

Abstract

Project Code : RSA5680037

Project Title : Measures of dependence

Investigator : Songkiat Sumetkijakan, Chulalongkorn University

E-mail Address : songkiat.s@chula.ac.th, songkiat.weng@gmail.com

Project Period : 3 years (17 June 2013 – 16 June 2016)

Many aspects of bivariate copulas are investigated in the project, especially their properties closely related to dependence structure. We introduce and study two local versions of Kendall's tau conditioning on one or two random variable(s) varying less than a given distance. Unlike the Kendall's tau, these local versions are able to distinguish between complete dependence and independence copulas. A pointwise version of Kendall's tau is also proposed and shown to distinguish between comonotonicity and countermonotonicity of complete dependence copulas. Deriving from conditional variance, we introduce a class of measures of mutual complete dependence. These copula-based dependence measures are novel in the sense that they are not developed from a distance from the independence copula but rather from the $*$ -product of the copula and its transpose.

It is well known that the dependence structure of a singular copula is encoded in its support. Motivated by a generalized closure introduced in order to study support of copulas, we developed a theory of essential closures. A typical essential closure, called a submeasure closure, collects all points that are essential with respect to a submeasure. Among many properties of essential closures, we prove that a “nice” essential closure must be a submeasure closure. Examples of submeasure closures are discussed and their applications are demonstrated, especially in the study of supports of measures and copulas. As an opposite of independence, complete dependence copulas have been well studied in the literature. A much broader type of singular copulas that deserve investigations is the implicit dependence copulas, defined as the copula of two continuous random variables X, Y for which $\alpha \circ X = \beta \circ Y$ a.s. for some Borel functions α, β . Evidently, the full mass of an implicit dependence copula is concentrated on an implicit graph, i.e. the graph of $f(x) = g(y)$ for some measure-preserving functions f, g . Our main result is the characterizations of a copula assigning full mass to an implicit graph in terms of a partial factorizability of its Markov operator and in terms of the non-atomicity of two associated sigma-algebras. As an application, we give a broad sufficient condition under which the mass of a copula with fractal support is concentrated on an implicit graph. Under extra conditions, we compute the left and right invertible factors of copulas with fractal support.

Keywords : local Kendall's tau, conditional variance, essential closures, implicit dependence copulas, non-atomic copulas

บทคัดย่อ

รหัสโครงการ : RSA5680037

ชื่อโครงการ : ตัววัดการขึ้นต่อกัน (Measures of dependence)

ชื่อนักวิจัย : นายทรงเกียรติ สุเมธกิจการ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

E-mail Address : songkiat.s@chula.ac.th, songkiat.weng@gmail.com

ระยะเวลาโครงการ : 3 ปี (17 มิถุนายน 2556 – 16 มิถุนายน 2559)

โครงการนี้ศึกษาสมบัติต่างๆ ของคอปูล่าที่เกี่ยวกับการขึ้นต่อกันของสองตัวแปรสุ่ม เรานิยามและศึกษาค่าทาวของเคนดอลล์เฉพาะที่แบบมีเงื่อนไขให้ค่าตัวแปรสุ่มเปลี่ยนน้อยๆ ค่าทาวของเคนดอลล์เฉพาะที่เหล่านี้สามารถแยกแยะระหว่างคอปูล่าการเป็นอิสระต่อกันและคอปูล่าการขึ้นต่อกันอย่างสมบูรณ์ เรายังได้นิยามและศึกษาค่าทาวของเคนดอลล์รายจุดซึ่งสามารถแยกแยะระหว่างคอปูล่าทางเดียวกัน และคอปูล่าสวนทางกัน จากการศึกษาความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข เรายังเสนอตัววัดการขึ้นต่อกันอย่างสมบูรณ์คลาสหนึ่งด้วยนิยามที่เริ่มจากผลคูณของคอปูล่ากับการสลับเปลี่ยนของมัน ซึ่งแตกต่างจากตัววัดการขึ้นต่อกันอื่นๆ ที่พัฒนาจากแนวคิดของระยะทางจากคอปูล่าการเป็นอิสระต่อกัน

ดังเป็นที่ทราบดีว่า ข้อมูลของโครงสร้างการขึ้นต่อกันของคอปูล่าเอกฐานอยู่ในเซตค่าจูนของคอปูล่าด้วยแรงบันดาลใจจากส่วนปิดคลุมทั่วไปที่นิยามขึ้นเพื่อศึกษาเซตค่าจูนของคอปูล่า เราได้พัฒนาทฤษฎีของส่วนปิดคลุมหลัก ส่วนปิดคลุมหลักทั่วไปซึ่งเรียกว่าส่วนปิดคลุมเมเชอร์ย่อยคือการรวบรวมจุดที่เป็นทั้งหมดเทียบกับเมเชอร์ย่อยหนึ่ง เราพิสูจน์สมบัติต่างๆ ของส่วนปิดคลุมหลัก โดยเฉพาะอย่างยิ่งสมบัติที่ว่าส่วนปิดคลุมหลักใดๆ ต้องเป็นส่วนปิดคลุมหลักเมเชอร์ย่อย เรายกตัวอย่างส่วนปิดคลุมหลักเมเชอร์ย่อยต่างๆ และสาธิตการนำไปใช้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการใช้ศึกษาเซตค่าจูนของเมเชอร์และคอปูล่า คอปูล่าการขึ้นต่อกันอย่างสมบูรณ์ได้ผ่านการศึกษามากในฐานความสัมพันธ์ที่ตรงข้ามกับการเป็นอิสระต่อกัน คอปูล่าเอกฐานอีกชนิดหนึ่งที่สมควรได้รับการศึกษาบ้างคือคอปูล่าการขึ้นต่อกันโดยปริยาย ซึ่งเป็นคลาสที่กว้างขวางกว่ามากและนิยามเป็นคอปูล่าของสองตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X, Y ที่สอดคล้อง $\alpha \circ X = \beta \circ Y$ a.s. สำหรับบางฟังก์ชัน α, β คอปูล่า การขึ้นต่อกันโดยปริยายกระจายน้ำหนักทั้งหมดบนกราฟปริยาย นั่นคือกราฟของ $f(x) = g(y)$ สำหรับบางฟังก์ชันคงเมเชอร์ f, g ผลงานหลักคือการจำแนกคอปูล่าที่กระจายน้ำหนักทั้งหมดบนกราฟปริยายในรูปของการแยกตัวประกอบบางส่วนของตัวกระทำมาร์คอฟ และในรูปของความไร้อะตอมของพีชคณิตซึกมาของคอปูล่า (เรียกว่าคอปูล่าไร้อะตอม) ตัวอย่างของคอปูล่าที่กระจายน้ำหนักทั้งหมดบนกราฟปริยายคือคอปูล่าที่มีเซตค่าจูนแฟร็กตอลและสอดคล้องเงื่อนไขบางประการ ภายใต้เงื่อนไขเพิ่มเติมคอปูล่าที่มีเซตค่าจูนแฟร็กตอลสามารถแยกตัวประกอบเป็นผลคูณของคอปูล่าขึ้นต่อกันอย่างสมบูรณ์

คำหลัก: ค่าทาวของเคนดอลล์เฉพาะที่, ความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข, ส่วนปิดคลุมหลัก, คอปูล่าการขึ้นต่อกันโดยปริยาย, คอปูล่าไร้อะตอม