโดยอาศัยพลังงานจากคลื่นไมโครเวฟก็มีการนำเสนอ เช่น Pangrie and Ayappa [8] ได้ทำการศึกษากระบวนการทำละลายโดยอาศัยพลังงานจากคลื่นไมโครเวฟกับวัสดุตัวอย่างรูปทรงกระบอก โดยพหามิเตอร์ที่

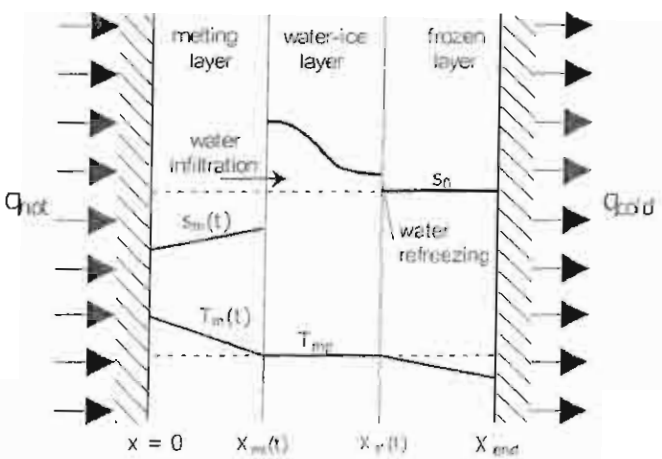
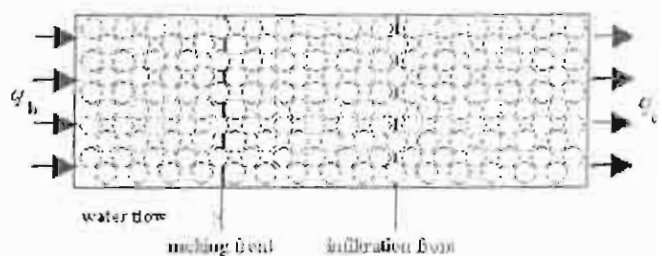
สำคัญที่วิเคราะห์คือ อัตราการดูดกลืนพลังงานไมโครเวฟ รูปปร่างการกระจายอุณหภูมิในวัสดุตัวอย่าง และอัตราการละลายตัว ละมุน (Ossak and Ayappa [9] ศึกษามลการวิจัยจากงานที่ผ่านมา [8] โดยทำการศึกษาในวัสดุตัวอย่างที่เป็นแผ่น (slab) รายงานวิจัยล่าสุดของบุรีจิณเอน (Ratanadecho et.al [10] และ (Ratanadecho [11]) ได้ทำการศึกษากระบวนการทำละลายเชิงทฤษฎีและทดลองโดยอาศัยพลังงานจากคลื่นไมโครเวฟในวัสดุตัวอย่างที่มีโครงสร้างเป็นชั้นๆ (multi-layered material) ในท่อนำคลื่นรูปทรงสี่เหลี่ยม (rectangular wave-guide) โดยพิจารณาถึงที่สำคัญที่มีผลกระทบคือ อัตราการดูดกลืนพลังงานไมโครเวฟ รูปปร่างการกระจายอุณหภูมิในวัสดุตัวอย่าง อัตราการละลายตัว ลักษณะโครงสร้างของชั้นวัสดุตัวอย่าง และการเคลื่อนตัวของขอบเขตผิวละลาย (melting front) งานวิจัยชิ้นนี้ถือว่าเป็นต้นแบบที่สำคัญในรายงานวิจัยระดับนานาชาติที่มีการนำเทคนิคการคำนวณรูปแบบใหม่มาแก้ปัญหาลักษณะใดก็ตามที่มีการเคลื่อนตัวของขอบเขตเป็นลักษณะรูปร่างที่ไม่เฉพาะ (arbitrary moving front) ขณะวัสดุตัวอย่างอยู่ภายใต้พลังงานจากคลื่นไมโครเวฟ

อย่างไรก็ตามที่ผ่านมามีงานวิจัยทั้งหมดอยู่บนพื้นฐานที่ว่าวัสดุทดสอบตัวอย่างเป็นก้อนน้ำแข็งธรรมดา หรือเป็นวัสดุพรุนที่อิ่มตัวสำหรับรายงานการวิจัยเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อนและมวลสารในวัสดุพรุนที่ไม่อิ่มตัว (unsaturated porous media) ในกระบวนการทำละลายหรือกระบวนการทำแข็ง (solidification process) ไม่มีการวิจัยกันมากนัก โดยเฉพาะในภาคทฤษฎีในโครงสร้างระดับจุลภาค (microscopic level) ด้วยเหตุผลของความซับซ้อนในปรากฏการณ์ ยกเว้นในส่วนของการรายงานวิจัยเกี่ยวกับกระบวนการทำแข็งในวัสดุพรุนชนิดไม่อิ่มตัวได้มีการนำเสนอครั้งแรกในปีที่ผ่านมาโดยบุรีจิณเอน (Ratanadecho [12]) สำหรับรายงานงานวิจัยเกี่ยวกับปัญหาการทำละลายที่ได้รวบรวมเอกสารอ้างอิงไว้เป็นอย่างดี ผู้่านสามารถดูได้จากรายงานของ Yao and Prusa [13]

ในงานวิจัยครั้งนี้จะเน้นศึกษาทั้งในรูปแบบการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีโดยอาศัยระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขขั้นสูง และทดลองของกระบวนการทำละลายในวัสดุพรุนที่ไม่อิ่มตัวในโครงสร้างระดับจุลภาค โดยเริ่มต้นจากการพัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สามารถครอบคลุมและอธิบายปรากฏการณ์ในปัญหาของกระบวนการทำละลายในวัสดุพรุนที่ไม่อิ่มตัว และเป็นความถูกต้องโดยตรวจสอบผลจากการทดลองจริง งานวิจัยนี้จะทำการศึกษาอิทธิพลของลักษณะความร้อนที่ป้อน คือความร้อนเริ่มต้น (initial saturation) ขนาดของอนุภาค (particle size) ที่มีผลต่ออัตราการละลายตัวของน้ำแข็งในวัสดุพรุน และลักษณะการเคลื่อนตัวของขอบเขตผิวละลาย (melting front) และขอบเขตของการไหลซึม (infiltration front) ที่แปรเปลี่ยนไปกับเวลา

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และ Numerical Schemes (และ Computer code) รูปแบบใหม่ที่จะพัฒนาขึ้นจากการโครงการวิจัยครั้งนี้จะเป็นประโยชน์อย่างสูงในการทำนายปรากฏการณ์การถ่ายเทความร้อนและมวลสารในวัสดุพรุนที่ไม่อิ่มตัวในงานต่างๆ ดังที่กล่าวมาข้างต้น รวมถึงปัญหาที่มีลักษณะการเคลื่อนตัวของขอบเขต

2. การวิเคราะห์เชิงทฤษฎีและแบบจำลองทางคณิตศาสตร์
งานวิจัยชิ้นนี้เน้นศึกษาทั้งเชิงทฤษฎีโดยอาศัยระเบียบวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขขั้นสูง และการทดลองของกระบวนการทำละลายในพหุคูณวัสดุพรุนที่ไม่อิ่มตัว โดยเริ่มต้นแบบจำลองวัสดุพรุนที่ไม่อิ่มตัวซึ่งผ่านการ freeze จะเป็นองค์ประกอบของน้ำแข็ง โครงสร้างท่อนำคลื่นและอนุภาคของน้ำแข็งจะไม่ผ่านกระบวนการทำละลาย (melting) จะมีการให้ไหลตรงความร้อนที่มีทิศทางของกระบวนการนำพลังงานให้ละลายโดยที่มีทิศทางเดียวกับการไหลของน้ำ โดยในการวิเคราะห์จะถือว่าองค์ประกอบของทุกสถานะใน พหุคูณมีความสมดุลทางความร้อน โดยไม่คำนึงถึงรูปทรงที่เฉพาะ และสมมติให้ค่า porosity ของจากที่กล่าวในทฤษฎี การขยายตัวหรือการหดตัวของพหุคูณจะไม่นำมาพิจารณา ทดแทนที่สำคัญของการเคลื่อนย้ายมวลสารที่เป็นของเหลวหรือน้ำอยู่ภายใต้อิทธิพลของแรงดันคาปิลลารี (capillary force) และสมการฟลักซ์ที่วัดค่ารวมฟลักซ์การเคลื่อนย้ายของน้ำในวัสดุพรุนเรียกว่าสมการดาร์ซี (Darcy's equation) ซึ่งสมการเหล่านี้ derive มาจากหลักการของ volume averaging technique (Ratanadecho [12])



รูปที่ 1 แบบจำลองทางกายภาพของกระบวนการทำละลายในวัสดุพรุนชนิดไม่อิ่มตัว

จากรูปที่ 1 การวิเคราะห์เกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อนและมวลสารในระหว่างกระบวนการทำละลายในวัสดุพรุนชนิดไม่อิ่มตัวจะต้องทำการพิจารณาโดยแบ่งออกเป็น 3 โซนที่เรียงกันต่อกัน กล่าวคือ โซนแรกคือ โซนละลาย (melting layer: ประกอบด้วยมวลของเหลวและอนุภาคน้ำแข็ง) ซึ่งมีอิทธิพลด้านหนึ่งสัมพันธ์กับแหล่งไหลตรงความร้อน ถัดออกไปจะเป็นโซน

หลายสถานะ (mushy layer หรือ water-ice layer: ประกอบด้วยของเหลว อนุภาคของแข็ง น้ำแข็งและโพรงอากาศ) ในโซนนี้จะเกิดปรากฏการณ์ refreezing เกิดขึ้นหากที่ด้านปลายของเพคเบตมีการหล่อเย็น กัดออกไปสุดท้ายจะเป็นโซนของแข็ง (frozen layer: ประกอบด้วยน้ำแข็ง อนุภาคของแข็งและโพรงอากาศ) ซึ่งวัสดุตัวอย่างยังคงรูปเป็นของแข็งเหมือนสถานะก่อนรับโหลดความร้อน ในที่นี้รอบต่อระหว่างโซนแรกและโซนที่สอง (melting front) และรอบต่อระหว่างโซนสองและโซนที่สาม (infiltration front) จะเคลื่อนตัวไปกับคาบเวลาของการทำละลาย ซึ่งจะต้องพิจารณาเป็นปัญหาที่มีขอบเขตเคลื่อนที่พร้อมกันสองตำแหน่ง (simultaneous moving boundary problem) พร้อมกับมีการถ่ายเทมวลของเหลวผ่านขอบเขตที่เคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของแรงดันแคปิลลารี ซึ่งรายงานวิจัยในหัวข้อวิจัยที่กล่าวมานี้ยังไม่เคยมีการวิจัยในระดับนานาชาติ อันเนื่องมาจากความซับซ้อนของปรากฏการณ์และความยุ่งยากในการคำนวณ ซึ่งการคำนวณปรากฏการณ์ทางกายภาพดังกล่าวนี้จะต้องอาศัยองค์ความรู้ในหลายสาขาเข้าด้วยกันมาแก้ปัญหา กล่าวคือ ความรู้ทางด้านกลศาสตร์ ความร้อนและมวลสาร, การเปลี่ยนสถานะ รวมถึงระเบียบวิธีเชิงคำนวณทางตัวเลขขั้นสูง เพื่อหาคำตอบของปัญหาที่มีความเป็นไม่เชิงเส้นสูง (strongly non-linear problem) และการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีความแม่นยำและมีสมรรถนะสูง

สมการพื้นฐานในโซนละลาย

พิจารณาโซนละลาย จากที่กล่าวมาข้างต้น สมการหลักที่ใช้คำนวณพลศาสตร์การเคลื่อนตัวของน้ำจะอยู่บนพื้นฐานของสมการดาร์ซี

$$\rho_w \frac{\partial s_m}{\partial t} = -\frac{\partial f_m}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_w \frac{K_m K_{r,m}}{\mu_w} \frac{\partial p_{cm}}{\partial x} \right] \quad [1]$$

อุณหภูมิภายในโซนละลายสามารถหาได้จากสมการส่งถ่ายความร้อนคือ

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_{T_m} T_m] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial x} \right] - \frac{\partial (c_{pw} f_m T_m)}{\partial x} \quad [2]$$

ในที่นี้ค่าความจุความร้อนประสิทธิผลของน้ำและอนุภาคของแข็งที่อยู่ในโซนละลาย

$$(\rho c_p)_{T_m} = \rho_w c_{pw} s_m + \rho_p c_{pp} (1 - s) \quad [3]$$

สมการพื้นฐานในโซนหลายสถานะ

พิจารณาโซนหลายสถานะซึ่งประกอบไปด้วยของเหลว อนุภาคของแข็ง น้ำแข็งและโพรงอากาศ ในที่นี้สมการหลักที่ใช้คำนวณ

พลศาสตร์การเคลื่อนตัวของน้ำจะอยู่บนพื้นฐานของสมการดาร์ซีเช่นกัน

$$\rho_w \frac{\partial s_w}{\partial t} = -\frac{\partial f_w}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_w \frac{K_w K_{r,w}}{\mu_w} \frac{\partial p_{ci}}{\partial x} \right] \quad [4]$$

สำหรับอุณหภูมิภายในโซนหลายสถานะถือว่าคงที่เพราะไม่มีการถ่ายเทความร้อนเกิดขึ้น

$$T = T_m \quad [5]$$

สมการพื้นฐานในโซนของแข็ง

พิจารณาโซนของแข็งซึ่งประกอบไปด้วย อนุภาคของแข็ง น้ำแข็งและโพรงอากาศ ซึ่งจะไม่มีการเคลื่อนตัวของน้ำเกิดขึ้น จะมีเฉพาะการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิภายในโซน และสามารถหาได้จากสมการส่งถ่ายความร้อนคือ

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_{T_f} T_f] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_f \frac{\partial T_f}{\partial x} \right] \quad [6]$$

ในที่นี้ค่าความจุความร้อนประสิทธิผลของน้ำแข็งและอนุภาคของแข็งที่อยู่ในโซนละลาย

$$(\rho c_p)_{T_f} = \rho_i c_{pi} s_i + \rho_p c_{pp} (1 - s) \quad [7]$$

โดยที่ค่าความถ่วงจำเพาะน้ำแข็งก็จะยังคงสภาพเดิม $s_i = s_0$

สำหรับสมการสัมพันธ์อื่นๆที่เกี่ยวข้องกับสมการที่ข้างต้น อาทิเช่น ความดันแคปิลลารี, p_c และค่าการไหลซึม, K เป็นต้น ผู้ด้านสามารถค้นคว้าเพิ่มเติมได้ในงานวิจัยของผู้วิจัยที่ผ่านมา (Ratenadecho [12])

เงื่อนไขขอบเขต

พิจารณาจากแบบจำลองทางกายภาพของกระบวนการทำละลายในวัสดุ

พหุชนิดไม่ต่อเนื่องในรูปที่ 1 เงื่อนไขขอบเขตจะประกอบไปด้วย

เงื่อนไขขอบเขตเคลื่อนที่ (moving boundary)

ทำการสมมูลพลังงานและมวลที่ขอบเขตผิวละลาย (melting front), $X = X_m$ ก็จะได้สมการที่ [8] และ [9] ตามลำดับ

$$\frac{dX_m}{dt} = -\frac{\lambda_m}{L \rho_w s_m} \frac{\partial T_m}{\partial x} \Big|_{x=X_m} \quad [8]$$

$$\rho_w (s_w + s_i) \frac{dX_m}{dt} = f_m \Big|_{x=X_m} + f_i \Big|_{x=X_m} \quad [9]$$

ทำการสมมูลพลังงานที่ขอบเขตการไหลซึม (infiltration front), $X = X_g$ ก็จะได้

$$\frac{dX_g}{dt} = \frac{1}{\rho_w s_{gr}} \left((f_i)_{x=X_g} + \frac{\lambda_f}{L} \frac{\partial T_f}{\partial x} \Big|_{x=X_g} \right) \quad [10]$$

เงื่อนไขขอบเขตที่ตำแหน่งอื่นๆ

$$t = 0, x \geq 0 : s_i = s_0, T_m = T_{mp}$$

$$t > 0, x = 0 : f_m = 0, q_{hot} = h_h (T_{sh} - T_{th})$$

$$t > 0, x = X_m : s_i = s_0, q_{cool} = h_c (T_{sc} - T_{bc})$$

$$t > 0, x = X_{ent} : s_i = s_0, \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad [11]$$

3 เทคนิคการแปลงพิกัดแกนและระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

เนื่องจากปัญหาที่ทำการศึกษานี้ จะเกี่ยวข้องกับปัญหาที่มีขอบเขตเคลื่อนตัวไปกับคาบเวลาของการทำละลายสองตำแหน่งพร้อมกับการเปลี่ยนแปลงสถานะ ซึ่งการหาคำตอบโดยวิธีแน่นอนตรงจึงเป็นไปได้

ในที่นี้การหาคำตอบจะใช้เทคนิคการแปลงพิกัดแกนซึ่งอยู่บนพื้นฐานของวิธี boundary fixing method ร่วมกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขโดยผ่านวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) ดังนั้นสมการที่ [1], [2], [4] และ [6] หลังจากใช้เทคนิคการแปลงพิกัดแกนแล้วจะเป็น

$$\rho_w \frac{\partial s_w}{\partial t} = \rho_w \frac{\eta X_m}{X_m} \frac{\partial s_m}{\partial \eta} - \frac{1}{X_m^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\rho_w \frac{K_m K_{r,m}}{\mu_w} \frac{\partial p_{cm}}{\partial \eta} \right] \quad [12]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [(\rho c_p)_{T_m} T_m] = \frac{\eta X_m}{X_m} \frac{\partial}{\partial \eta} [(\rho c_p)_{T_m} T_m] + \frac{1}{X_m^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\lambda_m \frac{\partial T_m}{\partial \eta} \right] - \frac{1}{X_m} \frac{\partial (c_{pw} f_m T_m)}{\partial \eta} \quad [13]$$

$$\rho_w \frac{\partial X_{w,i}}{\partial t} = \rho_w \frac{\left\{ (1-\xi) X_{m,i} + \xi X_{g,i} \right\}}{(X_g - X_m)} \frac{\partial X_{w,i}}{\partial \xi} - \frac{1}{(X_g - X_m)^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\rho_w \frac{K_r K_{m,i}}{\mu_w} \frac{\partial p_{w,i}}{\partial \xi} \right] \quad [14]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[(\rho c_p)_{m,i} T_{m,i} \right] = \frac{(1-\xi) X_{g,i}}{(X_{m,i} - X_{g,i})} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\rho c_p)_{m,i} T_{m,i} \right] + \frac{1}{(X_{m,i} - X_{g,i})^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\lambda_{m,i} \frac{\partial T_{m,i}}{\partial \xi} \right] \quad [15]$$

หลังจากนั้นสมการที่ [12]-[15] สามารถ discretize โดยวิธีไฟไนต์วอลุ่มก็จะได้

$$\rho_w \frac{S_{w,i}^{n+1} - S_{w,i}^n}{\Delta t} = \frac{\eta \lambda_{m,i}^{n+1} S_{m,i+1/2}^{n+1} - S_{m,i-1/2}^{n+1}}{\Delta \eta} - \frac{1}{X_{m,i}} \frac{1}{\Delta \eta} \left[\frac{K_r K_{m,i+1/2}^{n+1}}{\mu_w} \left(\frac{p_{cm,i+1}^{n+1} - p_{cm,i}^{n+1}}{X_{m,i} \Delta \eta} \right) - \frac{K_r K_{m,i-1/2}^{n+1}}{\mu_w} \left(\frac{p_{cm,i}^{n+1} - p_{cm,i-1}^{n+1}}{X_{m,i} \Delta \eta} \right) \right] \quad [16]$$

$$\frac{(\rho c_p)_{m,i}^{n+1} T_{m,i}^{n+1} - (\rho c_p)_{m,i}^n T_{m,i}^n}{\Delta t} = \frac{\eta \lambda_{m,i}^{n+1} (p_{cm,i+1}^{n+1} T_{m,i+1/2}^{n+1} - (p_{cm,i}^{n+1} T_{m,i-1/2}^{n+1}))}{X_{m,i} \Delta \eta} + \frac{1}{X_{m,i}} \frac{1}{\Delta \eta} \left[\lambda_{m,i+1/2}^{n+1} \left(\frac{T_{m,i+1}^{n+1} - T_{m,i}^{n+1}}{X_{m,i} \Delta \eta} \right) - \lambda_{m,i-1/2}^{n+1} \left(\frac{T_{m,i}^{n+1} - T_{m,i-1}^{n+1}}{X_{m,i} \Delta \eta} \right) \right] - \frac{1}{X_{m,i}} \frac{1}{\Delta \eta} \left[(c_{pw} f_n)_{m,i} T_{m,i}^{n+1} - (c_{pw} f_n)_{m,i-1} T_{m,i-1}^{n+1} \right] \quad [17]$$

$$\rho_w \frac{S_{w,i}^{n+1} - S_{w,i}^n}{\Delta t} = \rho_w \frac{\left\{ (1-\xi) X_{m,i} + \xi X_{g,i} \right\}}{(X_g - X_m)} \frac{S_{m,i+1/2}^{n+1} - S_{m,i-1/2}^{n+1}}{\Delta \xi} - \frac{1}{(X_g - X_m) \Delta \xi} \left[\frac{K_r K_{m,i+1/2}^{n+1}}{\mu_w} \left(\frac{p_{cm,i+1}^{n+1} - p_{cm,i}^{n+1}}{(X_g - X_m) \Delta \xi} \right) - \frac{K_r K_{m,i-1/2}^{n+1}}{\mu_w} \left(\frac{p_{cm,i}^{n+1} - p_{cm,i-1}^{n+1}}{(X_g - X_m) \Delta \xi} \right) \right] \quad [18]$$

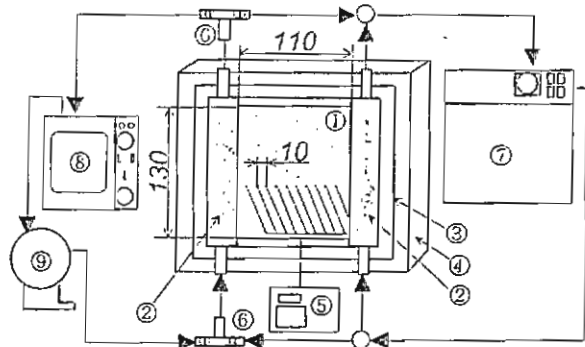
ในที่นี้กระบวนการทำซ้ำในแต่ละรอบเพื่อเร่งการลู่เข้าของคำตอบ จะอาศัยวิธี Newton-Raphson

4 การทดลอง

ส่วนประกอบของอุปกรณ์ทดลองดังแสดงในรูปที่ 2 วัสดุทดสอบเริ่มต้นคือเพกเบ็ดวัสดุพูนที่ไม่อิ่มตัวซึ่งเป็นองค์ประกอบของน้ำแข็ง โปร่งอากาศ และอนุภาคของแข็งซึ่งฟอรั่มตัวจากเม็ดแก้ว (glass beads) ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 0.15 mm ที่บรรจุไว้ใน test cell ที่ทำจากแผ่นอะคริลิกที่มีมิติขนาด 110×130×50 มม. ในระหว่างกระบวนการทดลองจะมีการให้ไหลลดความร้อนที่อุณหภูมิคงที่ที่ผิวด้านข้างของระนาบแนวดิ่งของเพกเบ็ด สำหรับแหล่งกำเนิดความร้อนจะใช้อ่างน้ำร้อน (hot water bath) ที่ควบคุมอุณหภูมิได้ โดยที่ผิวที่ปลายเพกเบ็ดอีกด้านจะทำการหุ้มฉนวนไว้ หรือควบคุมอุณหภูมิไว้ให้ต่ำกว่าอุณหภูมิเยือกแข็ง (freezing temperature) ในกรณีที่เกิดการเกิด refreezing ที่บริเวณดังกล่าวดังรูป สำหรับแหล่งกำเนิดความเย็นจะใช้

อ่างน้ำเย็น (cooling water bath) ที่ควบคุมอุณหภูมิได้ต่ำสุด -20 °C

สำหรับอุณหภูมิในพหุพจนานุกรมระหว่างกระบวนการทดลอง จะวัดโดยใช้เทอร์โมคัปเปิลชนิด Cu-Co ที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางเท่ากับ 0.2 มม. ซึ่งติดตั้งห่างกันในแต่ละตำแหน่งเท่ากับ 10 มม. ในแนวระดับ การหาตำแหน่งของขอบเขตที่เคลื่อนที่ (moving boundary) ทำได้โดยการ interpolation ของอุณหภูมิที่วัดได้นี้ สำหรับการหาค่าการอิ่มตัวในแต่ละตำแหน่ง สามารถทำได้โดยการตัดชิ้นของเพกเบ็ดที่มีขนาดค่าหนึ่งในแต่ละคาบเวลา แล้วนำไปชั่งกับตาชั่งเพื่อหาน้ำหนักมวลเปียก และแห้ง (หลังจากผ่านการอบในเตาอบควบคุม) แล้วค่อยนำค่ามวลทั้งสองมาใส่ในสมการสหสัมพันธ์ เพื่อคำนวณหาการอิ่มตัว (Ratanadecho [12])



①packed beds ②heat exchanger ③container ④insulator ⑤recorder ⑥valve ⑦cooling temperature tank ⑧hot temperature tank ⑨pump

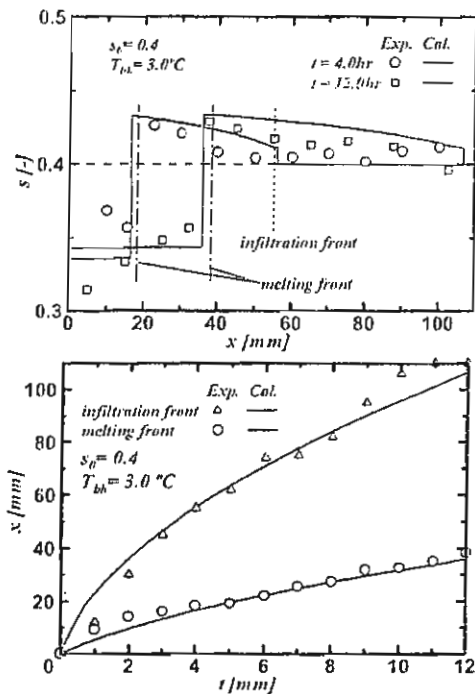
รูปที่ 2 องค์ประกอบของอุปกรณ์ทดลอง

5 ผลลัพธ์และการวิเคราะห์

พิจารณารูปที่ 3 แสดงการกระจายตัวของค่าความอิ่มตัวของน้ำและน้ำแข็งตลอดช่วงความยาวเพกเบ็ด และการเคลื่อนตัวของขอบเขตที่เคลื่อนที่กรณีไม่มีการหล่อเย็นที่ด้านปลาย (ไม่เกิด refreezing) และอยู่ภายใต้สภาวะทดลองที่อุณหภูมิเริ่มต้น T_0 เท่ากับ -4 °C สัดส่วนความอิ่มตัวเริ่มต้น S_0 เท่ากับ 0.4 และอุณหภูมิของการทำละลาย T_m คือ 3 °C เมื่อพิจารณาการกระจายตัวของค่าความอิ่มตัว ในขอบเขตของการละลายตัว พบว่าค่าความอิ่มตัวก็จะมีค่าลดลง (ต่ำกว่าค่าความอิ่มตัวเริ่มต้น) และจะมีค่าเพิ่มขึ้นทันทีที่พ้นโด่ตำแหน่งหนึ่งซึ่ง สังเกตได้จากกราฟที่เกิดความไม่ต่อเนื่องของค่าความอิ่มตัวที่บริเวณรอยต่อระหว่างโซนละลายและโซนหลายสถานะ ซึ่งก็คือตำแหน่ง melting front นั่นเอง ที่เป็นเช่นนี้เพราะน้ำที่เกิดจากการละลายของน้ำแข็งจากโซนการละลายได้เคลื่อนตัวซึมผ่าน melting front ภายใต้อิทธิพลของแรงดันแคปิลลารี ผ่านไปยังโซนโซนหลายสถานะ ผลทำให้ปริมาณน้ำแข็งที่อยู่ในโซนหลายสถานะเกิดการละลายตัวทำให้ค่าความอิ่มตัวของน้ำเพิ่มขึ้นในโซนนี้ เมื่อกระบวนการทำละลายดำเนินต่อไป จะเห็นว่าขอบเขตของโซนหลายสถานะจะเคลื่อนตัวไปทางขวามือโดยมี melting front และ infiltration front เป็นตัวกำหนดขอบเขตของโซนดังกล่าว อย่างไรก็ตามพบว่าภายใต้สภาวะทดลองดังกล่าว เนื่องจากเกรเดียนของอุณหภูมิภายในโซนของแข็ง (frozen layer) มีน้อยมาก

ทำให้เกิดปรากฏการณ์ refreezing ของน้ำที่บริเวณตอนปลายของโซนหลายสถานะ

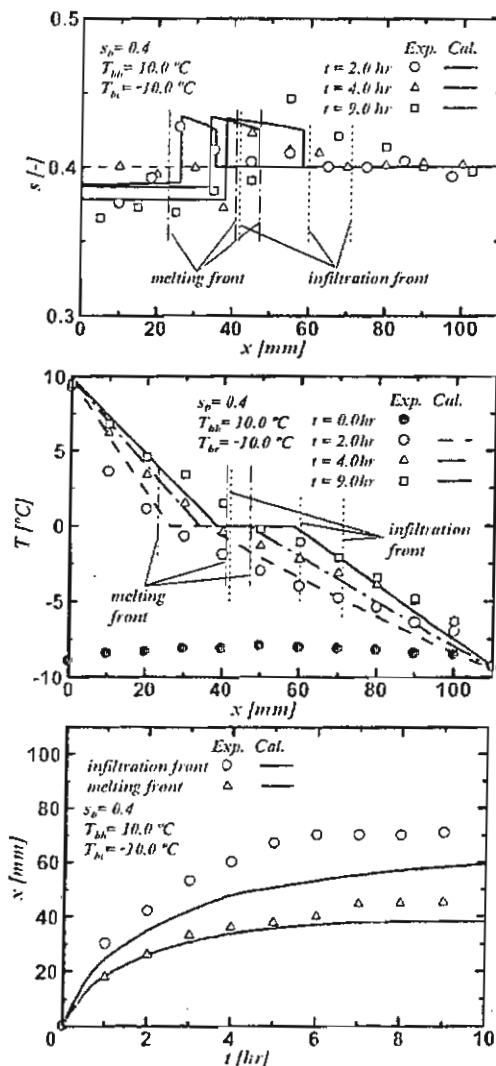
ในส่วนของการสัมพันธ์ระหว่าง melting front และ infiltration front เมื่อเทียบกับเวลา จะเห็นได้ชัดเจนว่าเมื่อเวลาผ่านไประยะทางของขอบเขตของโซนหลายสถานะจะเพิ่มขึ้น จึงเป็นกลไกเฉพาะตัวของกระบวนการทำละลายในวัสดุพรุนชนิดไม่อิ่มตัว จากรูปที่แสดงพบว่าผลที่ได้จากการคำนวณจะสอดคล้องกับผลที่ได้จากการทดลองเป็นอย่างดี



รูปที่ 3 แสดงการกระจายตัวของค่าความอิ่มตัวของน้ำและน้ำแข็งตลอดช่วงความยาวเพคเบต และการเคลื่อนตัวของขอบเขตที่เคลื่อนที่ (กรณีไม่มีการหล่อเย็นที่ด้านปลาย)

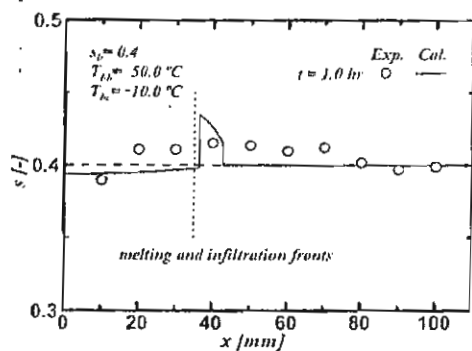
รูปที่ 4 แสดงการกระจายตัวของค่าความอิ่มตัวของน้ำและน้ำแข็งตลอดช่วงความยาวเพคเบต และการเคลื่อนตัวของขอบเขตที่เคลื่อนที่ กรณีมีการหล่อเย็นที่ด้านปลาย (เกิด refreezing) และอยู่ภายใต้สภาวะทดสอบที่อุณหภูมิเริ่มต้น T_i เท่ากับ -4°C สัดส่วนความอิ่มตัวเริ่มต้น s_0 เท่ากับ 0.4 และอุณหภูมิของการทำละลาย T_{bh} คือ 10°C ในกรณีนี้จะต่างจากกรณีที่แล้ว คือ มีปรากฏการณ์ refreezing เกิดขึ้นที่โซนหลายสถานะ จากรูปที่ 4 พบว่า การกระจายของค่าความอิ่มตัวในขอบเขตของโซนหลายสถานะจะเพิ่มขึ้นเมื่อเวลาของการทำละลายผ่านไป โดยที่กระบวนการทำละลายในช่วงแรก อัตราเร็วของการละลายสูงกว่าอัตราเร็วของการเคลื่อนตัวของน้ำในโซนละลายที่ซึมไปยังโซนหลายสถานะโดยผ่าน melting front ทำให้ค่าความอิ่มตัวในโซนหลายสถานะมีค่าเริ่มสูงขึ้นเมื่อเทียบกับค่าความอิ่มตัวเริ่มต้น แต่เมื่อเวลาผ่านไประยะหนึ่งอัตราเร็วของการละลายมีค่าลดลง ผลทำให้การเคลื่อนตัวของน้ำในโซนละลายที่ซึมไปยังโซนหลายสถานะมีค่าเพิ่มมากขึ้นเมื่อเทียบกับช่วงเวลาแรกๆ พร้อมทั้งขอบเขตของโซนหลายสถานะจะขยายตัวมากขึ้นด้วย นอกจากนี้พบว่าอิทธิพลของ refreezing มีผลต่อการขยายตัวของขอบเขตโซนหลายสถานะอย่างชัดเจน

กล่าวคือมันเป็นสาเหตุทำให้ขอบเขตของโซนหลายสถานะลดลงเมื่อเทียบกับกรณีไม่เกิดปรากฏการณ์ refreezing เหมือนกรณีก่อนหน้านี้ที่เป็นเช่นนี้เพราะการซึมผ่านของน้ำถูกควบคุมโดยการเกิด refreezing นอกเหนือจากนี้เมื่อ infiltration front เคลื่อนตัวไปที่ตำแหน่งประมาณ 70 mm ปรากฏการณ์การซึมผ่านก็จะหยุด ทั้งนี้เพราะเกรเดียนท์ของอุณหภูมิภายในโซนของแข็งที่เปลี่ยนไปกับเวลามีค่าน้อยมาก เมื่อทำการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการคำนวณกับผลที่ได้จากการทดลองพบว่า ผลที่ได้จากการคำนวณใกล้เคียงกับผลที่ได้จากการทดลอง แต่ค่าการคำนวณของชั้นความหนาของขอบเขตโซนหลายสถานะจะมากกว่าค่าจากการทดลอง สาเหตุอาจเป็นเพราะที่อุณหภูมิ 0°C ไม่สามารถทำให้น้ำเกิดการแข็งตัวได้ทั้งหมดในระหว่างกระบวนการ freezing ของเพคเบตในตอนเริ่มแรก น้ำในส่วนที่ไม่เกิดการแข็งตัวนี้จะมีอิทธิพลต่อการกระจายตัวของค่าความอิ่มตัวและอุณหภูมิ จึงเป็นสาเหตุสำคัญที่ทำให้เกิดความแตกต่างระหว่างผลที่ได้จากการคำนวณและผลจากการทดลอง



รูปที่ 4 แสดงการกระจายตัวของค่าความอิ่มตัวของน้ำและน้ำแข็ง และอุณหภูมิตลอดช่วงความยาวเพคเบต และการเคลื่อนตัวของขอบเขตที่เคลื่อนที่ (กรณีมีการหล่อเย็นที่ด้านปลาย)

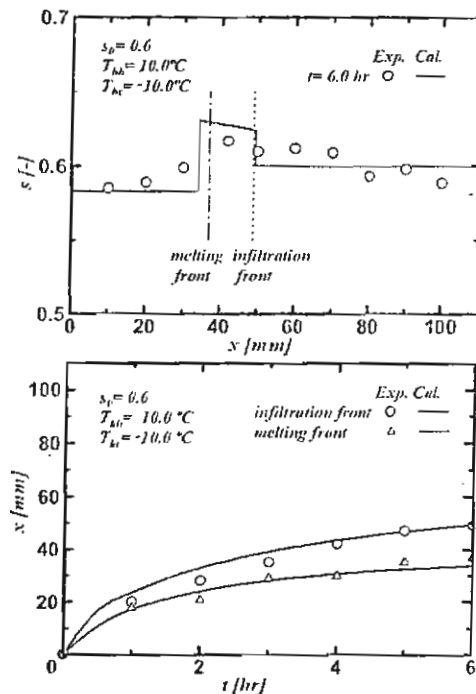
รูปที่ 5 แสดงถึงกระบวนการทำละลายในกรณีที่มีการหล่อเย็นที่ปลายอีกด้านหนึ่งและอยู่ภายใต้สภาวะทดสอบที่ค่าความอึดตัวเริ่มต้น S_0 เท่ากับ 0.4 อุณหภูมิของการหล่อเย็น T_{bc} เท่ากับ 10°C และอุณหภูมิของการทำละลาย T_{bh} เท่ากับ 50°C ที่สภาวะดังกล่าวนี้ การเคลื่อนตัวของน้ำในโซนละลายจะมีน้อยมาก ที่เป็นเช่นนี้เพราะในกระบวนการ อุณหภูมิของการทำละลายสูงมาก ทำให้อัตราเร็วของการละลายสูงกว่าอัตราเร็วของการเคลื่อนตัวของน้ำในโซนละลายที่ซึมไปยังโซนหลายสถานะโดยผ่าน melting front มากๆ ดังนั้นในการพิจารณาพอร์มิตัวของขอบเขตโซนหลายสถานะจึงไม่เกิดขึ้นเช่นกัน ปรากฏการณ์ refreezing ไม่ส่งผลใดๆ ต่อกระบวนการทำละลายในสภาวะนี้ อย่างไรก็ตามผลที่ได้จากการคำนวณจะมีการพอร์มิตัวของขอบเขตโซนหลายสถานะอย่างชัดเจน ทั้งนี้เป็นเพราะในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้กำหนดให้มีผลของการเกิดโซนหลายสถานะไว้ตั้งแต่ต้น จากรูปที่แสดงพบว่าผลที่ได้จากการคำนวณจะสอดคล้องกับผลที่ได้จากการทดลอง



รูปที่ 5 แสดงการกระจายตัวของค่าความอึดตัวของน้ำและน้ำแข็ง (กรณีมีอุณหภูมิการทำละลายสูงและมีการหล่อเย็นที่ด้านปลาย)

รูปที่ 6 แสดงถึงกระบวนการทำละลายในกรณีที่มีการหล่อเย็นที่ปลายอีกด้านหนึ่งและอยู่ภายใต้สภาวะทดสอบที่ค่าความอึดตัวเริ่มต้น S_0 เท่ากับ 0.6 อุณหภูมิของการหล่อเย็น T_{bc} เท่ากับ 10°C และอุณหภูมิของการทำละลาย T_{bh} เท่ากับ 10°C ในกรณีนี้การเคลื่อนตัวของน้ำจากโซนละลายไปยังโซนหลายสถานะมีไม่มากนัก ทั้งนี้อาจเป็นเพราะค่าความอึดตัวเริ่มต้นของน้ำแข็งมีค่าสูงทำให้ช่องว่าง (air gap) ภายในโซนหลายสถานะมีลักษณะแคบลง (narrow) ทำให้การเคลื่อนตัวของน้ำไปยังโซนหลายสถานะมีน้อยลงดังที่กล่าวข้างต้น เมื่อพิจารณาในส่วนของการสัมผัสกันระหว่าง melting front และ infiltration front เทียบกับเวลา จะเห็นได้ชัดเจนว่าเมื่อเวลาผ่านไประยะห่างของขอบเขตของโซนหลายสถานะจะไม่เพิ่มขึ้นมากนัก ด้วยเหตุผลของค่าการไหลซึม (absolute permeability) ภายในโซนหลายสถานะมีค่าน้อยซึ่งส่งผลต่อการเคลื่อนตัวของน้ำในโซนดังกล่าว เมื่อเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการคำนวณและการทดลอง พบว่ามีความแตกต่างกันบ้างโดยเฉพาะผลของการกระจายตัวของค่าความอึดตัว สาเหตุที่กล่าวมาอาจเป็นเพราะที่อุณหภูมิ 0°C ไม่สามารถทำให้น้ำเกิดการแข็งตัวได้ทั้งหมดในระหว่างกระบวนการ freezing ของแพกเบตในตอนเริ่มแรก น้ำในส่วนที่ไม่เกิดการแข็งตัวนี้จะมีอิทธิพลต่อการกระจายตัวของค่าความอึดตัวและอุณหภูมิ จึงเป็นสาเหตุสำคัญที่ทำให้เกิดความแตกต่างระหว่างผลที่ได้

จากการคำนวณและผลจากการทดลอง แต่สำหรับตำแหน่งของ melting front และ infiltration front เมื่อเทียบกับเวลาให้ผลที่สอดคล้องกัน



รูปที่ 6 แสดงการกระจายตัวของค่าความอึดตัวของน้ำและน้ำแข็งตลอดช่วงความยาวแพกเบต และการเคลื่อนตัวของขอบเขตที่เคลื่อนที่ (กรณีมีค่าความอึดตัวเริ่มต้นสูงและมีการหล่อเย็นที่ด้านปลาย)

5. สรุป

งานวิจัยฉบับนี้ได้ศึกษาถึงปรากฏการณ์พื้นฐานของกระบวนการทำละลายในวัสดุพอร์มิตัวที่ไม่อึดตัว ทั้งในภาคทฤษฎีและการทดลอง ผลจากการศึกษาทำให้เราทราบปรากฏการณ์พื้นฐานของกระบวนการดังกล่าว โดยพารามิเตอร์สำคัญที่ศึกษาคือ ค่าความอึดตัวของน้ำและน้ำแข็ง ลักษณะการเคลื่อนตัวของน้ำที่ผ่าน melting front และ infiltration front รวมจนถึงอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงภายในวัสดุทดสอบ

สัญลักษณ์

c_p	:	ความจุความร้อน (J/kgK)
f	:	ฟลักซ์การไหลของน้ำ ($\text{kg/m}^2\text{s}$)
h	:	ค่าการถ่ายเทความร้อน ($\text{W/m}^2\text{K}$)
K	:	ค่าการไหลซึม (m^2)
L	:	ความร้อนแฝง (J/kg)
P	:	ความดัน (Pa)
q	:	ฟลักซ์ความร้อน (W/m^2)
s	:	ค่าความอึดตัว (-)
t	:	เวลา (min)
T	:	อุณหภูมิ ($^{\circ}\text{C}$)
x	:	พิกัดในแกน x (m)

x	:	ระยะ (m)
λ	:	ค่าการนำความร้อน (W/mK)
ε	:	ค่าความพรุน (-)
ρ	:	ความหนาแน่น (kg/m ³)
μ	:	ค่าความหนืดจลน์ (Pa s)
η, ζ	:	การแปลงพิกัด

ตัวห้อย

end	:	ปลายเพกเบด
f	:	โชนของแข็ง
i	:	น้ำแข็ง
w	:	น้ำ
m	:	โชนละลาย
mp	:	จุดหลอมละลาย
ml	:	ขอบเขตผิวละลาย
o	:	เริ่มต้น
lf	:	ขอบเขตผิวการไหลซึม
wc	:	เกิด refreezing
wl	:	โชนหลายสถานะ

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจาก สำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว) ภายใต้ทุนเมธีวิจัย สัญญาหมายเลข 123456789

เอกสารอ้างอิง

- [1] Murray, W.D and Landis, F., "Numerical and machine solutions of transient heat conduction problem involving melting or freezing," ASME J. Heat Transfer, 81, 1959, pp. 106-112.
- [2] Viskanta, R., "Heat transfer during melting and solidification of metals," ASME J. Heat Transfer 110, 1998, pp. 1205-1219.
- [3] Gong, Z.F. and Mujumdar, A.S., "Flow and heat transfer in convection-dominated melting in a rectangular cavity heated from below," Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 41(17), 1998, pp. 2573-2580.
- [4] Carrey, V.P. and Gebhart, B., "Transport near a vertical ice surface melting in saline water: experiments at low salinities," J. of Fluid Mechanics 117, 1982, pp. 403-423.
- [5] Huppert, H.E. and Turner, J.S., "Ice blocks melting into a salinity gradient," J. Fluid Mechanics. 100, 1980, pp. 367-384.
- [6] Fukusako, S., Tago, M., Yamada, M., Kitayama, K. and Watanabe, C., "Melting heat transfer from horizontal ice cylinder immersed in quiescent saline water," ASME J. Heat Transfer. 114, 1992, pp. 34-40.
- [7] Ratanadecho, P., "The analysis of force-convection melting on phase change cylinder," Int. J. Thermal Sciences (Review).
- [8] Pangrle, B.J. and Ayappa, K.G., "Microwave melting of cylinders," AIChE J., 37, 1991, pp. 1789-1800.
- [9] Basak, T. and Ayappa, K.G., "Analysis of microwave melting of slab with the effective heat capacity method," AIChE J., 43, 1997, pp. 1662-1674.
- [10] Ratanadecho, P., Aoki, K. and Akahori, M., "Characteristics of microwave melting of frozen packed bed using a rectangular wave guide, IEEE Trans. of Microwave Theory and Techniques," 50 (6), 2002, pp. 1487-1494.
- [11] Ratanadecho, P., "The Theoretical and experimental Investigation of microwave melting of frozen layer using microwave oven (Effects of layered configurations and layered thickness)" Int. J. Heat Mass Transfer, 47 (5), , 2004,pp. 937-945.
- [12] Ratanadecho, P., "Experimental and numerical study of melting process in unsaturated granular packed bed." AIAA J. Thermophysics and Heat Transfer, 18 (1), 2004, pp. 87-93.
- [13] Yao, L.S and Prusa, J. Melting and freezing, Advances in Heat Transfer 19 (1990) 1- 95.