



รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ: ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ปัญหา
การไหลผ่านของของไหลอุดมคติที่อัดตัวยากในท่อนของตัวแปรง่าย

โดย

ดร.เพ็ญพบ มนต์นวลปรางค์

มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์ จ.ปทุมธานี

30 มิถุนายน 2547

สัญญาเลขที่ TRG4580075

รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ: ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ปัญห
การไหลผ่านของของไหลอุดมคติที่อัดตัวยากในท่อนของตัวแปรง่าย

ดร.เพียงพบ มนต์หาวลปรารค์

มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์
จ.ปทุมธานี

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย
(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกว. ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

กิตติกรรมประกาศ

การวิจัยนี้ได้รับความอนุเคราะห์ด้านงบประมาณจากสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย และ ขอขอบคุณ รศ. ดร.นิโคลัย มอสกิน สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จ.นครราชสีมา ที่ได้ให้คำปรึกษาและแนะนำผู้วิจัยตลอดมา ตลอดจนขอขอบคุณโปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏวไลยอลงกรณ์ ในพระบรมราชูปถัมภ์ จ.ปทุมธานี ที่อำนวยความสะดวกในการวิจัยนี้

เพียงพบ มนต์นวลปรางค์
30 มิถุนายน 2547

บทคัดย่อ

รหัสโครงการ : TRG4580075
ชื่อโครงการ : ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ปัญหาคาร์ไหลผ่านของไหล
อุดมคติที่อัดตัวยากในทอมของตัวแปรง่าย
ชื่อนักวิจัย : ดร.เพียงพบ มนต์นวลปรังค์
ที่ติดต่อ : peiangpb@math.sut.ac.th
ระยะเวลาโครงการ : 2 ปี

การศึกษาขั้นตอนเชิงตัวเลขกับปัญหาเงื่อนไขขอบในสมการออยเลอร์และความเร็ววนถูกกำหนดให้ไหลเข้าในขอบของโดเมน โดยที่สมการออยเลอร์ถูกดำเนินการในทอมของฟังก์ชันเส้นสายธารและความเร็ววน ซึ่งคุณสมบัติอนุรักษ์ของความเร็วนตลอดเส้นสายธารเป็นสิ่งที่ใช้ในการสร้างขั้นตอนเชิงตัวเลข ทั้งกรณีการไหลเข้าและไหลออกในบางส่วนของขอบโดเมน การลู่ออกของสมการผลต่างสืบเนื่องเข้าสู่ผลเฉลยที่แม่นยำตรงแสดงการทดสอบปัญหาโดยเปรียบเทียบกับผลจากการคำนวณกับผลเฉลยที่แม่นยำตรงตามการจัดลำดับของตารางสี่เหลี่ยม

ขั้นตอนเชิงตัวเลขแสดงโดยตัวอย่างของของไหลที่ไหลสม่ำเสมอผ่านตลอดช่องทางในสองมิติทั้งช่องทางการไหลเข้าและออกจากขอบโดเมน การวิเคราะห์ผลการวิจัยแสดงถึงประสิทธิภาพของวิธีการดำเนินการวิจัยที่กำหนดความเร็ววนให้ไหลเข้าในบางส่วนของขอบของโดเมน

คำหลัก : ของไหลอุดมคติที่อัดตัวยาก, สมการออยเลอร์, ปัญหาคาร์ไหลผ่าน

Abstract

Project Code : TRG4580075

Project Title : Numerical Method for Solving the Flowing-Through Problem of Ideal Incompressible Fluid Flow in Term of Primitive Variables

Investigator : Peiangpob Mounnamprang
Rajabhat University Valaya-Alongkorn Under Royal Patronage

E-mail Address : peiangpb@math.sut.ac.th

Project Period : 2 Year

A numerical algorithm to study the boundary value problem in which the governing equations are the steady Euler equations and the vorticity is given on the inflow parts of the domain boundary is developed. The Euler equations are implemented in terms of the streamfunction and vorticity. The property of conservation of vorticity along stream line is utilized to construct numerical algorithm in the case of several inflow and outflow parts of domain boundary. The convergence of the finite-difference equations to the exact solution is shown experimentally for the test problem by comparing the computational results with the exact solution on the sequence of grids.

The numerical algorithm is illustrated with several examples of steady flow through a two-dimensional channel with two inflow and outflow parts of boundary. The analysis of calculations shows strong dependence of the flow structure on the vorticity given at the inflow parts of the boundary.

Keywords : ideal incompressible fluid, Euler equations, Flowing through problem

สารบัญ

	หน้า
กิตติกรรมประกาศ	(1)
บทคัดย่อภาษาไทย	(2)
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	(3)
สารบัญ	(4 -7)
บทที่ 1 บทนำ.....	1
ความสำคัญและที่มาของปัญหา.....	1
วัตถุประสงค์.....	3
การดำเนินการวิจัย.....	3
ข้อตกลงเบื้องต้น.....	3
ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย.....	3
บทที่ 2 วิธีดำเนินการวิจัย.....	5
ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่ของไหลไหลเข้าและออกในช่องทางเดียว.....	5
สมการออยเลอร์ในเทอมของตัวแปรง่าย.....	6
ปัญหาในสองมิติทั่วไปในพิกัดเชิงเส้นโค้ง.....	6
ขั้นตอนการดำเนินการหาผลเฉลย.....	9
วิธีการ Stabilizing Correction.....	10
ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่ของไหลไหลเข้าและออกในสองช่องทาง.....	12
สมการออยเลอร์ในเทอมของตัวแปรง่าย.....	12
บทที่ 3 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล.....	16
การลู่เข้าของสมการออยเลอร์กับผลเฉลยที่แท้จริงสำหรับการไหลในช่องทางเดียว.....	16
รูปของช่องผนังโค้งและเงื่อนไขขอบเขต.....	20
ผลเฉลยเชิงตัวเลข.....	21
การลู่เข้าของสมการออยเลอร์กับผลเฉลยที่แท้จริงสำหรับการไหลในสองช่องทาง.....	23

สารบัญต่อ

หน้า

โดเมนสองช่องทางและเงื่อนไขขอบ.....	24
ผลเฉลยเชิงตัวเลข.....	25
บทที่ 4 สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ.....	28
สรุปผล.....	28
อภิปรายผล.....	29
ข้อเสนอแนะ.....	29
บรรณานุกรม.....	30
Out put จากโครงการวิจัยที่ได้รับทุน สกว.	31
ภาคผนวก.....	33

สารบัญภาพ

รูปที่	หน้า
1.1 โดเมน.....	2
2.1 โดเมนตามธรรมชาติและโดเมนที่ใช้ในการคำนวณ.....	7
2.2 การดำเนินการของสมการผลต่างสลับเนื่อง.....	11
2.3 โดเมนทางธรรมชาติ.....	12
2.4 โดเมนที่ศึกษา.....	13
2.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน.....	15
3.1 การทดสอบปัญหาการไหลผ่านโดเมน.....	16
3.2 ความดันจากผลเฉลยของสมการ (3.5).....	20
3.3 ความดันจากผลเฉลยของสมการ (3.9).....	20
3.4 โดเมนช่องผนังโค้ง.....	22
3.5 เส้นความดันสำหรับ $a_\omega = 5.0, K = 1$	22
3.6 เส้นความดันสำหรับ $a_\omega = 5.0, K = 2$	22
3.7 เส้นสายธารสำหรับ $a_\omega = 5.0, K = 1$	22
3.8 เส้นสายธารสำหรับ $a_\omega = 5.0, K = 2$	22
3.9 ความดัน เมื่อ $x = 1.5$	22
3.10 ความดันใต้ขอบ.....	22
3.11 โดเมนสองช่องทางการไหลเข้าและออก.....	24
3.12 เส้นสายธาร เส้นความดัน.....	25
3.13 เส้นสายธาร เส้นความดัน.....	26
3.14 เส้นสายธาร เส้นความดัน.....	26
3.15 เส้นสายธาร เส้นความดัน.....	26

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
3.1 ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของฟังก์ชันเส้นสายธารและ ความเร็ววน และการทดสอบอัตราการใช้.....	19
3.2 ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณ์ของฟังก์ชันเส้นสายธารและ ความเร็ววน และการทดสอบอัตราการใช้.....	19
3.3 นอร์มอานต์ของค่าคลาดเคลื่อนสำหรับฟังก์ชันเส้นสายธารและความเร็ววน อัตราของการเข้าสู่ผลเฉลี่ยที่แท้จริงสำหรับการทดสอบปัญหา.....	23

บทที่ 1

บทนำ

ความสำคัญที่มาของปัญหา

การจำลองปัญหาทางกลศาสตร์ของไหลเป็นสิ่งที่ซับซ้อน ประกอบกับวิธีการเชิงตัวเลข ในทุกวิธีจะมีความยุ่งยาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อต้องดำเนินการกับปัญหาของสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น (non-linear partial differential equation) อีกทั้งปัญหามีจำนวนมาก ของกลศาสตร์ของไหลได้ศึกษาการเคลื่อนที่ของของไหลรอบโดเมนและการไหลภายในโดเมน เมื่อขอบของโดเมนเป็นของแข็งที่ของไหลไม่สามารถไหลผ่านขอบได้ ซึ่งมีงานวิจัยจำนวนมากศึกษาปัญหาเหล่านี้แล้ว แต่มีปัญหาคือผู้วิจัยสนใจคือปัญหาการเคลื่อนที่ของของไหลที่เคลื่อนที่ผ่านโดเมนที่เป็นช่องทางเปิด โดยที่ขอบโดเมนแบ่งเป็น 3 ส่วนคือ ส่วนที่ของไหลไหลเข้าขอบของโดเมน (inflow parts) ไหลออกขอบของโดเมน (outflow parts) และส่วนที่ของไหลไม่สามารถไหลผ่านขอบของโดเมน (impermeable parts) ขอบของโดเมน ซึ่งผู้วิจัยเรียกว่า ปัญหาการไหลผ่านตลอด (Flowing-through Problem) ดังรูปที่ 1.1 ประกอบกับการตรวจสอบปัญหาค่าเงื่อนไขขอบเริ่มต้นสำหรับสมการออยเลอร์ ได้มีการศึกษาโดย N.M. Gunter ในปี ค.ศ. 1927 และในปี ค.ศ. 1929 L. Lichtenstein ได้ศึกษาสมการออยเลอร์กับกรณีเมื่อของเหลวที่ไหลอยู่ในภาชนะบรรจุที่มีผนังขอบที่ของเหลวไม่สามารถไหลผ่านผนังขอบได้ ในปี ค.ศ. 1956 N.E. Kochin เป็นนักวิจัยคนแรกที่ศึกษาปัญหานี้ สำหรับปัญหาการไหลที่ไม่คงที่ในสองมิติ และ ในปี ค.ศ. 1980 โดย A.V. Kazhikhov และ V.V. Ragulin ทำการศึกษาการมีอยู่จริงและมีเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยของปัญหาค่าขอบเขต เมื่อส่วนของของไหลที่ไหลผ่านขอบกำหนดด้วยประกอบทั้งสามของความเร็วหรือตัวประกอบปกติของความเร็วและสองตัวประกอบสัมผัสของความเร็ววน และสำหรับส่วนของของไหลที่ไหลผ่านออกจากขอบกำหนดให้เป็นตัวประกอบปกติของความเร็วหรือความดัน

ในปี ค.ศ. 1990, S.N. Antontsev, A.V. Kazhikhov ได้ทำการพิสูจน์การมีอยู่จริง ผลการวิจัยพบว่าสำหรับปัญหาของของเหลวอุดมคติที่เคลื่อนที่ไหลผ่านตลอดขอบโดเมน เมื่อผลรวมเวกเตอร์ของความเร็วถูกกำหนดให้ส่วนของไหลไหลเข้าขอบเขต โดยที่ตัวประกอบปกติหรือความดันถูกกำหนดในส่วนที่ของไหลไหลออกจากขอบ

ปัญหาการวิจัยนี้ไม่เพียงเป็นปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจแต่ยังเกี่ยวข้องกับปัญหาต่างๆทางฟิสิกส์ด้วย โดยผู้วิจัยสนใจการวิจัยนี้เนื่องจากการพัฒนาควบคู่กับวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับปัญหาค่าขอบเขต โดยคุณสมบัติของการอนุรักษ์ของความเร็ววนบนเส้นสายธารได้นำไปใช้ในการสร้างขั้นตอนเชิงตัวเลขในกรณีของสองมิติ เมื่อในการไหลหมุนวน

ถูกกำหนดให้ไหลเข้าในส่วนขอบโดเมน ประกอบกับประสิทธิภาพของเครื่องคอมพิวเตอร์ในปัจจุบัน และการใช้ความรู้พื้นฐานทางภาษาคอมพิวเตอร์ จึงเป็นสิ่งจูงใจที่ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะพัฒนาวิธีการเชิงตัวเลข โดยวิธีการผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method) ในการศึกษาสมการออยเลอร์ ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นดังสมการ ดังสมการ

$$(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla P = 0, \quad \bar{x} \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0.$$

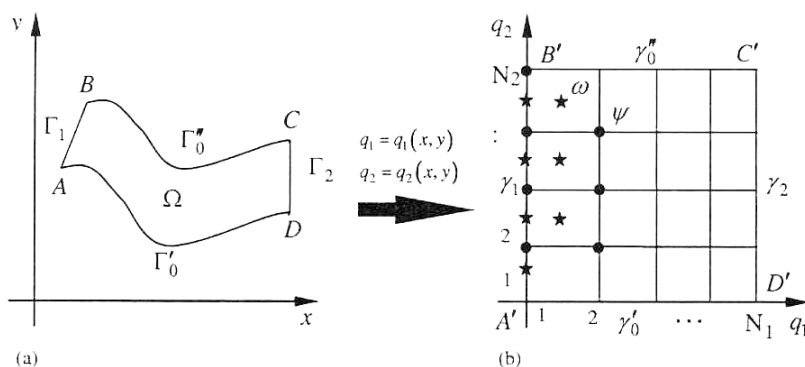
เมื่อ u เป็นความเร็ว

P เป็นความดัน

∇ เป็นตัวกระทำเกรเดียนท์

และ Ω เป็นโดเมน

จากสมการออยเลอร์ กับปัญหาการไหลของของไหลที่อัดตัวยากไหลผ่านในอาณาบริเวณช่องทางเปิด (Flowing Through Problem) ดังรูป (1a)



รูป 1

รูปที่ 1.1 โดเมน

เมื่อกำหนดให้ Γ_1 เป็นช่องการไหลเข้าของโดเมน

และ Γ_2 เป็นช่องการไหลออกของโดเมน

และเงื่อนไขขอบเริ่มต้นกับเงื่อนไขขอบ

โดย S_l^1 เป็นเส้นสัมผัสสองเส้นประกอบกันของเวกเตอร์ความเร็ววนไหลเข้าบริเวณบางส่วนของขอบเขต

และ S_m^2 เป็นส่วนประกอบปกติของเวกเตอร์ความเร็วไหลออกบริเวณบางส่วนของขอบเขต

$$S^0 : (\bar{u}, \bar{n}) = 0, (\bar{x}, t) \in S^0$$

$$S_l^1 : (\bar{u}, \bar{n}) = g_l < 0, (\bar{\omega}, \tau_i) = h_i, i = 2, 3, (\bar{x}, t) \in S_l^1, l = 1, 2, \dots$$

$$S_m^2 : (\bar{u}, \bar{n}) = l > 0, (\bar{x}, t) \in S_m^2, m = 1, 2, 3, \dots$$

สาเหตุสำคัญที่ทำให้ผู้วิจัยสนใจในการทำวิจัยในปัญหานี้ เนื่องจากเป็นงานวิจัยที่ศึกษาปัญหาในระบบ 2 มิติ ซึ่งถ้าจะขยายการศึกษาเป็นระบบ 3 มิติ จะเป็นปัญหาที่ยุ่งยากมาก ผู้วิจัยจึงใช้วิธีการดำเนินการวิจัยที่ผู้วิจัยสนใจคือวิธีการเปลี่ยนตัวแปรในเทอมของตัวแปรง่าย (Primitive Variables) ที่ประกอบด้วย ความเร็ววนและฟังก์ชันเส้นสายธาร ซึ่งสะดวกในการแก้ปัญหานี้ เพื่อจะได้ขยายเป็นระบบ 3 มิติ ในการทำวิจัยต่อไปอีก ผู้วิจัยจึงสนใจที่จะดำเนินการวิจัยในปัญหานี้

วัตถุประสงค์

- 1 เพื่อพัฒนาระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับปัญหาการไหลของของไหลที่อัดตัวยากไหลผ่าน ตลอดจนอาณาบริเวณที่กำหนด กับเงื่อนไขขอบ ในเทอมของตัวแปรง่าย
- 2 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการหาผลเฉลยนี้

การดำเนินงานวิจัย

- 1 พัฒนารูปแบบคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการเปลี่ยนตัวแปรใหม่และระบบพิกัดใหม่
- 2 พัฒนารูปแบบวิธีการเชิงตัวเลข โดยการเปลี่ยนบริเวณและขอบเขตใดๆให้อยู่ในรูปสี่เหลี่ยม แล้วใช้วิธีการผลต่างสืบเนื่องในการแก้ปัญหา
- 3 เขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ภาษาฟอร์แทรนในการหาผลเฉลย ต่อจากนั้นใช้โปรแกรมสำเร็จรูปในการเปลี่ยนตัวแปรและเขียนกราฟ
- 4 ศึกษาเปรียบเทียบผลเฉลยวิธีการเชิงตัวเลขกับผลเฉลยแม่นยำ
- 5 วิเคราะห์ข้อมูลและสรุปผล

ข้อตกลงเบื้องต้น

- การวิจัยนี้เป็นการศึกษาสมการออยเลอร์ ในรูปตัวแปรง่ายกับปัญหาค่าขอบเขตที่กำหนดไว้ในสองมิติ
- ผลลัพธ์ที่ได้โดยวิธีการเชิงตัวเลขอาจมีความคลาดเคลื่อน เนื่องจากขั้นตอนการคิดคำนวณ หรือจากการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ ตลอดจนการเลือกค่าพารามิเตอร์

ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

- ได้รูปแบบทางคณิตศาสตร์ในการศึกษาปัญหานี้
- เป็นแนวทางในการศึกษาปัญหาในสามมิติ
- ได้องค์ความรู้ใหม่สำหรับคณิตศาสตร์ประยุกต์

บทที่ 2

วิธีดำเนินการวิจัย

ผู้วิจัยศึกษาสมการออยเลอร์ โดยเปลี่ยนตัวแปรจากสมการเดิมในเทอมของความเร็ววน และฟังก์ชันเส้นสายธารของการไหล ในระบบ 2 มิติ ต่อจากนั้นเปลี่ยนระบบพิกัดจากเดิมพิกัดฉาก เป็นระบบพิกัดเชิงเส้นโค้ง เพื่อให้สะดวกต่อการใช้วิธีการเชิงตัวเลข แบบวิธีผลต่างสลับเนื่อง ในการหาผลเฉลย ผู้วิจัยได้เขียนโปรแกรมภาษาฟอร์แทรน ต่อจากนั้นจะใช้โปรแกรมสำเร็จรูปช่วยในการแสดงผลการวิจัยด้วยกราฟ ซึ่งได้รูปกราฟต่างๆเปลี่ยนไปตามค่าตัวแปรที่ได้กำหนดขึ้น ในการดำเนินการวิจัยนั้นผู้วิจัยแบ่งการดำเนินงานออกเป็น 2 แบบ ดังนี้

1. ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่ของไหลไหลเข้าและออกในช่องทางเดียว
2. ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่ของไหลไหลเข้าและออกในสองช่อง

ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่ของไหลไหลเข้าและออกในช่องทางเดียว

จากการศึกษาสมการออยเลอร์ เมื่อกรณีที่ของไหลอัดด้วยยากมีการไหลคงที่ จะได้สมการดังนี้

$$(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} + \nabla p = 0, \quad \bar{x} \in \Omega \quad (2.1)$$
$$\nabla \cdot \bar{u} = 0$$

เมื่อ Ω เป็นโดเมนในรูปแบบง่ายในสองมิติ โดยที่ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ เป็นตัวดำเนินการเกรเดียน

$\bar{u} = (u, v)$ เป็นเวกเตอร์ความเร็วของตัวประกอบ u, v ตลอดพิกัดแกน x, y และ p เป็นความดัน โดยที่กำหนดค่าความหนาแน่นมีค่าเป็นหนึ่ง

ปัญหาการไหลผ่านตลอด เมื่อกำหนดค่าความเร็ววนให้ไหลเข้าในช่องทางเดียวในส่วน ของขอบโดเมน ในการหาผลเฉลยของสมการ (2.1) ในโดเมน Ω กับเงื่อนไขขอบ ดังสมการ

$$\Gamma_0 : \bar{u} \cdot \bar{n} = 0, \quad \bar{x} \in \Gamma_0 \quad (2.2)$$

$$\Gamma_2 : \bar{u} \cdot \bar{n} = v_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Gamma_2 \quad (2.4)$$

$$p(M_0) = p_0 = \text{const}$$

โดยที่ ω เป็นความเร็ววน, $\bar{n}$ เป็นเวกเตอร์ที่สัมผัสขอบภายนอกของโดเมน $\Omega, g(\bar{x}), v(\bar{x})$ และ $u(\bar{x})$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้, Γ_0 เป็นส่วนของไหลไม่สามารถไหลซึมผ่านขอบของโดเมนได้

Γ_1 เป็นส่วนของไหลไหลเข้าสู่โดเมน และ Γ_2 เป็นส่วนของไหลไหลออกจากโดเมน, M_0 เป็นจุดใดๆในโดเมน Ω ในการกำจัดความดัน ผู้วิจัยได้ใช้ฟังก์ชันเส้นสายธารและความเร็ววน ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \omega = -\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.5)$$

สมการออยเลอร์ในเทอมของตัวแปรง่าย

ในเทอมของ ψ และ ω ปัญหาค่าขอบของสมการ (2.1)–(2.4) จะได้

$$(\bar{u} \cdot \nabla) \omega = 0, \Delta \psi = -\omega \quad (2.6)$$

$$\Gamma_1 : \omega = g(\bar{x}), \psi(\bar{x}) = \psi(\bar{x}_0) + \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} v_1(\bar{x}) d\gamma, \bar{x}, \bar{x}_0 \in \Gamma_1 \quad (2.7)$$

$$\Gamma_2 : \psi(\bar{x}) = \psi(\bar{x}_0) + \int_{\bar{x}_0}^{\bar{x}} v_2(\bar{x}) d\gamma, \bar{x}, \bar{x}_0 \in \Gamma_2 \quad (2.8)$$

$$\Gamma_0 : \psi(\bar{x}) = \text{const}, \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \bar{x} \in \Gamma_0 \quad (2.9)$$

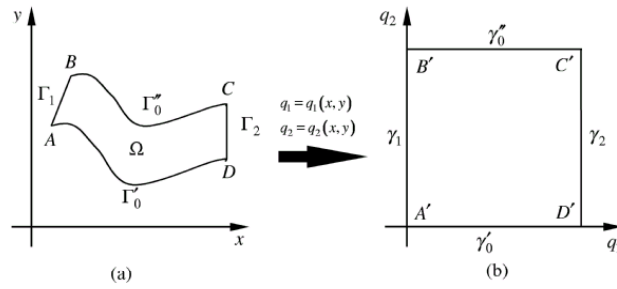
เมื่อการอินทิเกรตเป็นการหาค่าตลอดขอบ Γ_1 และ Γ_2

ปัญหาในสองมิติทั่วไปในพิกัดเชิงเส้นโค้ง

ในการคำนวณของสนามการไหลในโดเมนซึ่งมีรูปแบบที่ซับซ้อนยุ่งยากเช่นในรูปที่ 2.1 ขอบโดเมนที่เกี่ยวข้องกับการคำนวณไม่เหมือนกับเส้นพิกัดในโดเมนทางธรรมชาติ สำหรับวิธีผลต่างสลับเนื่อง การกำหนดเงื่อนไขขอบสำหรับปัญหาเช่นนี้ ต้องแทรกข้อมูล จะเกิดการคลาดเคลื่อนในการคำนวณผลเฉลย ความยุ่งยากในการกระทำการส่งจากโดเมนทางธรรมชาติในระนาบ (x, y) ไปในพิกัดเชิงเส้นโค้งในระนาบ (q_1, q_2) ในพิกัดโดเมนทางธรรมชาติกำหนดให้ $x = x(q_1, q_2)$, $y = y(q_1, q_2)$ เป็นการย้ายแบบหนึ่งต่อหนึ่งของพิกัดโดเมน $ABCD$ ไปในโดเมนที่มีรูปทรงสี่เหลี่ยม $A'B'C'D'$ ผู้วิจัยกำหนดให้ส่วนการไหลเข้า ส่วนการไหลออก และส่วนของไหลไม่สามารถไหลออกจากผนังขอบโดเมนเป็น $\Gamma_i : i = 0, 1, 2$ ของขอบโดเมนทางธรรมชาติ ซึ่งย้ายไปตามในโดเมนของการคำนวณ $\gamma_i : i = 0, 1, 2$, ตามลำดับ ส่วนในขอบ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0'$ และ γ_0'' เป็นส่วน

ของการไหลเข้า ส่วนการไหลออก และส่วนที่ของไหลไม่สามารถไหลออกจากผนังขอบโดเมน ดังรูป 2.1

$$\Gamma_1 \rightarrow \gamma_1, \quad \Gamma_2 \rightarrow \gamma_2, \quad \Gamma'_0 \rightarrow \gamma'_0, \quad \Gamma''_0 \rightarrow \gamma''_0$$



รูปที่ 2.1 โดเมนตามธรรมชาติและโดเมนที่ใช้ในการคำนวณ

ผู้วิจัยได้ดำเนินการวิจัยในปัญหาการไหลผ่านตลอด ตามสมการ (2.1),(2.3),(2.4) และ (2.5) ในเทอมของฟังก์ชันเส้นสายธารและความเร็ววนในพิกัดเชิงเส้นโค้ง (q_1, q_2) ปัญหาการไหลผ่านตลอด ขอบเขตได้ดำเนินการในรูป

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(Jg_{11} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + Jg_{12} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(Jg_{21} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + Jg_{22} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) = -J\omega \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (JU_1\omega) + \frac{\partial}{\partial q_2} (JU_2\omega) = 0 \quad (2.11)$$

กับเงื่อนไขขอบบน $\gamma_1, \gamma_2, \gamma'_0$ และ γ''_0

$$\gamma'_0: \quad \psi(q_1, 0) = 0; \quad \gamma''_0: \quad \psi(q_1, 1) = c = \int_0^1 g_1(s) ds = \int_0^1 l(s) ds \quad (2.12)$$

$$\gamma_1: \quad \psi(0, q_2) = \int_0^{q_2} g_1(s) ds, \quad \omega(0, q_2) = h_3(q_2); \quad \gamma_2: \quad \psi(1, q_2) = \int_0^{q_2} l(s) ds$$

เมื่อ g_1, l, h_3 เป็นค่าที่กำหนดให้ของตัวประกอบปกติของเวกเตอร์ความเร็วและความเร็ววน ตามลำดับ

และกำหนดให้ จาโคเบียน J เป็น

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(q_1, q_2)}$$

สมการพัวของซ์(2.6) สามารถจัดในรูปพิกัดเชิงเส้นโค้งทั่วไปดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(K_{11} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + K_{12} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(K_{21} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + K_{22} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) = -J\omega \quad (2.13)$$

เมื่อ $K_{11} = Jg_{11}, K_{12} = K_{21} = Jg_{12}, K_{22} = Jg_{22}$

โดยที่สมการการต่อเนื่อง สามารถแสดงในรูป

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (JU_1\omega) + \frac{\partial}{\partial q_2} (JU_2\omega) = 0 \quad (2.14)$$

ตัวประกอบความเร็วคอนตราเวเรียน U_j สามารถจัดแสดงในเทอมของอนุพันธ์ของฟังก์ชันเส้นสายธาร

$$U_1 = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial q_2}, \quad U_2 = -\frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \quad (2.15)$$

การศึกษาความดัน ผู้วิจัยใช้สมการออยเลอร์ในรูป Gromeka-Lamb form โดยที่พิกัดเส้นโค้งอยู่ในรูป

$$\begin{aligned} J[g_{11}U_2\omega - g_{12}U_1\omega] &= -g_{11} \frac{\partial H}{\partial q_1} - g_{12} \frac{\partial H}{\partial q_2}, \\ J[g_{21}U_2\omega - g_{22}U_1\omega] &= -g_{21} \frac{\partial H}{\partial q_1} - g_{22} \frac{\partial H}{\partial q_2} \end{aligned}$$

การแก้สมการเทียบกับ $\frac{\partial H}{\partial q_1}$ และ $\frac{\partial H}{\partial q_2}$ เป็นระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้น เมื่อ

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} = -J\omega U_2, \quad \frac{\partial H}{\partial q_2} = J\omega U_1, \quad (2.16)$$

เมื่อ $H = p + |\vec{u}|^2 / 2$ เป็นความดันรวม และ $|\vec{u}|^2 = (\vec{u} \cdot \vec{u})$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสของขนาดของเวกเตอร์ความเร็ว

ขั้นตอนการดำเนินการหาผลเฉลย

ผู้วิจัยดำเนินการปัญหาค่าขอบจากสมการ (2.6)–(2.9) ในเทอมของฟังก์ชันโค้งทั่วไป (q_1, q_2) . ปัญหาค่าขอบดำเนินการใหม่ดัง สมการ (2.13) และ (2.14) กับเงื่อนไขขอบบน $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_0'$ และ γ_0''

$$\begin{aligned} \gamma_0' : \psi(q_1, 0) &= 0; \quad \gamma_0'' : \psi(q_1, 1) = c = \int_0^1 v_1(\tau) d\tau = \int_0^1 v_2(\tau) d\tau ; \\ \gamma_1 : \psi(0, q_2) &= \int_0^{q_2} v_1(\tau) d\tau, \quad \omega(0, q_2) = g(q_2) ; \\ \gamma_2 : \psi(x_d, q_2) &= \int_0^{q_2} v_2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.17)$$

การประมาณค่าผลเฉลยของปัญหา (2.13), (2.14) และ (2.17) ใช้วิธีการกระทำซ้ำซึ่งผู้วิจัยกำหนดการประมาณค่าเริ่มต้นที่ $\omega^0, \psi^0, \vec{u}^0$ เมื่อ $\omega^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}, \vec{u}^{(k-1)}$; $k=1, 2, \dots$ โดยหาค่า $\omega^{(k)}, \psi^{(k)}, \vec{u}^{(k)}$ โดยดำเนินการแก้ปัญหามาตามขั้นตอนทั้งสองดังนี้

1. ข้อตกลงของฟังก์ชันเส้นสายธาร $\psi^{(k)}(q_1, q_2)$ โดยการไหลหมุนวน $\omega^{(k-1)}$ จากสมการพัวซองค์ (2.13)

2. การสร้างสนามการไหลวน $\omega^{(k)}(q_1, q_2)$ จากสมการ Helmholtz (2.14)

ในโดเมนของการคำนวณ $A'B'C'D'$ ถูกกำหนดในรูปปริติสี่เหลี่ยมหนึ่งหน่วย

$$\Omega_h = \left\{ [(q_1)_j, (q_2)_i], (q_1)_j = (j-1) * h_1, (q_2)_i = (i-1) * h_2, \right. \\ \left. i = 1, \dots, N_2; j = 1, \dots, N_1, h_1 = 1/(N_1-1), h_2 = 1/(N_2-1) \right\}$$

ค่าของฟังก์ชันเส้นสายธารถูกประมาณค่าที่จุดกริด ส่วนค่าความเร็ววนสามารถหาได้ที่จุดกึ่งกลางของแต่ละเซลล์ ที่ขอบในส่วนที่ของไหลไหลเข้าที่ $q_1 = 0$ โดยที่ความเร็ววนสามารถหาค่าได้ที่จุดกึ่งกลางระหว่างจุดที่เส้น 2 เส้นบรรจบกัน ดังรูปที่ 2.2

การประมาณค่าของผลเฉลยของสมการพัชองค์ (2.13) สามารถใช้วิธีการผ่อนปรนเกิน
สืบเนื่อง หรือวิธี Stabilizing Correction

วิธีการ Stabilizing Correction

ประกอบด้วย 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 : การประมาณโดยปริยายของอนุพันธ์ย่อยในทิศทาง q_1

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\psi}_{ij} - \psi_{ij}^{(k,s-1)}}{\Delta t} = & \left[\frac{\partial}{\partial q_1} K_{12} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial q_1} \right]_{ij}^h + \left[\frac{\partial}{\partial q_2} K_{22} \frac{\partial \psi^{(k,s-1)}}{\partial q_2} \right]_{ij}^h + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial q_1} K_{12} \frac{\partial \psi^{(k,s-1)}}{\partial q_2} \right]_{ij}^h + \left[\frac{\partial}{\partial q_2} K_{21} \frac{\partial \psi^{(k,s-1)}}{\partial q_2} \right]_{ij}^h + J_{ij} \omega_{ij}^{(k-1)}, \\ & i = 2, \dots, N_2 - 1; j = 2, \dots, N_1 - 1. \end{aligned}$$

การประมาณค่าอนุพันธ์ย่อยในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ผู้วิจัยใช้วิธีผลต่างสืบเนื่องกลางอันดับ
สอง โดยการวิจัยในระบบสมการสามแนวเฉียงเป็นการแก้ปัญหาโดยวิธีการ Sweep method อ้าง
อิงจาก N.N.Yanenko (1971)

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนที่เลือกและเป็นการช่วยทำให้เกิดความมั่นคง

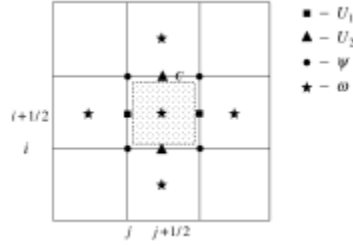
$$\begin{aligned} \frac{\psi_{ij}^{(k,s)} - \tilde{\psi}_{ij}}{\Delta t} = & \left[\frac{\partial}{\partial q_2} K_{22} \frac{\partial \psi^{(k,s)}}{\partial q_2} \right]_{ij}^h - \left[\frac{\partial}{\partial q_2} K_{22} \frac{\partial \psi^{(k,s-1)}}{\partial q_2} \right]_{ij}^h, \\ & i = 2, \dots, N_2 - 1; j = 2, \dots, N_1 - 1; s = 1, 2, \dots, S. \end{aligned}$$

ถ้าการลู่เข้าสู่เกณฑ์ $\|\psi_{ij}^{(k,s)} - \psi_{ij}^{(k,s-1)}\| \leq \varepsilon$, ซึ่งเป็นการเพียงพอ โดยที่ $\psi_{ij}^{(k)} = \psi_{ij}^{(k,s)}$

วิธีการอินทิกรัลถูกดำเนินการในการสร้างสมการผลต่างสืบเนื่องสำหรับความเร็ววน รูป
แบบการอินทิกรัลที่เทียบเท่ากับสมการ (2.14) มีรูปแบบดังนี้

$$\oint (JU_1 \omega dq_2 - JU_2 \omega dq_1) \equiv 0$$

เมื่อ C เป็นโค้งปิดรอบวงกลมซึ่งเป็น homeomorphic การอินทิกรัลรอบคอนทัวร์ถูกคำนวณเมื่อจุดกึ่งกลางเป็น $((q_1)_{i+1/2, j+1/2}, (q_2)_{i+1/2, j+1/2})$ ดังรูป 2.2



รูป 2.2 การดำเนินการของสมการผลต่างสี่เหลี่ยม

ทฤษฎีการหาค่ากลางได้ใช้ในการประมาณค่าการอินทิกรัลเทียบกับขนาดของเซลล์ ซึ่งแทนที่การไหลในรูปตาข่ายของความเร็ววนตลอดขนาดเซลล์ โดยกำหนดสัญลักษณ์ตัวประกอบคอนทราเวเรียนซ์ของ เวกเตอร์ความเร็วเป็น U_1 และ U_2 โดยทั่วไปค่าความเร็ววนได้กำหนดในรูปสมการผลต่างสี่เหลี่ยม ดังนี้

$$\Lambda_1 \omega_{i+1/2, j+1/2} + \Lambda_2 \omega_{i+1/2, j+1/2} = 0 \quad (2.21)$$

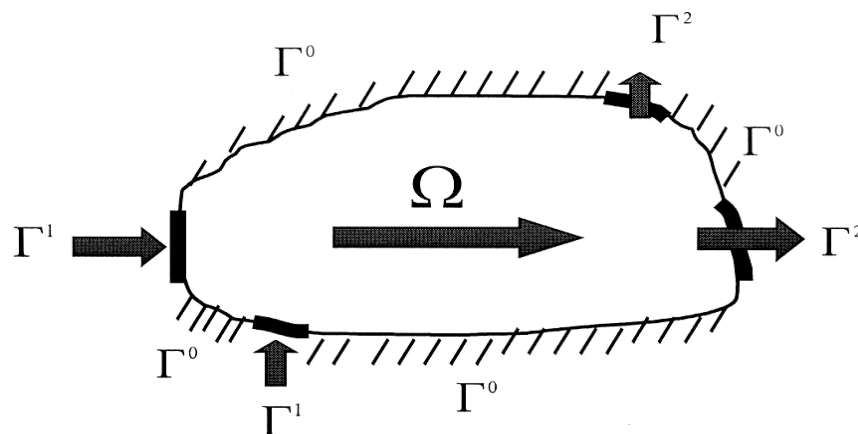
เมื่อ

$$\begin{aligned} \Lambda_1 \omega_{i+1/2, j+1/2} &= \frac{1}{h_1} [(JU_1 \omega)_{i+1/2, j+1} - (JU_1 \omega)_{i+1/2, j}], \\ \Lambda_2 \omega_{i+1/2, j+1/2} &= \frac{1}{h_2} [(JU_2 \omega)_{i+1, j+1} - (JU_2 \omega)_{i, j+1/2}], \\ \omega_{i+1/2, j} &= \begin{cases} \omega_{i+1/2, j-1/2}, & U_{1, i+1/2, j} \geq 0 \\ \omega_{i+1/2, j+1/2}, & U_{1, i+1/2, j} < 0 \end{cases}, \quad \omega_{i, j+1/2} = \begin{cases} \omega_{i+1/2, j+1/2}, & U_{2, i, j+1/2} < 0 \\ \omega_{i-1/2, j+1/2}, & U_{2, i, j+1/2} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

พบว่าถ้าทราบค่าของความเร็ววนบนจุดกริดในส่วนที่ของไหลมีการไหลเข้าในส่วนขอบโดเมน เราสามารถใช้สมการ (2.21) ในการหาค่าของความเร็ววนที่จุดกึ่งกลางของแต่ละเซลล์ในโดเมนที่คำนวณ Ω_h

ปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่ของไหลไหลเข้าและออกในสองช่องทาง

ให้ Ω เป็นขอบโดเมนใน R^2 โดยขอบเขตของโดเมน Γ ประกอบด้วย 3 ส่วน ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 โดเมนทางธรรมชาติ

โดยที่ ส่วนที่ 1 เรียกว่า ส่วนของขอบเขตที่ของไหลไหลเข้า แทนด้วย $\Gamma_i^1, i = 1, \dots, L$

ส่วนที่ 2 เรียกว่า ส่วนของขอบเขตที่ของไหลไหลออก แทนด้วย $\Gamma_j^1, j = 1, \dots, K$

ส่วนที่ 3 เรียกว่า ส่วนที่ของไหลไม่สามารถไหลผ่านขอบเขตของโดเมนได้

แทนด้วย $\Gamma_m^0, m = 1, \dots, M$

ตัวประกอบแต่ละตัวของ Γ_α^i เป็นเส้นโค้งเรียบ

สมการออยเลอร์ในเทอมของตัวแปรง่าย

การไหลที่คงที่ของของไหลอุดมคติที่อัดตัวยากในระบบ 2 มิติที่มีลักษณะใกล้เคียงกับของไหลจริงนี้ถูกกำหนดขึ้น แทนด้วย สมการออยเลอร์ ดังสมการ

$$uu_x + vu_y = -p_x,$$

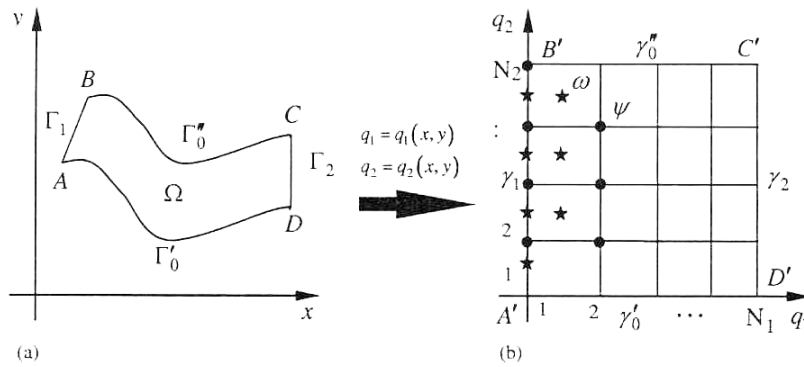
$$uv_x + vv_y = -p_y,$$

$$u_x + v_y = 0$$

เมื่อ (x, y) แทนด้วยพิกัดคาร์ทีเซียนของจุดบน Ω ,

$\vec{u} = (u, v)$ แทนด้วยตัวประกอบของความเร็วตามทิศทางบนแกน x และ y ตามลำดับ

และ p เป็นความดัน



รูปที่ 2.4 โดเมนที่ศึกษา

ปัญหาค่าขอบเขตการไหลผ่านและสมการออยเลอร์ในเทอมของตัวแปรง่ายที่ประกอบด้วยฟังก์ชันเส้นสายธารและความเร็ววน ดังรูป 2.4 และได้สมการดังนี้

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= -\omega, \\ \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} &= 0 \quad \text{ใน } \Omega \end{aligned} \quad (2.22)$$

เมื่อ ψ เป็น ฟังก์ชันเส้นสายธาร และ ω เป็นความเร็ววน
โดยกำหนดให้

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \omega = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}$$

เมื่อ (x, y) แทนด้วยพิกัดคาร์ทีเซียนของจุดบน Ω ,

u, v แทนด้วยตัวประกอบเวกเตอร์ความเร็ว $\vec{u}$ ตามทิศทาง x และ y ตามลำดับ

โดยที่ส่วนประกอบปกติของเวกเตอร์ความเร็วมีค่าเป็นศูนย์ในส่วนที่ของไหลไหลผ่านขอบของโดเมนไม่ได้ ดังนี้

$$(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0, (x, y) \in \Gamma_m^0, \quad m = 1, \dots, M \quad (2.23)$$

เมื่อ $\vec{n}$ เป็นเวกเตอร์ปกติซึ่งมีทิศทางออกสู่ภายนอกขอบ

ในปี ค.ศ. 1980 Kazhikhov ได้ศึกษาสมการออยเลอร์กับเงื่อนไขขอบที่ตัวประกอบปกติของเวกเตอร์ความเร็วถูกกำหนดบนส่วนที่ของไหลไหลเข้าขอบของโดเมน ต่อมาในปี ค.ศ. 1990 Antontsev ได้ศึกษาสมการออยเลอร์กับเงื่อนไขขอบที่ส่วนของของไหลที่ไหลเข้าและไหลออกของขอบเขตเป็นปัญหาที่ well-posed ดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \text{curl}(\bar{u}) = \omega_i(x, y), \\ (\bar{u} \cdot \bar{n}) &= f_i(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_i^1, i = 1, \dots, L\end{aligned}\quad (2.24)$$

ส่วนที่ของไหลไหลออกผ่านขอบของโดเมนมีค่าของตัวประกอบปกติของเวกเตอร์ความเร็ว ดังนี้

$$(\bar{u} \cdot \bar{n}) = g_j(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_j^2, j = 1, \dots, K \quad (2.25)$$

เงื่อนไขขอบเขตจากสมการ (2.22–2.25) แสดงฟังก์ชันเส้นสายธารทั้งหมดที่ขอบเขตทั้งหมดของโดเมนและค่าความเร็ววนถูกกำหนดในส่วนของขอบเขตของโดเมน

ผู้วิจัยศึกษาสมการ (2.22) กับเงื่อนไขขอบเขตจากสมการ (2.23–2.25) โดยการทำความเข้าใจเกี่ยวกับวิธีการผลต่างสลับเนื่อง โดยการใช้รูปตาข่ายทรงสี่เหลี่ยมที่เหมือนกัน ขบวนการทำซ้ำถูกกำหนดโดยขั้นตอนตามลำดับดังนี้

1. ขั้นตอนแรกกำหนดค่า $\psi^{(0)}, \omega^{(0)}$
2. สำหรับค่าที่กำหนดให้ $\omega^{(n)}$ เพื่อหาผลเฉลยของ $\psi^{(n+1)}$ ของสมการพัวซองด์ (Poisson equation) (2.22)

$$\Delta \psi^{(n+1)} = -\omega^{(n)}, n = 0, 1, 2, \dots$$

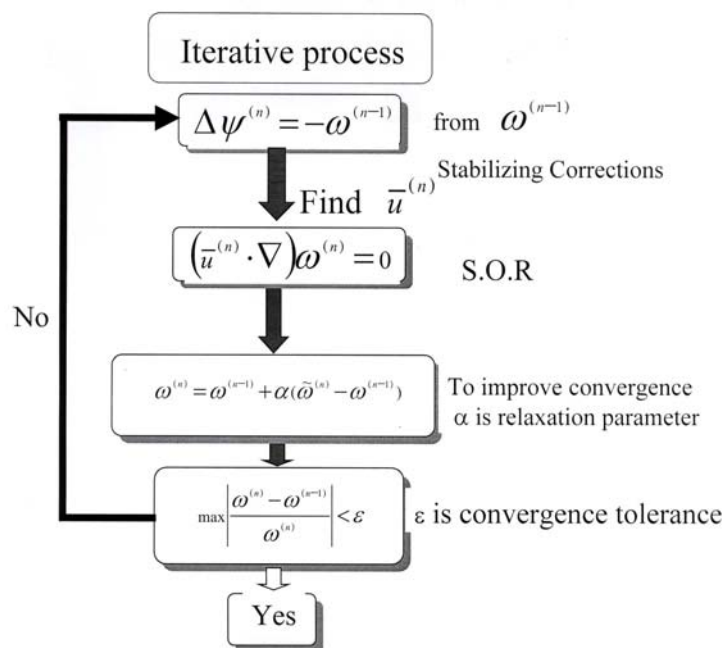
กับเงื่อนไขดิริคเล (Dirichlet boundary conditions) สำหรับฟังก์ชันเส้นสายธาร (2.23–2.25)

3. กรณีของการไหลคงที่ ในสมการ (2.22) ความเร็ววนมีค่าคงที่บนเส้นสายธารและสมการนี้มีผลเฉลยทั่วไปในรูป $\omega = \omega(\psi)$ ซึ่งฟังก์ชัน $\omega(\psi)$ ถูกหาได้จากเงื่อนไขขอบสำหรับความเร็ววนบนส่วนที่ของไหลไหลเข้าผ่านขอบของโดเมน ค่าความเร็ววนที่จุด (x_k, y_l) บน $(n+1)$ การทำซ้ำถูกกำหนดจากเงื่อนไขขอบบนขอบเขตความเร็ววน Γ_i^1

$$\omega_{k,1}^{(n+1)} = \omega_i^*(x^*, y^*); \psi(x^*, y^*) - \psi_{k,1}^{(n+1)} = 0, \quad (x^*, y^*) \in \Gamma_i^1 \quad (2.26)$$

4. การตรวจสอบเกณฑ์การลู่เข้าสู่ผลลัพธ์และถ้าการทำซ้ำไม่ลู่เข้า ผู้เกณฑ์ให้กลับไปทำงานใหม่ในขั้นตอนที่ 2

ผลเฉลยจากการประมาณค่าของปัญหา โดยวิธีการกระทำซ้ำ โดยขั้นตอนการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบเขตดังแสดงขั้นตอนดังรูปที่ 2.5 การแก้สมการพัวของค์ สำหรับฟังก์ชันเส้นสาย ธารกับเงื่อนไขขอบเขตรีเคิล ผู้วิจัยใช้วิธีการผลต่างสลับเนื่องกระชั้นอันดับสูง ความสอดคล้องของสมการผลต่างสลับเนื่องถูกแก้โดยวิธีผ่อนปรนเกินสลับเนื่อง (Successive Over - Relaxation) โดยที่การลู่เข้าของคู่ศูนย์ของสมการ (2.26) ผู้วิจัยใช้วิธีซีแคนท์ (Secant) กระบวนการทำซ้ำสิ้นสุดเมื่อการลู่เข้าสู่เกณฑ์ $\frac{\|\omega^{(n)} - \omega^{(n-1)}\|}{\|\omega^{(n)}\|} \leq \varepsilon_\omega$, $\frac{\|\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)}\|}{\|\psi^{(n)}\|} \leq \varepsilon_\psi$ เมื่อ ε_ω และ ε_ψ เป็นการลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่ยอมรับได้ และ $\|\cdot\|$ แทนนอร์มในเซตของฟังก์ชันตาราง



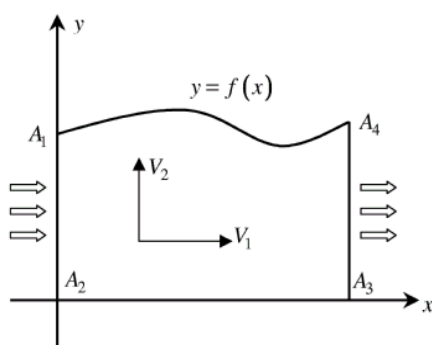
รูปที่ 2.5 ขั้นตอนการดำเนินงาน

บทที่ 3

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การลู่เข้าของสมการออยเลอร์กับผลเฉลยที่แท้จริงสำหรับการไหลในช่องทางเดียว

ในบทนี้ เป็นการนำเสนอผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับการทดสอบปัญหาโดยวิธีการผลต่างสี่เหลี่ยม โดยทำการเปรียบเทียบผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณโดยวิธีของผู้วิจัยกับเฉลยที่แท้จริง ซึ่ง G.V.Alekseev และ Yu.A.Mokin ได้ทำการศึกษา ในปี ค.ศ. 1972 ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยศึกษาการไหลคงที่ของของไหลที่อัดตัวยากในอุดมคติในสองมิติ โดยที่ช่องโดเมนการไหล Ω เป็นระนาบ $A_1A_2A_3A_4$ กับผนังโค้ง A_1A_4 ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 การทดสอบปัญหาการไหลผ่านโดเมน

นักวิจัยเหล่านั้นพบว่าผลเฉลยที่แท้จริงของสมการออยเลอร์สำหรับการไหลวน จะมีฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = cf(x) \quad (3.1)$$

เมื่อ c เป็นค่าคงที่ และ $f(x) > 0, x \in [0, a], f(0) = b$ โดยที่ฟังก์ชัน $f(x)$ มีความต่อเนื่องถึงอนุพันธ์อันดับที่ 3 และเพียงพอที่

$$f(x) \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \left(\frac{df(x)}{dx} \right)^2 = c_1 < 1, \quad (3.2)$$

เมื่อ c_1 เป็นค่าคงที่ สำหรับค่าคงที่ $c_2 > 0$ โดยที่ผลเฉลยของสมการออยเลอร์จะมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} v_1(x, y) &= \frac{c_2 f(x)}{f^2(x) - c_1 y^2}; \\ v_2(x, y) &= \frac{c_2 y f'(x)}{f^2(x) - c_1 y^2}; \\ P(x, y) &= P_0 - \frac{\rho c_2^2}{2(f^2(x) - c_1 y^2)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

เมื่อ P_0 เป็นค่าคงที่ จากสมการ (3.3) สามารถหาค่าความเร็ววนและฟังก์ชัน Bernoulli ได้ดังสมการ

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= -cc_2 y(x) \frac{f^2(x) + c_1 y^2}{(f^2(x) - c_1 y^2)}, \\ H(x, y) &= \frac{P_0}{\rho} + cc_2 y(x) \frac{y^2 f^2(x)}{2(f^2(x) - c_1 y^2)^2} \end{aligned}$$

ถ้า $c_1 = -\sigma^2 < 0$ แล้ว โดยสมการ (3.3) สามารถหาฟังก์ชันเส้นสายธารและความเร็ววนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \frac{c_2}{\sigma} \arctan \frac{\sigma y}{f(x)}, \\ \Delta \psi &= -\frac{cc_2}{4\sigma} \sin \left(\frac{4\sigma}{c_2} \psi \right) \end{aligned}$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.1) สำหรับ $c < 0$ มีค่าดังนี้

$$f(x) = K_1 e^{i\sqrt{c}x} + K_2 e^{-i\sqrt{c}x}$$

เมื่อ $i^2 = -1$ และค่าคงที่ K_1 และ K_2 เป็นจำนวนจริงและเพียงพอสำหรับระบบสมการไม่เชิงเส้น

$$-4cK_1K_2 = c_1, \quad K_1 + K_2 = b$$

โดยเฉพาะในกรณีเมื่อ

$$c = -\left(\frac{\sigma}{b}\right)^2$$

และตามด้วย

$$f(x) = \cos(x), \quad \psi(x, y) = 4 \arctan\left(\frac{y}{\cos(x)}\right), \quad \omega(x, y) = \sin(\psi(x, y)) \quad (3.4)$$

ผู้วิจัยเลือกพารามิเตอร์ในการทดสอบปัญหาดังนี้

$$\sigma=1, \quad a=0.5, \quad b=1, \quad c_2=4$$

สำหรับพารามิเตอร์นี้ ผลเฉลยที่แท้จริงของสมการออยเลอร์มีค่าเป็น

$$f(x) = \cos(x), \quad \psi(x, y) = 4 \arctan\left(\frac{y}{\cos(x)}\right), \quad \omega(x, y) = \sin(\psi(x, y)) \quad (3.5)$$

ถ้า $0 < c_1 = \sigma^2 < 1$ แล้ว จากสมการ (3.6) สามารถหาสูตรสำหรับฟังก์ชันเส้นสายฮาร์และความเร็ววน ได้ดังนี้

$$\psi(x, y) = \frac{c_2}{2\sigma} \ln \frac{f(x) + \sigma y}{f(x) - \sigma y}, \quad (3.6)$$

$$\Delta\psi = \frac{cc_2}{4\sigma} \sinh\left(\frac{4\sigma}{c_2}\psi\right) \quad (3.7)$$

ซึ่งผลเฉลยทั่วไปของสมการ (4.1) สำหรับ $c > 0$ เป็น

$$f(x) = K_1 e^{\sqrt{cx}} + K_2 e^{-\sqrt{cx}} \quad (3.8)$$

เมื่อค่าคงที่ K_1 และ K_2 มีเพียงพอสำหรับระบบสมการดังนี้

$$K_1 + K_2 = b, \quad 4cK_1K_2 = c_1$$

โดยเฉพาะในกรณีเมื่อ

$$b^2 = \frac{\sigma^2}{c}$$

และ

$$f(x) = b \cosh(\sqrt{c}x), \quad x \in [0, a]$$

ผู้วิจัยพิจารณาทำการทดสอบปัญหาครั้งที่สองโดยเลือกพารามิเตอร์ดังนี้

$$\sigma = 0.5, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad c_2 = 1, \quad c = c_1 = \sigma^2 = 0.25$$

สำหรับพารามิเตอร์นี้ ผลเฉลยที่แท้จริงของสมการ (3.6)–(3.8) ของสมการออยเลอร์มีรูปแบบดังนี้

$$f(x) = \cosh(\sqrt{0.5}x), \quad \psi(x, y) = \ln\left(\frac{\cosh(0.5x) + 0.5y}{\cosh(0.5x) - 0.5y}\right), \quad \omega(x, y) = 0.125 \sinh(2\psi(x, y)) \quad (3.9)$$

ขั้นตอนพัฒนาการทดสอบปัญหา ในตารางที่ 3.1 และ 3.2 แสดงค่าอนุพันธ์ของความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ซึ่งเป็นระบบกริดสำหรับ $N1 \times N1$ จุด กับค่าอัตราของการลู่ออกโดยประมาณโดยนิยาม

$$m = \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{err1}{err2}\right),$$

เมื่อ $err1$ และ $err2$ เป็นค่าคลาดเคลื่อนซึ่งสัมพันธ์กับระบบกริดกับ $N1 \times N1$ และ $N2 \times N2$ จุด ตามลำดับ ซึ่งพบว่าอัตราการลู่เข้ามีค่าโดยประมาณมีค่าเท่ากับ 2 ซึ่งเป็นการแสดงประสิทธิภาพว่าวิธีการดำเนินการของผู้วิจัยที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้นนี้มีความแม่นยำถึงอันดับที่สอง

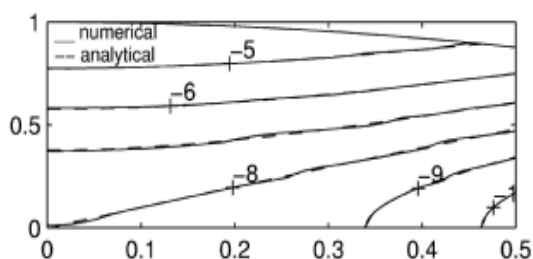
ตารางที่ 3.1 ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ของฟังก์ชันเส้นสายธารและ ความเร็ววน และการทดสอบอัตราการลู่เข้า ของสมการที่ (3.5)

Grid	ψ error $\times 10^{-5}$	Rate	ω - error $\times 10^{-5}$	Rate
11×11	5.5261	-	4.7549	-
21×21	1.0365	2.41	1.2056	1.9797
41×41	0.2590	2.00	0.3167	1.9287

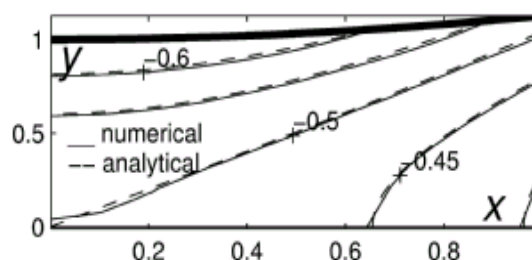
ตารางที่ 3.2 ค่าคลาดเคลื่อนสมบูรณของฟังก์ชันเส้นสายธารและ ความเร็ววน และการทดสอบ อัตราการลู่เข้า ของสมการที่ (3.9)

Grid	ψ error $\times 10^{-5}$	Rate	ω - error $\times 10^{-5}$	Rate
11 $\times$ 11	2.8226	-	1.6577	-
21 $\times$ 21	0.3962	2.83	0.2842	2.54
41 $\times$ 41	0.1031	1.94	0.1067	1.41

รูปที่ 3.2 และ 3.3 แสดงการกระจายของสนามความดัน ซึ่งถูกกำหนดให้จากสมการ (3.5) และ (3.9) ผลเฉลยได้นำเสนอในรูปเส้นคอนทัวร์ความดันในโดเมนที่มีส่วนโค้ง เส้นที่บ่งชี้ความสอดคล้องกับผลเฉลยเชิงตัวเลข และเส้นปะมีความสอดคล้องกับผลเฉลยที่แท้จริงในสมการที่ (3.5) ผู้วิจัยใช้กริดหนึ่งหน่วยของ 41 $\times$ 41 จุด ในกรณีของผลเฉลยที่แท้จริง (3.9) ผู้วิจัยใช้กริด 11 $\times$ 11 จุด เมื่อสังเกตพบว่าผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยที่แท้จริง



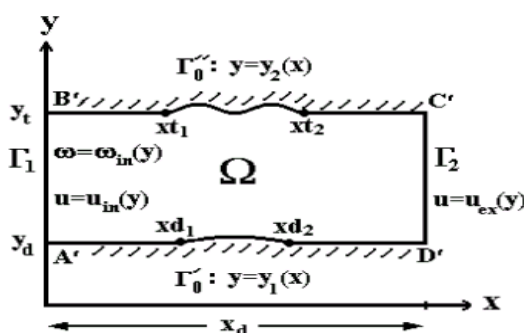
รูปที่ 3.2 ความดันจากผลเฉลยของสมการ (3.5)



รูปที่ 3.3 ความดันจากผลเฉลยของสมการ (3.9)

รูปของช่องผนังโค้งและเงื่อนไขขอบเขต

รูปของช่องผนังโค้งและเงื่อนไขขอบเขตแสดงไว้ในรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 โดเมนช่องผนังโค้ง

สำหรับสมการของส่วนผนังที่ของไหลไหลผ่านไม่ได้ Γ'_0, Γ''_0 คือ

$$y_\alpha(x) = \begin{cases} y_\alpha & ; \quad x < x\alpha_1, \\ y_\alpha + h_\alpha [1 + \sin z(x)] & ; \quad x\alpha_1 \leq x \leq x\alpha_2, \\ y_\alpha & ; \quad x > x\alpha_2, \end{cases}$$

เมื่อ $\alpha = d$ ในกรณีของขอบล่าง และ $\alpha = t$ ในกรณีของขอบบนของช่องโดเมน ส่วนฟังก์ชัน $z(x)$ นิยามโดยสมการ

$$z(x) = \frac{\pi}{2(x\alpha_2 - x\alpha_1)} [2(K_\alpha + 1)x - (2K_\alpha + 1)x\alpha_1 - x\alpha_2], \quad K_\alpha = 1, 3, 5, \dots \quad (3.10)$$

ส่วนโค้งตอนบนและตอนล่างของขอบในช่วง $(x\alpha_1, x\alpha_2)$ กำหนดโดยการเลือก K_α ในสมการ (3.10) ค่า h_α เป็นขนาดความสูงของโค้งตอนล่างและตอนบน ตัวประกอบปกติของเวกเตอร์ความเร็วและความเร็ววนถูกกำหนดในส่วนที่ของไหลไหลเข้าขอบ γ_1 ดังนี้

$$a) U_{lin}(y) = C_{in} = const,$$

$$\omega_{in}(y) = a_\omega \sin\left(K \frac{y - y_d}{y_t - y_d} \pi\right); \quad K = 1, 2, \dots$$

$$b) U_{lin}(y) = C_{in} (y - y_d)(y_t - y),$$

$$\omega_{in}(y) = a_\omega \sin\left(K \frac{y - y_d}{y_t - y_d} \pi + \varphi\right)$$

ส่วนขอบที่ของไหลไหลซึมผ่านไม่ได้ γ'_0 และ γ''_0 มีเงื่อนไขที่ $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ สำหรับพารามิเตอร์ C_{in}, K และ φ ถูกกำหนดให้สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ

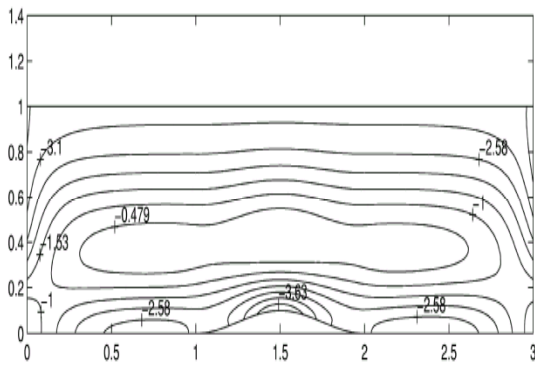
$$\omega_{in}(y_d) = -\frac{\partial U_1}{\partial y} \bigg|_{y=y_d} : \omega_{in}(y_t) = -\frac{\partial U_1}{\partial y} \bigg|_{y=y_t}$$

ตัวประกอบปกติของเวกเตอร์ความเร็วที่ส่วนของขอบที่ของไหลไหลออก γ_2 :

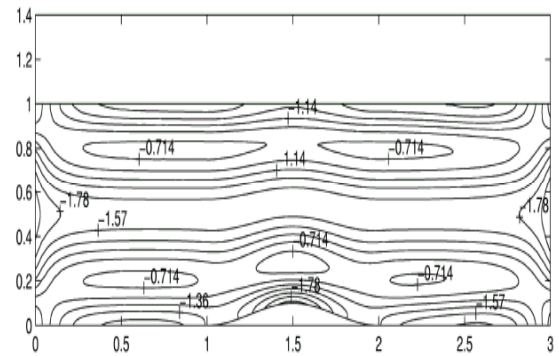
$$\begin{aligned} a) \quad U_{1out}(y) &= C_{out} = const, \\ b) \quad U_{1out}(y) &= C_{out}(y - y_d)(y_t - y), \end{aligned}$$

ผลเฉลยเชิงตัวเลข

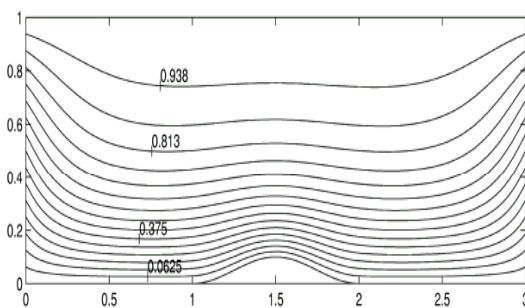
รูป 3.5- 3.10 แสดงการกระจายของความดันและเส้นสายธาร สำหรับรูปโดเมนและเงื่อนไขขอบที่แตกต่างกัน รูป 3.5–3.10 แสดงผลเฉลยจากการคำนวณสำหรับช่องที่มีตอนบนเป็นเส้นตรงและส่วนโค้งตอนล่าง โดยที่รูปทรงที่มีส่วนโค้งตอนล่างมีความสูงของส่วนโค้งเป็น h_d ระหว่าง $x_{d1} \leq x \leq x_{d2}$ มีค่าเป็น 0.1 ความยาวของช่องเป็น x_d มีค่า 3.0 การศึกษาผลเฉลย ผู้วิจัยใช้กริดหนึ่งหน่วยขนาด 81×81 จุด ในแต่ละกรณี การกระทำซ้ำมีการลู่เข้าโดยยอมรับได้เมื่อ $\varepsilon_\omega = 10^{-6}, \varepsilon_\psi = 10^{-6}$ จากรูป 3.5–3.9 แสดงเส้นคอนทัวร์ในรูปโดเมนที่ศึกษา เงื่อนไขขอบสำหรับความเร็วที่ส่วนของไหลไหลเข้าขอบกำหนดให้โดยสมการ $\omega(y) = a_\omega \sin(Ky\pi)$.



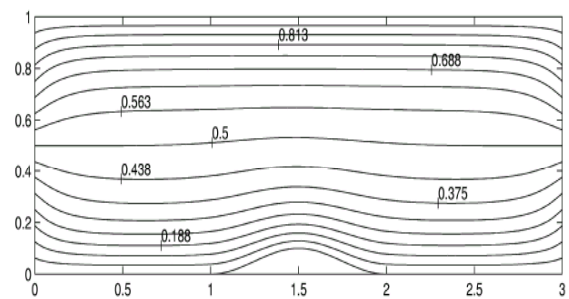
รูปที่ 3.5 เส้นความดันสำหรับ $a_\omega = 5.0, K = 1$



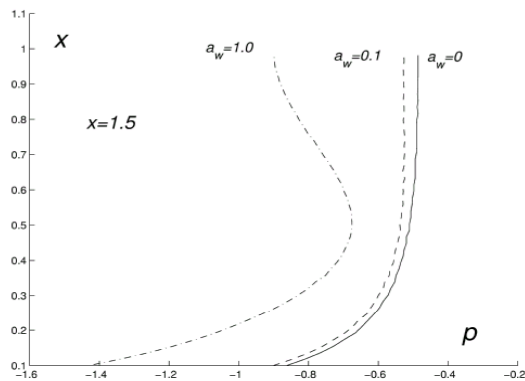
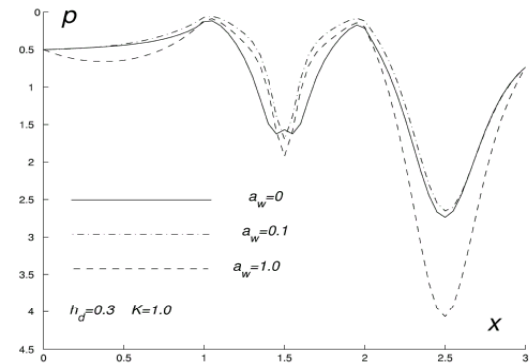
รูปที่ 3.6 เส้นความดันสำหรับ $a_\omega = 5.0, K = 2$



รูปที่ 3.7 เส้นสายธารสำหรับ $a_\omega = 5, K = 1$



รูปที่ 3.8 เส้นสายธารสำหรับ $a_\omega = 5, K = 2$

รูปที่ 3.9 ความดัน เมื่อ $x=1.5$ 

รูปที่ 3.10 ความดันได้ขอบ

การลู่เข้าของสมการออยเลอร์กับผลเฉลยที่แท้จริงสำหรับการไหลในสองช่องทาง

โดยการทดสอบปัญหากับผลเฉลยที่ได้ ผู้วิจัยระบุฟังก์ชันเส้นสายธารและความเร็ววนในรูปสมการ

$$\psi(x, y) = e^{x+y}, \omega = -2e^{x+y}$$

ผู้วิจัยพิจารณาโดเมนสี่เหลี่ยมจัตุรัส

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$$

ผลการวิจัยแสดงโดยตารางที่ 3.3 ซึ่งเป็นผลเฉลยของนอร์มอนันต์ของค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ซึ่งถูกกำหนดจากระบบตารางสี่เหลี่ยม $N \times N$ โดยที่ N เป็นจำนวนจุดที่เลือกพิจารณา กับค่าผลลัพธ์อัตราของการลู่เข้าสู่ผลเฉลยถูกประมาณ โดยที่อัตราของการลู่เข้าสู่ผลเฉลยถูกนิยามโดยสมการ

$$m \approx \frac{\ln(err_{N_1}) - \ln(err_{N_2})}{\ln(N_1) - \ln(N_2)},$$

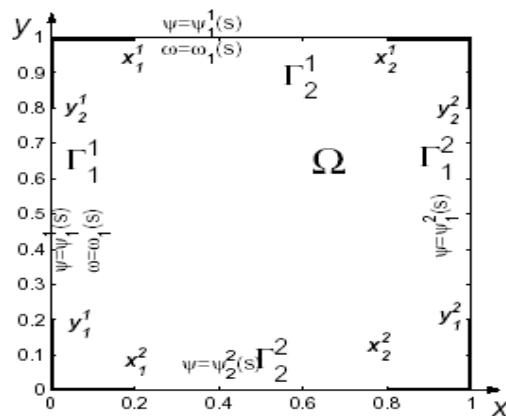
เมื่อ m เป็นอัตราของการลู่เข้าสู่ $\|f^h - f_{exact}^h\| \leq Ch^m$, โดยที่ err_{N_1} และ err_{N_2} เป็นค่านอร์มสูงสุดของผลต่างระหว่างผลเฉลยที่แท้จริงกับผลเฉลยโดยประมาณบนตารางสี่เหลี่ยม $N_1 \times N_1$ และ $N_2 \times N_2$ จุดตามลำดับ ซึ่งพบว่าอัตราของการลู่เข้าสู่โดยประมาณมีค่าใกล้เคียง 4 ซึ่งแสดงได้ว่าวิธีการผลต่างสี่เหลี่ยมของตัววิจัยถูกต้องไม่ผิดพลาดถึงอันดับที่สี่

ตารางที่ 3.3 นอร์มอันดับของค่าคลาดเคลื่อนสำหรับฟังก์ชันเส้นสายธารและความเร็ววน อัตราของการเข้าสู่ผลเฉลยที่แท้จริงสำหรับการทดสอบปัญหา

Grid	$err = \ \psi^h - \psi_{exact}\ _\infty$	Rate	$err = \ \omega^h - \omega_{exact}\ _\infty$	Rate
6×6	0.173E-05	-	0.345E-05	-
11×11	0.979E-07	4.14	0.196E-06	4.13
21×21	0.579E-08	4.08	0.116E-07	4.08
41×41	0.413E-09	3.81	0.862E-09	3.81

โดเมนสองช่องทางและเงื่อนไขขอบ

วิธีการเชิงตัวเลขได้พัฒนาและทดสอบ ซึ่งได้แสดงมาแล้วข้างต้น จะนำไปใช้ประยุกต์ใช้ศึกษาการไหลภายในของของไหลที่อัดตัวยากในช่องทางสองมิติกับทั้งส่วนของการไหลเข้าและไหลออกจากขอบเขตของโดเมน ตัวอย่างเช่น การพิจารณาปัญหาการไหลผ่านท่อคนในโดเมนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสกับทั้งสองส่วนของการไหลเข้าและไหลออกของขอบเขตโดเมน ดังรูปของโดเมนและใช้สัญลักษณ์ดังแสดงในรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 โดเมนสองช่องทางของการไหลเข้าและออก

เมื่อ y_1^1, y_2^1 เป็นพิกัด y ของการไหลเข้าส่วนของขอบเขต Γ_1^1 ,
 x_1^1, x_2^1 เป็นพิกัด x ของการไหลเข้าส่วนของขอบเขต Γ_2^1 ,
 โดยที่

$$y_\alpha^2, x_\alpha^2, \alpha = 1, 2$$

และ y, x เป็นพิกัดของการไหลออกและไหลเข้าส่วนของขอบเขต Γ_1^2, Γ_2^2 ตามลำดับ
เงื่อนไขขอบสำหรับฟังก์ชันเส้นสายธารและความเร็ววนคือ

$$\Gamma_m^0 : \psi = \psi_m^0 = \text{const}, m = 1, 2, 3, 4$$

$$\Gamma_1^1 : \psi = \psi_1^1(s) = \frac{y_2^1 - s}{y_2^1 - y_1^1} \psi_4^0 + \frac{s - y_1^1}{y_2^1 - y_1^1} \psi_1^0, \omega = \omega_1(s) = A_\omega^1 \sin \left(K_1 \frac{s - y_1^1}{y_2^1 - y_1^1} \pi \right), y_1^1 \leq s \leq y_2^1$$

$$\Gamma_2^1 : \psi = \psi_2^1(s) = \frac{x_2^1 - s}{x_2^1 - x_1^1} \psi_1^0 + \frac{s - x_1^1}{x_2^1 - x_1^1} \psi_2^0, \omega = \omega_2(s) = A_\omega^2 \sin \left(K_2 \frac{s - x_1^1}{x_2^1 - x_1^1} \pi \right), x_1^1 \leq s \leq x_2^1$$

$$\Gamma_1^2 : \psi = \psi_1^2(s) = \frac{y_2^2 - s}{y_2^2 - y_1^2} \psi_3^0 + \frac{s - y_1^2}{y_2^2 - y_1^2} \psi_2^0, y_1^2 \leq s \leq y_2^2$$

$$\Gamma_2^2 : \psi = \psi_2^2(s) = \frac{x_2^2 - s}{x_2^2 - x_1^2} \psi_4^0 + \frac{s - x_1^2}{x_2^2 - x_1^2} \psi_3^0, x_1^2 \leq s \leq x_2^2$$

กำหนดพารามิเตอร์ $A_\omega^1, A_\omega^2, K_1, K_2$ เป็นค่าของความเร็ววนที่ไหลเข้าส่วนของขอบเขต
และสมมติให้ $\psi_2^1(s') > \psi_1^1(s'')$ สำหรับทุก s' และ s''

ผลเฉลยเชิงตัวเลข

ตัวอย่างของเส้นสายธารและเส้นความดันของของไหลผ่านตลอดโดเมนแสดงในรูปที่ 3.12 - 3.15 สำหรับค่าของพารามิเตอร์ซึ่งกำหนดรูปของโดเมนและการกำหนดค่าของส่วนการไหลออกและการไหลเข้าของขอบเขตดังนี้

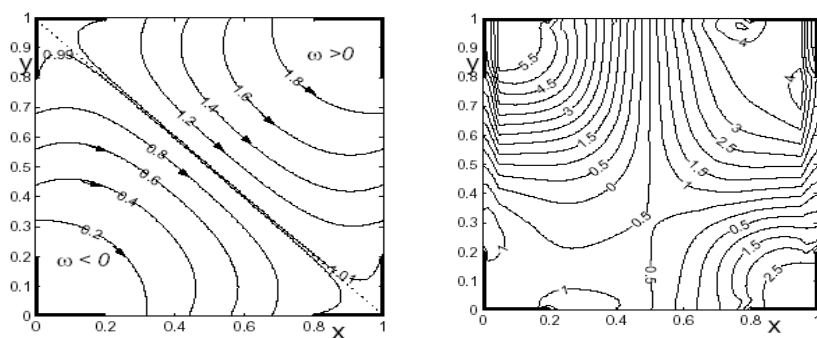
$$\Gamma_1^1 = \{(x, y) : x = 0, 0.2 \leq y \leq 0.8\},$$

$$\Gamma_2^1 = \{(x, y) : y = 1, 0.2 \leq x \leq 0.8\},$$

$$\Gamma_1^2 = \{(x, y) : x = 1, 0.2 \leq y \leq 0.8\},$$

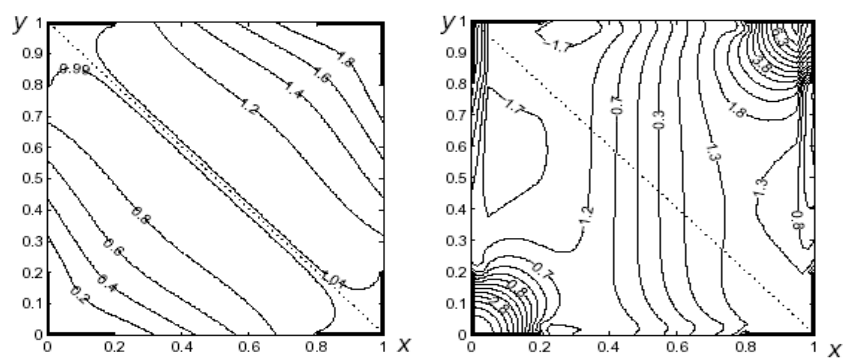
$$\Gamma_2^2 = \{(x, y) : y = 0, 0.2 \leq x \leq 0.8\}$$

ค่าคงที่ของเส้นสายธารบนส่วนของขอบเขตที่ของไหลไม่สามารถไหลผ่านได้ $\Gamma_1^0, \Gamma_2^0, \Gamma_3^0$
และ Γ_4^0 มีค่าดังนี้ $\psi_1^0 = 1, \psi_2^0 = 2, \psi_3^0 = 1$ และ $\psi_4^0 = 0$ ตามลำดับ



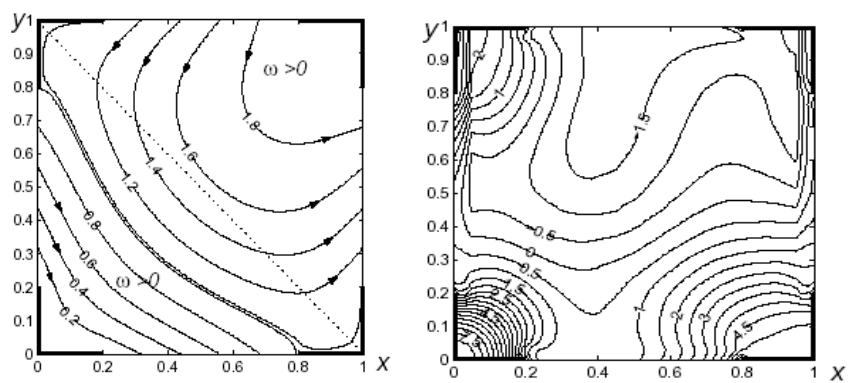
รูป 3.12 เส้นสายธาร

เส้นความดัน



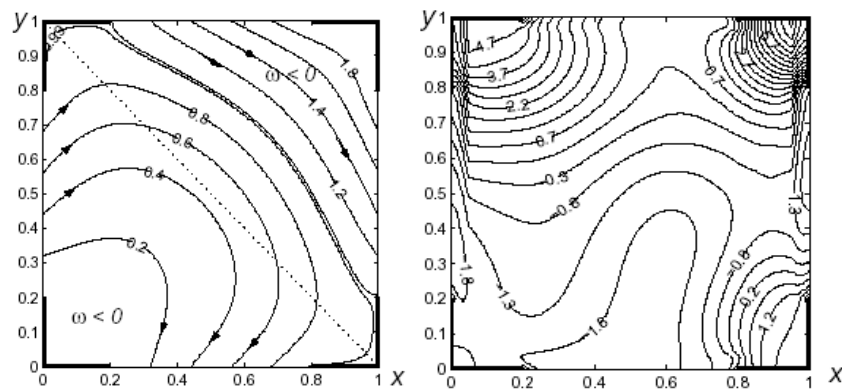
รูป 3.13 เส้นสายธาร

เส้นความดัน



รูป 3.14 เส้นสายธาร

เส้นความดัน



รูป 3.15 เส้นสายธาร เส้นความดัน

รูป 3.12 - 3.15 แสดงผลของการเปลี่ยนแปลงค่าขอบเขตของความเร็วบนทั้งสองช่องทางไหลเข้าของขอบเขต รูปที่ 3.12 และ 3.13 แสดงเส้นสายธารและเส้นความดันสำหรับกรณีที่กำหนดค่าของความเร็วบน ส่วนที่ไหลเข้าที่แตกต่างกัน มีค่าความเร็วที่มีค่าเป็นลบ เช่น $A_\omega^1 = -10, K_1 = 1$ บน Γ_1^1 และความเร็วที่เป็นบวก เช่น $A_\omega^2 = 10, K_2 = 1$ บน Γ_2^1 สำหรับรูปที่ 3.12 ในทางตรงกันข้ามมีความเร็วที่เป็นบวก เมื่อ $A_\omega^1 = 10, K_1 = 1$ บน Γ_1^1 และค่าความเร็วที่มีค่าเป็นลบ $A_\omega^2 = -10, K_2 = 1$ บน Γ_2^1 สำหรับรูปที่ 3.13 ในกรณีตัวอย่างของการไหลที่ได้ที่เหลื่ออยู่เกี่ยวกับความสมมาตรของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคล้ายกับการไหลที่มีความสามารถที่แฝงอยู่ รูปที่ 3.14 และ 3.15 แสดงเส้นสายธารและเส้นความดันสำหรับ $A_\omega^1 = A_\omega^2 = 10, K_1 = K_2 = 1$ และ $A_\omega^1 = A_\omega^2 = -10, K_1 = K_2 = 1$ ตามลำดับ ซึ่งเป็นตัวอย่างของการไหลที่ไม่สมมาตรในแนวทแยงมุม

บทที่ 4

สรุป อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยนี้เป็นการศึกษาขั้นตอนผลต่างสืบเนื่องในการไหลคงที่สำหรับสองมิติในปัญหาที่ของไหลที่อัดตัวยากไหลผ่านตลอดซึ่งทำการศึกษาโดยสมการออยเลอร์ ขั้นตอนที่สำคัญสำหรับปัญหาค่าขอบเมื่อของไหลมีการไหลเข้าในบางส่วนของขอบ โดยที่กำหนดให้ตัวประกอบปกติของเวกเตอร์ความเร็วและตัวประกอบสัมผัสของความเร็วน โดยกำหนดให้ตัวประกอบปกติในส่วนที่ของไหลมีการไหลออกจากขอบของโดเมน ซึ่งตัวประกอบปกติถูกกำหนดให้ในส่วนที่ของไหลสามารถไหลออกจากขอบได้ สมการออยเลอร์ในรูปของความเร็วนและฟังก์ชันเส้นสายธารสามารถดำเนินการตามขั้นตอนเชิงตัวเลข เทคนิคสำหรับฟังก์ชันในหนึ่งมิติถูกนำมาใช้ทำให้เกิดความสอดคล้องระหว่างจุดในโดเมนที่ใดๆและจุดในโดเมนที่คำนวณสมการทางพีชคณิตได้ถูกนำมาใช้ในการคำนวณสมการออยเลอร์ในรูปฟังก์ชันเส้นสายธารและความเร็วนเป็นสมการไม่เชิงเส้นที่สำคัญสำหรับการไหลหมุนวน โดยดำเนินการด้วยกระบวนการทำซ้ำ กระบวนการทำซ้ำภายนอกทั้งสมการพัวของค์สำหรับฟังก์ชันสายธารและสมการ Helmholtz สำหรับความเร็วน แต่ละขั้นของกระบวนการทำซ้ำภายนอกของสมการเชิงเส้นถูกดำเนินการโดยวิธีพอนปรนเกินสืบเนื่องหรือ วิธี Stabilizing Correction สมการ Helmholtz สำหรับความเร็วนมีลักษณะเป็นไฮเพอร์โบลิก การลู่เข้าของขั้นตอนเชิงตัวเลขสู่ผลเฉลยที่แท้จริงสำหรับการทดสอบปัญหากับผลเฉลยที่แท้จริงผลเฉลยที่แท้จริงมีความสอดคล้องกับการไหลหมุนวนกับ สมการไม่เชิงเส้นของฟังก์ชันเส้นสายธารและความเร็วน สำหรับในสองมิติในช่องโค้ง อัตราการลู่เข้าของวิธีการเชิงตัวเลขได้นำมาเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขตามลำดับของกริด พิกัดเชิงเส้นโค้งได้นำมาใช้ในการพัฒนาขั้นตอนเชิงตัวเลขสำหรับโดเมนที่มีความแตกต่างกัน

สรุป

1. งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาการแก้ปัญหาที่อยู่บนพื้นฐานของกฎอนุรักษ์ความเร็วนตลอดเส้นสายธาร
2. งานวิจัยนี้ศึกษาการไหลผ่านตลอดปัญหาขอบ เมื่อกำหนดส่วนของขอบโดเมนเป็นความเร็วน
3. งานวิจัยนี้ทำการศึกษาการลู่เข้าสู่ผลเฉลยที่แท้จริง โดยเปรียบเทียบผลต่างสืบเนื่องของผู้วิจัย ซึ่งเป็นข้อยืนยันการทดสอบผลเฉลยของปัญหาโดยวิธีของผู้วิจัยกับผลเฉลยจากการคำนวณ

4. งานวิจัยนี้ทำการคำนวณโดยวิธีการเชิงตัวเลข ซึ่งเป็นวิธีการประมาณค่า วิธีใหม่ในการหาผลเฉลยของสมการออยเลอร์ของการไหลของของไหลที่คงที่ในสองมิติที่ของไหลนั้นไม่มีความหนืด ที่มีการไหลผ่านโดเมนที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดหนึ่งหน่วย กับช่องทางการไหลเข้าและไหลออกหนึ่งและสองช่องทาง

อภิปรายผล

งานวิจัยนี้แสดงผลการวิจัยโดยแสดงภาพต่างๆประกอบ เมื่อกำหนดค่าความเร็ววนที่ไหลเข้าผ่านขอบของโดเมนที่มีค่าแตกต่างกัน

ข้อเสนอแนะ

1. งานวิจัยนี้ เป็นการศึกษาปัญหาในระบบสอง มิติ ซึ่งควรมีการขยายในระบบ สามมิติ หรือใช้วิธีการอื่นในการหาผลเฉลยของปัญหานี้
2. ควรมีการวิจัยในปัญหานี้โดยใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ (finite element) หรือระเบียบวิธีปริมาตรอันตะ (finite volume)

บรรณานุกรม

- Alekseev G.V., Mokin Yu A. (1972). **Dinamika Sploshnoi Sredu** 12: 5-13.
- Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N., (1990). **Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids**. Netherlands.
- Gunter N.M. (1927) **Izvestiya Physico-Matematicheskogo Instituta imeni V.A.Steklova** 2(1): 1-168.
- Kazhikhov A.V., Ragulin, V.V., (1980). Nonstationary problems on ideal fluid flow through the bounded domain. **Dokl. Akad. Nauk USSR**, 250(6): 1344-1347.
- Kochin N.E., (1956). On one existence theorem in hydrodynamics. **Priladnaya matematika i mekh** , 20(2): 153-172.(Translated in Journal of Applied Mathematics and Mechanics ISSN 0021-8928).
- Lichtenstein L. (1929). **Grundlagen der Hydromechanics**. Berlin.
- Yanenko N.N. ,(1971). The Method of Fractional Steps: **The solution of problems of mathematical physics in several variables**. New York, Berlin and Heidelberg: Springer-Verlag.

Output

จากโครงการวิจัยที่ได้รับทุน สกว.

1. ผลงานตีพิมพ์ในวารสารวิชาการนานาชาติ

ชื่อผู้แต่ง **Peiangpob Mounnamprang and Nikolay Moshkin**

ชื่อเรื่อง **Numerical simulation of vortical ideal fluid flow through curved channel**

ชื่อวารสารที่พิมพ์เผยแพร่ **INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN FLUIDS**

รายละเอียดดังนี้ **Int. J. Numer. Meth. Fluids 2003; 41: 1173 –1189 (DOI: 10.1002/fld.487)**

2. การนำผลงานวิจัยไปใช้ประโยชน์

2.1 เชิงพาณิชย์ **ไม่มี**

2.2 เชิงนโยบาย **ไม่มี**

2.3 เชิงสาธารณะ (มีเครือข่ายความร่วมมือ/สร้างกระแสความสนใจในวงกว้าง)

- ได้รับเชิญเป็นกรรมการ Technical Program Committee ของ การประชุมวิชาการด้านวิทยาการและวิศวกรรมคอมพิวเตอร์แห่งชาติ ประจำปี 2546 The Seventh National Computer Science and Engineering Conference หรือ NCSEC 2003 ในระหว่างวันที่ 28 – 30 ตุลาคม 2546 ณ มหาวิทยาลัยบูรพา จ.ชลบุรี

2.4 เชิงวิชาการ (มีการพัฒนาการเรียนการสอน/สร้างนักวิจัยใหม่)

- ได้รับคัดเลือกทุนจาก UNESCO และ SEMEO เข้าร่วมประชุมการเสนอผลงานวิจัยในงาน ICASE 2003 World Conference on Science and Technology Education ในระหว่างวันที่ 7 – 10 เมษายน 2546 ณ เมืองปิ่นัง ประเทศมาเลเซีย

- ได้รับคัดเลือกทุนจาก SEMEO RECSAM เข้าร่วมอบรมระยะสั้น หลักสูตรคณิตศาสตร์ ในระหว่างวันที่ 16 กุมภาพันธ์ – 28 มีนาคม 2546 ณ เมืองปิ่นัง ประเทศมาเลเซีย

3. อื่นๆ

3.1 ผลงานตีพิมพ์ในวารสารวิชาการในประเทศ

- A Numerical Algorithm for Vortical Flow of an Ideal Incompressible Fluid Through a Curved Channel, Proc. The 28 Congress on Science and Technology of Thailand, October 24-26, 2002, Queen Sirikit National Convention Center, Bangkok. P.572.

- Numerical Method for Solving the Flowing – Through Problem of Ideal Incompressible Fluid Flow in Term of Primitive Variables, ในการประชุมเสนอผลงานวิจัยของนักวิจัยรุ่นใหม่ และพบกับเมธีวิจัยอาวุโส สกว. ในระหว่างวันที่ 9-11 มกราคม 2547 , จ.กาญจนบุรี

- Streamfunction-vorticity numerical method for flowing through problem of ideal incompressible fluid within 2D domain , Proc . The 8 th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering . ในระหว่างวันที่ 21-23 กรกฎาคม 2547, ณ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จ. นครราชสีมา , inpress

3.2 การเสนอผลงานในที่ประชุมวิชาการ

- ไปเสนอผลงานวิจัยในต่างประเทศ ในงาน International Computational Mathematics Application 2002, 30August - 3 September, 2002 , Dalian University of Technology, ณ ประเทศจีน

- ไปเสนอผลงานวิจัยในต่างประเทศ ในงาน The Sixth Asian Symposium on Computer Mathematics and Workshop on Geometric Constraint Solving, 23- 25 October, 2003 , Institute of Systems Science Chinses Academy of Sciences Bei Jing, ณ ประเทศจีน

- ไปเสนอผลงานวิจัยในประเทศ ในการประชุม วทท 28. ในระหว่างวันที่ 9-11 ตุลาคม 2546, ณ ห้องประชุมศูนย์ประชุมแห่งชาติสิริกิติ์ จ.กรุงเทพ

- ไปเสนอผลงานวิจัยในประเทศ ในการประชุมเสนอผลงานวิจัยของนักวิจัยรุ่นใหม่ และพบกับเมธีวิจัยอาวุโส สกว. ในระหว่างวันที่ 9-11 มกราคม 2547 , จ.กาญจนบุรี

- ไปเสนอผลงานวิจัยในประเทศ ในการประชุม The 8 th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering . ในระหว่างวันที่ 21-23 กรกฎาคม 2547, ณ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จ. นครราชสีมา

3.3 หนังสือ ไม่มี

3.4 การจดสิทธิบัตร ไม่มี

ภาคผนวก ก

1. ผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติ

ชื่อเรื่อง **Numerical simulation of vortical ideal fluid flow through curved channel**

ชื่อวารสารที่พิมพ์เผยแพร่ **INTERNATIONAL JOURNAL FOR
NUMERICAL METHODS IN FLUIDS**

รายละเอียดดังนี้ **Int. J. Numer. Meth. Fluids 2003; 41: 1173 –1189 (DOI:
10.1002/fld.487)**

2. ผลงานตีพิมพ์ในวารสารวิชาการในประเทศ

- ผลงานวิจัยในประเทศ ในการประชุม วทท 28. ในระหว่างวันที่ 9-11 ตุลาคม 2546, ณ ห้องประชุมศูนย์ประชุมแห่งชาติสิริกิติ์ จ.กรุงเทพ

เรื่อง A Numerical Algorithm for Vortical Flow of an Ideal Incompressible Fluid Through a Curved Channel

- ผลงานวิจัยในประเทศ ในการประชุมเสนอผลงานวิจัยของนักวิจัยรุ่นใหม่ และพบกับเมธีวิจัยอาวุโส สกว. ในระหว่างวันที่ 9-11 มกราคม 2547, จ.กาญจนบุรี

เรื่อง Numerical Method for Solving the Flowing – Through Problem of Ideal Incompressible Fluid Flow in Term of Primitive Variables

- ผลงานวิจัยในประเทศ ในการประชุม The 8 th Annual National Symposium on Computational Science and Engineering . ในระหว่างวันที่ 21-23 กรกฎาคม 2547, ณ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จ. นครราชสีมา

เรื่อง Streamfunction-vorticity numerical method for flowing through problem of ideal incompressible fluid within 2D domain

3 ผลงานเผยแพร่ในวารสารวิชาการต่างประเทศ

- ผลงานวิจัยในต่างประเทศ ในงาน International Computational Mathematics Application 2002, 30August - 3 September, 2002 , Dalian University of Technology, ณ ประเทศจีน

เรื่อง Numerical Simulation of Vortical Ideal Fluid Flow Through Curved Channel

- ผลงานวิจัยในต่างประเทศ ในงาน The Sixth Asian Symposium on Computer Mathematics and Workshop on Geometric Constraint Solving, 23- 25 October, 2003 , Institute of Systems Science Chinese Academy of Sciences Bei Jing, ณ ประเทศจีน

เรื่อง Numerical Method for Solving the Flowing - Through Problem of Ideal Incompressible Fluid Flow in Term of Primitive Variables

ระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับการแก้ปัญหการไหลผ่านของของไหลอุดมคติที่อัดตัวยากในทอมของตัวแปรง่าย

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE FLOW-THROUGH PROBLEM OF IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW IN TERM OF PRIMITIVE VARIABLES

เพียงพบ มนต์นวลปรังค์

Peiangpob Mounnumprang

Program of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Rajabhat Institute

Pecthburgiwittayalongkorn, Pathumthani, 13180, Thailand; e-mail address: peiangpb@sut.math.ac.th

บทคัดย่อ: งานวิจัยนี้เป็นการพัฒนาขั้นตอนเชิงตัวเลข ในการศึกษาปัญหาเงื่อนไขขอบกับสมการออยเลอร์ในสถานะอยู่ตัว โดยเปลี่ยนสมการออยเลอร์ในทอมของตัวแปรง่าย โดยพิจารณาการลู่เข้าของผลเฉลยของสมการกับผลเฉลยแม่นยำ ผลการวิจัยนี้แสดงผลเฉลยโดยรูปภาพที่แตกต่างกันตามพารามิเตอร์ที่กำหนดให้

Abstract: In this paper, we develop numerical algorithm to study a boundary value problem in which the governing equations are the steady state Euler equations and the vorticity is given on the inflow parts of the boundary. We rewrite Euler equations in term of primitive variables. The convergence of the finite difference equations to the exact solution is shown experimentally by comparing the computational results with the exact solution on the sequence of grids. Plots of the flow structure and isobars, for different geometries of channel and for different values of vorticity on entrance, are also presented.

Methodology: The Euler equations are implemented in terms of the stream function and vorticity. An irregular physical domain is transformed into a rectangle in the computational domain and the Euler equations are rewritten with respect to a curvilinear co-ordinate system. An appropriate iterative process is suggested in this work. The convergence of the numerical algorithm is confirmed by a test problem with known analytical solution. Numerical calculations are performed for the two-dimensional inviscid flow through a channel with curved walls. The proposed schemes are confirmed to be efficient for a wide range of parameters. Strong dependence of the pressure field on the boundary conditions for the vorticity is shown.

Results, Discussion and Conclusion: Figure 1 illustrates the pressure contours and figure 2 illustrates the streamlines computed for various geometries of curved channel. The boundary conditions for vorticity at the inflow part of the boundary were prescribed by the equation $\omega(y) = a_\omega \sin(Ky\pi)$. In each case, the iterative process converged with tolerance $\varepsilon_\omega = 10^{-6}, \varepsilon_\psi = 10^{-6}$.

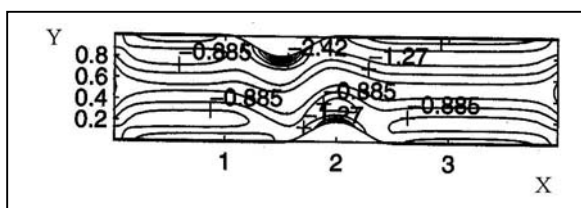


Figure 1

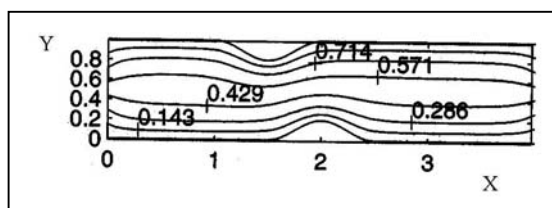


Figure 2

References: (1) Kazhikhov AV, et al. Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids. Netherlands, (1990).

Keywords: flowing-through problem, ideal incompressible fluid flow

STREAMFUNCTION-VORTICITY NUMERICAL METHOD FOR FLOWING THROUGH PROBLEM OF IDEAL INCOMPRESSIBLE FLUID WITHIN 2D DOMAIN

N.P. Moshkin,¹ Peiangpob Mounnamprang²

ABSTRACT: A numerical algorithm to study the boundary value problem in which the governing equations are the steady Euler equations and the vorticity is given on the inflow parts of the domain boundary is developed. The property of conservation of vorticity along stream line are utilized to construct numerical algorithm in the case of several inflow and outflow parts of domain boundary. The convergence of the finite-difference equations to the exact solution is shown experimentally for the test problem by comparing the computational results with the exact solution on the sequence of grids. The numerical algorithm is illustrated with several examples of steady flow through a two-dimensional channel with two inflow and outflow parts of boundary.

KEYWORDS: ideal incompressible fluid, Euler equations, flowing through problem

1. INTRODUCTION

The well-posed statement of the internal flow problem for an ideal incompressible fluid is complicated if on some parts of domain boundary fluid enters the domain or is flowing out of it. Some special boundary conditions must be imposed to comply with the "hyperbolic" character of the convective part of the Euler equations. Statement of the problem for rotational flows of incompressible fluid and for irrotational ones appear to be quite different. In particular, the stationary irrotational flow of incompressible ideal fluid is determined uniquely by the prescribing the value of the normal component of velocity on the boundary. In the stationary case the determination of the rotational flow needs additional information on inflow and outflow parts as compared with the irrotational flow. For example Kazhikhov and Ragulin 1980 studied the existence and uniqueness of the boundary value problem where on the inflow parts of the boundary either three components of velocity or normal component of velocity and two tangent components of vorticity were prescribed, and on the outflow parts of the boundary either the normal component of velocity or pressure were prescribed. In reality, the vorticity is given also on inflow parts of boundary in the case of the stationary irrotational flow. It is simply equal to zero, and this information is perceived usually as an absence of information.

In this paper we study a rotational flow of an ideal incompressible fluid through bounded domain with inflow and outflow parts of domain boundary. We are following the results of Kazhikhov and Ragulin [1] and assume that tangent components of vorticity are given on inflow parts of domain boundary. The novel contributions in this study are developing the suitable numerical method for such kind of boundary value problems. The property of conservation of vorticity on streamline are utilized to construct numerical algorithm in the case of 2-D stationary rotational

¹Suranaree University of Technology, School of Mathematics, Nakhon Ratchasima, 30000, Thailand.

²Rajabhat Petchburiwittayalongkorn Institute, Pathumthani, Thailand.

flow of an ideal incompressible fluid flow.

2. FORMULATION OF FLOWING THROUGH PROBLEM

Let Ω be a bounded domain in R^2 whose boundary Γ consists of the three kinds of parts. The inflow parts of domain boundary are denoted by Γ_i^1 , $i = 1, \dots, L$, and the outflow parts of the boundary are denoted by Γ_j^2 , $j = 1, \dots, K$. The impermeable parts of boundary are denoted by Γ_m^0 , $m = 1, \dots, M$. Each components of Γ_α^i , is a sufficiently smooth curves. The steady motion of a homogeneous ideal incompressible fluid is described by the Euler equations

$$\Delta\psi = -\omega, \quad \text{in } \Omega, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} = 0, \quad \text{in } \Omega. \quad (2)$$

The stream function ψ and the vorticity ω are determined as $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, where (x, y) denotes the Cartesian coordinates of points on Ω , u, v denote the components of velocity vector $\vec{u}$ on x and y directions, respectively. We assume that on the solid (impermeable) parts of the boundary the normal component of velocity vector is vanish

$$(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_m^0, \quad m = 1, \dots, M, \quad (3)$$

where $\vec{n}$ is outward normal vector. Special boundary conditions must be imposed at the inflow and the outflow parts of the boundary in order have a well-posed problem Antontsev 1990, Kazhikhov 1980. The normal component of the velocity vector are given on the inflow parts of the boundary

$$\vec{\omega} = \text{curl}(\vec{u}) = \omega_i(x, y), \quad (\vec{u} \cdot \vec{n}) = f_i(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_i^1, \quad i = 1, \dots, L. \quad (4)$$

On the outflow parts of the boundary only the values of normal component of velocity vector are needed to be prescribed

$$(\vec{u} \cdot \vec{n}) = g_j(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_j^2, \quad j = 1, \dots, K. \quad (5)$$

Boundary conditions (3)-(5) imply that stream function is known on whole domain boundary and additionally the values of vorticity are given on inflow parts of domain boundary.

3. THE SOLUTION PROCEDURE

We solve the governing equations (1),(2) with boundary conditions(3)-(5) using the iterative approach with finite-difference method. A uniform rectangular mesh is used. The iterative process is performed by realizing the following steps:

1. Give initial guess $\psi^{(0)}$, $\omega^{(0)}$.
2. For given $\omega^{(n)}$ find solution $\psi^{(n+1)}$ of the Poisson equation (1)

$$\Delta\psi^{(n+1)} = -\omega^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

with the Dirichlet boundary conditions for stream function (3)-(5).

3. In the case of steady flow, equation (2) means that vorticity is constant on stream line and this equation has general solution in the form $\omega = \omega(\psi)$. The function $\omega(\psi)$ may be found from boundary conditions for vorticity on inflow parts of domain boundary. The value of vorticity at the grid point (x_k, y_l) on $(n+1)$ iteration defines from boundary condition on vorticity at boundary $\Gamma_{i^*}^1$

$$\omega_{k,l}^{(n+1)} = \omega_{i^*}(x^*, y^*); \quad \psi(x^*, y^*) - \psi_{k,l}^{(n+1)} = 0, \quad (x^*, y^*) \in \Gamma_{i^*}^1 \quad (6)$$

4. Verify convergence criterion and if iterations does not converge return to step 2.

To solve the Poisson equation for stream-function with the Direchlet boundary conditions we used high order compact finite difference scheme, see for example Yanenko 1971. The corresponding finite difference equation was solved by SOR method. To find zero of equations (6) we used standard secant method. The iterative process is terminated when the convergence criterion is achieved $\frac{\|\omega^{(n)} - \omega^{(n-1)}\|}{\|\omega^{(n)}\|} \leq \varepsilon_\omega$, $\frac{\|\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)}\|}{\|\psi^{(n)}\|} \leq \varepsilon_\psi$, where ε_ω and ε_ψ are convergence tolerances, and $\|\cdot\|$ denotes some norm in the set of grid functions.

4. NUMERICAL RESULTS

To construct the test problem with known solution, we specify the stream function and vorticity in the form $\psi(x, y) = e^{x+y}$, $\omega = -2e^{x+y}$. We consider a square domain $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$. Table 1 shows the infinity norm of the absolute errors which are obtained from the grid systems having $N \times N$ nodes. With these values, the resulting rate of convergence is estimated.

Table 1. Norm of errors for stream function and vorticity. Rates of convergence for test problem.

Grid	$err = \ \psi^h - \psi_{exact}\ _\infty$	Rate	$err = \ \omega^h - \omega_{exact}\ _\infty$	Rate
6×6	0.173E-05	-	0.345E-05	-
11×11	0.979E-07	4.14	0.196E-06	4.13
21×21	0.579E-08	4.08	0.116E-07	4.08
41×41	0.413E-09	3.81	0.862E-09	3.81

The rates of convergence are defined by equation $m \simeq \frac{\ln(err_{N_1}) - \ln(err_{N_2})}{\ln(N_1) - \ln(N_2)}$ where m is rate of convergence $\|f^h - f_{exact}^h\| \leq Ch^m$, err_{N_1} and err_{N_2} are maximum norm of difference between exact solution and approximated solution on grid with $N_1 \times N_1$ and $N_2 \times N_2$ nodes, respectively. It is observed that the convergence rate is approximately equal to four. This confirms that the finite-difference scheme is of fourth-order accuracy.

The numerical method developed and tested above will now be applied to study the internal flow of an ideal incompressible fluid in two dimensional channel with several inflow and outflow parts of domain boundary. As an example, let us consider the flowing through problem in square domain with two inflow and two outflow parts of the domain boundary. The sketch of the domain and notations are shown on Figure 1, where y_1^1, y_2^1 are y coordinates of inflow part of boundary Γ_1^1 , x_1^1, x_2^1 are x coordinates of inflow part of boundary Γ_2^1 , and y_α^2, x_α^2 , $\alpha = 1, 2$ are y and x coordinates of outflow parts of boundary Γ_1^2 and Γ_2^2 , respectively.

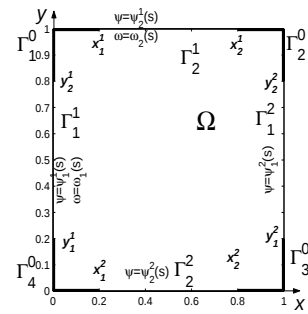


Figure 1.

The boundary conditions for stream function and vorticity are

$$\begin{aligned}
\Gamma_m^0 : \quad \psi &= \psi_m^0 = const, \quad m = 1, 2, 3, 4 \\
\Gamma_1^1 : \quad \psi &= \psi_1^1(s) = \frac{y_2^1 - s}{y_2^1 - y_1^1} \psi_4^0 + \frac{s - y_1^1}{y_2^1 - y_1^1} \psi_1^0, \quad \omega = \omega_1(s) = A_\omega^1 \sin \left(K_1 \frac{s - y_1^1}{y_2^1 - y_1^1} \pi \right), \quad y_1^1 \leq s \leq y_2^1 \\
\Gamma_2^1 : \quad \psi &= \psi_2^1(s) = \frac{x_2^1 - s}{x_2^1 - x_1^1} \psi_1^0 + \frac{s - x_1^1}{x_2^1 - x_1^1} \psi_2^0, \quad \omega = \omega_2(s) = A_\omega^2 \sin \left(K_2 \frac{s - x_1^1}{x_2^1 - x_1^1} \pi \right), \quad x_1^1 \leq s \leq x_2^1 \\
\Gamma_1^2 : \quad \psi &= \psi_1^2(s) = \frac{y_2^2 - s}{y_2^2 - y_1^2} \psi_3^0 + \frac{s - y_1^2}{y_2^2 - y_1^2} \psi_2^0, \quad y_1^2 \leq s \leq y_2^2
\end{aligned}$$

$$\Gamma_2^2: \psi = \psi_2^2(s) = \frac{x_2^2 - s}{x_2^2 - x_1^2} \psi_4^0 + \frac{s - x_1^2}{x_2^2 - x_1^2} \psi_3^0, \quad x_1^2 \leq s \leq x_2^2$$

Parameters $A_\omega^1, A_\omega^2, K_1, K_2$ permit to manage the values of vorticity at the inflow parts of boundary, and we assume additionally that $\psi_2^1(s') > \psi_1^1(s'')$, for any s' and s'' .

Patterns of streamlines and pressure contours through the fluid domain are shown in Figures 2,3 for the following set of parameters which determined geometry of domain and location of outflow and inflow parts of the boundary $\Gamma_1^1 = \{(x, y) : x = 0, 0.2 \leq y \leq 0.8\}$, $\Gamma_2^1 = \{(x, y) : y = 1, 0.2 \leq x \leq 0.8\}$, $\Gamma_1^2 = \{(x, y) : x = 1, 0.2 \leq y \leq 0.8\}$, $\Gamma_2^2 = \{(x, y) : y = 0, 0.2 \leq x \leq 0.8\}$. The constant values of streamfunction on impermeable parts $\Gamma_1^0, \Gamma_2^0, \Gamma_3^0$, and Γ_4^0 are $\psi_1^0 = 1, \psi_2^0 = 2, \psi_3^0 = 1, \psi_4^0 = 0$, respectively.

Figures 2 a), b) correspond to the potential flow where vorticity at inflow parts of boundary is equal to zero ($A_\omega^1 = A_\omega^2 = 0$). The lines $\psi = \text{const}$ and $p = \text{const}$ are symmetrical about the diagonals of square. The largest pressure gradient occurs at the neighborhood of lower left and upper right angles of domain.

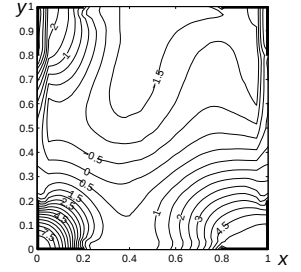
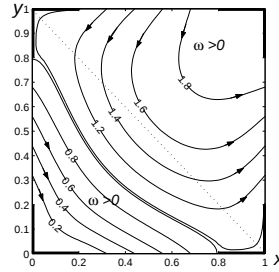
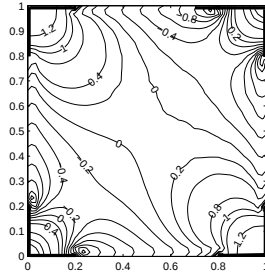
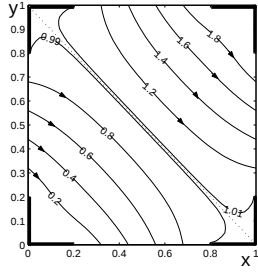


Fig. 2a) Stream function ψ

Fig. 2b) Pressure p

Fig. 3a) Stream function ψ

Fig. 3b) Pressure p

Figures 3 a), b) plot streamlines and pressure contours for $A_\omega^1 = A_\omega^2 = 10, K_1 = K_2 = 1$, respectively. In this case the patterns of flow are not more symmetric with respect to both diagonals.

5. CONCLUSION

In this paper we have studied the flowing through boundary value problem where on inflow parts of boundary domain the values of vorticity are given. The new method to the approximate solution to the Euler equation of steady two dimensional inviscid flow is developed. Method is based on the property of vorticity conservation along streamline.

6. ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been financially supported by TRF (The Thailand Research Fund).

7. REFERENCES

- Antontsev, S.N., Kazhikhov, A.V., Monakhov V.N.,(1990). *Boundary Value Problems in Mechanics of Nonhomogeneous Fluids*. Netherlands.
- Kazhikhov, A.V., Ragulin, V.V., (1980). Nonstationary problems on ideal fluid flow through the bounded domain. *Dokl. Akad. Nauk USSR*, **250**(6): 1344-1347.
- Yanenko, N.N.,(1971). *The Method of Fractional Steps: The solution of problems of mathematical physics in several variables*. New York, Berlin and Heidelberg: Springer-Verlag.