รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ

การคำนวณและออกแบบสร้างชีลด์ป้องกันสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

โดย

รองศาสตราจารย์ ดร. สำรวย สังข์สะอาด และคณะวิจัย

25 กุมภาพันธ์ 2545

สัญญาเลขที่ RTA/09/2539

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ
การคำนวณและออกแบบสร้างชีลด์ป้องกันสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

คณะผู้วิจัย	สังกัด
1. รศ. ดร. สำรวย สังข์สะอาด	คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
2. ผศ. ดร. ทับทิม อ่างแก้ว	คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
3. นายชัยรัตน์ วิเชียรมงคลกุล	คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

ชุดโครงการเมธีวิจัยอาวุโส รศ.ดร. สำรวย สังข์สะอาด

คำนำ

โครงการวิจัยรหัส EMC40-02 เรื่อง "การคำนวณและออกแบบสร้างชีลด์ป้องกันสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำนี้" เป็นโครงการหนึ่งที่คณะวิจัยได้เสนอขอทุนสนับสนุนในโครงการเมธีวิจัยอาวุโส คู่ขนานกับโครงการวิจัยรหัส EMC40-01 เรื่อง "การศึกษาผลกระทบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก" ที่มีอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ซึ่งได้ทำการวิจัยและเขียนรายงานฉบับสมบูรณ์เสร็จเรียบร้อยตั้งแต่เดือน กันยายน 2544 โดยได้ทำการสำรวจวัดความเข้มสนามแม่เหล็ก และสนามไฟฟ้าที่เกิดจากสายส่งแรงสูงในสถานีจ่ายไฟฟ้าย่อยและใต้สายส่งแรงสูง และทำการทดลองในห้องปฏิบัติการ หามาตรการป้องกันหรือลดทอนการรบกวน ผลของการวิจัยพบว่า การป้องกันการรบกวนของสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำแก่อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ สามารถทำได้โดยใช้กล่องชีลด์ที่ทำด้วยโลหะที่มีสภาพซาบซึมได้สูง เช่น โลหะซิลิกอนเป็นต้น

ในโครงการวิจัย EMC40-02 นี้ เป็นการวิจัยเชิงวิเคราะห์ด้วยคณิตศาสตร์ชั้นสูง เพื่อหาข้อมูลในการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยชีลด์ ที่ทำด้วยวัสดุตัวนำแทนวัสดุที่มีสภาพซาบซึมโดยอาศัยหลักการเหนี่ยวนำสนามแม่เหล็กที่เกิดจากกระแสไหลวนในเนื้อวัสดุของชีลด์ จากสนามแม่เหล็กภายนอกเดิม เมื่อชีลด์ได้รับการออกแบบเหมาะสมแล้ว สนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำภายในเนื้อวัสดุของตัวนำจะสามารถหักล้างสนามแม่เหล็กรบกวนเดิมได้ ผลของการศึกษาพบว่าประสิทธิผลการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำขึ้นอยู่กับสภาพซาบซึม สภาพนำไฟฟ้า ความถี่ ความหนาของชีลด์และระยะห่างจากแหล่งกำเนิดการรบกวน ผลของการศึกษาวิจัยในโครงการนี้ นอกจากจะช่วยให้เกิดการสร้างนักวิจัยรุ่นใหม่แล้ว ยังจะเป็นประโยชน์ในการสร้างองค์ความรู้ เกี่ยวกับการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำให้เกิดขึ้นในประเทศไทย ช่วยให้สามารถพึ่งตนเองในด้ายวิเคราะห์และออกแบบชีลด์ปิดกั้นสนามแม่เหล็กตั้งแต่ความถี่ต่ำ ไปถึงความถี่สูงได้เอง

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยนี้เกิดขึ้นและสำเร็จได้โดยได้รับความสนับสนุนในด้านเงินทุนจากสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) โครงการเมธีวิจัยอาวุโส จึงขอขอบคุณอย่างสูงไว้ ณ. โอกาสนี้ ขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าที่ได้อนุญาตให้ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทับทิม อ่างแก้ว มาทำวิจัยโครงการนี้ ขอขอบคุณนิสิตปริญญาเอกและปริญญาโท ของห้องปฏิบัติการคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ช่วยกรุณาให้คำปรึกษาและช่วยเหลือต่างๆ ในการทำวิจัยเป็นอย่างดี ขอขอบคุณศูนย์เชี่ยวชาญพิเศษเฉพาะด้านเทคโนโลยีไฟฟ้ากำลัง ที่ช่วยประสานการติดต่อกับทาง สกว. ให้ด้วยดีตลอดโครงการ

คณะผู้วิจัย

รายงานวิจัย

รหัสโครงการ : EMC40-02

โครงการ : การคำนวณและออกแบบสร้างชีลด์ป้องกันสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

คณะผู้วิจัย : รองศาสตราจารย์ ดร.สำรวย สังข์สะอาด (จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ทับทิม อ่างแก้ว (จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)
นายชัยรัตน์ วิเชียรมงคลกุล (จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย)

ระยะเวลาที่ทำการวิจัย : กรกฎาคม 2541 – ธันวาคม 2544

วัตถุประสงค์ :

เพื่อศึกษาคุณลักษณะการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำของชีลด์ที่สร้างจากวัสดุชนิดต่างๆ และรูปแบบต่างๆ วิเคราะห์สภาพแม่เหล็กโดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

บทคัดย่อ

รายงานวิจัยฉบับนี้เสนอการวิเคราะห์ผลการชีลด์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ โดยใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ผลเฉลยรอบวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำหาได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ร่วมกับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ ผลเฉลยบริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่งหาได้จากวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ ใช้อีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กเพื่อลดจำนวนการแบ่งอีลีเมนต์ หาค่าประสิทธิผลการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำของชีลด์รูปร่างต่างๆ เปรียบเทียบผลที่ได้กับผลงานอื่นๆ ที่ปรากฏ ศึกษาค่าปัจจัยที่มีผลต่อค่าประสิทธิผลการปิดกั้นของชีลด์ ได้แก่ ความซาบซึมได้สภาพนำไฟฟ้า ความถี่ ความหนา และระยะห่างของวัตถุปิดกั้นจากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็ก พบว่าประสิทธิผลการชีลด์ใกล้เคียงกับผลการวิเคราะห์และผลการวัดของงานวิจัยอื่น

คำสำคัญ : ชีลด์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ วิธีไฟไนต์อีเลีเมนต์ กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

Research Report

Project code : EMC40-02

Project title : Analysis and Designs of Magnetic Shields at Low Frequency.

Investigators : Assoc. Prof. Dr. Samruay SANGKASAAD, Chulalongkorn University.
Assist. Prof. Dr. Tuptim ANGKAEW, Chulalongkorn University.
Mr. Chairat VICHEANMONGKONKUL, Chulalongkorn University.

Project Period : July 1998 – December 2001

Objective :

To study low frequency magnetic field shielding characteristics of a shield constructed by different conductive materials with different forms. To analyse magnetic field by using finite element method.

Abstract

This report presents the analysis of low frequency magnetic field shielding effectiveness by using hybrid finite element and boundary element method. The solution around the magnetic shield is achieved by finite element method and the solution at the open boundary is obtained by the boundary element method. The rectangular element in the thin plate of magnetic field is used for reducing the member of the elements. Low frequency magnetic field shielding effectiveness of the various shape magnetic shields are determined and compared with the other previous works. The effect of various factors on the shielding effectiveness, e.g. permeability conductivity, frequency, thickness and distance of the magnetic shield from the magnetic field source were studied. The results show that shielding effectiveness is satisfied fairly good with the analysed and measured results in the previous works.

Keywords : Low frequency magnetic shielding, Hybrid finite element – boundary element method.

สารบัญ

หน้า

คำนำ I

กิตติกรรมประกาศ II

บทคัดย่อภาษาไทย III

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ IV

สารบัญ V

สารบัญตาราง VIII

สารบัญรูป IX

บทที่ 1 บทนำ .....

1.1 บทนำทั่วไป 1

1.2 ที่มาของปัญหา 1

1.3 ผลงานการศึกษาวิจัยที่เกี่ยวข้อง 1

1.4 แนวทางและขอบเขตการวิจัย 3

บทที่ 2 การปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 4

2.1 กลไกการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 4

2.1.1 การปิดกั้นด้วยการเบี่ยงเบนฟลักซ์ 4

2.1.2 การปิดกั้นด้วยกระแสเหนี่ยวนำในตัวนำ 5

2.2 การวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์อีลีเมนต์ 6

2.2.1 สมการพื้นฐานการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ กรณีปัญหา 2 มิติ 7

2.2.2 การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำกรณีปัญหา 2 มิติ 10

2.2.3 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ 11

2.3 ตัวอย่างการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ 13

หน้า

บทที่ 3 การใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์หาผลเฉลยปัญหาสนามแม่เหล็ก 17

3.1 การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ 17

3.2 อีลีเมนต์สามเหลี่ยม 21

3.3 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ 22

3.4 อีลีเมนต์สี่เหลี่ยม 24

บทที่ 4 การใช้วิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์หาผลเฉลยปัญหาสนามแม่เหล็ก 28

4.1 สมการเบาวน์ดารีอินทิกรัล 28

4.2 การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ 31

บทที่ 5 ผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 37

5.1 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 38

5.1.1 ตัวอย่างผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์กรณีแผ่นระนาบ 38

5.1.2 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่มีด้านเปิดด้านหนึ่ง 40

5.1.3 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่มีด้านเปิดด้านหนึ่ง 2 อันวางเหลื่อมกัน 42

5.1.4 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉาก .. 44

5.1.5 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉาก ที่มีการเจาะตรงกลางด้านหนึ่งเป็นช่องเปิด 45

5.2 ผลการศึกษาค่าปัจจัยที่มีผลต่อการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 47

5.2.1 ความซาบซึมได้ 47

5.2.2. สภาพนำไฟฟ้า 48

5.2.3. ความถี่ 48

5.2.4. ความหนา 49

5.2.5. ระยะห่างจากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 50

หน้า

บทที่ 6 บทสรุปและข้อเสนอแนะ 51
6.1 บทสรุป 51
6.2 ข้อเสนอแนะ 51

การสร้างทีมวิจัย 52
เอกสารอ้างอิง 53
ผลงานที่ตีพิมพ์ 54
ภาคผนวก 55
ภาคผนวก ก 56
ภาคผนวก ข 57
ภาคผนวก ค 60

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

5-1 คุณสมบัติทางไฟฟ้าของวัสดุที่นำมาคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ 38
5-2 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลการชีลด์กับความซาบซึมได้ 47
5-3 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลการชีลด์กับสภาพนำไฟฟ้า 48
5-4 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลการชีลด์กับความถี่ 49
5-5 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลการชีลด์กับความหนา 49
5-6 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลการชีลด์กับระยะห่างจาก
แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 50

สารบัญรูป

รูปที่		หน้า
2-1	การนำวัสดุแม่เหล็กหรือวัสดุตัวนำมาปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ	4
2-2	การปิดกั้นฟลักซ์แม่เหล็กความถี่ต่ำ	6
2-3	แบบจำลองคณิตศาสตร์การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ	7
2-4	แบบจำลองคณิตศาสตร์การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำกรณีปัญหา 2 มิติ	10
2-5	แนวคิดของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์	11
2-6	ตำแหน่งตัวแปรที่ไม่ทราบค่า	12
2-7	แบบจำลองการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์	14
2-8	การแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยมกรณีที่สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์	14
2-9	เปรียบเทียบระยะการแบ่งอีลีเมนต์ระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ร่วมกับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์	15
2-10	เปรียบเทียบผลการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ร่วมกับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์กับวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	15
3-1	ลักษณะการแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆ	18
3-2	อีลีเมนต์สามเหลี่ยมและตัวแปรที่ไม่ทราบค่า	21
3-3	การคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์	23
3-4	ตัวอย่างการแบ่งโดเมนการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม	23
3-5	เปรียบเทียบผลเฉลยความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ระหว่างวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์	24
3-6	อีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าและตัวแปรที่ไม่ทราบ	25
3-7	อีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัด (ξ,η)	26
3-8	ลักษณะของการใช้อีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าร่วมกับอีลีเมนต์สามเหลี่ยม	27
4-1	การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตบน Γ และการพิจารณาโดเมนปัญหา 2 มิติ	29
4-2	ลักษณะการแบ่งขอบเขตออกเป็นขอบเขตย่อยๆ	32

รูปที่ **หน้า**

4-3 ลักษณะฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง 32

5-1 การปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำในกรณีแผ่นระนาบ 39

5-2 ตัวอย่างผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ของ Hasselgren and Luomi โดย
เป็นการเทียบระหว่างผลการคำนวณ (▬▬) กับผลการทดลอง (X, Δ ,O,●) 39

5-3 ผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ในกรณีแผ่นระนาบโดยเทียบกับ
ผลการทดลองของ Hasselgren and Luomi 40

5-4 การปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเปิดด้านหนึ่ง 41

5-5 ตัวอย่างผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ของ Hasselgren and Luomi
กรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเปิดด้านหนึ่ง 41

5-6 ผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้าน
เปิดด้านหนึ่งโดยเทียบกับผลการคำนวณของ Hasselgren and Luomi 42

5-7 การปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้าน
เปิดด้านหนึ่ง 2 อันวางเหลื่อมกัน 43

5-8 ผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเปิดด้านหนึ่ง
2 อันวางเหลื่อมกันโดยเทียบกับผลการทดลองของ Hasselgren and Luomi 43

5-9 การปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉาก 44

5-10 ผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉาก 45

5-11 การปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มี
การเจาะตรงกลางด้านหนึ่งเป็นช่องเปิด 46

5-12 ผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มี
การเจาะตรงกลางด้านหนึ่งเป็นช่องเปิด 46

บทที่ 1
บทนำ

1.1 บทนำทั่วไป

พลังงานไฟฟ้าถือเป็นปัจจัยสำคัญในการพัฒนาประเทศในด้านอุตสาหกรรม เศรษฐกิจ และสังคม รัฐบาลก็มีนโยบายจะให้ประชาชนมีไฟฟ้าใช้อย่างทั่วถึงทุกตำบลและหมู่บ้าน ที่แผ่กระจายไปในบริเวณกว้างใหญ่เป็นระยะทางไกล จึงจำเป็นต้องมีการใช้ระบบแรงดันสูงในการส่งจ่ายพลังงานไฟฟ้า ในนครหลวงหรือเมืองใหญ่ๆ เป็นชุมชนหนาแน่นมีความต้องการด้านพลังงานไฟฟ้าสูง ซึ่งต้องส่งจ่ายกำลังไฟฟ้าด้วยแรงดันสูงและกระแสสูง สายส่งจ่ายกำลังไฟฟ้าแรงสูงจะมีสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กแพร่กระจายออกมาโดยรอบสายส่งจ่าย จึงอาจกล่าวได้ว่า สายส่งจ่ายกำลังไฟฟ้าแรงสูงเป็นแหล่งกำเนิดการรบกวนแม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetic interference = EMI) ที่สำคัญอย่างหนึ่ง

1.2 ที่มาของปัญหา

เนื่องจากในปัจจุบันการพัฒนาเทคโนโลยีด้านอิเล็กทรอนิกส์ได้เจริญก้าวหน้าขึ้นอย่างรวดเร็ว มีการนำอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์มาใช้ในระบบสื่อสาร ระบบควบคุม ระบบวัด ระบบฐานข้อมูล ซึ่งอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เหล่านี้ได้รับการพัฒนาออกแบบให้ทำงานด้วยความเร็วสูง กินกำลังไฟฟ้าน้อย นั่นหมายถึงภูมิต้านทานหรือความคงทนต่อการรบกวนย่อมน้อยลงไปด้วย จึงมีความไวต่อการรบกวนแม่เหล็กไฟฟ้า มีผลทำให้การทำงานเกิดความผิดพลาด หรือถึงกับเกิดความเสียหาย อาจกล่าวได้ว่าในทุกกิจการธุระกรรมทั้งหลาย มีความจำเป็นต้องใช้อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เทคโนโลยีชั้นสูง เช่น คอมพิวเตอร์ ซึ่งมีโอกาสได้รับผลกระทบจากการรบกวนแม่เหล็กไฟฟ้าดังกล่าว ฉะนั้นเพื่อให้อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์เหล่านี้สามารถทำงานได้อย่างปกติ ในสภาพแวดล้อมที่มีการรบกวนจำเป็นต้องมีการป้องกันที่เหมาะสม การใช้ชีลด์หรือการกำบังเป็นวิธีหนึ่งของการป้องกัน การจะป้องกันด้วยชีลด์ให้มีประสิทธิผล จำเป็นต้องมีการศึกษาวิจัยการชีลด์

1.3 ผลงานการศึกษาวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปี 2540 ได้มีการศึกษาวิจัย เรื่อง การศึกษาผลกระทบของสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กที่มีต่ออุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ขึ้นที่ คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ในโครงการเมธีวิจัยอาวุโส สกว. [1] ในงานวิจัยนี้ ได้มีการสำรวจวัดสนามไฟฟ้า และความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็กในสถานีจ่ายไฟฟ้าย่อย และใต้สายส่งจ่ายพลังงานไฟฟ้า ทำการเปรียบเทียบผลการวัดกับผลการคำนวณ ทำการศึกษาผลกระทบของสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กในห้องปฏิบัติการ หาค่าวิกฤต

ของสนามแม่เหล็กที่เริ่มรบกวนอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ ทดลองหาคุณสมบัติของกล่องชีลด์เพื่อป้องกันการรบกวน ผลของการศึกษาวิจัยในโครงการนี้ทำให้ทราบว่า การรบกวนอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ส่วนใหญ่หรือเกือบทั้งหมด เนื่องมาจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า ที่เกิดจากระบบส่งจ่ายพลังงานไฟฟ้าความถี่ต่ำ (50 Hz) และพบว่าวัสดุที่จะนำมาใช้ในการป้องกันสนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ต่ำแก่อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์นั้น สามารถทำได้โดยใช้โลหะที่มีค่าความซาบซึมหรือค่าเปอร์มีบิลิตี้สูงครอบคลุมอุปกรณ์ที่ต้องการจะป้องกัน

ในปี 2542 ได้มีการศึกษาวิจัยเรื่อง “การป้องกันคลื่นรบกวนแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ต่ำด้วยกล่องชีลด์ [2]” ผลของการศึกษาวิจัยโครงการนี้พบว่า การรบกวนจากฟลักซ์แม่เหล็กเกิดจากระบบสายส่งจ่าย ขึ้นอยู่กับขนาดกระแสที่ไหล วัสดุที่ใช้ในการกำบังสนามแม่เหล็กที่เหมาะสม คือ ซิลิกอนสตีล ที่จัดหาซื้อได้ภายในประเทศ ที่เหมาะสมในการสร้างกล่องกำบังสนามแม่เหล็กคือ RGM 140 และได้ทำการศึกษาการออกแบบกล่องกำบังที่ให้ประสิทธิผลของการป้องกัน

การศึกษาวิจัยในต่างประเทศเกี่ยวกับปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำโดยการวิเคราะห์อาจแบ่งได้เป็น 2 วิธี คือ วิธีวิเคราะห์ (Analytic method) และวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method)

วิธีเชิงวิเคราะห์ สามารถวิเคราะห์ได้ดีกับวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ ที่มีรูปร่างสมมาตรเท่านั้น อาทิเช่น แผ่นระนาบ ทรงกระบอก ทรงกลม เป็นต้น ขณะเดียวกันวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่มีรูปร่างใดๆ จะหาผลเฉลยที่เกิดขึ้นได้ยากหรือไม่ได้เลย วิธีเชิงวิเคราะห์จะให้ผลเฉลยในระยะเวลาอันสั้น และมีความแม่นตรงสูง [3,4] โดยที่วิธีเชิงวิเคราะห์มีข้อจำกัดในการวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ จึงมีผู้วิจัยกลุ่มหนึ่งนำเสนอวิธีเชิงตัวเลขขึ้นแทนวิธีเชิงวิเคราะห์ ซึ่งแบ่งได้เป็น 3 วิธีคือ

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ซึ่งเป็นวิธีเชิงตัวเลขที่มีการนำเสนอขึ้นมาวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำอยู่เสมอ เนื่องจากวิเคราะห์วัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่มีรูปร่างใดๆ ได้ดีขณะเดียวกันมีจุดด้อย คือ ไม่สามารถที่จะหาผลเฉลยบริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่งได้ เพราะไม่สามารถที่จะแบ่งอีลีเมนต์ตามขั้นตอนของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ถึงระยะอนันต์ได้ และปัญหาหน่วยความจำที่ไม่เพียงพอในการคำนวณ [5]

จากข้อด้อยของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในการหาผลเฉลยที่บริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่ง จึงมีผู้วิจัยนำเสนอวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ขึ้นมาแทน วิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์จะแบ่งอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยเฉพาะบนขอบเขตปัญหาเท่านั้น ทำให้จำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยมีจำนวนน้อย ซึ่งจุดนี้เป็นจุดเด่นของวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ ที่จะนำมาใช้หาผลเฉลยบริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่ง แต่วิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์มีจุดด้อย คือ การเกิดจุดเอกฐาน (singularity) ขึ้นในระบบสมการได้ [6]

อันเนื่องจากจุดด้อยของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และของวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในการวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ จึงได้มีผู้วิจัยเสนอการรวมวิธีทั้งสองเข้าด้วยกัน เพื่อที่จะวิเคราะห์

หาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดขึ้น ได้ตลอดทั้งบริเวณวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ และบริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่ง [7]

1.4 แนวทางและขอบเขตการวิจัย

จากการนำเสนอวิธีวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ จะพบว่าวิธีเชิงตัวเลขเป็นวิธีที่มีความเหมาะสมในการนำมาใช้ในโครงการวิจัยนี้ เนื่องจากมีความยืดหยุ่นกับการวิเคราะห์วัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่มีรูปร่างใดๆ ได้ดี เมื่อเทียบกับวิธีเชิงวิเคราะห์งานวิจัยในอดีตจะพบปัญหาการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีเชิงตัวเลขอยู่ 2 ประการคือ

1) การแบ่งอีลีเมนต์สามเหลี่ยมในเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่มีลักษณะบางอีลีเมนต์ที่แบ่งในเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำและโดยรอบจะมีขนาดเล็ก ทำให้จำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยมีจำนวนมาก

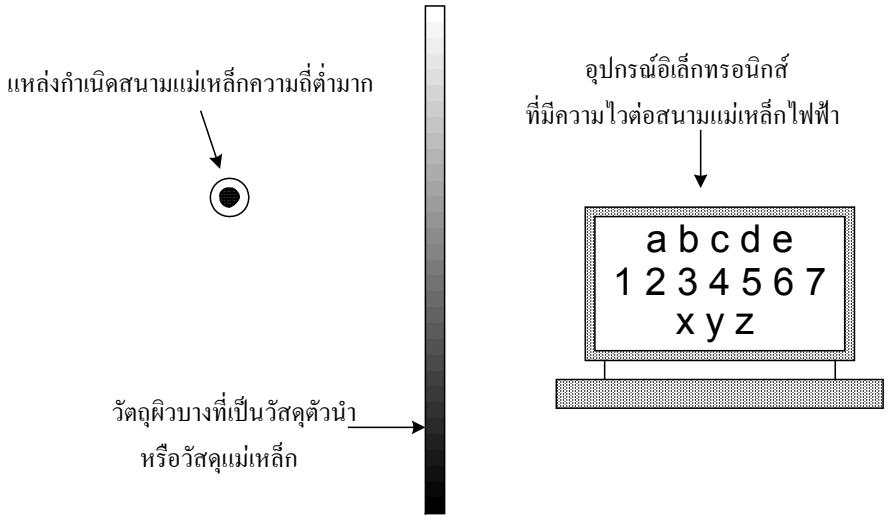
2) การหาผลเฉลยบริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่ง เนื่องจากไม่สามารถที่จะแบ่งอีลีเมนต์ตามขั้นตอนวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ถึงระยะอนันต์ได้ และปัญหาหน่วยความจำที่ไม่เพียงพอในการนำมาคำนวณหาผลเฉลย

ดังนั้นโครงการวิจัยนี้จึงนำเสนอวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ขึ้นมาเป็นวิธีวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ ทำการศึกษาค่าปัจจัยที่มีผลต่อค่าประสิทธิผลการชีลด์ เช่น ค่าเปอร์มีบิลิตี้ หรือความซาบซึมได้ สภาพนำไฟฟ้า ความถี่ ความหนา และระยห่างของวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

บทที่ 2
การปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

2.1 กลไกการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

การปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำสามารถทำได้ โดยการนำวัตถุที่เป็นวัสดุแม่เหล็ก (ferromagnetic material) หรือวัสดุตัวนำ (conductor material) มาปิดกั้นหรือล้อมรอบแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำดังรูปที่ 2.1 วัสดุที่นำมาทำหน้าที่ปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำเรียกว่า “วัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำหรือชีลด์แม่เหล็ก” (magnetic shield material)



รูปที่ 2.1 การนำวัสดุแม่เหล็กหรือวัสดุตัวนำมาปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

การปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวัสดุแม่เหล็กและวัสดุตัวนำ สามารถเกิดขึ้นได้โดยกลไกการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ [3]

2.1.1 การปิดกั้นด้วยการเบี่ยงเบนฟลักซ์ (The flux shunting shielding mechanism)

การปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำตามกลไกนี้ จะเกิดขึ้นกับวัสดุแม่เหล็กหรือวัสดุที่มีความซาบซึมได้สูง (high peameability :μ_r) อาทิเช่น mild steel (μ_r=2000), Silicon iron (μ_r=7000) เป็นต้น เมื่อวางวัสดุแม่เหล็กลงในสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่อยู่ภายในบริเวณอวกาศว่างตามทฤษฎีสนามแม่เหล็กไฟฟ้า พฤติกรรมของความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ และความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก $\vec{B}$ ที่บริเวณผิวของวัสดุแม่เหล็กจะต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต 2 ประการ ดังต่อไปนี้

1) องค์ประกอบในทิศทางแนวสัมผัสของเวกเตอร์ความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ต้องต่อเนื่องกันตลอดในวัสดุแม่เหล็กและในอากาศเพื่อที่จะสอดคล้องกับกฎของแอมป์แปร์ (ampere's law)

2) องค์ประกอบในทิศทางแนวตั้งฉากของเวกเตอร์ความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก $\vec{B}$ ต้องต่อเนื่องกันตลอดในวัสดุแม่เหล็กและในอากาศเพื่อที่จะสอดคล้องกับกฎของเกาส์ (Gauss's law)

เนื่องจากความแตกต่างของความซาบซึมได้ระหว่างวัสดุแม่เหล็กและอากาศมีมาก จึงเป็นสาเหตุให้ทิศทางของความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ และทิศทางของความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก $\vec{B}$ ที่บริเวณผิวรอยต่อจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว เพื่อที่จะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขต โดยทิศทางของความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ และความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก $\vec{B}$ ในวัสดุแม่เหล็กจะมีทิศทางในลักษณะลู่ขนานไปกับผิวรอยต่อ ขณะเดียวกันทิศทางของความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ในอากาศจะมีทิศทางลักษณะลู่ตั้งฉากกับผิวรอยต่อดังรูปที่ 2.2 a) แสดงลักษณะกลไกการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำวัสดุที่มีความซาบซึมได้สูง และมีรูปร่างเป็นทรงกระบอกกลม จะพบว่าปริมาณฟลักซ์แม่เหล็ก $\vec{B}$ จะหนาแน่นมากในบริเวณผิววัสดุ ขณะเดียวกันฟลักซ์แม่เหล็ก $\vec{B}$ ในบริเวณอื่นก็จะลดลง จึงเป็นสาเหตุให้ความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ภายในทรงกระบอกกลมลดลง กลไกการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่สามารถลดความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ได้โดยวัสดุที่มีความซาบซึมได้สูง จัดเป็นการปิดกั้นด้วยการเบี่ยงเบนฟลักซ์แม่เหล็ก

นอกจากวัสดุมีความซาบซึมได้สูงแล้ว การลดขนาดความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ยังขึ้นกับความหนาของวัสดุแม่เหล็กด้วย เนื่องจากวัสดุแม่เหล็กมีความหนามากขึ้นเท่าใดก็จะทำให้ปริมาณฟลักซ์แม่เหล็ก $\vec{B}$ ลู่เข้าไปในเนื้อวัสดุได้มากขึ้น จึงทำให้ความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ในบริเวณอากาศมีค่าลดน้อยลง

ข้อดีการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากตามกลไกนี้ คือ ปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำได้ดีกับวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่มีขนาดใหญ่และหนามาก

ข้อเสียการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำตามกลไกนี้ คือ ทำให้วัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีน้ำหนักมากและวัสดุมีราคาแพง

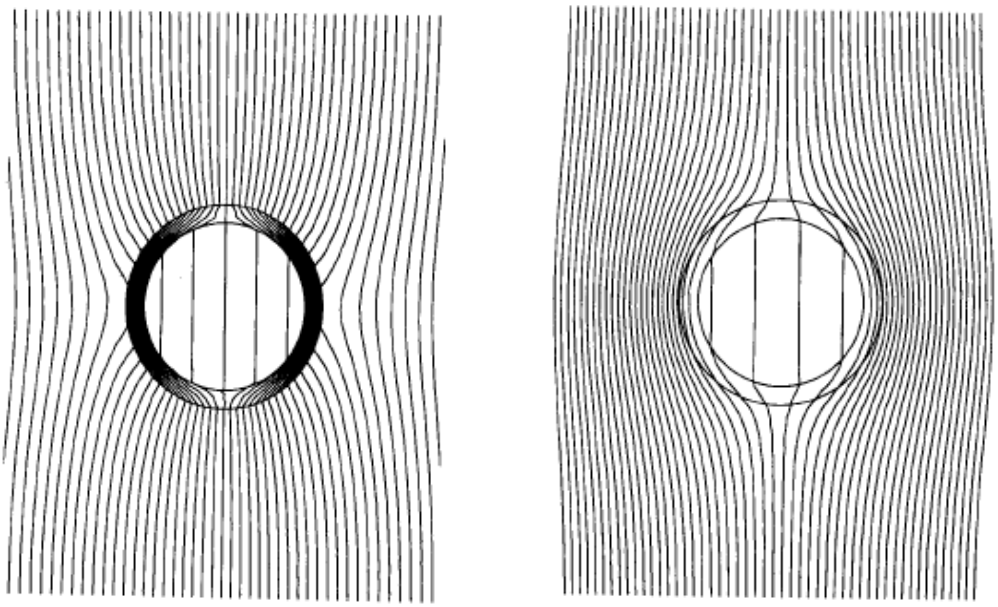
2.1.2 การปิดกั้นด้วยกระแสเหนี่ยวนำในตัวนำ (The induce current shielding mechanism)

การปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำตามกลไกนี้เกิดขึ้นกับวัสดุตัวนำ หรือวัสดุที่มีสภาพนำไฟฟ้าสูง (high conductivity : σ) อาทิเช่น เงิน (σ=6.1*10^7S/m), ทองแดง (σ=5.76*10^7S/m), อลูมิเนียม (σ=3.96*10^7S/m) เป็นต้น กลไกนี้จะเกิดขึ้นเมื่อวางวัสดุตัวนำลงในสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา จะทำให้เกิดการเหนี่ยวนำให้เกิดสนามไฟฟ้าขึ้นในวัสดุตัวนำ ทั้งนี้เป็นไปตามกฎของฟาราเดย์ (faraday's law) สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นในวัสดุตัวนำนี้จะทำให้เกิดกระแสไฟฟ้าไหลวนในผิวตัวนำ (eddy current) กระแสไหลวนนี้จะสร้างสนามแม่เหล็กขึ้นมาหักล้างกับสนามแม่เหล็กเดิม ทำให้สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำภายในบริเวณนั้นมีค่าลดลงดังรูปที่ 2-2 b)

แสดงลักษณะกลไกการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวัสดุที่มีสภาพนำไฟฟ้าสูงและมีรูปร่างทรงกระบอกกลม กลไกการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่สามารถลดความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ได้โดยใช้วัสดุที่มีสภาพนำไฟฟ้าสูงและเกิดขึ้นกับสนามแม่เหล็กที่มีการเปลี่ยนแปลง จัดเป็นการปิดกั้นด้วยการหักล้างสนามแม่เหล็ก

ข้อดีการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำตามกลไกนี้ คือ ปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำได้ดีกับวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่มีขนาดเล็ก

ข้อเสียการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำตามกลไกนี้ คือ ค่าสัมประสิทธิการสะท้อนและการดูดกลืนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นมีค่าน้อย [4]



a) การปิดกั้นด้วยการเบี่ยงเบนฟลักซ์แม่เหล็ก b) การปิดกั้นด้วยการหักล้างฟลักซ์แม่เหล็ก

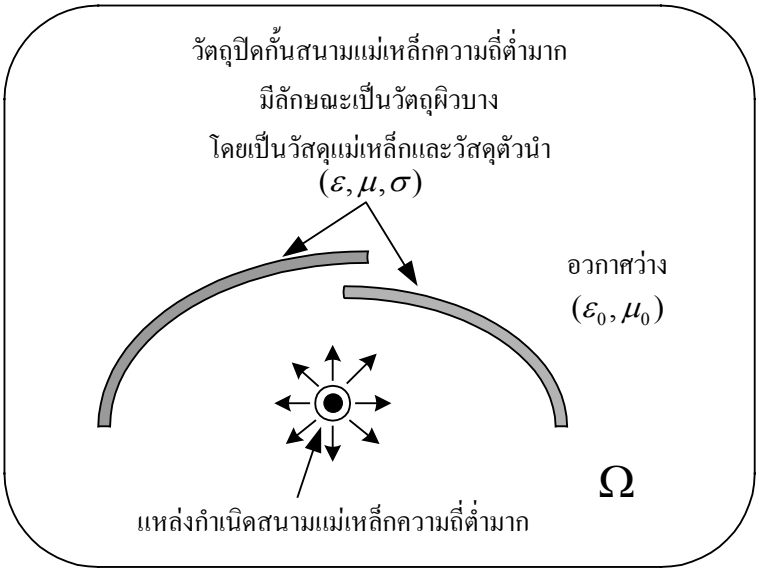
รูปที่ 2.2 การปิดกั้นฟลักซ์แม่เหล็กความถี่ต่ำ

2.2 การวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนท์

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์เป็นวิธีเชิงตัวเลขวิธีหนึ่ง ที่เกิดขึ้นจากการรวมวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์เข้าด้วยกัน เพื่อที่จะหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดขึ้นตลอดทั่วโดเมนปัญหาได้ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ใช้หาผลเฉลยบริเวณวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำและวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ใช้หาผลเฉลยบริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่ง โดยบริเวณขอบเขตของปัญหาหรือที่ว่างจะเป็นบริเวณที่มีการรวมวิธีทั้งสองเข้าด้วยกัน

2.2.1 สมการพื้นฐานการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำกรณีปัญหา 2 มิติ

การพิจารณาปัญหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในย่านความถี่ต่ำมาก $(f < 1000\,Hz)$ จัดว่าเป็นปัญหาสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอย่างหนึ่ง ซึ่งต้องเป็นไปตามสมการแมกซ์เวลล์ และลักษณะของปัญหาแสดงได้ดังรูปที่ 2-3 ซึ่งประกอบด้วยวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่ผิวบางวางอยู่บริเวณที่ว่าง และมีคุณสมบัติทางไฟฟ้า คือ สภาพยอม ε, ความซาบซึมได้ μ, สภาพนำไฟฟ้า σ บริเวณดังกล่าวจะมีแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำอยู่ด้วย ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\vec{J}_S$ และบริเวณที่ว่างจะมีคุณสมบัติทางไฟฟ้า คือ สภาพยอม ε_0, ความซาบซึมได้ μ_0



รูปที่ 2-3 แบบจำลองคณิตศาสตร์การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

เมื่อสนามแม่เหล็กไฟฟ้าเปลี่ยนแปลงตามเวลาแบบฟังก์ชันไซนูซอยด์ด้วยความถี่เชิงมุม ω ตามสมการแมกซ์เวลล์ ความเข้มสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ และความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ในตัวกลางที่พิจารณาต้องสอดคล้องกับสมการแมกซ์เวลล์ดังนี้ [8]

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} \tag{2.1}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_S + j\omega\varepsilon\vec{E} + \sigma\vec{E} \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{2.3}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_s \tag{2.4}$$

เมื่อ $\vec{E}$ = ความเข้มสนามไฟฟ้า (electric field strength)

$\vec{H}$ = ความเข้มสนามแม่เหล็ก (magnetic field strength)

$\vec{B}$ = ความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก (magnetic flux density)

$\vec{D}$ = ความหนาแน่นฟลักซ์ไฟฟ้า (electric flux density)

μ = ความซาบซึมได้ (permeability)

ε = สภาพยอม (permittivity)

σ = สภาพนำไฟฟ้า (conductivity)

$\vec{J}_S$ = ความหนาแน่นกระแส (current density) ของแหล่งกำเนิด

ρ_s = ความหนาแน่นประจุไฟฟ้าของแหล่งกำเนิด

โดยที่ $\nabla \cdot \vec{J}_s = -j\omega\rho_s$

เมื่อจัดสมการแมกซ์เวลล์ในสมการที่ (2.1)-(2.4) ให้อยู่ในรูปสนามแม่เหล็กอย่างเดียว โดยการหาเคิร์ลของสมการที่ (2.2)

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla \times \vec{J}_S + j\omega\varepsilon\nabla \times \vec{E} + \sigma\nabla \times \vec{E} \qquad (2.5)$$

แทนสมการ (2.1) ลงในสมการ (2.5) ผลที่ได้คือ สมการในรูปของสนามแม่เหล็กแต่อย่างเดียวดังนี้

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla \times \vec{J}_S + j\omega^2\varepsilon\mu\vec{H} - j\omega\mu\sigma\vec{H} \qquad (2.6)$$

ในกรณีที่พิจารณาความถี่เชิงมุม ω อยู่ในช่วงความถี่ต่ำ ค่า $\omega^2\varepsilon\mu$ จะมีค่าน้อยมาก สามารถที่จะละการพิจารณาเทอมกระแสกระจัด (displacement current) ที่เกิดขึ้นในที่ว่างได้ ดังนั้นสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นในช่วงความถี่นี้จึงเป็นอิสระต่อกัน ในบริเวณที่ว่างและมีลักษณะเป็นไปตามอำนาจของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าที่เกิดขึ้นนี้จะเป็นสนามแม่เหล็กเป็นส่วนใหญ่

การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดขึ้นนี้ จะดำเนินการโดยใช้ศักย์เวกเตอร์แม่เหล็ก A (magnetic vector potential, A) เริ่มต้นจากความสัมพันธ์ของ $\vec{B}$ ตามสมการ (2.3) ดังนี้

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

ตามนิพจน์เวกเตอร์ $\nabla \cdot \nabla \times A = 0$ เสมอ จึงกล่าวได้ว่า

$$\vec{B} = \nabla \times A \qquad (2.7)$$

โดยที่ A คือ เวกเตอร์ใดๆ

เมื่อแทนสมการที่ (2.7) ลงในสมการที่ (2.1) จะได้ความสัมพันธ์ของสมการดังนี้

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \nabla \times A = -\nabla \times j\omega A \qquad (2.8)$$

และ
$$\nabla \times (\vec{E} + j\omega A) = 0 \qquad (2.9)$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla \times \nabla \phi = 0$ ดังนั้นสมการที่ (2.9) จะได้ว่า

$$\vec{E} + j\omega A = -\nabla \phi \qquad (2.10)$$

และเมื่อแทน $\vec{E}$ จากสมการที่ (2.10) ลงในสมการที่ (2.2) จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times A = \vec{J}_S - j\omega\sigma A \qquad (2.11)$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla \nabla \cdot \vec{A} - \nabla^2 \vec{A}$ ทำให้สามารถแสดงสมการที่ (2.12) ได้เป็น

$$\frac{1}{\mu} \nabla \nabla \cdot A - \frac{1}{\mu} \nabla^2 A = \vec{J}_S - j\omega\sigma A \qquad (2.12)$$

และจาก $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ดังนั้นสมการที่ได้รับ คือ

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A - j\omega\sigma A = -\vec{J}_S \qquad (2.13)$$

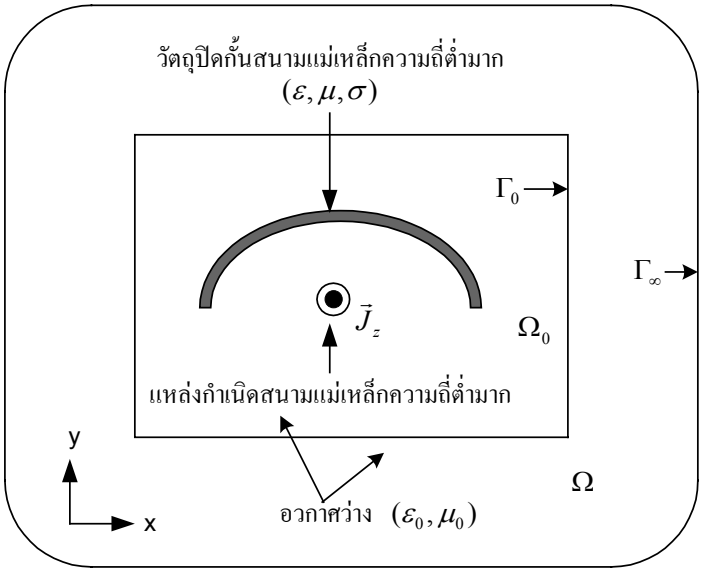
และมีเงื่อนไขขอบเขตระหว่างตัวกลางเป็น

$$\left.\begin{aligned} n \cdot \vec{B} &= continue\ function \\ n \times \vec{H} &= continue\ function \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

สมการที่ (2.13) นี้เรียกว่า “สมการสเกลาร์เฮลม์โฮมส์” (scalar helmholtz equation) ซึ่งจะเป็นสมการเริ่มต้นที่จะนำมาใช้วิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

2.2.2 การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำกรณีปัญหา 2 มิติ

ถ้ากำหนดให้วัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำวางอยู่ในทิศทางตามแนวแกน z บริเวณที่ว่าง ซึ่งมีคุณสมบัติทางไฟฟ้า คือ ความซาบซึม μ, สภาพยอม ε, สภาพนำไฟฟ้า σ และแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำอยู่ในทิศทางตามแนวแกน z ($\vec{J}_s = J_z\vec{a}_z$) บริเวณที่ว่างมีคุณสมบัติทางไฟฟ้า คือ สภาพยอม ε_0, ความซาบซึมได้ μ_0 ดังรูปที่ 2-4



รูปที่ 2-4 แบบจำลองคณิตศาสตร์การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำกรณีปัญหา 2 มิติ

เนื่องจากในงานวิจัยนี้พิจารณาให้กระแสที่เป็นแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ อยู่ในทิศทางตามแนวแกน z ยังผลให้สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดขึ้นอยู่บนระนาบ xy เท่านั้น ซึ่งทำให้ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่พิจารณากรณีนี้จะเป็นปัญหา 2 มิติ โดยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำตามแนวแกน z จะไม่เปลี่ยนแปลง หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ดังนั้นสมการการหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำในระบบพิกัดฉาก (rectangular coordinate system) กรณีปัญหา 2 มิติแสดงได้ดังนี้

$$-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + j\omega\sigma A_z = J_z \qquad (2.15)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขตระหว่างตัวกลางเป็น

$$\left.\begin{aligned} A_z &= p && on\ \Gamma_1 \\ \frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial n} + \beta A_z &= q && on\ \Gamma_2 \end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

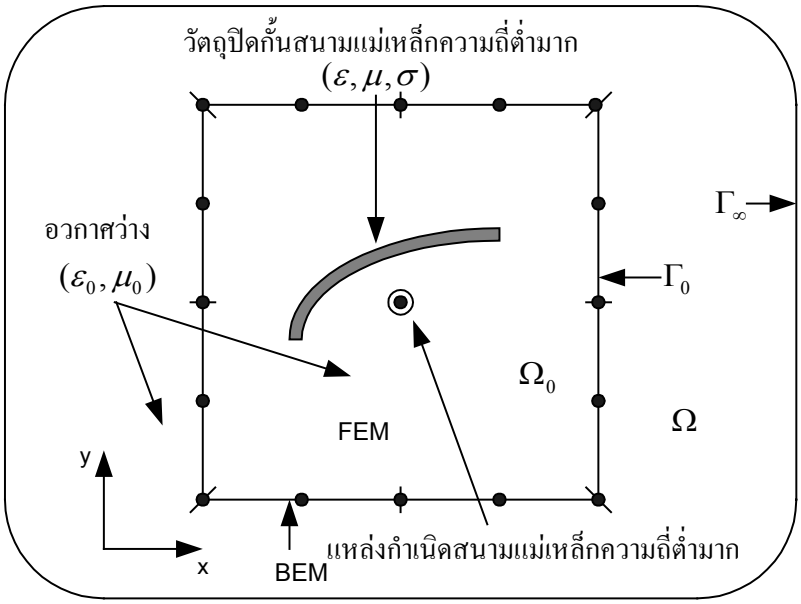
โดยที่ $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$

Γ_1 คือ เงื่อนไขขอบเขตแบบ Dirichlet

Γ_2 คือ เงื่อนไขขอบเขตแบบ Neumann

2.2.3 วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

จากที่ได้กล่าวถึงข้อดีของการนำวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์มาหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะใช้หาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำบริเวณรอบวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ และวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ใช้หาผลเฉลยบริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่งดังรูปที่ 2-5



รูปที่ 2-5 แนวคิดของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

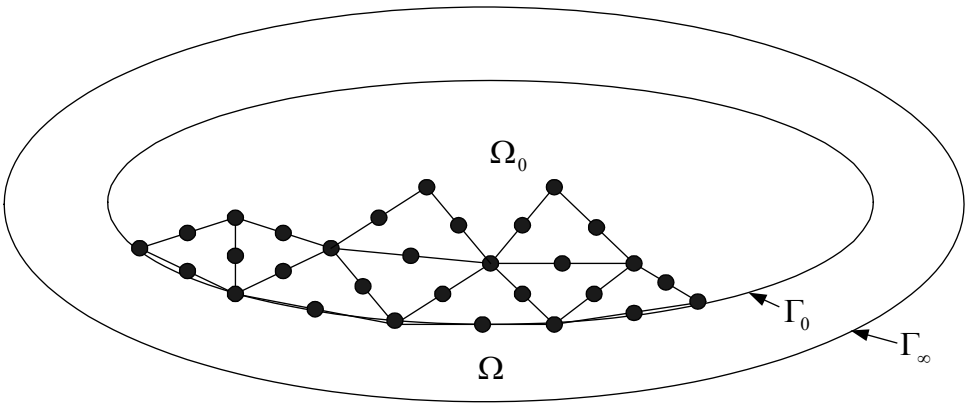
การวิเคราะห์หาผลเฉลยจะเริ่มจากสมการที่ (2.15) และสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำจะสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตระหว่างตัวกลางตามสมการที่ (2.16) การหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าหรือ A_z ในสมการที่ (2.15) สามารถทำได้โดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighted residual method) และเลือก

ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักตามแบบวิธีกาเลอกิน (galerkin method) ซึ่งชุดสมการที่ได้รับในรูปสมการเมทริกซ์ คือ

$$([S]+[T])[A_z]+[D][\frac{\partial A_z}{\partial n}] = J_z[B] \tag{2.17}$$

โดยแต่ละเมทริกซ์มีค่าดังนี้

$$S_{ij} = \frac{1}{\mu}\iint_{\Omega_0}(\nabla\Phi_i)\cdot(\nabla\Phi_j)dxdy$$
$$T_{ij} = j\omega\sigma\iint_{\Omega_0}\Phi_i\Phi_j\,dxdy$$
$$D_{ij} = -\frac{1}{\mu}\oint_{\Gamma}\Phi_j dl$$
$$B_{ij} = \iint_{e}\Phi_j dxdy \tag{2.18}$$



รูปที่ 2-6 ตำแหน่งตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

พิจารณาสมการที่ (2.17) จะพบว่ามีตัวแปรที่ไม่ทราบค่าอยู่ 2 ตัวแปร คือ A_z และ $\frac{\partial A_z}{\partial n}$ โดย A_z จะเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบที่อยู่ภายใน Ω_0 ตามรูปที่ 2-6 ซึ่งหาได้จากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ และ $\frac{\partial A_z}{\partial n}$ คือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าบน Γ_0 หาได้จากวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ ดังนั้นการหาความสัมพันธ์ของสมการที่ (2.17) ให้อยู่ในรูปของตัวแปรที่ไม่ทราบค่า A_z สามารถทำได้โดยความสัมพันธ์ตามสมการวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ คือ

$$[H][A_z]=[G]\left[\frac{\partial A_z}{\partial n}\right] \tag{2.19}$$

จัดสมการที่ (2.19) ให้อยู่ในรูปตัวแปรที่ไม่ทราบค่า $\frac{\partial A_z}{\partial n}$ ได้ดังนี้

$$[G]^{-1}[H][A_z]=\left[\frac{\partial A_z}{\partial n}\right] \tag{2.20}$$

แทนสมการที่ (2.20) ลงในสมการที่ (2.17) จะได้ความสัมพันธ์สมการดังนี้

$$([S]+[T])[A_z]+[D][G]^{-1}[H][A_z]=J_z[B] \tag{2.21}$$

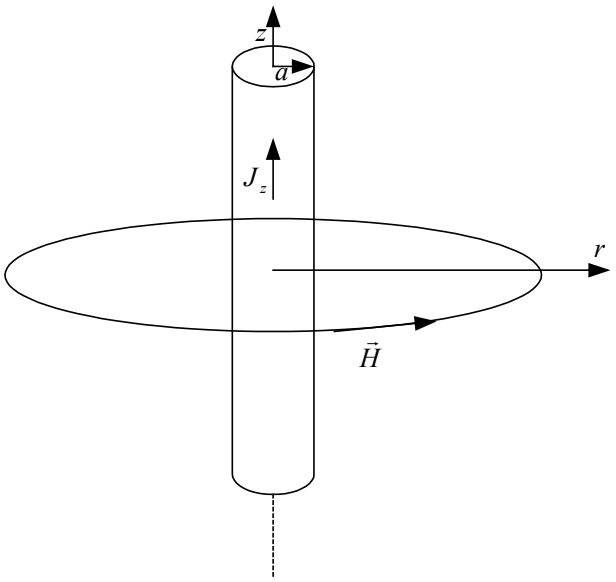
สมการที่ (2.21) จะเป็นสมการที่ใช้คำนวณหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ ซึ่งจะทำให้ทราบผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดขึ้นตลอดโดเมนปัญหา

2.3 ตัวอย่างการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

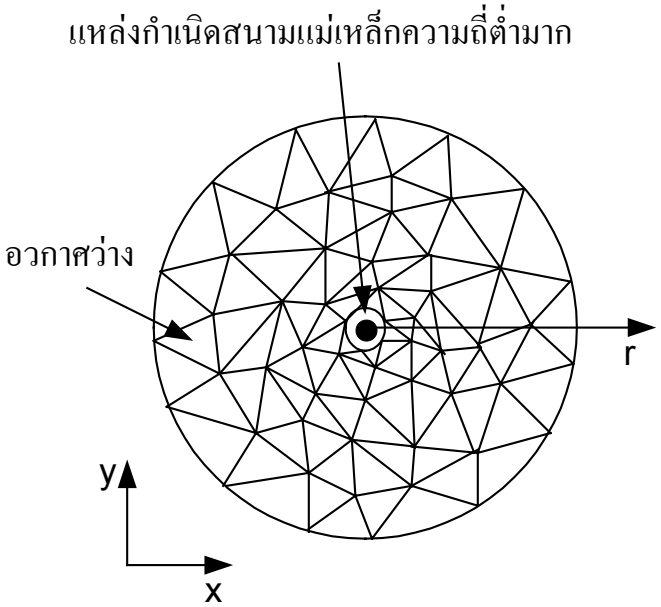
ตัวอย่างกรณีศึกษาการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ ที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ (line source) ด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

จุดประสงค์ของตัวอย่างนี้ คือ เป็นการทดสอบความถูกต้องของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ ในการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ โดยเทียบผลการคำนวณกับวิธีเชิงวิเคราะห์ (กฎของแอมแปร์) และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

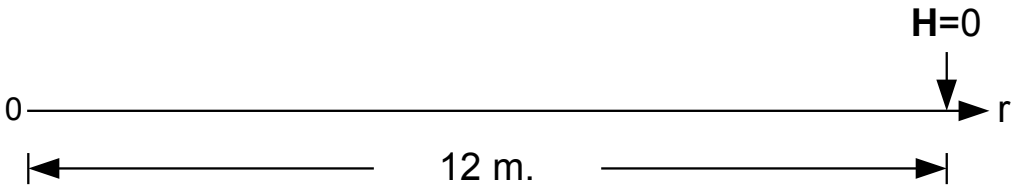
ลักษณะแบบจำลองคณิตศาสตร์แสดงได้ดังรูปที่ 2-7 กำหนดให้แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีลักษณะเป็นเส้น กระแสวางอยู่ในทิศทางแนวแกน z มีความหนาแน่นกระแสเท่ากับ 1 A/m^2 และรัศมี a เท่ากับ 5 เซนติเมตร จำนวนอีลีเมนต์ของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยเท่ากับ 920 อีลีเมนต์ ระยะ r เท่ากับ 12 เมตร ดังรูปที่ 2-9 a) จำนวนอีลีเมนต์ของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยเท่ากับ 638 อีลีเมนต์ ระยะ r เท่ากับ 4 เมตร ดังรูปที่ 2-9 b)



รูปที่ 2-7 แบบจำลองการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ
ที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์



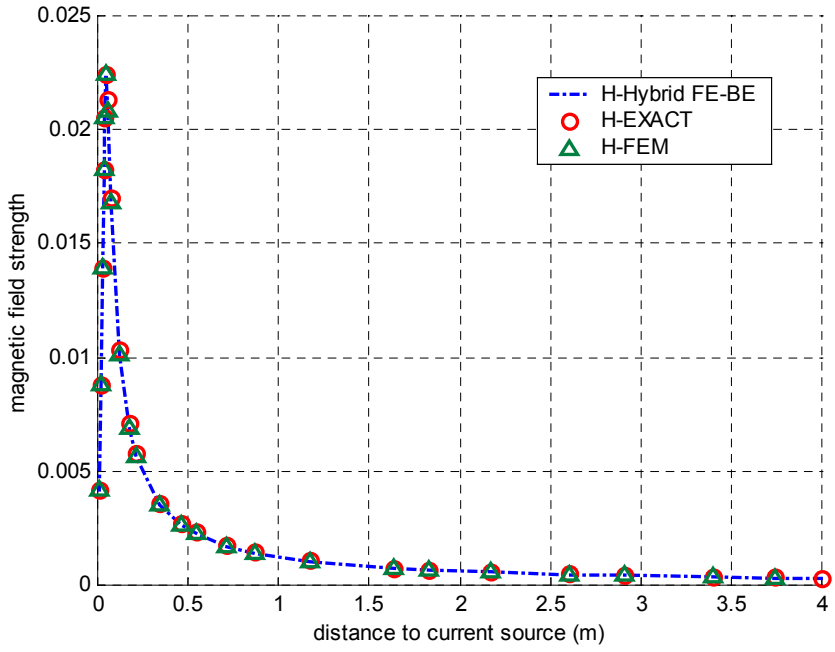
รูปที่ 2-8 การแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม
กรณีที่สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์



a) ระยะการแบ่งอีลีเมนต์ของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

b) ระยะการแบ่งอีลีเมนต์ของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

รูปที่ 2-9 เปรียบเทียบระยะการแบ่งอีลีเมนต์ระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์
และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์



รูปที่ 2-10 เปรียบเทียบผลการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำระหว่างวิธีไฟไนต์
อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์กับวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

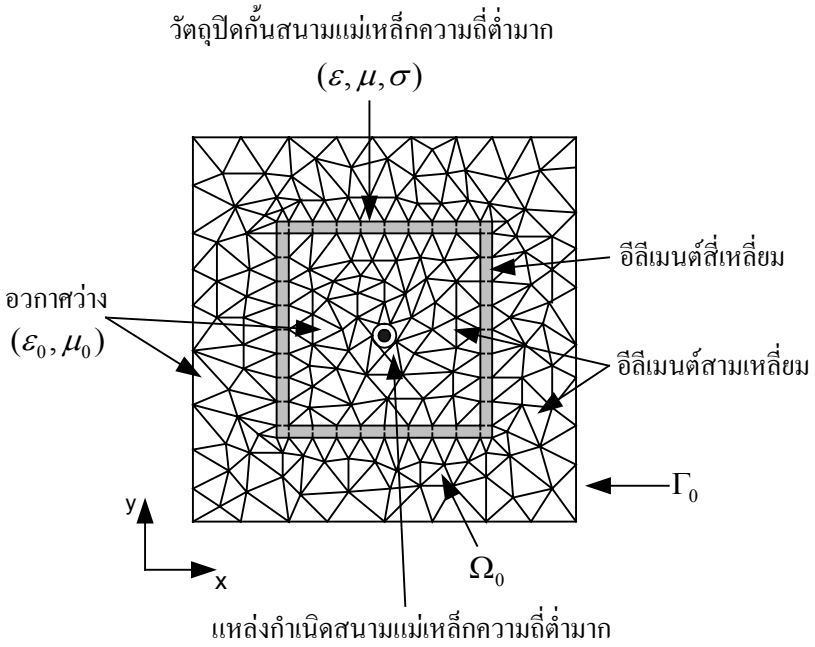
จากรูปที่ 2-10 เป็นผลการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ด้วยการประมาณผลเฉลยคำตอบด้วยฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง และวิธีเชิงวิเคราะห์ ผลการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่ได้จากวิธีทั้งสามจะมีค่าตรงกัน ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ร่วมกับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพ มีความแม่นตรงสูง เหมาะสมที่จะนำมาวิเคราะห์ปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ และเมื่อเปรียบเทียบระยะและจำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยระหว่างวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ร่วมกับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์แล้ว จะพบว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ร่วมกับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์จะใช้ระยะและจำนวนการแบ่งอีลีเมนต์ที่น้อยกว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ กล่าวคือ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ร่วมกับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์จะแบ่งระยะการหาผลเฉลยเพียง 4 เมตร ($r = 4$ m.) และจำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยเท่ากับ 638 อีลีเมนต์ แต่วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะต้องแบ่งระยะการหาผลเฉลยถึง 12 เมตร ($r = 12$ m.) และจำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยเท่ากับ 920 อีลีเมนต์ จะเห็นได้ว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์จะใช้ระยะการหาผลเฉลยและจำนวนอีลีเมนต์ที่น้อยกว่าวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ถึง 8 เมตรและ 282 อีลีเมนต์ตามลำดับ

บทที่ 3
การใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์หาผลเฉลยปัญหาสนามแม่เหล็ก

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ (finite element method : FEM) เป็นวิธีเชิงตัวเลข หรือวิธีการหาคำตอบโดยประมาณ ที่มีประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยของปัญหาที่มีลักษณะรูปร่างใดๆ เนื่องจากการหาผลเฉลยตามวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์นั้น ต้องแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาทั้งหมดออกเป็นโดเมนย่อยๆ (subdomains)หรือที่เรียกว่า อีลีเมนต์ (elements) ก่อน แล้วจากนั้นจึงสร้างสมการของแต่ละอีลีเมนต์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้นๆ อีลีเมนต์ต่างๆเหล่านี้จะเชื่อมต่อกันที่จุดโนด (node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะคำนวณหาค่าของตัวแปรตามที่ต้องการ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะให้ผลเฉลยในระยะเวลาอันสั้น เนื่องจากเมทริกซ์สุดท้ายของระบบสมการจะเป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยศูนย์เป็นส่วนใหญ่ (sparse matrix) วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มีความเหมาะสมที่จะนำมาใช้หาผลเฉลยปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ เนื่องจากมีความยืดหยุ่นในการประยุกต์ใช้งานกับวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่มีรูปร่างใดๆ ได้ดี

3.1 การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

การผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดขึ้นตามสมการที่ (2.15) นั้น สามารถทำได้โดยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ตามขั้นตอนอันดับแรกของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ คือ การแบ่งบริเวณโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาทั้งหมดออกเป็นโดเมนย่อยๆ หรือที่เรียกว่าอีลีเมนต์ก่อน ซึ่งอีลีเมนต์เหล่านี้จะมีลักษณะเป็นเส้น พื้นที่ หรือปริมาตร ขึ้นอยู่กับปัญหาที่พิจารณาเป็นหนึ่งมิติ สองมิติ หรือสามมิติ โดยแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องรอบวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากทั้งหมด รวมทั้งแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยมเล็กๆ ซึ่งบริเวณดังกล่าว คือ บริเวณที่ว่าง และบริเวณเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำจะถูกแบ่งออกเป็นอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ ตามที่กล่าวแล้ว ดังรูปที่ 3-1



รูปที่ 3-1 ลักษณะการแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆ

เมื่อแบ่งบริเวณ Ω_0 ของโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆเรียบร้อยแล้ว จึงทำการประมาณผลเฉลยคำตอบภายในแต่ละอีลีเมนต์ หรือที่เรียกว่า ฟังก์ชันทดลอง (trial function) ขึ้น ซึ่งจะถูกสร้างขึ้นในรูปของฟังก์ชันอย่างง่าย เช่น ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ที่ประกอบด้วยฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) หรือฟังก์ชันฐาน (basis function) กับตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของแต่ละอีลีเมนต์ ดังสมการที่ (3.1)

$$A_z^e = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x, y) A_{zi} \tag{3.1}$$

โดยที่ $\Phi_i(x, y)$ คือ ฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) โดยฟังก์ชันดังกล่าวแปรตามพิกัด xy

A_{zi} คือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่มีอยู่ทั้งหมด n ตัว

การสร้างชุดสมการเพื่อหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (A_z) สามารถทำได้โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง และเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักตามแบบวิธีกาเลอกิน กล่าวคือ เศษที่เกิดจากการที่แทนฟังก์ชันโดยประมาณลงในสมการปัญหาซึ่งปกติต้องไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นสมการที่ (2.15) เศษตกค้างคือ

$$R = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + j\omega\sigma A_z - J_z \tag{3.2}$$

การถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง คือ การคูณกับเศษตกค้างด้วยฟังก์ชันที่เรียกว่า ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก และบังคับให้การอินทิเกรตผลคูณนั้นตลอด Ω_0 มีค่าเท่ากับศูนย์ ผลที่ได้ คือ ชุดสมการที่มีจำนวนเท่ากับตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

$$\iint_{\Omega_0}[-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+j\omega\sigma A_z - J_z]\Phi_j dxdy = 0 \qquad (3.3)$$

โดยที่ฟังก์ชัน $\Phi_j, (j = 1,2,3,..,N)$ เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก ซึ่งเป็นฟังก์ชันชนิดเดียวกับฟังก์ชันรูปร่าง ทั้งนี้เป็นไปตามวิธีกาเลอกิน

กำหนดให้ $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}=\nabla^2 A_z$ และจากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla^2 A = \nabla\cdot\nabla A$ ดังนั้นจัดสมการที่ (3.3) ได้ใหม่ ดังนี้

$$-\iint_{\Omega_0}\frac{1}{\mu}(\Phi_j \nabla\cdot\nabla A_z)dxdy+\iint_{\Omega_0} j\omega\sigma A_z\Phi_j dxdy=\iint_{\Omega_0}\Phi_j J_z dxdy \qquad (3.4)$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla\cdot(a\vec{B}) = a\nabla\cdot\vec{B}+\vec{B}\nabla\cdot a$ เทียบเอกลักษณ์เวกเตอร์กับพจน์แรกของสมการที่ (3.4) ได้ $a=\Phi_j$ และ $\vec{B}=\nabla A_z$ ดังนั้นจัดสมการที่ (3.4) ได้ดังนี้

$$-\iint_{\Omega_0}\frac{1}{\mu}\nabla\cdot(\Phi_j\nabla A_z)dxdy+\iint_{\Omega_0}\frac{1}{\mu}(\nabla A_z)\cdot(\nabla\Phi_j)dxdy+\iint_{\Omega_0} j\omega\sigma A_z\Phi_j dxdy=\iint_{\Omega_0}\Phi_j J_z dxdy \qquad (3.5)$$

จากทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์บนระนาบ 2 มิติที่ว่า

$$\iint\nabla\cdot\vec{A}dxdy=\oint\vec{A}\cdot\vec{n}dl \qquad (3.6)$$

ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์กับพจน์แรกของสมการที่ (3.5) ดังนี้

$$-\oint_{\Gamma}(\frac{1}{\mu}\Phi_j\nabla A_z)\cdot\vec{n}dl+\iint_{\Omega_0}\frac{1}{\mu}(\nabla A_z)\cdot(\nabla\Phi_j)dxdy+\iint_{\Omega_0} j\omega\sigma A_z\Phi_j dxdy=\iint_{\Omega_0}\Phi_j J_z dxdy \qquad (3.7)$$

โดยที่ n คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศพุ่งออกและตั้งฉากกับผิวที่บริเวณขอบ พิจารณาเทอม $(\Phi_j \nabla A_z)\cdot \hat{n}$ ซึ่งก็คือ $(\hat{n}\cdot\nabla A_z)\Phi_j$ ดังนั้น

$$(\hat{n}\cdot\nabla A_z)\Phi_j = \Phi_j \frac{\partial A_z}{\partial n} \tag{3.8}$$

แทนสมการที่ (3.8) และสมการที่ (3.1) ลงในสมการที่ (3.7) จะได้ความสัมพันธ์ของสมการดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n}[\iint_{\Omega_0}\frac{1}{\mu}(\nabla\Phi_i)\cdot(\nabla\Phi_j)dxdy + j\omega\sigma\iint_{\Omega_0}\Phi_i\Phi_j dxdy\,]A_{zi} - \sum_{i=1}^{n}\oint(\frac{1}{\mu}\Phi_j\frac{\partial A_z}{\partial n})dl = \iint_{\Omega_0}\Phi_j J_z dxdy \tag{3.9}$$

จากการที่แบ่งโดเมน Ω_0 ออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆ ดังนั้นการอินทิเกรตตลอดโดเมน Ω_0 จะเท่ากับผลรวมของการอินทิเกรตในแต่ละอีลีเมนต์ นั่นคือ

$$\sum_{e=1}^{Ne}\{\sum_{i=1}^{n}[\iint_{\Omega_0}\frac{1}{\mu}(\nabla\Phi_i)\cdot(\nabla\Phi_j)dxdy + j\omega\sigma\iint_{\Omega_0}\Phi_i\Phi_j dxdy\,]A_{zi} - \sum_{i=1}^{n}(\oint_{\Gamma}\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial n})\Phi_j dl\} = \iint_{e}\Phi_j J_z dxdy \tag{3.10}$$

หรือในรูปสมการเมทริกซ์

$$([S]+[T])[A_z]+[D][\frac{\partial A_z}{\partial n}] = J_z[B] \tag{3.11}$$

โดยที่ $S_{ij} = \frac{1}{\mu}\iint_{\Omega_0}(\nabla\Phi_i)\cdot(\nabla\Phi_j)dxdy$

$T_{ij} = j\omega\sigma\iint_{\Omega_0}\Phi_i\Phi_j\,dxdy$

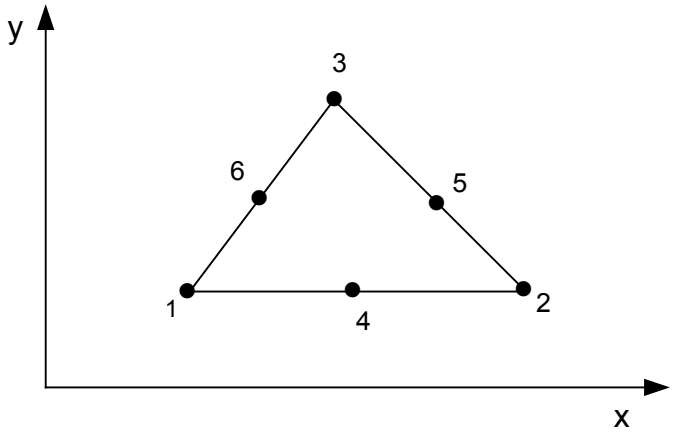
$D_{ij} = -\frac{1}{\mu}\oint_{\Gamma}\Phi_j dl$

$B_{ij} = \iint_{e}\Phi_j dxdy$ (3.12)

สมการที่ (3.11) และสมการที่ (3.12) ก็คือสมการที่ (2.17) และสมการที่ (2.18) ในบทที่ 2. ตามลำดับ สำหรับลำดับต่อไปจะกล่าวถึงอีลีเมนต์สามเหลี่ยมและอีลีเมนต์สี่เหลี่ยม ซึ่งเป็นอีลีเมนต์ที่นำมาใช้หาผลเฉลยในงานวิจัยนี้

3.2 อีลีเมนต์สามเหลี่ยม (triangular element)

การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ จะต้องแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาทั้งหมดออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆ ลักษณะของอีลีเมนต์ที่แบ่งบริเวณรอบวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำนี้ จะเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยมเล็กๆ ดังรูปที่ 3-2 [9]



รูปที่ 3-2 อีลีเมนต์สามเหลี่ยมและตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

จากรูปที่ 3-2 แสดงลักษณะอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ประกอบด้วยตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ในหนึ่งอีลีเมนต์สามเหลี่ยมจำนวนทั้งสิ้น 6 ตัวแปร ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเหล่านี้จะถูกประมาณที่ตำแหน่งจุดโนดต่างๆ ดังรูปที่ 3.2 โดยหมายเลขโนดที่ 1,2,3 อยู่ที่จุดยอดของสามเหลี่ยม และหมายเลขโนดที่ 4,5,6 จะอยู่ที่จุดกึ่งกลางของแต่ละด้านสามเหลี่ยม ลักษณะอีลีเมนต์สามเหลี่ยมดังกล่าวนี้จะเป็นการประมาณตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในลักษณะ “ฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง” (quadratic element) ค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเหล่านี้จะถูกประมาณได้ดังนี้

$$\phi^e = a^e + b^e x + c^e y + d^e x^2 + e^e xy + f^e y^2 \qquad (3.13)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $a^e, b^e, ..., f^e$ สามารถหาได้จากโนดทั้งหกและเมื่อแทนสมการ (3.13) ลงในสมการที่ (3.1) จะประมาณ $A_z^e(x,y)$ ได้ดังนี้

$$A_z^e(x,y) = \sum_{i=1}^{6} \Phi_i(x,y) A_{zi} \qquad (3.14)$$

ในที่นี้ $\Phi_i(x,y)$ คือ ฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองในรูปฟังก์ชันสเกลาร์ โดยฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองทั้งหกในรูปฟังก์ชันสเกลาร์ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= L_1(2L_1-1)\\ \Phi_2 &= L_2(2L_2-1)\\ \Phi_3 &= L_3(2L_3-1)\\ \Phi_4 &= 4L_1L_2\\ \Phi_5 &= 4L_2L_3\\ \Phi_6 &= 4L_3L_1\end{aligned} \tag{3.15}$$

ซึ่ง L_1, L_2, L_3 คือ พิกัดเชิงพื้นที่ (area coordinate) ซึ่งมีค่าดังนี้

$$L_k(x,y) = \frac{1}{2\Delta^e}(a_k^e + b_k^e x + c_k^e y) \quad k = 1,2,3 \tag{3.16}$$

และ
$$a_k = x_l y_m - x_m y_l \tag{3.17}$$
$$b_k = y_l - y_m \tag{3.18}$$
$$c_k = x_m - x_l \tag{3.19}$$

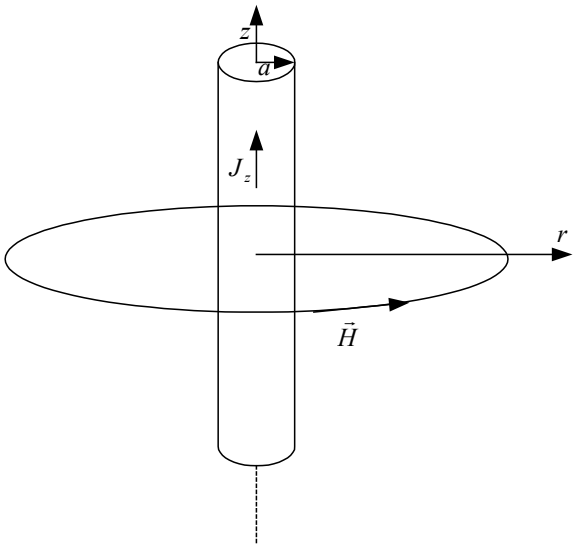
โดยที่ (k,l,m) จะมีลักษณะการเรียงลำดับแบบโมดูโล 3 คือ $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ และ $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ คือ พิกัดของโนด 1, 2 และ 3 ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม และ Δ^e คือพื้นที่ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม สามารถหาได้จากการหาดีเทอร์มิแนนต์ของพิกัดที่โนดทั้งสามของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ดังนี้

$$\Delta^e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix} \tag{3.20}$$

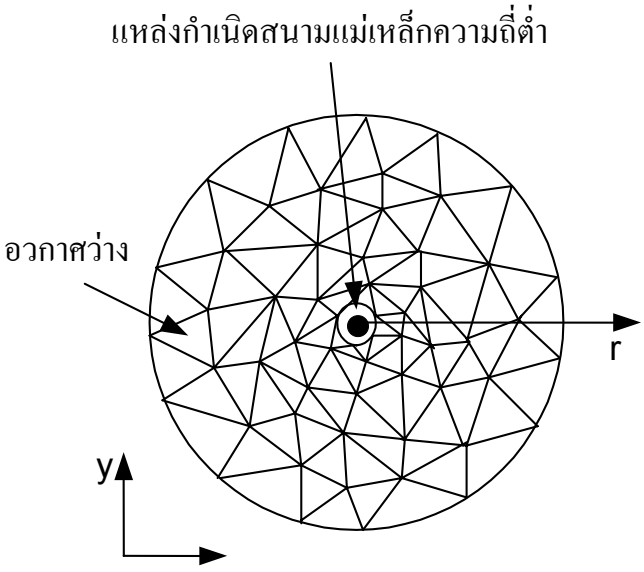
3.3 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

จุดประสงค์ตัวอย่างนี้จะเป็นการทดสอบความถูกต้องของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในการนำมาหาผลเฉลยความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดขึ้น โดยเทียบกับผลเฉลยจากวิธีเชิงวิเคราะห์ คือ กฎของแอมป์แปร์

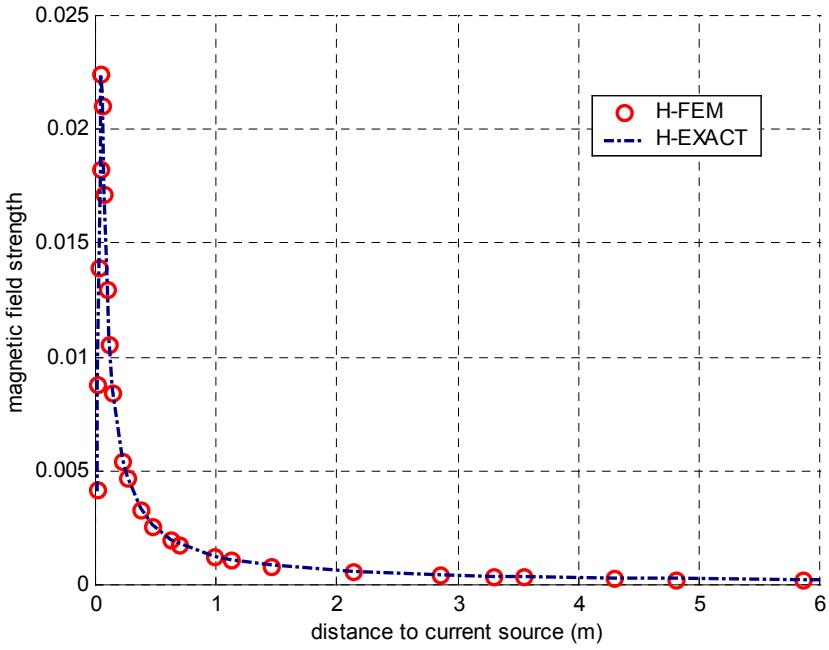
ลักษณะแบบจำลองคณิตศาสตร์ในการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ ในที่ว่างที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์แสดงได้ดังรูปที่ 3-3 กำหนดให้แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำวางอยู่ในทิศทางตามแนวแกน z มีขนาดเท่ากับ 1 A/m^2, รัศมี a เท่ากับ 0.05 เมตร, รัศมี r เท่ากับ 50 เมตร และจำนวนอีลีเมนต์ที่แบ่งเท่ากับ 1216 อีลีเมนต์ ดังรูปที่ 3-4



รูปที่ 3-3 การคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์



รูปที่ 3-4 ตัวอย่างการแบ่งโดเมนการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ
ที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม



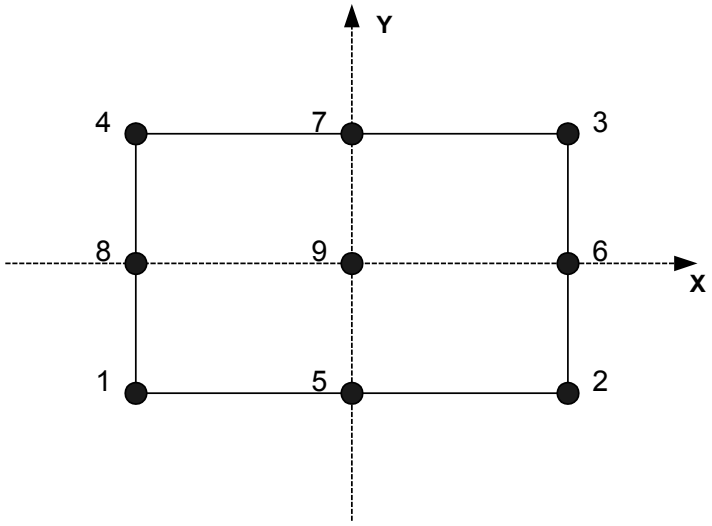
รูปที่ 3-5 เปรียบเทียบผลเฉลยความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ระหว่างวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

จากรูปที่ 3-5 เป็นผลการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ โดยเทียบผลการคำนวณระหว่างวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่คำนวณจากวิธีทั้งสองจะมีค่าตรงกัน ความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่คำนวณได้จะมีลักษณะ ดังนี้ ความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำในตอนเริ่มต้นจะมีค่าเพิ่มมากขึ้นจนกระทั่งมีค่าสูงสุดที่ 0.05 เมตร ซึ่งบริเวณนี้ คือ แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ หลังจากนั้นความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่คำนวณได้จะมีค่าลดลง เมื่อห่างจากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากขึ้น และพบว่าความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่คำนวณได้ ตั้งแต่ 2 เมตรขึ้นไปจะมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก จนถือได้ว่าคงที่

3.4 อีลีเมนต์สี่เหลี่ยม (rectangular element)

การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ โดยการแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องในเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่มีลักษณะผิวบางออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเล็กๆ ยังผลให้อีลีเมนต์โดยรอบวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำและในเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีขนาดเล็กและมีจำนวนมาก จึงเสนอการแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องในเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่

เหล็กความถี่ต่ำออกเป็นอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ แทนอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ลักษณะของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสามารถที่จะแสดงได้ดังรูปที่ 3-6



รูปที่ 3-6 อีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าและตัวแปรที่ไม่ทราบ

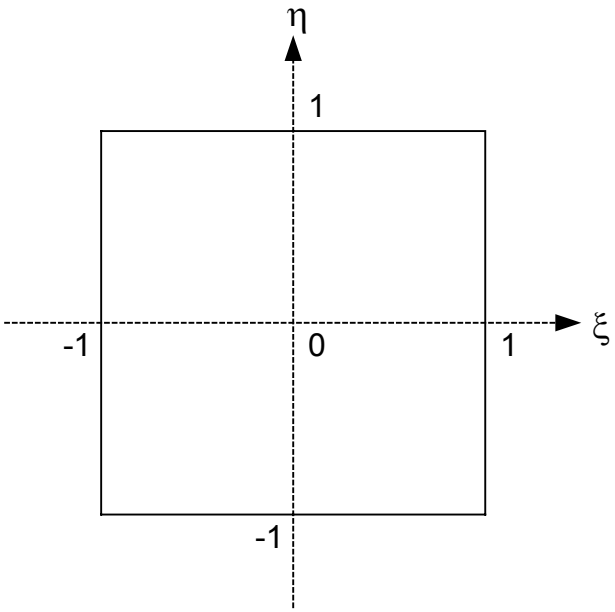
จากรูปที่ 3-6 แสดงลักษณะอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้า ประกอบด้วยตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในหนึ่งอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าจำนวนทั้งสิ้น 9 ตัวแปร ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเหล่านี้จะถูกประมาณที่ตำแหน่งโนดต่างๆ บนอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมดังรูป โดยหมายเลขโนดที่ 1, 2, 3, 4 จะอยู่ที่มุมของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าและหมายเลขโนดที่ 5, 6, 7, 8 จะอยู่ที่จุดกึ่งกลางของแต่ละด้านของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยม ส่วนหมายเลขโนดที่ 9 จะอยู่ที่จุดกึ่งกลางของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมดังรูปที่ 3-6 สำหรับการประมาณผลเฉลยคำตอบภายในแต่ละอีลีเมนต์ จะถูกประมาณได้ดังนี้

$$A_z^e(x,y) = \sum_{i=1}^{9} \Phi_i(\xi,\eta) A_{zi} \qquad (3.21)$$

โดยที่ $\Phi_i(\xi,\eta)$ คือ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัด (ξ,η)

A_{zi} คือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่มีอยู่ 9 ตัว

และ พิกัด ξ, η มีค่าอยู่ในช่วงระหว่าง $-1 < \xi < 1$ และ $-1 < \eta < 1$ ดังนั้นลักษณะอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัด (ξ,η) แสดงได้ดังนี้



รูปที่ 3-7 อีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัด (ξ,η)

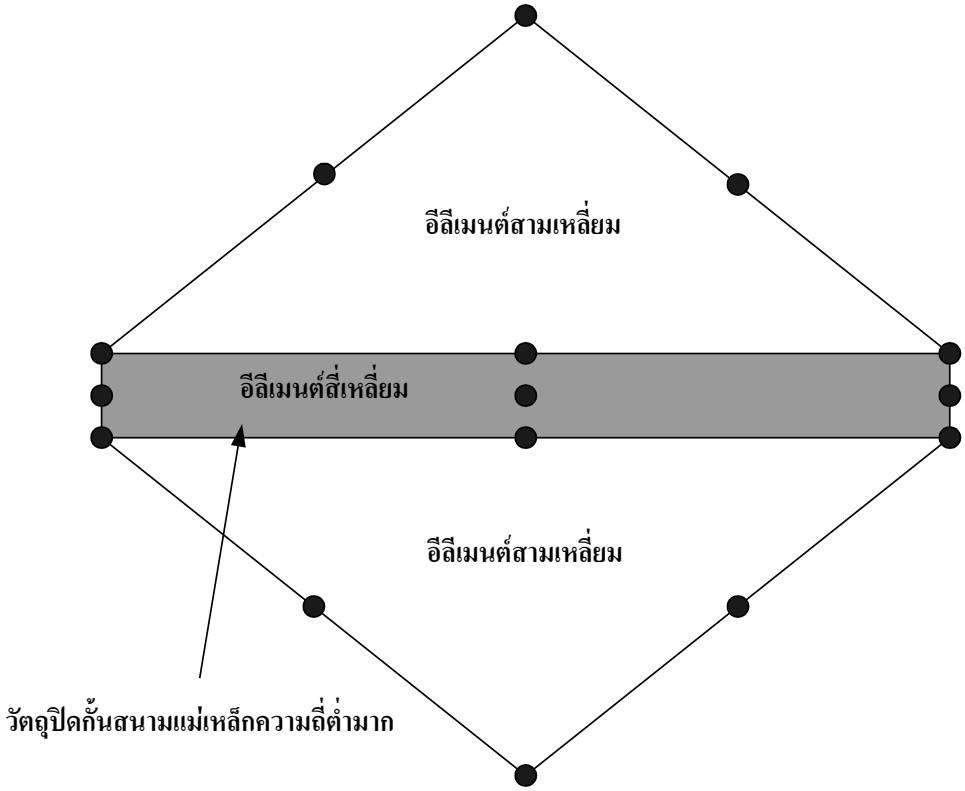
ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัด (ξ,η) ในสมการที่ (3.21) สามารถที่จะหาได้จากฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์ (lagrange polynomials) ดังนี้ [10]

$$\Phi_1 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi-1)(\eta-1))$$
$$\Phi_2 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+1)(\eta-1)$$
$$\Phi_3 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+1)(\eta+1)$$
$$\Phi_4 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi-1)(\eta+1)$$
$$\Phi_5 = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(\eta-1)$$
$$\Phi_6 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)(1-\eta^2)$$
$$\Phi_7 = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(\eta+1)$$
$$\Phi_8 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)(1-\eta^2)$$
$$\Phi_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \qquad (3.22)$$

โดยที่ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าตามสมการที่ (3.22) จะมีคุณสมบัติสอดคล้องกับ

$$\Phi_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3.23}$$

เนื่องจากลักษณะของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีด้านยาวยาวกว่าด้านกว้างมาก จึงทำให้ฐานอีลีเมนต์จะยาวและยังผลให้อีลีเมนต์สามเหลี่ยมที่อยู่ติดโดยรอบกับอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีขนาดใหญ่ตามไปด้วยดังรูปที่ 3-8



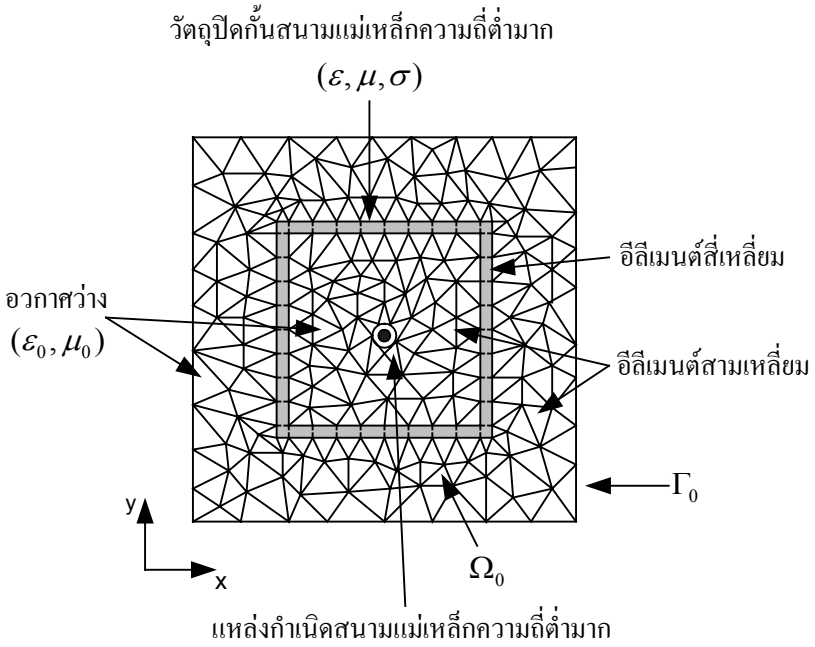
รูปที่ 3.8 ลักษณะของการใช้อีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าร่วมกับอีลีเมนต์สามเหลี่ยม

บทที่ 3
การใช้วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์หาผลเฉลยปัญหาสนามแม่เหล็ก

วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ (finite element method : FEM) เป็นวิธีเชิงตัวเลข หรือวิธีการหาคำตอบโดยประมาณ ที่มีประสิทธิภาพในการหาผลเฉลยของปัญหาที่มีลักษณะรูปร่างใดๆ เนื่องจากการหาผลเฉลยตามวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์นั้น ต้องแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาทั้งหมดออกเป็นโดเมนย่อยๆ (subdomains)หรือที่เรียกว่า อีลีเมนต์ (elements) ก่อน แล้วจากนั้นจึงสร้างสมการของแต่ละอีลีเมนต์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้นๆ อีลีเมนต์ต่างๆเหล่านี้จะเชื่อมต่อกันที่จุดโนด (node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะคำนวณหาค่าของตัวแปรตามที่ต้องการ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะให้ผลเฉลยในระยะเวลาอันสั้น เนื่องจากเมทริกซ์สุดท้ายของระบบสมการจะเป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยศูนย์เป็นส่วนใหญ่ (sparse matrix) วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์มีความเหมาะสมที่จะนำมาใช้หาผลเฉลยปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ เนื่องจากมีความยืดหยุ่นในการประยุกต์ใช้งานกับวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่มีรูปร่างใดๆ ได้ดี

3.1 การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

การผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดขึ้นตามสมการที่ (2.15) นั้น สามารถทำได้โดยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ตามขั้นตอนอันดับแรกของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ คือ การแบ่งบริเวณโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาทั้งหมดออกเป็นโดเมนย่อยๆ หรือที่เรียกว่าอีลีเมนต์ก่อน ซึ่งอีลีเมนต์เหล่านี้จะมีลักษณะเป็นเส้น พื้นที่ หรือปริมาตร ขึ้นอยู่กับปัญหาที่พิจารณาเป็นหนึ่งมิติ สองมิติ หรือสามมิติ โดยแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องรอบวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากทั้งหมด รวมทั้งแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยมเล็กๆ ซึ่งบริเวณดังกล่าว คือ บริเวณที่ว่าง และบริเวณเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำจะถูกแบ่งออกเป็นอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ ตามที่กล่าวแล้ว ดังรูปที่ 3-1



รูปที่ 3-1 ลักษณะการแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆ

เมื่อแบ่งบริเวณ Ω_0 ของโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆเรียบร้อยแล้ว จึงทำการประมาณผลเฉลยคำตอบภายในแต่ละอีลีเมนต์ หรือที่เรียกว่า ฟังก์ชันทดลอง (trial function) ขึ้น ซึ่งจะถูกสร้างขึ้นในรูปของฟังก์ชันอย่างง่าย เช่น ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ที่ประกอบด้วยฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) หรือฟังก์ชันฐาน (basis function) กับตัวแปรที่ไม่ทราบค่าของแต่ละอีลีเมนต์ ดังสมการที่ (3.1)

$$A_z^e = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(x, y) A_{zi} \tag{3.1}$$

โดยที่ $\Phi_i(x, y)$ คือ ฟังก์ชันรูปร่าง (shape function) โดยฟังก์ชันดังกล่าวแปรตามพิกัด xy

A_{zi} คือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่มีอยู่ทั้งหมด n ตัว

การสร้างชุดสมการเพื่อหาค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่า (A_z) สามารถทำได้โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง และเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักตามแบบวิธีกาเลอกิน กล่าวคือ เศษที่เกิดจากการที่แทนฟังก์ชันโดยประมาณลงในสมการปัญหาซึ่งปกติต้องไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นสมการที่ (2.15) เศษตกค้างคือ

$$R = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + j\omega\sigma A_z - J_z \tag{3.2}$$

การถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง คือ การคูณกับเศษตกค้างด้วยฟังก์ชันที่เรียกว่า ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก และบังคับให้การอินทิเกรตผลคูณนั้นตลอด Ω_0 มีค่าเท่ากับศูนย์ ผลที่ได้ คือ ชุดสมการที่มีจำนวนเท่ากับตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

$$\iint_{\Omega_0}[-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+j\omega\sigma A_z - J_z]\Phi_j dxdy = 0 \qquad (3.3)$$

โดยที่ฟังก์ชัน $\Phi_j, (j = 1,2,3,..,N)$ เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก ซึ่งเป็นฟังก์ชันชนิดเดียวกับฟังก์ชันรูปร่าง ทั้งนี้เป็นไปตามวิธีกาเลอกิน

กำหนดให้ $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}=\nabla^2 A_z$ และจากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla^2 A = \nabla\cdot\nabla A$ ดังนั้นจัดสมการที่ (3.3) ได้ใหม่ ดังนี้

$$-\iint_{\Omega_0}\frac{1}{\mu}(\Phi_j \nabla\cdot\nabla A_z)dxdy+\iint_{\Omega_0} j\omega\sigma A_z\Phi_j dxdy=\iint_{\Omega_0}\Phi_j J_z dxdy \qquad (3.4)$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla\cdot(a\vec{B}) = a\nabla\cdot\vec{B}+\vec{B}\nabla\cdot a$ เทียบเอกลักษณ์เวกเตอร์กับพจน์แรกของสมการที่ (3.4) ได้ $a=\Phi_j$ และ $\vec{B}=\nabla A_z$ ดังนั้นจัดสมการที่ (3.4) ได้ดังนี้

$$-\iint_{\Omega_0}\frac{1}{\mu}\nabla\cdot(\Phi_j\nabla A_z)dxdy+\iint_{\Omega_0}\frac{1}{\mu}(\nabla A_z)\cdot(\nabla\Phi_j)dxdy+\iint_{\Omega_0} j\omega\sigma A_z\Phi_j dxdy=\iint_{\Omega_0}\Phi_j J_z dxdy \qquad (3.5)$$

จากทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์บนระนาบ 2 มิติที่ว่า

$$\iint\nabla\cdot\vec{A}dxdy=\oint\vec{A}\cdot\vec{n}dl \qquad (3.6)$$

ประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทไดเวอร์เจนซ์กับพจน์แรกของสมการที่ (3.5) ดังนี้

$$-\oint_{\Gamma}(\frac{1}{\mu}\Phi_j\nabla A_z)\cdot\vec{n}dl+\iint_{\Omega_0}\frac{1}{\mu}(\nabla A_z)\cdot(\nabla\Phi_j)dxdy+\iint_{\Omega_0} j\omega\sigma A_z\Phi_j dxdy=\iint_{\Omega_0}\Phi_j J_z dxdy \qquad (3.7)$$

โดยที่ n คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศพุ่งออกและตั้งฉากกับผิวที่บริเวณขอบ พิจารณาเทอม $(\Phi_j \nabla A_z)\cdot \hat{n}$ ซึ่งก็คือ $(\hat{n}\cdot\nabla A_z)\Phi_j$ ดังนั้น

$$(\hat{n}\cdot\nabla A_z)\Phi_j = \Phi_j \frac{\partial A_z}{\partial n} \tag{3.8}$$

แทนสมการที่ (3.8) และสมการที่ (3.1) ลงในสมการที่ (3.7) จะได้ความสัมพันธ์ของสมการดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n}[\iint_{\Omega_0}\frac{1}{\mu}(\nabla\Phi_i)\cdot(\nabla\Phi_j)dxdy + j\omega\sigma\iint_{\Omega_0}\Phi_i\Phi_j dxdy\,]A_{zi} - \sum_{i=1}^{n}\oint(\frac{1}{\mu}\Phi_j\frac{\partial A_z}{\partial n})dl = \iint_{\Omega_0}\Phi_j J_z dxdy \tag{3.9}$$

จากการที่แบ่งโดเมน Ω_0 ออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆ ดังนั้นการอินทิเกรตตลอดโดเมน Ω_0 จะเท่ากับผลรวมของการอินทิเกรตในแต่ละอีลีเมนต์ นั่นคือ

$$\sum_{e=1}^{Ne}\{\sum_{i=1}^{n}[\iint_{\Omega_0}\frac{1}{\mu}(\nabla\Phi_i)\cdot(\nabla\Phi_j)dxdy + j\omega\sigma\iint_{\Omega_0}\Phi_i\Phi_j dxdy\,]A_{zi} - \sum_{i=1}^{n}(\oint_{\Gamma}\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial n})\Phi_j dl\} = \iint_{e}\Phi_j J_z dxdy \tag{3.10}$$

หรือในรูปสมการเมทริกซ์

$$([S]+[T])[A_z]+[D][\frac{\partial A_z}{\partial n}] = J_z[B] \tag{3.11}$$

โดยที่ $S_{ij} = \frac{1}{\mu}\iint_{\Omega_0}(\nabla\Phi_i)\cdot(\nabla\Phi_j)dxdy$

$T_{ij} = j\omega\sigma\iint_{\Omega_0}\Phi_i\Phi_j\,dxdy$

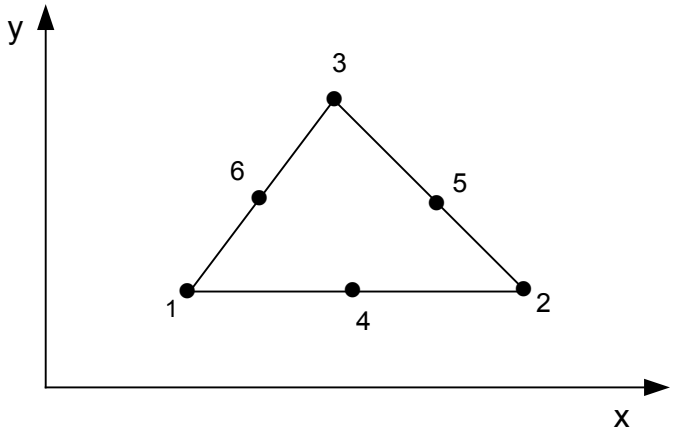
$D_{ij} = -\frac{1}{\mu}\oint_{\Gamma}\Phi_j dl$

$B_{ij} = \iint_{e}\Phi_j dxdy$ (3.12)

สมการที่ (3.11) และสมการที่ (3.12) ก็คือสมการที่ (2.17) และสมการที่ (2.18) ในบทที่ 2. ตามลำดับ สำหรับลำดับต่อไปจะกล่าวถึงอีลีเมนต์สามเหลี่ยมและอีลีเมนต์สี่เหลี่ยม ซึ่งเป็นอีลีเมนต์ที่นำมาใช้หาผลเฉลยในงานวิจัยนี้

3.2 อีลีเมนต์สามเหลี่ยม (triangular element)

การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ จะต้องแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาทั้งหมดออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆ ลักษณะของอีลีเมนต์ที่แบ่งบริเวณรอบวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำนี้ จะเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยมเล็กๆ ดังรูปที่ 3-2 [9]



รูปที่ 3-2 อีลีเมนต์สามเหลี่ยมและตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

จากรูปที่ 3-2 แสดงลักษณะอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ประกอบด้วยตัวแปรที่ไม่ทราบค่า ในหนึ่งอีลีเมนต์สามเหลี่ยมจำนวนทั้งสิ้น 6 ตัวแปร ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเหล่านี้จะถูกประมาณที่ตำแหน่งจุดโนดต่างๆ ดังรูปที่ 3.2 โดยหมายเลขโนดที่ 1,2,3 อยู่ที่จุดยอดของสามเหลี่ยม และหมายเลขโนดที่ 4,5,6 จะอยู่ที่จุดกึ่งกลางของแต่ละด้านสามเหลี่ยม ลักษณะอีลีเมนต์สามเหลี่ยมดังกล่าวนี้จะเป็นการประมาณตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในลักษณะ “ฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง” (quadratic element) ค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเหล่านี้จะถูกประมาณได้ดังนี้

$$\phi^e = a^e + b^e x + c^e y + d^e x^2 + e^e xy + f^e y^2 \qquad (3.13)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ $a^e, b^e, ..., f^e$ สามารถหาได้จากโนดทั้งหกและเมื่อแทนสมการ (3.13) ลงในสมการที่ (3.1) จะประมาณ $A_z^e(x,y)$ ได้ดังนี้

$$A_z^e(x,y) = \sum_{i=1}^{6} \Phi_i(x,y) A_{zi} \qquad (3.14)$$

ในที่นี้ $\Phi_i(x,y)$ คือ ฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองในรูปฟังก์ชันสเกลาร์ โดยฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองทั้งหกในรูปฟังก์ชันสเกลาร์ สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= L_1(2L_1-1)\\ \Phi_2 &= L_2(2L_2-1)\\ \Phi_3 &= L_3(2L_3-1)\\ \Phi_4 &= 4L_1L_2\\ \Phi_5 &= 4L_2L_3\\ \Phi_6 &= 4L_3L_1\end{aligned} \tag{3.15}$$

ซึ่ง L_1, L_2, L_3 คือ พิกัดเชิงพื้นที่ (area coordinate) ซึ่งมีค่าดังนี้

$$L_k(x,y) = \frac{1}{2\Delta^e}(a_k^e + b_k^e x + c_k^e y) \quad k = 1,2,3 \tag{3.16}$$

และ
$$a_k = x_l y_m - x_m y_l \tag{3.17}$$
$$b_k = y_l - y_m \tag{3.18}$$
$$c_k = x_m - x_l \tag{3.19}$$

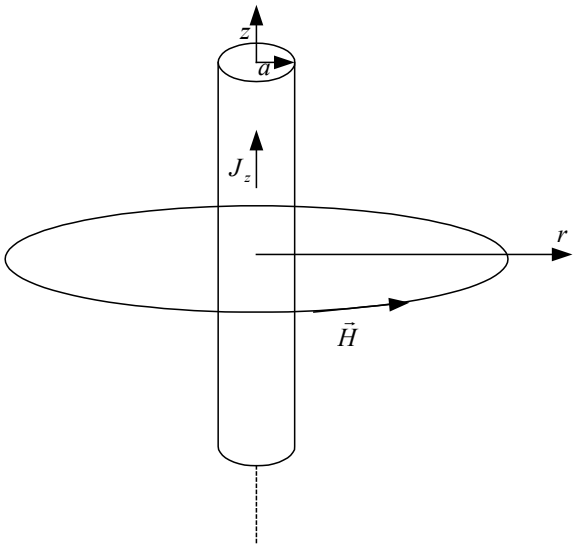
โดยที่ (k,l,m) จะมีลักษณะการเรียงลำดับแบบโมดูโล 3 คือ $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ และ $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ คือ พิกัดของโนด 1, 2 และ 3 ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม และ Δ^e คือพื้นที่ของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม สามารถหาได้จากการหาดีเทอร์มิแนนต์ของพิกัดที่โนดทั้งสามของอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ดังนี้

$$\Delta^e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix} \tag{3.20}$$

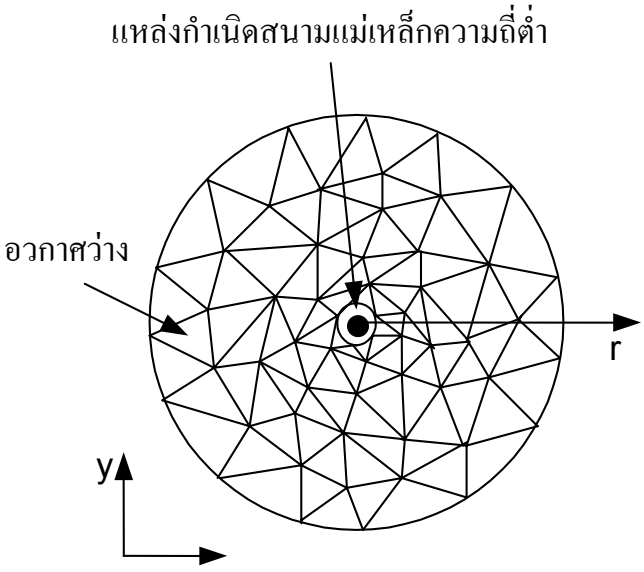
3.3 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

จุดประสงค์ตัวอย่างนี้จะเป็นการทดสอบความถูกต้องของวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ในการนำมาหาผลเฉลยความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดขึ้น โดยเทียบกับผลเฉลยจากวิธีเชิงวิเคราะห์ คือ กฎของแอมป์แปร์

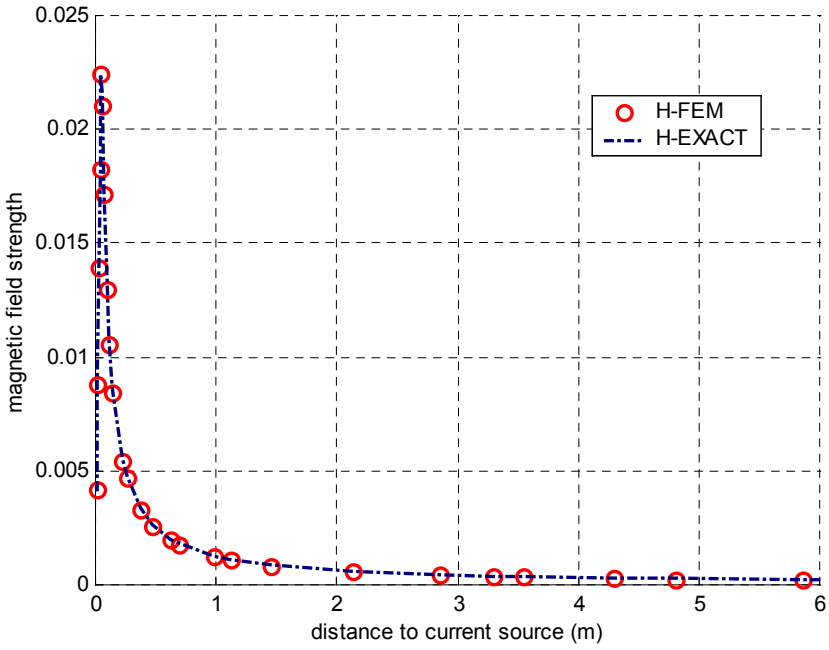
ลักษณะแบบจำลองคณิตศาสตร์ในการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ ในที่ว่างที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์แสดงได้ดังรูปที่ 3-3 กำหนดให้แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำวางอยู่ในทิศทางตามแนวแกน z มีขนาดเท่ากับ 1 A/m^2, รัศมี a เท่ากับ 0.05 เมตร, รัศมี r เท่ากับ 50 เมตร และจำนวนอีลีเมนต์ที่แบ่งเท่ากับ 1216 อีลีเมนต์ ดังรูปที่ 3-4



รูปที่ 3-3 การคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์



รูปที่ 3-4 ตัวอย่างการแบ่งโดเมนการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ
ที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม



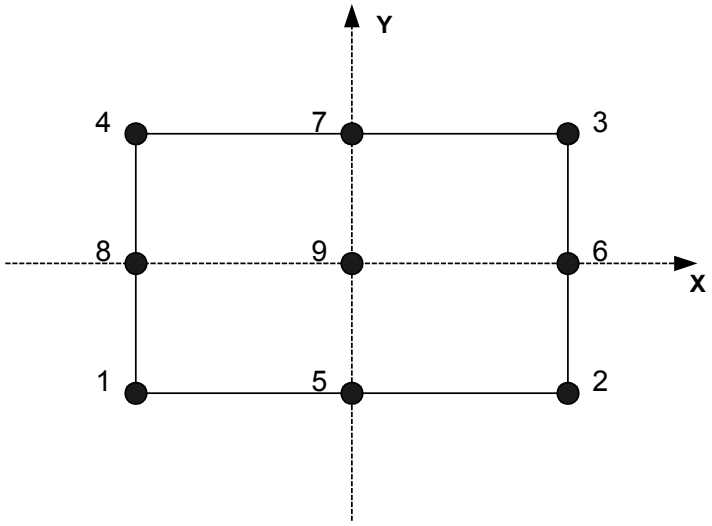
รูปที่ 3-5 เปรียบเทียบผลเฉลยความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ระหว่างวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์

จากรูปที่ 3-5 เป็นผลการคำนวณความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดจากกระแสไหลเป็นเส้นตรงยาวอนันต์ โดยเทียบผลการคำนวณระหว่างวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่คำนวณจากวิธีทั้งสองจะมีค่าตรงกัน ความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่คำนวณได้จะมีลักษณะ ดังนี้ ความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำในตอนเริ่มต้นจะมีค่าเพิ่มมากขึ้นจนกระทั่งมีค่าสูงสุดที่ 0.05 เมตร ซึ่งบริเวณนี้ คือ แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ หลังจากนั้นความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่คำนวณได้จะมีค่าลดลง เมื่อห่างจากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากขึ้น และพบว่าความเข้มสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่คำนวณได้ ตั้งแต่ 2 เมตรขึ้นไปจะมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก จนถือได้ว่าคงที่

3.4 อีลีเมนต์สี่เหลี่ยม (rectangular element)

การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ โดยการแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องในเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่มีลักษณะผิวบางออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยมขนาดเล็กๆ ยังผลให้อีลีเมนต์โดยรอบวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำและในเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีขนาดเล็กและมีจำนวนมาก จึงเสนอการแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องในเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่

เหล็กความถี่ต่ำออกเป็นอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็กๆ แทนอีลีเมนต์สามเหลี่ยม ลักษณะของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าสามารถที่จะแสดงได้ดังรูปที่ 3-6



รูปที่ 3-6 อีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าและตัวแปรที่ไม่ทราบ

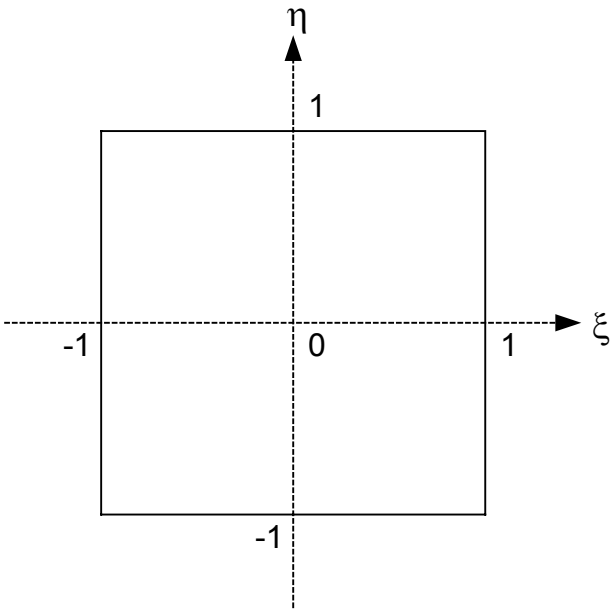
จากรูปที่ 3-6 แสดงลักษณะอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้า ประกอบด้วยตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในหนึ่งอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าจำนวนทั้งสิ้น 9 ตัวแปร ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเหล่านี้จะถูกประมาณที่ตำแหน่งโนดต่างๆ บนอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมดังรูป โดยหมายเลขโนดที่ 1, 2, 3, 4 จะอยู่ที่มุมของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าและหมายเลขโนดที่ 5, 6, 7, 8 จะอยู่ที่จุดกึ่งกลางของแต่ละด้านของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยม ส่วนหมายเลขโนดที่ 9 จะอยู่ที่จุดกึ่งกลางของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมดังรูปที่ 3-6 สำหรับการประมาณผลเฉลยคำตอบภายในแต่ละอีลีเมนต์ จะถูกประมาณได้ดังนี้

$$A_z^e(x,y) = \sum_{i=1}^{9} \Phi_i(\xi,\eta) A_{zi} \qquad (3.21)$$

โดยที่ $\Phi_i(\xi,\eta)$ คือ ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัด (ξ,η)

A_{zi} คือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่มีอยู่ 9 ตัว

และ พิกัด ξ, η มีค่าอยู่ในช่วงระหว่าง $-1 < \xi < 1$ และ $-1 < \eta < 1$ ดังนั้นลักษณะอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัด (ξ,η) แสดงได้ดังนี้



รูปที่ 3-7 อีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัด (ξ,η)

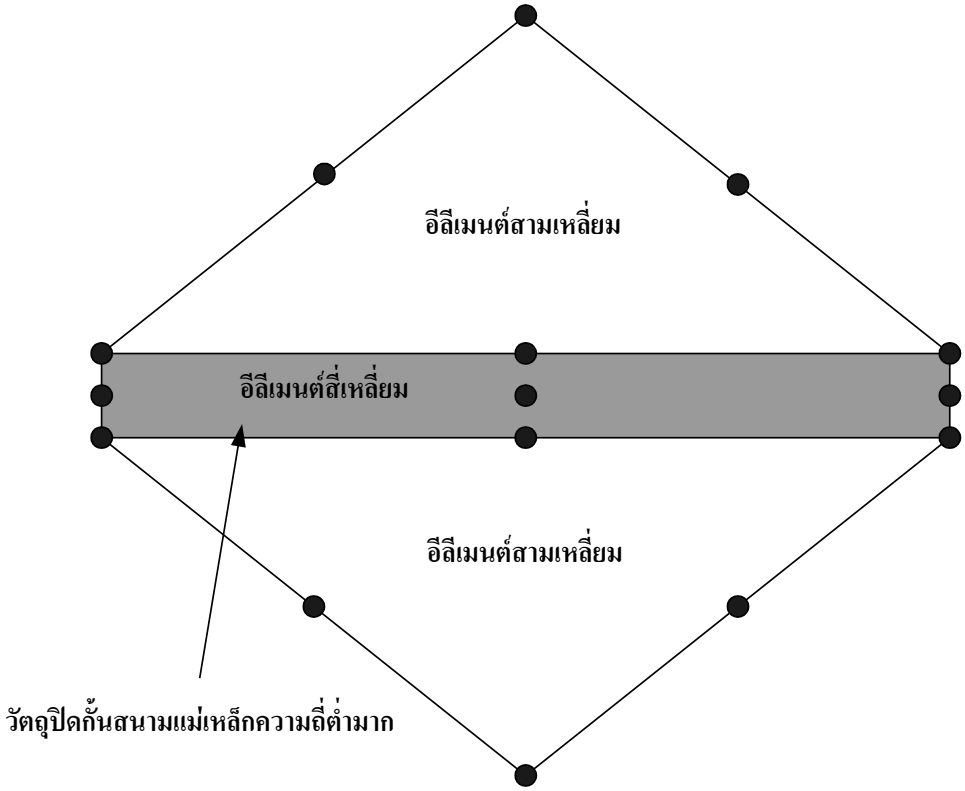
ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าในพิกัด (ξ,η) ในสมการที่ (3.21) สามารถที่จะหาได้จากฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์ (lagrange polynomials) ดังนี้ [10]

$$\Phi_1 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi-1)(\eta-1))$$
$$\Phi_2 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+1)(\eta-1)$$
$$\Phi_3 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi+1)(\eta+1)$$
$$\Phi_4 = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi-1)(\eta+1)$$
$$\Phi_5 = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(\eta-1)$$
$$\Phi_6 = \frac{1}{2}\xi(\xi+1)(1-\eta^2)$$
$$\Phi_7 = \frac{1}{2}\eta(1-\xi^2)(\eta+1)$$
$$\Phi_8 = \frac{1}{2}\xi(\xi-1)(1-\eta^2)$$
$$\Phi_9 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \qquad (3.22)$$

โดยที่ฟังก์ชันรูปร่างอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าตามสมการที่ (3.22) จะมีคุณสมบัติสอดคล้องกับ

$$\Phi_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3.23}$$

เนื่องจากลักษณะของอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีด้านยาวยาวกว่าด้านกว้างมาก จึงทำให้ฐานอีลีเมนต์จะยาวและยังผลให้อีลีเมนต์สามเหลี่ยมที่อยู่ติดโดยรอบกับอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าจะมีขนาดใหญ่ตามไปด้วยดังรูปที่ 3-8



รูปที่ 3.8 ลักษณะของการใช้อีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าร่วมกับอีลีเมนต์สามเหลี่ยม

บทที่ 4
การใช้วิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์หาผลเฉลยปัญหาสนามแม่เหล็ก

วิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ (boundary element method : BEM) คือ วิธีเชิงตัวเลขหรือวิธีการหาคำตอบโดยประมาณที่มีประสิทธิภาพ โดยอยู่บนพื้นฐานของสมการอินทิกรัล หรือที่เรียกกันว่าสมการบาวน์ดารีอินทิกรัล (boundary integral equations : BIEs) ของปัญหาค่าขอบเขต การหาผลเฉลยตามวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ จะต้องแบ่งขอบเขตของโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาทั้งหมดออกเป็นขอบเขตย่อยๆ หรือที่เรียกว่าอีลีเมนต์ก่อน ซึ่งแตกต่างจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ ที่ต้องแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาทั้งหมดออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆ ทำให้จำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยมีจำนวนมาก วิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์จะลดมิติของปัญหาลง 1 มิติ เช่น ปัญหาการอินทิเกรตพื้นที่ก็จะกลายเป็นการอินทิเกรตเชิงเส้นแทน เป็นต้น จากที่กล่าวมาจะเห็นว่า การหาผลเฉลยด้วยวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์จะกระทำได้ง่าย มีความแม่นตรงสูงและเหมาะสมที่จะนำมาหาผลเฉลยปัญหาเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่ง ปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตซับซ้อน เป็นต้น [11]

4.1 สมการบาวน์ดารีอินทิกรัล (boundary integral equations)

การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่บริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่งกรณี 2 มิติ จะเริ่มจากสมการแม็กซ์เวลล์ ดังนี้

จากสมการที่ (2.2) $\nabla \times \vec{H} = 0$

และจากสมการที่ (2.3) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

ความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก $\vec{B}$ กับความเข้มสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ แสดงได้ดังนี้

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad (4.1)$$

โดยที่ μ = ความซาบซึมได้ (permeability)

จากสมการที่ (2.7) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก $\vec{B}$ กับศักย์เวกเตอร์แม่เหล็ก A_z ได้ดังนี้

$$\vec{B} = \nabla \times A_z$$

แทนสมการที่ (2.7) ลงในสมการที่ (2.2) จะได้สมการ ดังนี้

$$\nabla \times (\nabla \times A_z) = 0 \tag{4.2}$$

จากเอกลักษณ์เวกเตอร์ $\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$ ทำให้จัดสมการที่ (4.2) ได้ดังนี้

$$\nabla(\nabla \cdot A_z) - \nabla^2 A_z = 0 \tag{4.3}$$

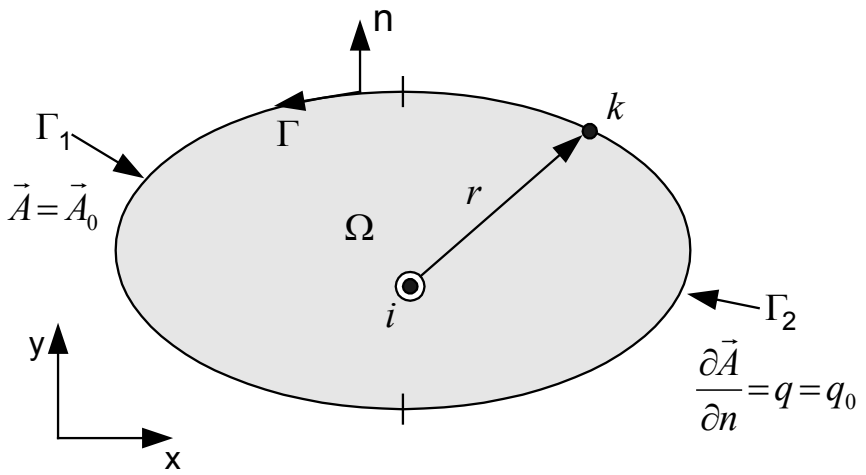
กำหนดให้ $\nabla \cdot A_z = 0$ ดังนั้นจัดสมการที่ (4.3) ได้ดังนี้

$$\nabla^2 A_z = 0 \tag{4.4}$$

และกำหนดเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

$$\begin{aligned} A_z &= A_0 && \text{บน } \Gamma_1 \\ \frac{\partial A_z}{\partial n} &= q = q_0 && \text{บน } \Gamma_2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

โดยที่ $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4-1 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตบน Γ และการพิจารณาโดเมนปัญหา 2 มิติ

สมการที่ (4.4) เป็นสมการที่จะถูกนำมาจัดให้อยู่ในรูปสมการบาวน์ดารีอินทิกรัล เพื่อที่จะนำไปคำนวณหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่บริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่ง ซึ่งสามารถทำได้โดยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างและเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเป็น G_z คือ Green's function ในระบบโคออดิเนตทรงกระบอก ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$ (r คือ ระยะจากโนด i ไปยังโนด k ดังรูปที่ 4.1) ในกรณีปัญหา 2 มิติ จะได้สมการ ดังนี้

$$\iint G_z \nabla^2 A_z dxdy = 0 \qquad (4.6)$$

จากทฤษฎีบท green's second identity ใน 2 มิติที่ว่า

$$\iint (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)dxdy = \int_\Gamma u\frac{\partial v}{\partial n}d\Gamma - \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial n}d\Gamma \qquad (4.7)$$

ประยุกต์ทฤษฎีบท green's second identity ต่อสมการที่ (4.6) จะได้สมการดังนี้

$$\iint A_z \nabla^2 G_z dxdy + \int_\Gamma G_z \frac{\partial A_z}{\partial n}d\Gamma - \int_\Gamma A_z \frac{\partial G_z}{\partial n}d\Gamma = 0 \qquad (4.8)$$

จากรูปที่ 4.1 กำหนดให้แหล่งกำเนิดสนามอยู่ที่โนด i ภายในโดเมน Ω จะได้สมการสนามที่โนด i ดังนี้

$$\nabla^2 G_z = -\delta(i) \qquad (4.9)$$

จัดรูปสมการที่ (4.9) ใหม่โดยใช้วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง เลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างเป็น A_z จะได้สมการดังนี้

$$\iint A_z(\nabla^2 G_z + \delta(i))dxdy = 0 \qquad (4.10)$$

จากคุณสมบัติฟังก์ชันเดลต้า ทำให้ผลการอินทิเกรตสมการที่ (4.10) คือ

$$\iint A_z \nabla^2 G_z dxdy = -A_z(i) \qquad (4.11)$$

แทนสมการที่ (4.11) ลงในพจน์แรกของสมการที่ (4.8) ได้ ดังนี้

$$A_z(i) + \int_{\Gamma} A_z \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} G_z \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma \qquad (4.12)$$

สมการที่ (4.12) คือ สมการเบาว์ดารีอินทิกรัล ซึ่งเป็นสมการเริ่มต้นในการหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ ที่บริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่งด้วยวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์และถ้ากำหนดให้โนด i อยู่บนขอบเขต Γ จะได้สมการบาวน์ดารีอินทิกรัล ดังนี้

$$c(i)A_z(i) + \int_{\Gamma} A_z \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma} G_z \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma \qquad (4.13)$$

โดยที่ $A_z(i)$ คือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่โนด i

A_z คือ ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

G_z คือ Green's function .ในกรณีปัญหา 2 มิติของระบบโคออดิเนตทรงกระบอก

$\frac{\partial A_z}{\partial n}$ คือ อนุพันธ์ของตัวแปรที่ไม่ทราบค่าในทิศทางตั้งฉากกับขอบเขต

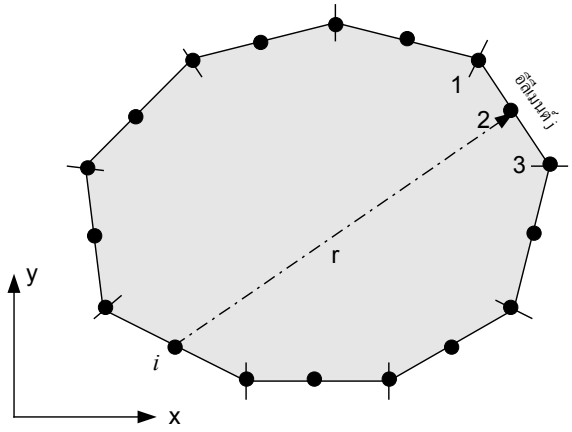
$\frac{\partial G_z}{\partial n}$ คือ อนุพันธ์ของ G_z ในทิศทางตั้งฉากกับขอบเขต

$c(i)$ คือ ค่าคงที่และมีค่าดังนี้ (Kythe,1995)

$$c(i) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้าโนด } i \text{ อยู่นอก } \Omega \cup \Gamma \\ 1 & \text{ถ้าโนด } i \text{ อยู่ภายใน } \Omega \\ 1/2 & \text{ถ้าโนด } i \text{ อยู่บนขอบเขต} \\ \theta/2\pi & \text{ถ้าโนด } i \text{ อยู่ที่มุม} \end{cases}$$

4.2 การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากด้วยวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

การหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่บริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่งกรณี 2 มิติด้วยวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ จะเริ่มจากการแบ่งขอบเขตของโดเมนที่ต่อเนื่องออกเป็น N อีลีเมนต์ ดังรูปที่ 4.2



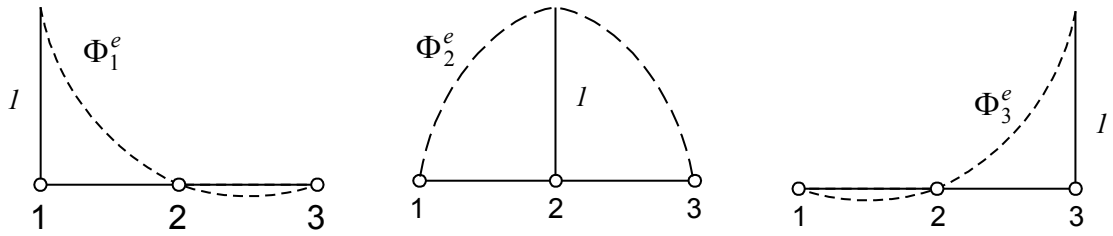
รูปที่ 4-2 ลักษณะการแบ่งขอบเขตออกเป็นขอบเขตย่อยๆ

จากสมการที่ (4.13) แสดงสมการในรูป N อีลีเมนต์ได้ ดังนี้

$$c(i)A_z(i) + \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} A_z \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} G_z \frac{\partial A_z}{\partial n} d\Gamma \qquad (4.14)$$

จากรูปที่ 4-2 แสดงลักษณะการแบ่งขอบเขตที่ต่อเนื่องออกเป็นอีลีเมนต์ย่อยๆ พบว่าในหนึ่งอีลีเมนต์ประกอบด้วยจำนวนโนดที่ใช้ประมาณค่าตัวแปรที่ไม่ทราบค่าอยู่ 3 โนด คือ โนดที่ 1, โนดที่ 3 จะอยู่ที่จุดปลายอีลีเมนต์ และโนดที่ 2 จะอยู่ที่จุดกึ่งกลางอีลีเมนต์ ลักษณะการประมาณอีลีเมนต์นี้ เรียกว่า “ฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง” จุดประสงค์ของการประมาณลักษณะอีลีเมนต์เช่นนี้ คือ เพื่อที่จะให้ผลเฉลยจากวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในแต่ละตำแหน่งโนดสอดคล้องกัน

ลักษณะฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองแสดงได้ดังรูปที่ 4-3 และสมการแต่ละโนดของฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองแสดงได้ดังสมการที่ (4.15)



a) ฟังก์ชันรูปร่าง Φ_1 b) ฟังก์ชันรูปร่าง Φ_2 c) ฟังก์ชันรูปร่าง Φ_3

รูปที่ 4-3 ลักษณะฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{1}{2}\xi(1-\xi)\\ \Phi_2 &= (1-\xi^2)\\ \Phi_3 &= \frac{1}{2}\xi(1+\xi)\end{aligned}\right\} \qquad (4.15)$$

โดยที่ ξ มีค่าเท่ากับ $-1 < \xi < 1$

ฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองในสมการที่ (4.15) จะมีคุณสมบัติดังนี้

$$\Phi_i = \begin{cases} 1 & \text{ที่จุด i} \\ 0 & \text{ที่จุดอื่นๆ} \end{cases}, i = 1,2,3 \qquad (4.16)$$

การที่กำหนดให้ตัวแปรที่ไม่ทราบค่า $(A_z, \frac{\partial A_z}{\partial n})$ ในแต่ละอีลีเมนต์มีการเปลี่ยนแปลงตามฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง ดังนั้นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่ทุกตำแหน่งโนดบนแต่ละอีลีเมนต์สามารถที่จะหาได้จากเทอมของฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง ดังนี้

$$A_z(\xi) = \Phi_1 A_{z1} + \Phi_2 A_{z2} + \Phi_3 A_{z3} = \begin{bmatrix}\Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{z1} & A_{z2} & A_{z3}\end{bmatrix}^T \qquad (4.17)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial n}(\xi) = \Phi_1 \frac{\partial A_{z1}}{\partial n} + \Phi_2 \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} + \Phi_3 \frac{\partial A_{z3}}{\partial n} = \begin{bmatrix}\Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3\end{bmatrix}\left[\frac{\partial A_{z1}}{\partial n} \; \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} \; \frac{\partial A_{z3}}{\partial n}\right]^T \qquad (4.18)$$

โดยที่ Φ_1, Φ_2, Φ_3 เป็นฟังก์ชันรูปร่างบนแต่ละอีลีเมนต์

พิจารณาเทอมอินทิเกรตบนอีลีเมนต์ j ทางซ้ายมือของสมการที่ (4.14) ซึ่งจัดให้อยู่ในรูปของ $A_z(\xi)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_j} A_z \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma &= \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix}\Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{z1} & A_{z2} & A_{z3}\end{bmatrix}^T \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_j} (\Phi_1 A_{z1} + \Phi_2 A_{z2} + \Phi_3 A_{z3}) \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma \\ &= \begin{bmatrix}h_{i1} & h_{i2} & h_{i3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{z1} & A_{z2} & A_{z3}\end{bmatrix}^T \qquad (4.19)\end{aligned}$$

โดยที่ $h_{ik} = \int_{\Gamma_j} \Phi_k \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma \, , k = 1,2,3$ (4.20)

นำคุณสมบัติจาโคเบียน (jacobian transformation) มาใช้ในการแปลงพิกัด จากพิกัด xy ให้อยู่ในพิกัด ξ ในสมการที่ (4.20) ได้ดังนี้

$$d\Gamma = (\sqrt{(\frac{dx}{d\xi})^2 + (\frac{dy}{d\xi})^2}) \, d\xi = |JA| d\xi \quad (4.21)$$

จากสมการที่ (4.21) สามารถที่จะจัดสมการที่ (4.20) ในพิกัด ξ ได้ดังนี้

$$h_{ik} = \int_{\Gamma_j} \Phi_k \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma = \int_{-1}^{1} \Phi_k(\xi) \frac{\partial G_Z}{\partial n} |JA| d\xi \quad (4.22)$$

แทนสมการที่ (4.22) ลงในสมการที่ (4.19) ได้สมการดังนี้

$$\int_{\Gamma_j} A_z \frac{\partial G_z}{\partial n} d\Gamma = \sum_{k=1}^{3} A_{zk} \int_{-1}^{1} \Phi_k \frac{\partial G_z}{\partial n} |JA| d\xi \quad (4.23)$$

พิจารณาเทอมอินทิเกรตบนอีลีเมนต์ j ทางขวามือของสมการที่ (4.14) จัดให้อยู่ในรูปของ $\frac{\partial A_z}{\partial n}(\xi)$ ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_j} \frac{\partial A_z}{\partial n} A^* d\Gamma &= \int_{\Gamma_J} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{z1}}{\partial n} & \frac{\partial A_{2z}}{\partial n} & \frac{\partial A_{z3}}{\partial n} \end{bmatrix}^T G_z d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_j} (\Phi_1 \frac{\partial A_{z1}}{\partial n} + \Phi_2 \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} + \Phi_3 \frac{\partial A_{z3}}{\partial n}) G_z d\Gamma \\ &= \begin{bmatrix} g_{i1} & g_{i2} & g_{i3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{z1}}{\partial n} & \frac{\partial A_{z2}}{\partial n} & \frac{\partial A_{z3}}{\partial n} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (4.24)$$

โดยที่ $g_{ik} = \int_{\Gamma_j} \Phi_k G_z d\Gamma, \quad k = 1,2,3$ (4.25)

จัดสมการที่ (4.25) ให้อยู่ในพิกัด ξ โดยใช้คุณสมบัติจาโคเบียน สมการที่ (4.21) ได้ดังนี้

$$g_{ik} = \int_{\Gamma_j} \Phi_k G_z d\Gamma = \int_{-1}^{1} \Phi_k G_z |JA| d\xi \qquad (4.26)$$

แทนสมการที่ (4.26) ลงในสมการที่ (4.24) จัดสมการได้ ดังนี้

$$\int_{\Gamma_j} \frac{\partial A_z}{\partial n} G_z d\Gamma = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial A_{zk}}{\partial n} \int_{-1}^{1} \Phi_k G_z |JA| d\xi \qquad (4.27)$$

แทนสมการที่ (4.23) และสมการที่ (4.27) ลงในสมการที่ (4.14) ได้สมการดังนี้

$$c(i)A_z(i) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} A_{zk} \int_{-1}^{1} \Phi_k \frac{\partial G_z}{\partial n} |JA| d\xi = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial A_{zk}}{\partial n} \int_{-1}^{1} \Phi_k G_z |JA| d\xi \qquad (4.28)$$

จัดรูปสมการที่ (4.28) ใหม่ได้ ดังนี้

$$c(i)A_z(i) + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} A_{zk} H_{k,j} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial A_{zk}}{\partial n} G_{k,j} \qquad (4.29)$$

โดยที่ $H_{k,j} = \int_{-1}^{1} \Phi_k(\xi) \frac{\partial G_z}{\partial n} |JA| d\xi$

$G_{k,j} = \int_{-1}^{1} \Phi_k(\xi) G_z |JA| d\xi$

หรือในรูปสมการเมทริกซ์

$$[H][A_z] = [G]\left[\frac{\partial A_z}{\partial n}\right] \qquad (4.30)$$

สมการที่ (4.30) ก็คือสมการที่ (2.19) ในบทที่ 2. ซึ่งเมื่อนำไปแทนลงในสมการที่ (2.17) จะยังผลให้สามารถที่จะหาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำตลอดโดเมนปัญหา

การอินเกรตสมการ (4.22) และสมการ (4.26) นี้จะเลือกใช้วิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบเกาส์ควอดราเจอร์ [12] เนื่องจากวิธีการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบเกาส์ควอดราเจอร์มีข้อดี คือ ความสะดวกในการใช้งาน และผลเฉลยที่ได้มีความแม่นตรงสูง เมื่อฟังก์ชันที่อินทิเกรตเป็นฟังก์ชัน

พหุนามที่มีอันดับ 2n-1 หรือต่ำกว่า โดยที่ n คือ จำนวนจุดเกาส์ [13] สำหรับการอินเกรตสมการที่ (4.22) และสมการที่ (4.26) จะแยกออกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1. โนด i และโนด k (k=1,2,3 ดังรูปที่ 4.2) ไม่ได้อยู่บนอีลีเมนต์เดียวกัน การอินทิเกรตสมการ (4.22) และสมการ (4.26) จะเลือกใช้การอินทิเกรตเกาส์ควอดราเจอร์ (ภาคผนวก ข.1)

กรณีที่ 2. โนด i และโนด k (k=1,2,3 ดังรูปที่ 4.2) อยู่บนอีลีเมนต์เดียวกัน การอินทิเกรตสมการที่ (4.22) สมการที่ (4.26) จะแยกออกเป็น 2 ส่วน ดังนี้

- โนด i และโนด k อยู่บนตำแหน่งโนดเดียวกัน กรณีนี้จะเกิดจุดเอกพันธุ์ ขึ้นในระบบสมการ เนื่องจาก $\ln(\frac{1}{r}) = 0$ เมื่อ $r = 0$ ดังนั้นการอินทิเกรตสมการที่ (4.22) และสมการที่(4.26) จะเลือกใช้การอินทิเกรตแบบ logarithmic gauss quadrature แทน (ภาคผนวก ข.2)

- โนด i และโนด k อยู่คนละตำแหน่งโนดกัน แต่บนอีลีเมนต์เดียวกัน กรณีนี้การอินทิเกรตสมการที่ (4.22) และสมการที่ (4.26) จะเลือกใช้การอินทิเกรตเกาส์ควอดราเจอร์ (ภาคผนวก ข.1) เช่นเดียวกับกรณีที่โนด i และโนด k ไม่ได้อยู่บนอีลีเมนต์เดียวกัน

บทที่ 5
ผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

การคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ โดยใช้อีลีเมนต์สามเหลี่ยมกับอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้า วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์จะใช้หาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำรอบวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากด้วยอีลีเมนต์สามเหลี่ยม และเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำจะหาผลเฉลยด้วยอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้า สำหรับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์จะใช้หาผลเฉลยบริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่ง การรวมวิธีไฟไนต์อีลีเมนต์และวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์เข้าด้วยกัน คือ บริเวณขอบเขตปัญหา ซึ่งก็คือบริเวณที่ว่าง จากแนวคิดนี้ทำให้ทราบผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดขึ้นตลอดโดเมนปัญหา และลดจำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยลงได้ ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำจะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ

1) ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากกรณีวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่มีรูปร่างต่างๆ

2) ค่าปัจจัยที่มีผลต่อค่าประสิทธิผลการชีลด์ อาทิเช่น ความซาบซึมได้ สภาพนำไฟฟ้า ความถี่ ความหนา และระยะห่างของวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ จากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

ผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ จะอยู่ในรูปค่าประสิทธิผลการชีลด์ (shielding effectiveness : SE) ซึ่งถูกกำหนดโดยอัตราส่วนการลดทอนของสนามแม่เหล็กขณะที่มีสนามแม่เหล็กแพร่ออกมาจากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็ก โดยจะวัดความเข้มสนามแม่เหล็กที่จุดสังเกตจุดใดจุดหนึ่งก่อน โดยยังไม่มีการนำวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กมาวางในบริเวณนั้น จากนั้นให้นำวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กมาวางกั้นระหว่างแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กกับจุดสังเกตและวัดความเข้มสนามแม่เหล็กที่จุดสังเกตจุดเดิมอีกครั้งหนึ่ง นั่นคือ [4]

$$SE = \frac{\vec{H}_{unshield}}{\vec{H}_{shield}} \tag{5.1}$$

หรือ

$$SE\,(dB) = 20\log[\frac{\vec{H}_{unshield}}{\vec{H}_{shield}}] \tag{5.2}$$

จากนิยามค่าประสิทธิผลการชีลด์ กล่าวได้ว่า ถ้าค่าประสิทธิผลการชีลด์ที่คำนวณได้มีค่าสูง หมายความว่า วัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กสามารถทำหน้าที่ลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ ได้ดีหรือสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำแพร่ผ่านวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำไปได้น้อย

การแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องของปัญหาออกเป็นอีลีเมนต์เล็กๆ จะใช้โปรแกรม MSC/NASTRAN version 4.40 เป็นเครื่องมือช่วยในการแบ่งอีลีเมนต์

5.1 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

ตัวอย่างผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ ที่เกิดจากวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำรูปร่างต่างๆ จะประกอบด้วย

1) แผ่นระนาบ (plane shield)

2) สี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเปิดด้านหนึ่ง (three-sided shield)

3) สี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเปิดด้านหนึ่ง 2 อันวางเหลื่อมกัน (two overlapping three-sided shields)

4) สี่เหลี่ยมมุมฉาก (rectangular shield)

5) สี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีการเจาะตรงกลางด้านหนึ่งเป็นช่องเปิด

คุณสมบัติทางไฟฟ้าของวัสดุที่นำมาคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์แสดงได้ดังตารางที่ 5-1

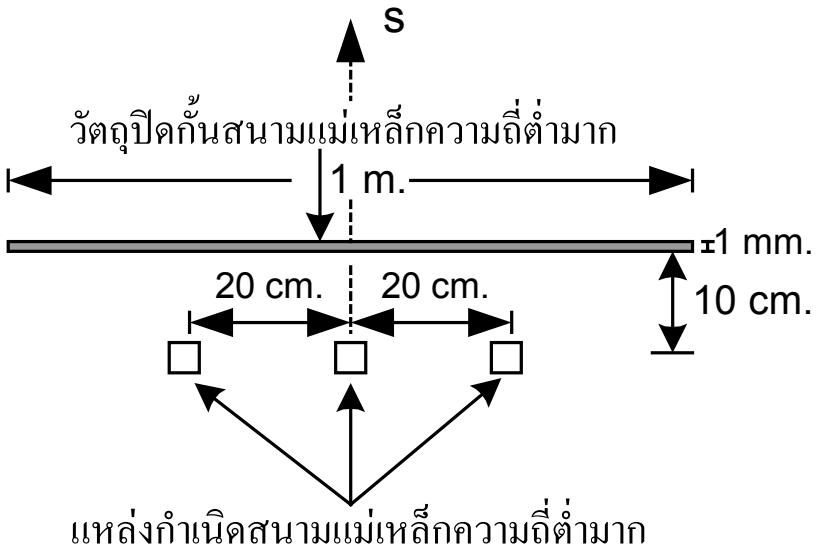
ตารางที่ 5.1 คุณสมบัติทางไฟฟ้าของวัสดุที่นำมาคำนวณค่าประสทธิผลการชีลด์ [5]

วัสดุ	สภาพต้านทาน (ρ:Ωm)	ความซาบซึมได้ (μ_r)
Aluminum (Al)	$2.8*10^{-8}$	1
Construction grade iron (Fe)	$1.4*10^{-7}$	700
Transformer grade iron (Ck-37)	$4.6*10^{-7}$	4000
Copper (Cu)	$1.7*10^{-8}$	1

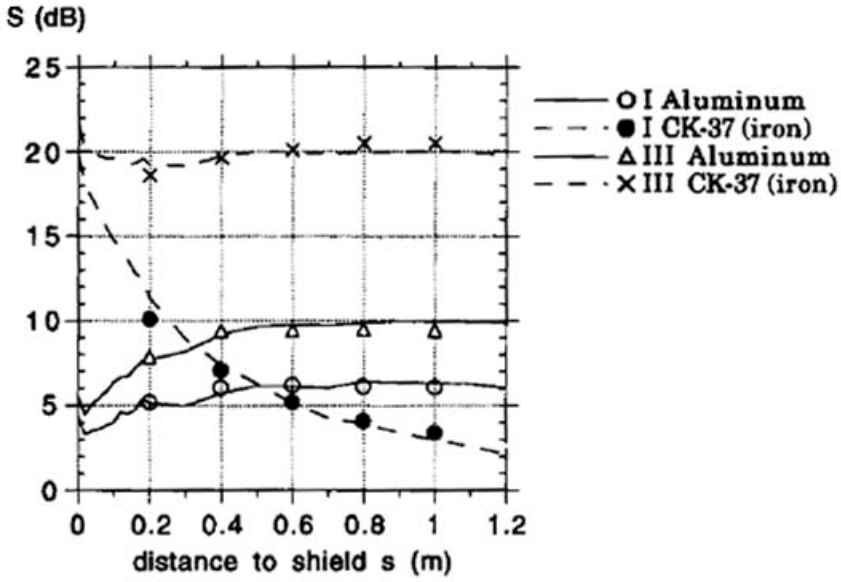
5.1.1 ตัวอย่างผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์กรณีแผ่นระนาบ (plane shield)

วัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีรูปร่างแผ่นระนาบ ความยาว 1 เมตร ความหนา 1 มิลลิเมตร ห่างวางจากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 10 เซนติเมตร แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีลักษณะเป็นเส้นกระแสยาวอนันต์ 3 เส้นวางเรียงกัน แต่ละเส้นกระแสมีขนาดเท่ากับ 1 A/m^2 วางห่างกันเป็นระยะ 20 เซนติเมตร โดยมีรูปร่างเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 20X20 มิลลิเมตร ดังรูปที่ 5-1 ขนาดขอบเขตภายนอก 20X20 เมตร จำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยเท่ากับ

1,548 อีลีเมนต์ จำนวนโนดเท่ากับ 3,206 โนด คำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ที่ความถี่ 50 Hz ในทิศทาง S ทุกๆระยะ 20 เซนติเมตรจากวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ



รูปที่ 5-1 การปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำในกรณีแผ่นระนาบ

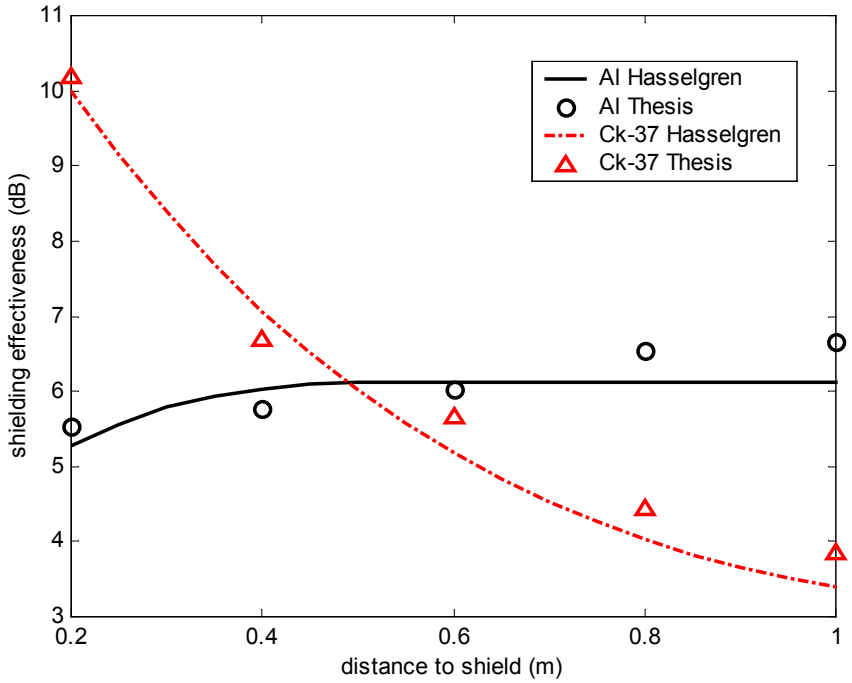


รูปที่ 5-2 ตัวอย่างผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ของ Hasselgren and Luomi [5]

โดยเป็นการเทียบระหว่างผลการคำนวณ (———) กับผลการทดลอง (X, Δ, O, ●)

I คือ กรณีวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กมีรูปร่างแผ่นระนาบ

II คือ กรณีวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กมีรูปร่าง 3 ด้านวางเหลื่อมกัน

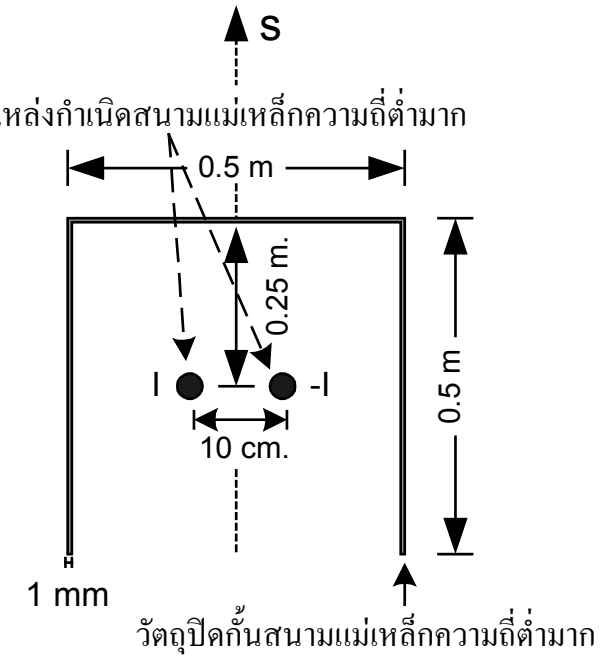


รูปที่ 5-3 ผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ในกรณีแผ่นระนาบโดยเทียบกับผลการทดลองของ Hasselgren and Luomi [5]

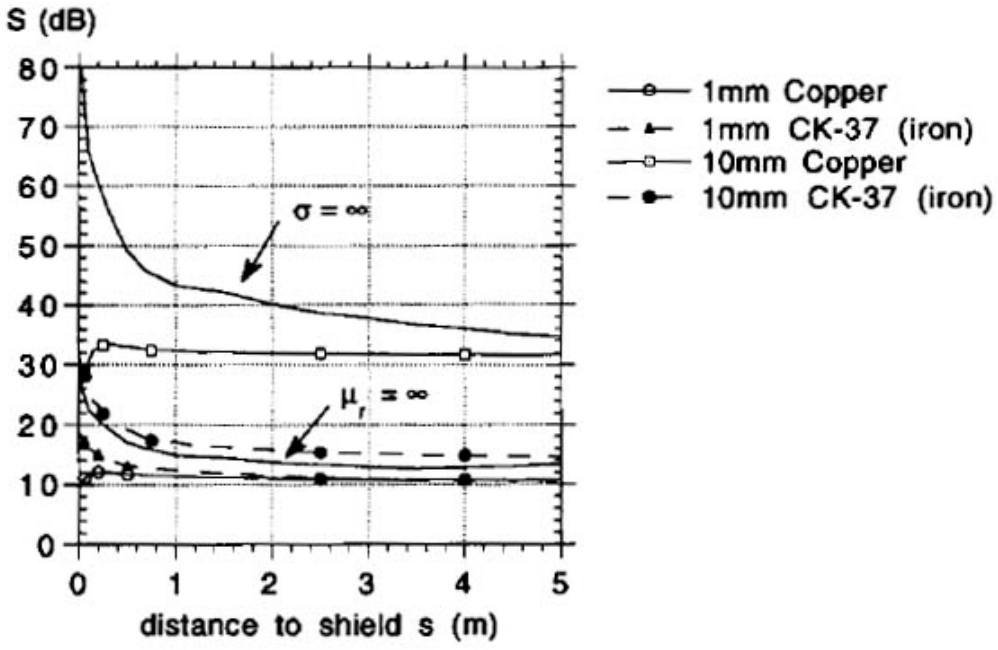
จากรูปที่ 5-3 แสดงผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ ในกรณีวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีรูปร่างแผ่นระนาบเทียบกับผลการทดลองของ Hasselgren and Luomi [5] โดยค่าประสิทธิการชีลด์ที่คำนวณจะมีค่าใกล้เคียงกับผลการทดลองของงานวิจัยที่นำเสนอ ความคลาดเคลื่อนของผลการคำนวณเกิดขึ้นจากขนาดของอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลย โดยตำแหน่งที่เกิดความคลาดเคลื่อนมากที่สุด คือ ตำแหน่งที่ห่างจากวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 1 เมตร

5.1.2 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเปิดด้านหนึ่ง

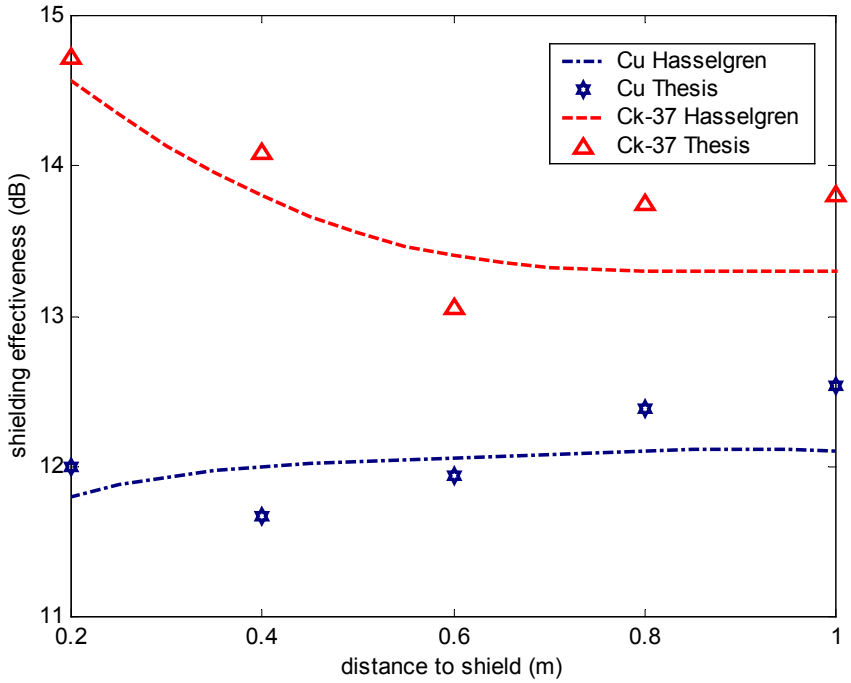
กำหนดให้วัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีความยาวแต่ละด้าน 50 เซนติเมตร ความหนา 1 มิลลิเมตร แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีลักษณะเป็นเส้นกระแสยาวอนันต์ 2 เส้น ขนาด 1 A/m^2 วางห่างกัน 10 เซนติเมตร ตรงกลางวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ ดังรูปที่ 5-4 ขอบเขตภายนอกมีขนาด 20x20 เมตร จำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยเท่ากับ 1,464 อีลีเมนต์ จำนวนโนดเท่ากับ 3,105 โนด คำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ที่ความถี่ 50 Hzในทิศทาง S ทุกๆระยะ 20 เซนติเมตรจากวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ



รูปที่ 5-4 การปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเปิดด้านหนึ่ง



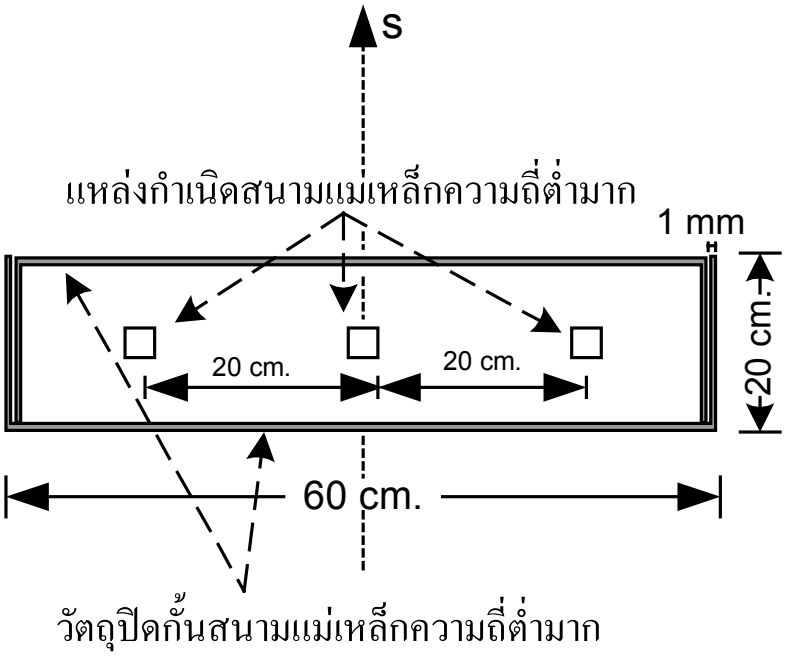
รูปที่ 5-5 ตัวอย่างผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ของ Hasselgren and Luomi [5]
กรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเปิดด้านหนึ่ง



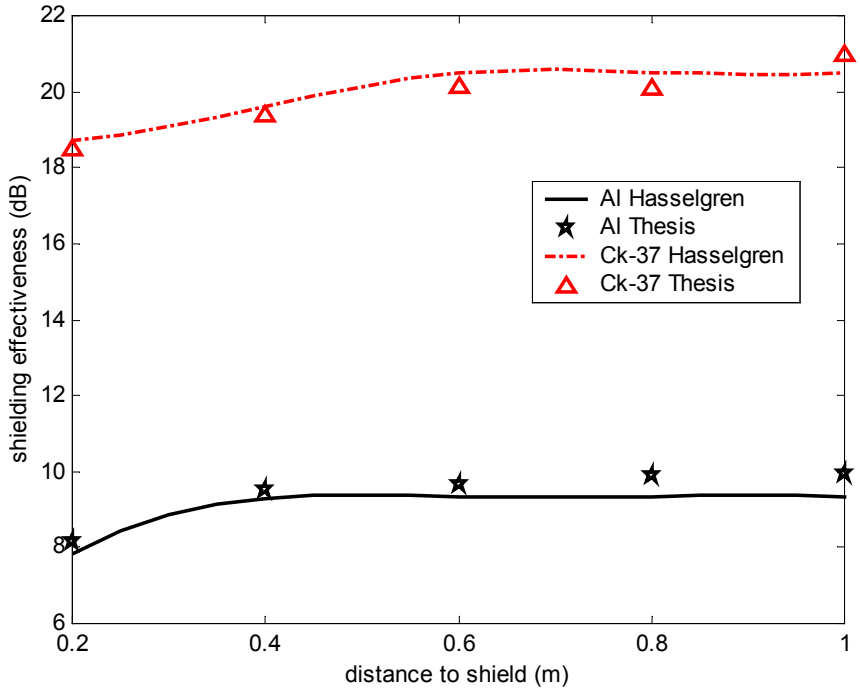
รูปที่ 5-6 ผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเปิดด้านหนึ่ง โดยเทียบกับผลการคำนวณของ Hasselgren and Luomi [5]

5.1.3 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเปิดด้านหนึ่ง 2 อันวางเหลื่อมกัน (two overlapping three-sided shields)

กำหนดให้วัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีขนาด 20X60 เซนติเมตร ความหนา 1 มิลลิเมตร วัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กทั้งสองวางเหลี่ยมกันเล็กน้อย แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำจะมีลักษณะเป็นเส้นกระแสยาวอนันต์ 3 เส้นวางเรียงกัน แต่ละเส้นกระแสมีขนาดเท่ากับ 1 A/m^2 แต่ละเส้นห่างกัน 20 เซนติเมตร มีรูปร่างเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 20X20 มิลลิเมตร และวางห่างจากวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 10 เซนติเมตร ดังรูป 5-7 ขอบเขตภายนอกมีขนาด 20X20 เมตร จำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยเท่ากับ 1,600 อีลีเมนต์ จำนวนโนด 3,273 โนดและคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ที่ความถี่ 50 Hz ในทิศทาง S ทุกๆ ระยะ 20 เซนติเมตรจากวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ



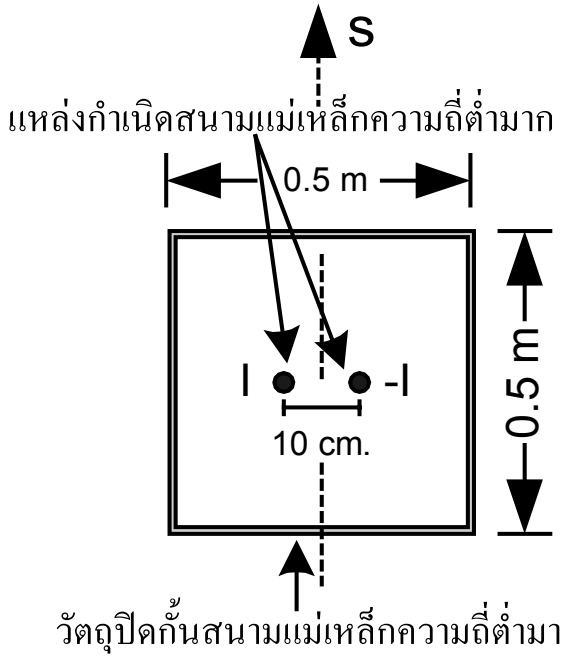
รูปที่ 5-7 การปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีลักษณะด้านเปิดด้านหนึ่ง 2 อันวางเหลื่อมกัน



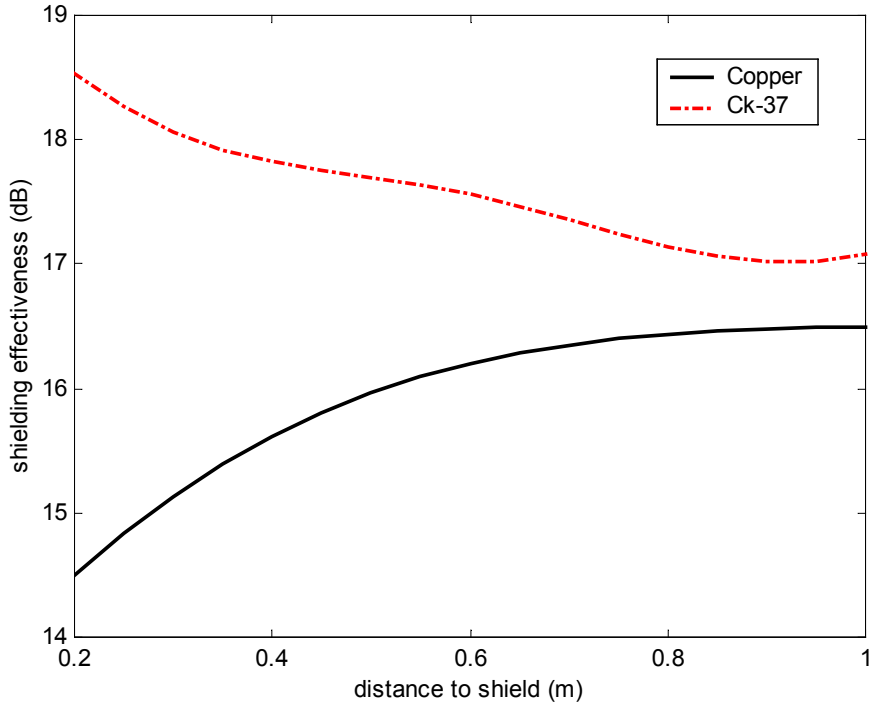
รูปที่ 5-8 ผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านเปิดด้านหนึ่ง 2 อันวางเหลื่อมกันโดยเทียบกับผลการทดลองของ Hasselgren and Luomi [5] (รูปที่ 5-2)

5.1.4 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉาก

กำหนดให้วัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีความยาวแต่ละด้าน 50 เซนติเมตร ความหนา 1 มิลลิเมตร แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีลักษณะเป็นเส้นกระแสยาวอนันต์ 2 เส้น ขนาด 1 A/m^2 วางห่างกัน 10 เซนติเมตร ตรงกลางวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำดังรูปที่ 5-9 ขอบเขตภายนอกมีขนาด 20x20 เมตร จำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยเท่ากับ 1,444 อีลีเมนต์ จำนวนโนดเท่ากับ 3,105 โนด และคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ที่ความถี่ 50 Hz ในทิศทาง S ทุกๆระยะ 20 เซนติเมตรจากวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ



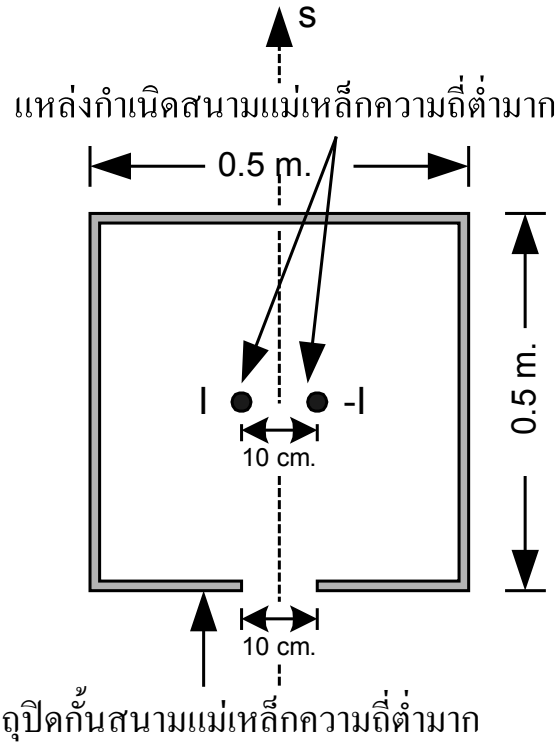
รูปที่ 5-9 การปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉาก



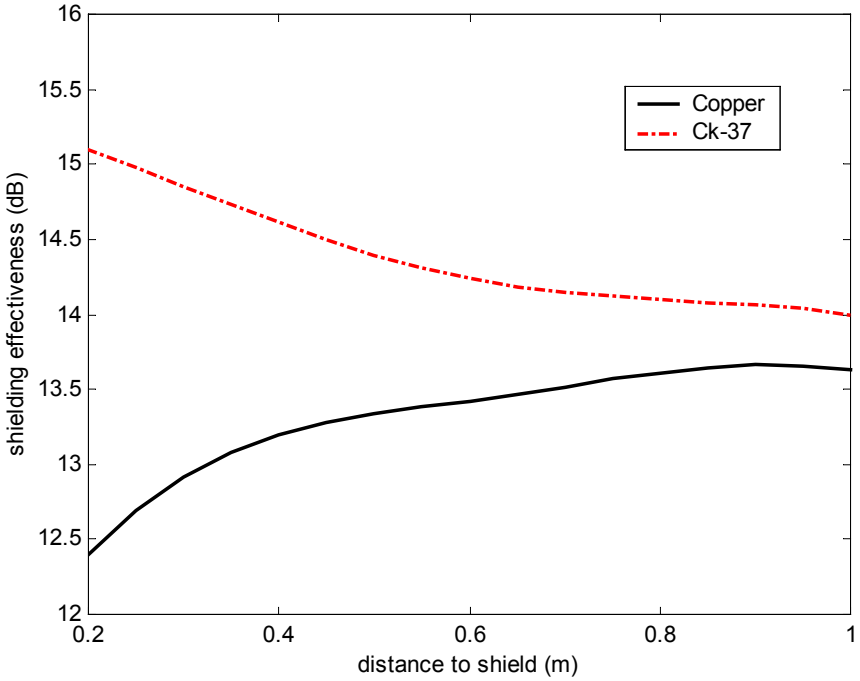
รูปที่ 5-10 ผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉาก

5.1.5 ตัวอย่างผลการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีการเจาะตรงกลางด้านหนึ่งเป็นช่องเปิด

กำหนดให้วัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีความยาวแต่ละด้าน 50 เซนติเมตร ความหนา 1 มิลลิเมตร และตรงกลางด้านหนึ่งของสี่เหลี่ยมมุมฉากมีการเจาะเป็นช่องเล็กๆ ขนาดความกว้าง 10 เซนติเมตร แหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีลักษณะเป็นเส้นกระแสยาวอนันต์ 2 เส้น ขนาด 1 A/m^2 วางห่างกัน 10 เซนติเมตร ตรงกลางวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ ดังรูปที่ 5-11 ขอบเขตภายนอกมีขนาด 20x20 เมตร จำนวนอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยเท่ากับ 1,448 อีลีเมนต์ จำนวนโนดเท่ากับ 3,105 โนด และคำนวณค่าประ-สิทธิผลการชีลด์ที่ความถี่ 50 Hz ในทิศทาง S ทุกๆ ระยะ 20 เซนติเมตรจากวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ



รูปที่ 5-11 การปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีการเจาะตรงกลางด้านหนึ่งเป็นช่องเปิด



รูปที่ 5-12 ผลการคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ในกรณีสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีการเจาะตรงกลางด้านหนึ่งเป็นช่องเปิด

5.2 ผลการศึกษาค่าปัจจัยที่มีผลต่อการปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

การศึกษาค่าปัจจัยที่มีผลต่อค่าประสิทธิผลการชีลด์ ได้แก่

1) ความซาบซึมได้ (permeability : μ_r)

2) สภาพนำไฟฟ้า (conductivity : σ)

3) ความถี่ (frequency : f)

4) ความหนา (thickness : d)

5)ระยะห่างของวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำจากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

รูปร่างของวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่นำมาทดสอบ คือ แผ่นระนาบ ซึ่งจะมีการกำหนดลักษณะต่างๆ เช่นเดียวกับการคำนวณสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำกรณีแผ่นระนาบ ดังรูปที่ 5-1 ซึ่งจะคำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ที่ความถี่ 50 Hzในแนวทิศทาง S ที่ระยะห่างจากวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 50 เซนติเมตร

5.2.1 ความซาบซึมได้

จุดประสงค์ของการศึกษาความซาบซึมได้ มีผลต่อค่าประสิทธิผลการชีลด์หรือไม่ โดยวัสดุที่จะนำมาใช้ทดสอบ คือ วัสดุแม่เหล็ก ซึ่งคุณสมบัติทางไฟฟ้าของวัสดุแม่เหล็ก คือ มีความซาบซึมได้สูง ผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลการชีลด์กับความซาบซึมได้แสดงดังตารางที่ 5-2

ตารางที่ 5-2 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลการชีลด์กับความซาบซึมได้

วัสดุ	ความซาบซึมได้ (μ_r)	ค่าประสิทธิผลการชีลด์ (dB)
Cobalt	250	2.13
Nickel	600	2.96
Mild steel	2,000	5.96
Iron	5,000	10.53
Silicon iron	7,000	12.24
Alloy	10,000	13.01

หมายเหตุ คุณสมบัติทางไฟฟ้าของวัสดุชนิดต่างๆอ้างอิงจาก Balanis [12]

จากตารางที่ 5-2 จะเห็นว่า วัสดุแม่เหล็กที่มีค่าซาบซึมได้สูง ค่าประสิทธิผลการชีลด์ที่คำนวณได้จะมีค่าสูงกว่าวัสดุแม่เหล็กที่มีค่าซาบซึมได้ต่ำ ซึ่งแสดงว่าวัสดุที่มีความซาบซึมได้สูง

สามารถที่จะปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำได้ดี ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า ค่าประสิทธิผลการชีลด์จะขึ้นอยู่กับค่าซาบซึมได้ของวัสดุที่นำมาทำหน้าที่ปิดกั้น หรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วย

5.2.2 สภาพนำไฟฟ้า

จุดประสงค์ของการศึกษาสภาพนำไฟฟ้ามีผลต่อค่าประสิทธิผลการชีลด์หรือไม่ วัสดุที่จะนำมาใช้ทดสอบ คือ วัสดุตัวนำ ซึ่งมีคุณสมบัติทางไฟฟ้า คือ สภาพนำไฟฟ้าสูง ผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลการชีลด์กับสภาพนำไฟฟ้าแสดงดังตารางที่ 5-3

ตารางที่ 5-3 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลการชีลด์กับสภาพนำไฟฟ้า

วัสดุ	สภาพนำไฟฟ้า : σ (S/m)	ค่าประสิทธิผลการชีลด์ (dB)
Zinc	$1.7*10^7$	2.21
Brass	$2.56*10^7$	2.84
Aluminium	$3.96*10^7$	5.85
Gold	$4.1*10^7$	6.18
Copper	$5.76*10^7$	11.02
Silver	$6.1*10^7$	11.32

หมายเหตุ คุณสมบัติทางไฟฟ้าของวัสดุชนิดต่างๆ อ้างอิงจาก Balanis [14]

จากตารางที่ 5-3 จะเห็นว่า วัสดุที่มีสภาพนำไฟฟ้าสูงๆ ค่าประสิทธิผลการชีลด์ที่คำนวณได้จะมีค่าสูงกว่าวัสดุที่มีสภาพนำไฟฟ้าต่ำ ซึ่งแสดงว่า สามารถที่จะปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำได้ดีกว่าวัสดุที่มีสภาพนำไฟฟ้าต่ำ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า ค่าประสิทธิผลการชีลด์จะขึ้นอยู่กับสภาพนำไฟฟ้าของวัสดุที่นำมาทำหน้าที่ปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

5.2.3 ความถี่

จุดประสงค์ของการศึกษาความถี่มีผลต่อค่าประสิทธิผลการชีลด์หรือไม่ โดยใช้วัสดุอลูมิเนียม (σ=$3.96*10^7$S/m) มาเป็นวัสดุทดสอบและวัดค่าประสิทธิผลการชีลด์ห่างจากวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 50 เซนติเมตรเช่นเดียวกับกรณีของความซาบซึมได้และสภาพนำไฟฟ้า ผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลการชีลด์กับความถี่แสดงได้ดังตารางที่ 5-4

ตารางที่ 5-4 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลการชีลด์กับความถี่

ความถี่ (Hz)	ค่าประสิทธิผลการชีลด์ (dB)
50	5.85
60	6.70
100	9.36
200	10.11
300	10.33
1,000	10.72

จากตารางที่ 5-4 จะเห็นว่า ถ้าเพิ่มความถี่ในการทดสอบค่าประสิทธิผลการชีลด์ให้มีค่ามากขึ้น ค่าประสิทธิผลการชีลด์ที่คำนวณได้จะมีค่ามากขึ้นด้วย ซึ่งหมายความว่า สามารถที่จะปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำได้ดีขึ้น ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า ความถี่จะมีผลต่อค่าประสิทธิผลการชีลด์ในการปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

5.2.4 ความหนา

จุดประสงค์ของหัวข้อนี้เป็นการศึกษาว่า ความหนามีผลต่อค่าประสิทธิผลการชีลด์หรือไม่ โดยใช้วัสดุอลูมิเนียม (σ=3.96*10^7S/m) มาเป็นวัสดุทดสอบ คำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ห่างจากวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 50 เซนติเมตร ผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลการชีลด์กับความหนาแสดงได้ดังตารางที่ 5-5

ตารางที่ 5-5 ความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลการชีลด์กับความหนา

ความหนา (mm)	ค่าประสิทธิผลการชีลด์ (dB)
1	5.85
2	7.43
3	9.97
4	10.12
5	10.58
6	11.07

จากตารางที่ 5-5 จะเห็นว่า ถ้าวัสดุที่นำมาทำหน้าที่ปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีความหนามากขึ้น ค่าประสิทธิผลการชีลด์ที่คำนวณได้จะมีค่าสูงขึ้น ซึ่งแสดงว่า สามารถที่จะปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำได้ดีขึ้น ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า ความหนาของวัสดุที่นำมาทำหน้าที่ปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำจะมีผลต่อค่าประสิทธิผลการชีลด์

5.2.5 ระยะห่างจากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

จุดประสงค์ของการศึกษาระยะห่างของวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ จากแหลงกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีผลต่อค่าประสิทธิผลการชีลด์หรือไม่ โดยใช้วัสดุอลูมิเนียม (σ=3.96*10^7S/m) มาเป็นวัสดุทดสอบ คำนวณค่าประสิทธิผลการชีลด์ห่างจากวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 50 เซนติเมตร ผลการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างค่าประสิทธิผลการชีลด์กับระยะห่างของวัตถุปิดกั้นสนามเหล็กความถี่ต่ำ แสดงได้ดังตารางที่ 5-6

ตารางที่ 5-6 ความสัมพันธ์ระว่างกับค่าประสิทธิผลการชีลด์กับระยะห่างจากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

ระยะห่างจากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ (cm)	**ค่าประสิทธิผลการชีลด์ (dB)**
10	5.85
20	6.72
30	7.02
40	7.42
50	7.83

จากตารางที่ 5-6 จะเห็นว่า เมื่อเปลี่ยนระยะการวางวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำจากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำให้ห่างมากขึ้น ค่าประสิทธิผลการชีลด์ที่คำนวณได้จะมีค่ามากขึ้นด้วย แต่ไม่ได้หมายความว่าจะสามารถปิดกั้นหรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำได้ดี เนื่องจากตำแหน่งที่ห่างจากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมาก การเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่เกิดขึ้นจะน้อย และตำแหน่งที่ห่างจากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำเป็นระยะไกล

บทที่ 6
บทสรุปและข้อเสนอแนะ

6.1 บทสรุป

1) วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ วิธีไฟไนต์อีลีเมนต์ใช้หาผลเฉลยสนามแม่-เหล็กความถี่ต่ำบริเวณวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ ส่วนวิธีเบาวน์ดารีอีลีเมนต์ใช้หาผลเฉลยสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำบริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่ง โดยการแบ่งโดเมนที่ต่อเนื่องบริเวณเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กออกเป็นอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้า และบริเวณรอบวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำหรืออวกาศว่างออกเป็นอีลีเมนต์สามเหลี่ยม บริเวณขอบเขตปัญหาเป็นตำแหน่งที่มีการรวมวิธีทั้งสองเข้าด้วยกัน ซึ่งค่าประสิทธิผลการชีลด์ที่การคำนวณได้จากแนวคิดข้างต้นจะมีค่าใกล้เคียงกับผลการคำนวณ และผลการทดลองค่าประสิทธิผลการชีลด์เมื่อเทียบกับงานวิจัยในอดีต ความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นจากขนาดของอีลีเมนต์ที่ใช้หาผลเฉลยจะมีขนาดค่อนข้างใหญ่ จึงทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนขึ้น ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นสูงสุด คือ 0.59 dB ณ ตำแหน่งที่ห่างจากวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ 1 เมตร

2) การแบ่งเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำออกเป็นอีลีเมนต์สี่เหลี่ยมผืนผ้าแทน อีลีเมนต์สามเหลี่ยม จะลดจำนวนอีลีเมนต์ในเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำลงได้

3) ค่าประสิทธิผลการชีลด์จะขึ้นอยู่กับความซาบซึมได้ สภาพนำไฟฟ้า ความถี่ ความหนาและระยะห่างของวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ จากแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำตามค่าประสิทธิผลการที่นำเสนอในหัวข้อที่ 5.2 นอกจากนี้ค่าประสิทธิผลการชีลด์ยังขึ้นอยู่กับรูปร่างของวัตถุที่นำมาทำหน้าที่ปิดกั้น หรือลดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำด้วยวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ ที่มีลักษณะปิดล้อมแหล่งกำเนิดสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ เช่น สี่เหลี่ยมมุมฉาก จะให้ค่าประสิทธิผลการชีลด์สูงกว่าวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำที่มีลักษณะเปิด เช่น แผ่นระนาบ ทั้งนี้อาจเกิดจากผลกระทบการเลี้ยวเบนของสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำบริเวณด้านหลังของแผ่นระนาบมายังบริเวณด้านหน้าของวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ

6.2 ข้อเสนอแนะ

ปัญหาการแบ่งอีลีเมนต์ด้วยโปรแกรม MSC/NASTRAN version 4.40 เนื่องจากวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมีลักษณะผิวบาง จึงทำให้โปรแกรม MSC/NASTRAN ไม่สามารถที่จะแบ่งอีลีเมนต์บริเวณเนื้อวัตถุปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำได้ ดังนั้นจึงควรที่จะมีการพัฒนาโปรแกรมการแบ่งอีลีเมนต์หรือใช้โปรแกรมแบ่งอีลีเมนต์อื่นแทนโปรแกรม MSC/NASTRAN

การสร้างทีมวิจัย

โครงการวิจัยเรื่อง “การคำนวณและออกแบบสร้างชีลด์ป้องกันสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำ” ดำเนินการวิจัยโดยคณะวิจัยดังนี้

1) รองศาสตราจารย์ ดร. สำรวย สังข์สะอาด คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เป็นหัวหน้าโครงการ และเป็นที่ปรึกษา

2) ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ทับทิม อ่างแก้ว อาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เป็นนักวิจัยรุ่นใหม่ และเป็นผู้วิจัยหลักในโครงการนี้

3) นายชัยรัตน์ วิเชียรมงคลกุล นิสิตปริญญาโท คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เป็นผู้ช่วยวิจัย และดำเนินโครงการวิจัยส่วนหนึ่งที่เป็นวิทยานิพนธ์ปริญญาโทในหัวข้อ “การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากรอบตัวนำบาง โดยวิธีไฟไนต์อีลีเม้นท์” และสำเร็จการศึกษาปริญญาโท (วศ.ม.) จากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เมื่อปี พ.ศ. 2544

รายการอ้างอิง

[1] สำรวย สังข์สะอาด และ ปิยะบุตร พฤกษานุบาล, "การศึกษาผลกระทบของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่มีต่ออุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์" รายงานวิจัย ชุดโครงการเมธีวิจัยอาวุโส สกว. เสนอต่อสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.), กันยายน 2544

[2] พรเทพ เชาวน์โอภาส สำรวย สังข์สะอาด และวิทวัส งามประดิษฐ์, "การป้องกันคลื่นรบกวนสนามแม่เหล็กไฟฟ้าความถี่ต่ำด้วยกล่องชีลด์", Proceeding of Seminaar on High Voltage Engineering and EMC, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University, 21-22 November 2000, pp. EMC 4.1-4.15

[3] Krawozyk, A. and Tegopoulos, J. A. Numerical Modeling of Eddy Currents, Clarendon Press Oxford, 1993.

[4] Schulz, R. B., Plantz, V. C., and Brush, D. R. Shielding theory and practice. IEEE Trans. Electromag. Compat.30 (August 1988) : 187-201.

[5] Hasselgren, L. and Luomi, J. Geometrical aspects of magnetic shielding at extremely low frequency. IEEE Trans. Electromag. Compat. 37 (August 1995) : 409-419.

[6] Pawluk, K. and Kucharska, M. Boundary-Integral Models of the Quasi-Stationary Field Computation in Electromagnetic Screens, IEEE Trans. Magnetics. 32 (May 1996) : 840-843.

[7] Wakao, S. and Onuki, T. Electromagnetic field computations by the Hybrid FE-BE method using edge element. IEEE Trans. Magnetic 29 (March 1993) : 1487-1490.

[8] Haus, H.A. and Melcher, J.R. Electromagnetic Fields and Energy. New Jersey : Prentice Hall, 1989.

[9] Jin, J. The Finite Element Method in Electromagnetics. New York : J. Wiley & Sons, 1993.

[10] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. The Finite Element Method. London : McGraw-Hill, 1989.

[11] El-Zafrany, Ali. Techniques of The Boundary Element Method. New York : Ellis horwood, 1993.

[12] Kythe, P.K. An Introduction to Boundary Element Method. Boca Raton, FL : CRC Press, 1995.

[13] ปราโมทย์ เตชะอำไพ. ศ. ดร. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2538.

[14] Balanis, C.A. Advanced Engineering Electromagnetics. J. Wiley & Sons, 1989.

[15] Becker, A.A. The Boundary Element Method in Engineering : A Complete course, London : McGraw-Hill, 1992.

ผลงานตีพิมพ์

1. ทับทิม อ่างแก้ว “การวิเคราะห์และชีลด์เพื่อปิดกั้นสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมาก”, Proceeding of the CEPT Seminar on Electrical Power Engineering in 2000 Vol. I, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University, 24-26 November 1999, EMC 17.
2. ชัยรัตน์ วิเชียรมงคลกุล, ทับทิม อ่างแก้ว และสำรวย สังข์สะอาด “การวิเคราะห์สนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมาก ด้วยวิธีไฮบริดไฟไนต์อีลีเม้นต์ร่วมกับบาวน์ดารีอีลีเมนต์”, Proceeding of Seminar on High Voltage Engineering and EMC, Faculty of Engineering, Chulalongkorn University, 21-22 November 2000, EMC 5.1-5.6.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

เอกลักษณ์เวกเตอร์

กำหนดให้ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นปริมาณเวกเตอร์ ในขณะที่ U และ V เป็นปริมาณสเกลาร์ ดังนั้น

$$\nabla V(U+V) = \nabla U + \nabla V \quad \text{(ก.1)}$$

$$\nabla(UV) = U\nabla V + V\nabla U \quad \text{(ก.2)}$$

$$\nabla(\frac{U}{V}) = \frac{\nabla(\nabla U) - U(\nabla V)}{V^2} \quad \text{(ก.3)}$$

$$\nabla V^n = nV^{n-1}\nabla V \quad (n = \text{จำนวนเต็ม}) \quad \text{(ก.4)}$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (B\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) \quad \text{(ก.5)}$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \nabla\cdot\vec{A} + \nabla\cdot\vec{B} \quad \text{(ก.6)}$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\nabla\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\nabla\times\vec{B}) \quad \text{(ก.7)}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\vec{A}) = V\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla V \quad \text{(ก.8)}$$

$$\nabla\cdot(\nabla V) = \nabla^2 V \quad \text{(ก.9)}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0 \quad \text{(ก.10)}$$

$$\nabla\times(\vec{A}+\vec{B}) = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\vec{B} \quad \text{(ก.11)}$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - B(\nabla\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} \quad \text{(ก.12)}$$

$$\nabla\times(V\vec{A}) = \nabla V\times\vec{A} + V(\nabla\times\vec{B}) \quad \text{(ก.13)}$$

$$\nabla\times(\nabla V) = 0 \quad \text{(ก.14)}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \quad \text{(ก.15)}$$

ภาคผนวก ข.

การอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบเกาส์ควอดราเจอร์

ข.1 เกาส์ควอดราเจอร์ 1 มิติ (One-Dimensional Gauss Quadrature)

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \cong \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i) \qquad \text{(ข.1)}$$

โดยที่ n = จำนวนจุดเกาส์

ξ_i = ตำแหน่งจุดเกาส์

w_i = สัมประสิทธิ์การถ่วงน้ำหนัก

ค่าเชิงตัวเลขของ ξ_i และ w_i มีค่าดังตารางที่ ข.1 สำหรับ $n = 1,2,3,...,12$

ข.2 ลอการิทึมเกาส์ควอดราเจอร์ 1 มิติ (One-Dimensional Logarithmic Gauss Quadrature)

$$I = \int_{0}^{1} \ln(\frac{1}{r}) f(\xi)d\xi \cong \sum_{i=1}^{n} w_i f(\xi_i) \qquad \text{(ข.2)}$$

ค่าเชิงตัวเลขของ ξ_i และ w_i มีค่าดังตารางที่ ข.2 สำหรับ $n = 2,3,...,10$

ข.3 เกาส์ควอดราเจอร์ 2 มิติ (Two-Dimensional Gauss Quadrature)

กรณีอีลีเมนต์สี่เหลี่ยม

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)d\xi d\eta \cong \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j)w_i w_j \qquad \text{(ข.3)}$$

ค่าเชิงตัวเลขของ ξ_i, η_j, w_i และ w_j มีค่าดังตารางที่ ข.1 สำหรับ $n = 1,2,3,...,12$

ตาราง ข.1

$\pm\xi_i$	w_i	$\pm\xi_i$	w_i
n=1		**n=8**	
0.000000000000000	0.000000000000000	0.183434642495650	0.362683783378362
n=2		0.525532409916329	0.313706645877887
0.577350269189626	1.000000000000000	0.796666477413267	0.222381034453374
n=3		0.960289856497536	0.101228536290376
0.000000000000000	0.888888888888888	**n=9**	
0.774596669241483	0.555555555555555	0.000000000000000	0.330239355001260
n=4		0.324253423403809	0.312347077040003
0.339981043584856	0.652145154862546	0.613371423700590	0.260610696402935
0.861136311594053	0.347854854137457	0.836031107326636	0.180648160694857
n=5		0.968160239507626	0.081274388361576
0.000000000000000	0.568888888888889	**n=10**	
0.538469310105683	0.478628670499366	0.148874338981361	0.295524224714753
0.906179845938664	0.236926885056189	0.433395394129247	0.269266719309996
n=6		0.679409568299024	0.219086362515982
0.238619186083197	0.467913934572691	0.865063366688985	0.149451349150581
0.661209386466265	0.360761573048139	0.973906528517172	0.066671344308688
0.932469514203152	0.171324492379170	**n=12**	
n=7		0.125233408511469	0.249147045813403
0.000000000000000	0.417959183673469	0.367831498998180	0.233492536538355
0.405845151377397	0.381830050505119	0.587317954286617	0.203617426723066
0.741531185599394	0.279705391489277	0.769902674194305	0.160078328543346
0.949107912342759	0.129484966168870	0.904117256370475	0.106939325995318
		0.981560634246719	0.047175336386512

ตาราง ข.2

n	ξ_i	w_i	n	ξ_i	w_i
2	0.11200880	0.71853931	8	0.13323243(-1)	0.16441660
	0.60227691	0.28146068		0.79750427(-1)	0.23752560
3	0.63890792(-1)	0.51340455		0.19787102	0.22684198
	0.36899706	0.39198004		0.35415398	0.17575408
	0.76688030	0.94615406(-1)		0.52945857	0.11292402
4	0.41448480(-1)	0.38346406		0.70181452	0.57872212(-1)
	0.24527491	0.38687532		0.84937932	0.20979074(-1)
	0.55616545	0.19043513		0.95332645	0.36864071(-2)
	0.84898239	0.39225487(-1)	9	0.10869338(-1)	0.14006846
5	0.29134472(-1)	0.29789346		0.64983682(-1)	0.20977224
	0.17397721	0.34977622		0.16222943	0.21142716
	0.41170251	0.23448829		0.29374996	0.17715622
	0.67731417	0.98930460(-1)		0.44663195	0.12779920
	0.89477136	0.18911552(-1)		0.60548172	0.78478879(-1)
6	0.216344005(-1)	0.23876366		0.75411017	0.39022490(-1)
	0.12958339	0.30828657		0.87726585	0.13865290(-1)
	0.31402045	0.24531742		0.96225056	0.24080402(-2)
	0.53865721	0.14200875	10	0.90425944(-2)	0.12095474
	0.75691533	0.55454622(-1)		0.53971054(-1)	0.18636310
	0.92266884	0.10168958(-1)		0.13531134	0.19566066
7	0.16719355(-1)	0.19616938		0.24705169	0.17357723
	0.10018568	0.27030264		0.38021171	0.13569597
	0.24629424	0.23968187		0.52379159	0.93647084(-1)
	0.43346349	0.16577577		0.66577472	0.55787938(-1)
	0.63235098	0.88943226(-1)		0.79419091	0.27159893(-1)
	0.81111862	0.33194304(-1)		0.89816102	0.95151992(-2)
	0.94084816	0.59327869(-2)		0.96884798	0.16381586(-2)

ภาคผนวก ค.

ตัวอย่างการคำนวณปัญหาศักย์เวกเตอร์ด้วยวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

จุดประสงค์ของภาคผนวกนี้จะเป็นการแสดงให้เห็นประสิทธิภาพและความแม่นตรงของวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในการนำมาหาผลเฉลยของปัญหาต่างๆ ซึ่งประกอบด้วย

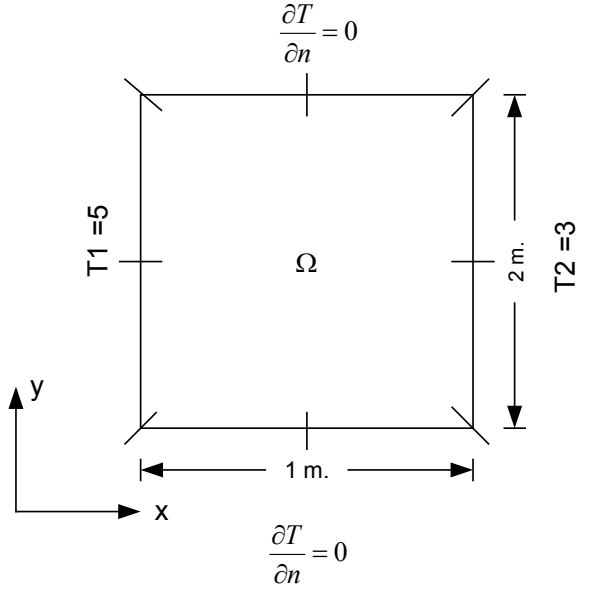
ตัวอย่างที่ 1. ปัญหาการนำความร้อน (heat conduction problem)

ตัวอย่างที่ 2. ปัญหาการไหลของความร้อน (heat flow problem)

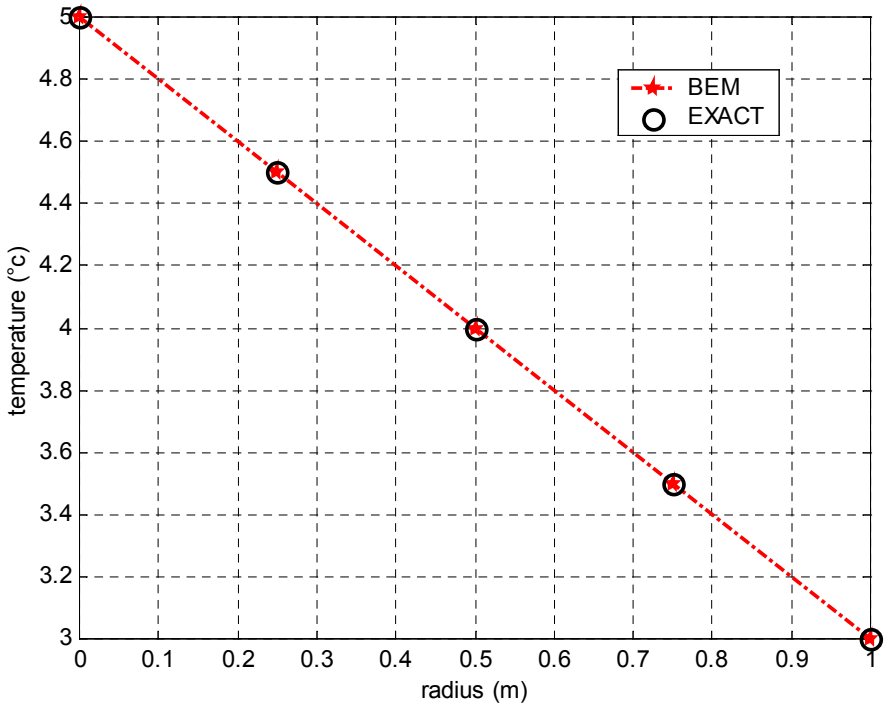
ตัวอย่างที่ 1. ปัญหาการนำความร้อน (Becker, 1992)

จุดประสงค์ของตัวอย่างนี้ คือ เป็นการทดสอบความถูกต้องของวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ในการคำนวณอุณหภูมิที่เกิดขึ้นบนแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมโดยเทียบกับวิธีเชิงวิเคราะห์ โดยประมาณผลเฉลยคำตอบด้วยฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง

กำหนดให้แผ่นโลหะสี่เหลี่ยมมีขนาดความกว้าง 2 เมตร ยาว 1 เมตรและมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้ $T_1 = 5°C$ $T_2 = 3°C$ $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ ดังรูป ค.1 ค่าสภาพนำไฟฟ้าเท่ากับ 2.5 S/m จำนวนอีลีเมนต์ที่ถูกแบ่งบนขอบเขตที่ต่อเนื่องของแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมเท่ากับ 8 อีลีเมนต์



รูปที่ ค.1 ลักษณะปัญหาการนำความร้อนบนแผ่นโลหะสี่เหลี่ยม



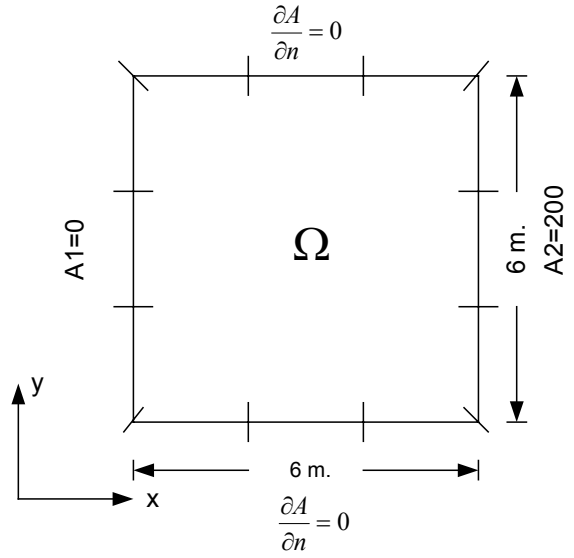
รูปที่ ค.2 เปรียบเทียบผลการคำนวณอุณหภูมิระหว่างวิธีเชิงวิเคราะห์กับวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์

จากรูปที่ ค.2 เป็นผลการคำนวณอุณหภูมิบนแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์และวิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์ เมื่อเปรียบเทียบผลการคำนวณที่ได้จากวิธีทั้งสอง ปรากฏว่าจะตรงกัน ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า วิธีบาวน์ดารีอีลีเมนต์เป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพ มีความแม่นตรงสูงและเหมาะสมที่จะนำมาใช้หาผลเฉลยปัญหาสนามแม่เหล็กความถี่ต่ำมากที่บริเวณเงื่อนไขขอบเขตเปิดโล่งในวิทยานิพนธ์นี้

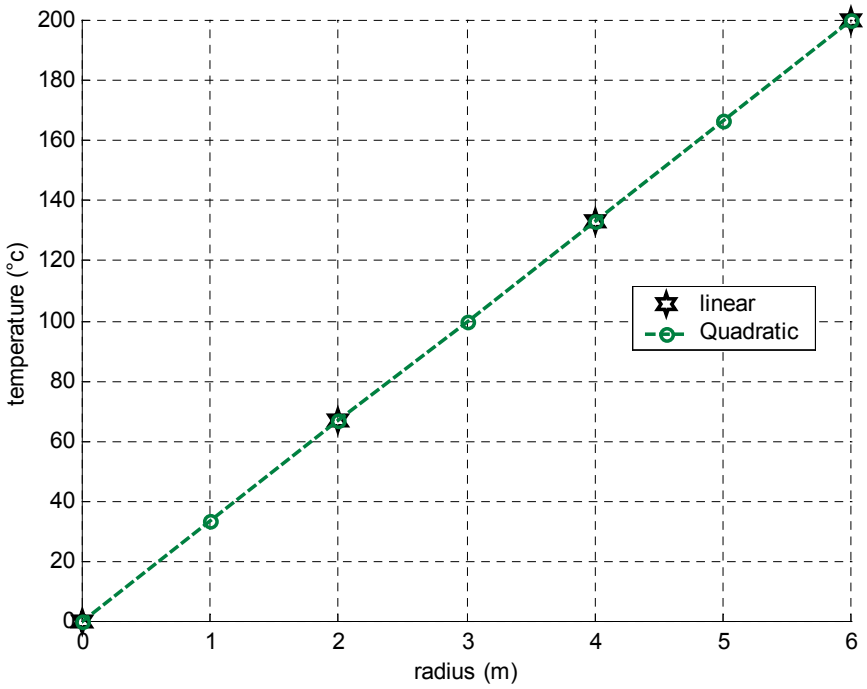
ตัวอย่างที่ 2. ปัญหาการไหลของความร้อน (Kythe,1995)

จุดประสงค์ของตัวอย่างนี้ คือ จะเป็นการแสดงให้เห็นว่า การประมาณผลเฉลยคำตอบด้วยฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง (quadratic element) จะให้ผลเฉลยคำตอบที่มีความละเอียดมากกว่าการใช้ฟังก์ชันรูปร่างเชิงเส้น (linear element คือ ประมาณผลเฉลยคำตอบที่เกิดขึ้นที่ตำแหน่งจุดปลายบนแต่ละอีลีเมนต์) ตัวอย่างที่นำมาแสดง คือ การคำนวณอุณหภูมิของปัญหาการไหลความร้อนบนแผ่นโลหะสี่เหลี่ยม

กำหนดให้แผ่นโลหะสี่เหลี่ยมมีขนาดความกว้าง 6 เมตร ยาว 6 เมตรและมีเงื่อนไขขอบเขตดังนี้ $A_1 = 0°C$ $A_2 = 200°C$ $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ ดังรูปที่ ค.3 จำนวนอีลีเมนต์ที่ถูกแบ่งบนขอบเขตที่ต่อเนื่องของแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมเท่ากับ 12 อีลีเมนต์



รูปที่ ค.3 ลักษณะปัญหาการไหลของความร้อนบนแผ่นโลหะสี่เหลี่ยม



รูปที่ ค.4 เปรียบเทียบผลการคำนวณอุณหภูมิระหว่างการประมาณคำตอบด้วยฟังก์ชันชนิดเชิงเส้นกับฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง

จากรูป ค.4 เป็นผลการคำนวณของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นบนแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมด้วยวิธีบาวน์ดารี-อีลีเมนต์ ซึ่งเปรียบเทียบการประมาณผลเฉลยคำตอบระหว่างฟังก์ชันเชิงเส้นกับฟังก์ชันรูปร่างอันดับสอง ปรากฏว่าผลการคำนวณที่บนตำแหน่งโนดเดียวกันอุณหภูมิที่ได้จะมีค่าตรงกัน เช่นผลการคำนวณที่ตำแหน่ง 0, 2 , 4 และ 6 เมตรตามลำดับ แต่การประมาณผลเฉลยคำตอบด้วยฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองจะให้ผลการคำนวณที่ตำแหน่ง 1, 3 และ 5 เมตรด้วย โดยตำแหน่งดังกล่าว คือตำแหน่งที่โนดกึ่งกลางบนแต่ละอีลีเมนต์ จากตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่าการประมาณผลเฉลยคำตอบด้วยฟังก์ชันรูปร่างอันดับสองจะให้ผลการคำนวณที่ละเอียดกว่าฟังก์ชันเชิงเส้น