



## รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การจำลอง และ การควบคุมการพาความร้อนโดยใช้แบบจำลองมิติต่ำ

โดย นายศิริโรจน์ ศิริทรัพย์

พฤษภาคม 2553

สัญญาเลขที่ TRG5180007

## รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การจำลอง และ การควบคุมการพาความร้อนโดยใช้แบบจำลองมิติต่ำ

นาย ศิโรจน์ ศิริทรัพย์

ศูนย์เทคโนโลยีอิเล็กทรอนิกส์และคอมพิวเตอร์แห่งชาติ

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกว.ไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

## กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยใคร่ขอขอบคุณสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัยในการสนับสนุนทุนวิจัยสำหรับโครงการวิจัยในครั้งนี้ รวมไปถึง Prof. George Em Kaniadakis และ รศ. ดร. จักษ์ อัสวานันท์ที่ให้ ความกรุณาเป็น mentor สำหรับทุนส่งเสริมนักวิจัยรุ่นใหม่

ศิโรจน์ ศิริทรัพย์

## **Abstract**

**Project Code : TRG5180007**

**Project Title : Simulation and control of convective heat transfer using low-dimensional model**

**Investigator : Sirod Sirisup, National Electronics and Computer Technology Center**

**E-mail Address : sirod.sirisup@nectec.or.th**

**Project Period : May 2008- May 2010 ( 2 years)**

Convective heat transfer is a scientific field of major interest to engineering and scientific researchers, as well as designers, developers, and manufacturers. Ability to predict the convective heat transfer behavior correctly will thus bring many new efficient innovations that will directly affect our daily life especially in energy consumption issues.

Simulation-based study has now been widely used in many fields of research including convective heat transfer. However, there are two main limitations of numerical simulation. First, even simulation can provide detailed data for interested variables such data may not readily imbue the investigator with an increased level of understanding the physics essential to a given phenomenon which usually relate to the gigantic size of computed data sets. Second, without the dedication of massive resources, numerical simulation of large or non-linear systems remains far too computationally expensive.

A lower-order or low-dimensional models for a given phenomenon is thus constructed to overcome such problems and serve as the basis for additional analysis. Recently, low-dimensional models has been constructed and widely applied to both simulation and control of fluid flow problems.

In this research, we have successfully constructed a low-dimensional model based on the proper orthogonal decomposition (POD) technique to provide accurate descriptions of the dynamics of both free and forced convective heat transfers with only a handful degree of freedoms. However, a bifurcation analysis on the POD-based model with respect to its parameter(s) indicates that this model is rather suitable for simulation not control purpose.

**Keywords: Reduced order model, Proper orthogonal decomposition, heat transfer**

## บทคัดย่อ

รหัสโครงการ: TRG5180007

ชื่อโครงการ: การจำลอง และ การควบคุมการพาความร้อนโดยใช้แบบจำลองมิติต่ำ

ชื่อนักวิจัย : Sirod Sirisup, National Electronics and Computer Technology Center

E-mail Address : sirod.sirisup@nectec.or.th

ระยะเวลาโครงการ: May 2008- May 2010 ( 2 years)

การศึกษาเพื่อให้เข้าใจถึงหลักการพื้นฐานของการพาความร้อนอันจะได้มาซึ่งความสามารถในการพยากรณ์คุณลักษณะของการพาความร้อนที่ถูกต้องและแม่นยำนั้น แบ่งออกได้เป็นสองรูปแบบหลักๆคือ การทดลอง (experiment) และ การจำลอง (simulation) โดยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาคำตอบจากสมการเชิงอนุพันธ์ (partial differential equations) ซึ่งการศึกษาโดยใช้การจำลองนั้นพึงจะมีการทำกันอย่างกว้างขวางในไม่นานมานี้ เนื่องจากการจำลองมีข้อได้เปรียบหลายอย่างเมื่อเทียบกับการทดลอง เช่น ค่าใช้จ่ายของการทำการทดลองนั้น มีมูลค่าที่สูงกว่าการทำการจำลองมาก

อย่างไรก็ตามการจำลองนี้ยังคงมีข้อจำกัดหลักๆ สองข้อดังนี้ ข้อแรก ถึงแม้ว่าการจำลองจะให้ข้อมูลของตัวแปรที่มีรายละเอียดมากแต่ก็ยังจำเป็นต้องมีการวิเคราะห์ข้อมูลนั้นๆเพื่อให้ได้ซึ่งความเข้าใจแต่อาจต้องใช้เวลามากหรือเป็นไปได้ยากเนื่องจากข้อมูลมีจำนวนมากมายมหาศาล ส่วนข้อสองนั้นเป็นผลมาจากการแก้ปัญหสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีขนาดใหญ่ที่ต้องการระบบคอมพิวเตอร์ที่ช่วยคำนวณและระบบเก็บข้อมูลที่มีประสิทธิภาพสูงที่มีราคาแพงมาก เพื่อแก้ไขข้อจำกัดทั้งสองข้อที่กล่าวมาข้างต้นของการทำแบบจำลองโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาคำตอบจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่ควบคุมปรากฏการณ์นั้น การสร้างแบบจำลองมิติต่ำ (low-dimensional models) ได้ถูกนำเสนอเพื่อเป็นทางเลือกในการวิเคราะห์ปรากฏการณ์นั้นอีกทางหนึ่ง

ผลการวิจัยชิ้นนี้จะกล่าวถึงการสร้างแบบจำลองมิติต่ำโดยใช้เทคนิค proper orthogonal decomposition สำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระและแบบถูกบังคับ ซึ่งการสร้างแบบจำลองมิติต่ำนี้ จะมุ่งเน้นไปในปัญหาการพาความร้อนที่มีค่าขอบซับซ้อนที่มีค่าขอบนั้นขึ้นอยู่กับเวลา ซึ่งจากผลการศึกษาปรากฏว่า แบบจำลองมิติต่ำที่สร้างขึ้นสามารถนำไปใช้ในงาน simulation ได้เป็นอย่างดี อย่างไรก็ตามเมื่อใช้เทคนิค bifurcation analysis วิเคราะห์แบบจำลองมิติต่ำที่ถูกสร้างขึ้นมานั้นปรากฏว่าแบบจำลองที่ถูกสร้างขึ้นอาจมีสมบัติไม่เหมาะสมกับการใช้งานในด้านการควบคุม

คำสำคัญ: แบบจำลองมิติต่ำ, การแบ่งแยกตั้งฉากเหมาะสม, การพาความร้อน

โครงการ การจำลอง และ การควบคุมการพาความร้อนโดยใช้แบบจำลองมิติต่ำ

## บทนำ

ในปัจจุบันมนุษย์ได้ดำรงชีวิตอย่างสะดวกสบายบนพื้นฐานของอุปกรณ์อำนวยความสะดวกต่าง ๆ เช่น เครื่องทำน้ำอุ่น หม้อหุงข้าว หม้อต้มน้ำร้อน และ เครื่องปรับอากาศ เป็นต้น ซึ่งอุปกรณ์เหล่านี้ ต้องใช้พลังงานไฟฟ้า หรือพลังงานในรูปแบบอื่นเพื่อให้สามารถทำงานตามที่ได้รับออกแบบไว้ ทั้งนี้การออกแบบอุปกรณ์มีผลกระทบอย่างมากต่อประสิทธิภาพในการเปลี่ยนพลังงานไฟฟ้า หรือพลังงานในรูปแบบอื่นให้อยู่ในรูปของพลังงานความร้อน ดังนั้นเพื่อให้ได้มาซึ่งอุปกรณ์ที่สามารถควบคุมการพาความร้อน (convective heat transfer) ได้อย่างมีประสิทธิภาพสูงสุด เราจำเป็นต้องมีความสามารถในการพยากรณ์คุณลักษณะของการพาความร้อน นั้น ได้อย่างถูกต้องและแม่นยำ ซึ่งจะก่อให้เกิดนวัตกรรมใหม่ที่นำไปสู่การประหยัดพลังงานต่อไป ตลอดจนการบรรเทาภาวะโลกร้อนอันเป็นปัญหาใหญ่ของประเทศต่างๆทั่วโลกอยู่ในขณะนี้

ในการศึกษาเพื่อให้เข้าใจถึงหลักการพื้นฐานของการพาความร้อนอันจะได้มาซึ่งความสามารถในการพยากรณ์คุณลักษณะของการพาความร้อนที่ถูกต้องและแม่นยำนั้น แบ่งออกได้เป็นสองรูปแบบหลักๆคือ การทดลอง (experiment) และ การจำลอง (simulation) โดยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาคำตอบจากสมการเชิงอนุพันธ์ (partial differential equations) ซึ่งการศึกษาโดยใช้การจำลองนั้นเพิ่งจะมีการทำกันอย่างกว้างขวางในไม่นานมานี้ เนื่องจากการจำลองมีข้อได้เปรียบหลายอย่างเมื่อเทียบกับการทดลอง เช่น ค่าใช้จ่ายของการทำการทดลองนั้น มีมูลค่าที่สูงกว่าการทำการจำลองมาก

การจำลอง (simulation) โดยการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาคำตอบจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่ควบคุมปรากฏการณ์นั้นๆ ได้มีการใช้กันอย่างกว้างขวางไม่ว่าจะเป็นทางด้านศาสตร์ของการพาความร้อนเองหรือ ศาสตร์อื่นๆ เช่น กลศาสตร์ของไหล (fluid dynamics) แต่การจำลองนี้ยังคงมีข้อจำกัดหลักๆ สองข้อดังนี้ ข้อแรก ถึงแม้ว่าการจำลองจะให้ข้อมูลของตัวแปรที่มีรายละเอียดมาก แต่นั่นก็ไม่ได้หมายความว่า ข้อมูลนั้นจะทำให้นักวิจัยเข้าใจหลักการพื้นฐานของปัญหานั้นทันที หากแต่นักวิจัยจะต้องทำการวิเคราะห์อย่างละเอียด เพื่อให้ได้มาซึ่งแบบจำลองที่ง่ายต่อนำมาอธิบาย และ พยากรณ์ปรากฏการณ์นั้น ซึ่งการวิเคราะห์นี้ต้องใช้เวลามากหรือเป็นไปได้ยากเนื่องจากข้อมูลมีจำนวนมากมายมหาศาล ส่วนข้อสองนั้นเป็นผลมาจากการที่การจำลองนั้นต้องการ ระบบคอมพิวเตอร์ที่ช่วยคำนวณและระบบเก็บข้อมูลที่มีประสิทธิภาพสูง เพื่อทำการแก้ปัญหสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีขนาดใหญ่และซับซ้อน หรือปัญหสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีความไม่เชิงเส้นสูง (highly non-linear) ซึ่งระบบเหล่านี้ในปัจจุบันยังมีราคาแพงอยู่มาก

เพื่อแก้ไขข้อจำกัดทั้งสองข้อที่กล่าวมาข้างต้นของการทำแบบจำลองโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาคำตอบจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่ควบคุมปรากฏการณ์นั้น การสร้างแบบจำลองมิติต่ำ (low-dimensional models) ได้ถูกนำเสนอเพื่อเป็นทางเลือกในการวิเคราะห์ปรากฏการณ์นั้นอีกทางหนึ่ง โดยการสร้างแบบจำลองมิติต่ำนั้นมีเป้าหมายหลักอยู่สองข้อคือ ข้อแรก การสร้างแบบจำลองที่มีความสามารถในการให้รายละเอียดเกี่ยวกับปรากฏการณ์นั้น เช่น ปรากฏการณ์การพาความร้อน อย่างถูกต้องและแม่นยำ โดยมีความต้องการทางด้านการคำนวณต่ำกว่าแบบจำลองที่มาจากการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาคำตอบจากสมการเชิงอนุพันธ์มาก และ ข้อสอง การสร้างแบบจำลองมิติต่ำ จะนำมาซึ่งการวิเคราะห์การเปลี่ยนแปลงของปรากฏการณ์นั้นได้โดยตรง ซึ่งไม่จำเป็นต้องทำการวิเคราะห์ข้อมูลมีจำนวนมากมายมหาศาลอีก ทำให้แบบจำลองมิติต่ำนี้มีความคล่องตัวสูงสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการควบคุม(control) ได้โดยตรง

การสร้างแบบจำลองมิติต่ำนั้น สามารถทำได้โดยหลากหลายวิธี แต่วิธีที่มีความนิยม คือ วิธีสร้างโดยใช้ Proper orthogonal decomposition เทคนิค Proper orthogonal decomposition เทคนิคนี้เป็นเครื่องมือทาง stochastic ที่สามารถนำมาใช้เพื่อลดความต้องการการใช้คอมพิวเตอร์ในงาน simulation สำหรับรายละเอียดเพิ่มเติมนั้นให้ดูจาก [1]

การสร้างและประยุกต์ใช้แบบจำลองมิติต่ำ สำหรับปัญหาของไหล มีการทำกันอย่างแพร่หลายในสิบปีที่ผ่านมา ทั้งในรูปแบบของการจำลองโดยใช้แบบจำลองมิติต่ำ หรือ การประยุกต์ใช้แบบจำลองมิติต่ำในการควบคุมการไหลของของไหล ตัวอย่างเช่น [2-4] หากแต่ว่าการสร้างและประยุกต์ใช้แบบจำลองมิติต่ำต่อปัญหา การพาความร้อนนั้น ยังมีไม่มากนัก ตัวอย่างของการศึกษา แบบจำลองมิติต่ำในการถ่ายเทความร้อน ได้แก่ ปัญหาการนำความร้อน [5]

ปัญหาการพาความร้อนแบบถูกบังคับ [6] และปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระ [7-8] อย่างไรก็ตาม การศึกษาที่ผ่านมาแล้วยังไม่ได้มีการศึกษาการสร้างแบบจำลองสำหรับการพาความร้อนที่เหมาะสมกับการ simulation ที่มีปัญหาค่าขอบที่ซับซ้อน

ในงานวิจัยชิ้นนี้ จะกล่าวถึงการสร้างแบบจำลองมิติต่ำ โดยใช้เทคนิค proper orthogonal decomposition สำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระ และแบบถูกบังคับ ซึ่งการสร้างแบบจำลองมิติต่ำนี้ จะมุ่งเน้นไปในปัญหาการพาความร้อนที่มีค่าขอบซับซ้อน กล่าวคือ ค่าขอบนั้นขึ้นอยู่กับเวลา ซึ่งการใช้ค่าขอบแบบนี้ปรากฏอยู่ในกระบวนการจำลองและควบคุมการพาความร้อนโดยทั่วไป ในการแก้ปัญหาค่าขอบแบบนี้ เราจะใช้เทคนิค penalty Galerkin ในการที่จะดึงค่าขอบเขตเข้ามาในสมการควบคุม ซึ่งแนวทางนี้ได้มีการศึกษากับปัญหาของไหลเพียงอย่างเดียวมาแล้ว [9]

การ implement ปัญหาค่าขอบที่มีความซับซ้อนกับแนวทางแบบ Galerkin นั้นได้มีการวิพากษ์วิจารณ์ถึงความเหมาะสมเป็นวงกว้างในวงการ Numerical analysis ซึ่งสามารถดูรายละเอียดได้จาก [10] และ รายละเอียดจากข้อมูลการติดต่อระหว่างผู้เขียนและผู้ชักถามจากบทความนั้น การศึกษาปัญหาค่าขอบเขตของ ระบบ POD Galerkin นั้นได้มีการทำการศึกษาโดยละเอียดโดย [11] อีกด้วย สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้ทางผู้วิจัยจะสร้างแบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาค่าขอบที่ขึ้นอยู่กับเวลาด้วยวิธี Penalty method ซึ่งโดยรวมแล้ววิธีนี้มีความคล้ายคลึงกับเทคนิคที่เรียกว่า Tau method ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบ spectral method นั้นเอง อย่างไรก็ตาม วิธี Penalty method นั้นจะมีความยืดหยุ่นมากกว่า ดังที่เราจะได้เห็นจากการศึกษาในครั้งนี้ นั้นเอง

การสร้างแบบจำลองมิติต่ำในครั้งนี้เราจะใช้ วิธี Penalty method อย่างไรก็ตามเรามีความจำเป็นต้องศึกษา sensitivity ของแบบจำลองมิติต่ำที่สร้างขึ้นใหม่เทียบกับ parameter ที่ได้มาจากการใช้ penalty method สร้างแบบจำลองขึ้นมา ซึ่งจะทำการศึกษาโดยใช้ Bifurcation analysis อันเป็นเครื่องมือทาง non-linear dynamical systems ซึ่งสามารถบ่งชี้ความเหมาะสมของแบบจำลองกับการนำไปใช้งานในการควบคุมอีกด้วย

สำหรับรายงานนี้ ในบทถัดไป เราจะรายงานผลการวิจัยเกี่ยวกับแนวทางการสร้างแบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาการพาความร้อนโดยเน้นไปที่ปัญหาค่าขอบเขตแบบซับซ้อนโดยการใช้เทคนิค Penalty method ซึ่งแนวทางการสร้างแบบจำลองนี้นั้นจะศึกษาการสร้างแบบจำลองมิติต่ำสำหรับการพาความร้อนทั้งในแบบถูกบังคับ และ แบบอิสระ หลังจากนั้นจะนำเข้าสู่การนำแบบจำลองมิติต่ำไปประยุกต์ใช้กับงานทางด้าน simulation ด้านการพาความร้อน จากนั้นจะกล่าวถึงการศึกษา sensitivity analysis ของแบบจำลองที่ได้ถูกสร้างขึ้นโดยใช้ Bifurcation analysis อีกด้วย โดยจะกล่าวถึงรายละเอียดในการเตรียมแบบจำลองมิติต่ำให้อยู่ในรูปแบบที่เหมาะสมกับการศึกษา Bifurcation analysis จากซอฟต์แวร์เฉพาะด้าน และรายงานผลการศึกษาจาก Bifurcation analysis จากแบบจำลองมิติต่ำที่ถูกสร้างขึ้นมา และจะปิดท้ายด้วยสรุปผลการวิจัย



## ระเบียบวิธีที่เกี่ยวข้อง

### เทคนิค Proper Orthogonal decomposition

ก่อนที่จะไปยังรายละเอียดในการสร้างแบบจำลองมิติต่ำโดยโดยใช้เทคนิค proper orthogonal decomposition นั้น เราควรจะทราบรายละเอียดของเทคนิค proper orthogonal decomposition ก่อน

โดยใช้เทคนิค proper orthogonal decomposition (POD) นั้น เป็นกระบวนการในการสกัดโครงสร้างเชิงตั้งฉากหลักของข้อมูลแบบชุด (ensemble) ใดๆ ซึ่งกระบวนการในการสกัดที่ได้โครงสร้างหลักเชิงตั้งฉากนี้มีความสำคัญมาก เพราะนอกเหนือจาก การที่เราจะได้โครงสร้างเชิงตั้งฉากแล้ว เรายังได้โครงสร้างเชิงตั้งฉากที่มีความเหมาะสมที่สุดเมื่อเทียบกับโครงสร้างแบบอื่นๆ ในการใช้ทำฐานสำหรับการประมาณค่าใน L2 sense อีกด้วย

สำหรับการสกัดโครงสร้างหลักโดยเทคนิค proper orthogonal decomposition เราจะเริ่มจากการเขียนตัวแปรของการไหล  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t))$  ซึ่งแทนความเร็วในการไหลตามแนวแกน  $x, y$  และ  $z$  ตามลำดับ ในรูปแบบของการประมาณค่าด้วยผลบวกเชิงเส้นดังนี้

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t) \phi_j(\mathbf{x}),$$

โดย  $\phi_j(\mathbf{x})$  คือฐานที่เราต้องการที่ได้มาจากเทคนิค proper orthogonal decomposition ซึ่งได้มาจากการแก้ปัญหา eigenvalue ดังต่อไปนี้

$$\int_A C(t, t') a_j(t') dt' = \hat{\lambda}_j a_j(t), \quad t \in A,$$

โดยที่  $a_j(t)$  เป็น mode เชิงเวลา (หรือในมุมมองของผลบวกเชิงเส้นจะเป็นค่าสัมประสิทธิ์ของผลบวกเชิงเส้น) และ  $A$  เป็นช่วงเวลาในการสังเกตข้อมูลเวลาแบบชุด (ensemble) ที่กำหนดให้ และ  $C(t, t')$  เป็น correlation function ที่คำนวณมาจากข้อมูลแบบชุดนั้นๆ ซึ่งมีสูตรคำนวณโดย

$$C(t, t') = \int_{\Omega} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(t', \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

ซึ่งฐานที่ได้มาจากเทคนิค proper orthogonal decomposition ก็จะมาจากการสูตร

$$\phi_j(\mathbf{x}) = \int_A a_j(t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dt, \quad \forall j.$$

ทฤษฎี Hilbert-Schmidt ได้กล่าวไว้ว่าคำตอบของปัญหา eigenvalue ข้างบนนั้นมีจำนวนคำตอบเป็นจำนวนอนันต์ และจากคุณสมบัติของ correlation function  $C(t,t')$  ที่เป็น positive definite เราจะได้ว่าคำตอบของปัญหา eigenvalues นั้น สามารถเรียงลำดับจากมากไปหาน้อยได้ด้วย eigenvalue ที่สอดคล้องกับฐาน POD โดยที่  $\hat{\lambda}_k \geq \hat{\lambda}_{k+1}$  ดังนั้น เราสามารถจะลดพจน์ในการประมาณค่าให้เหลือ  $N$  พจน์เท่านั้น โดยใช้ข้อมูลในการลดพจน์ที่พอเพียงจาก eigenvalue เหล่านี้

กระบวนการสร้างฐานนี้สามารถนำไปใช้กับตัวแปรอื่นๆที่ไม่ใช่ตัวแปรแบบเวกเตอร์ได้อีกด้วย เช่น ตัวแปรอุณหภูมิที่เป็นตัวแปรแบบ scalar อย่างไรก็ตาม ฐาน POD ที่ได้มาจากกระบวนการสกัดโครงสร้างหลักโดยเทคนิค proper orthogonl decomposition สำหรับข้อมูลนี้ ก็จะมีลักษณะเป็น scalar ด้วยเช่นกัน

## ผลการวิจัย

### การสร้างแบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบถูกบังคับ

ในการที่จะสร้างแบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาที่มีค่าขอบเขตขึ้นอยู่กับเวลานั้น เราจำเป็นต้องสร้างแนวทางใหม่สำหรับแนวทางการสร้างแบบจำลองโดยใช้ระเบียบวิธีแบบ Galerkin เนื่องจากระเบียบวิธีแบบ Galerkin นั้นจะให้ฐาน (expansion basis) เป็นตัวจัดการกับปัญหาค่าขอบเขต อย่างไรก็ตามเมื่อค่าขอบเขตที่ขึ้นกับเวลาแล้ว การจะให้ฐานเป็นตัวจัดการกับค่าขอบเขตย่อมเป็นไปได้สำหรับแนวทางแก้ปัญหานี้เราจะรวมค่าขอบเขตที่ขึ้นอยู่กับเวลาให้เข้ากับสมการควบคุมเลย โดยใช้วิธี penalty method

สมการควบคุมปัญหาการพาความร้อนนั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T &= \frac{1}{RePr} \nabla^2 T\end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าสมการควบคุมนั้น เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ที่มีความไม่เชิงเส้นอยู่ด้วย คือสมการที่สอง นอกเหนือจากนี้สมการมี parameter ที่สำคัญอยู่สองตัวคือ **Re** เลขเรย์โนลด์ เป็น parameter ที่เกี่ยวข้องกับความเร็วของการไหลของของไหลในกระบวนการพาความร้อน **Pr** Prandtl number ซึ่งเป็น parameter ที่เกี่ยวข้องกับการกระจายตัวของความร้อนในของไหลนั้นๆ

ในการที่จะสร้างแบบจำลองมิติต่ำนั้น ก่อนอื่นเราเขียนตัวแปรการไหล และตัวแปรอุณหภูมิให้อยู่ในรูปของค่าเฉลี่ยและ fluctuation ดังนี้

$$\begin{aligned}\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ T(\mathbf{x}, t) &= T_0(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}, t),\end{aligned}$$

โดยที่  $\mathbf{U}_0$  และ  $T_0$  เป็นค่าความเร็วและอุณหภูมิเฉลี่ย และ  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  เป็น fluctuation ของตัวแปรความเร็วของการไหล และ  $T(\mathbf{x}, t)$  เป็น fluctuation ของตัวแปรอุณหภูมิ ซึ่ง ในที่นี้เราจะเขียน fluctuation อยู่ในรูปแบบผลบวกเชิงเส้นของฐานที่ได้มาจากเทคนิค proper orthogonal decomposition ซึ่งสำหรับปัญหาสองมิติสามารถเขียนได้ดังนี้

$$u(x, y, t) = \phi_j^u(x, y)a_j(t)$$

$$v(x, y, t) = \phi_j^v(x, y)a_j(t)$$

$$T(x, y, t) = \phi_j^T(x, y)b_j(t)$$

ในรูปแบบของสามมิติก็สามารถ เขียนในรูปแบบนี้ได้เช่นกัน คือ

$$u(x, y, z, t) = \phi_j^u(x, y, z)a_j(t)$$

$$v(x, y, z, t) = \phi_j^v(x, y, z)a_j(t)$$

$$w(x, y, z, t) = \phi_j^w(x, y, z)a_j(t)$$

$$T(x, y, z, t) = \phi_j^T(x, y, z)b_j(t)$$

ซึ่งกระบวนการในการสร้างแบบจำลองมิติต่ำก็สามารถทำได้โดยใช้แนวทางเดียวกันนี้ ซึ่งในกระจายโดยผลบวกเชิงเส้นของฐานที่ได้มาจากเทคนิค proper orthogonal decomposition นั้น เราจะได้ว่า  $a_j$  และ  $b_j$  เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า ซึ่งจำเป็นต้องสร้างสมการเพื่อกำหนดค่าของสัมประสิทธิ์สำหรับ  $a_j$  และ  $b_j$  ต่อไป

กระบวนการสร้างสมการเพื่อกำหนดค่าสัมประสิทธิ์ในแต่ละเวลาต่าง ๆ ดังกล่าวนั้นสามารถกำหนดจากสมการควบคุม กระบวนการถัดไปคือการสร้างแบบจำลองมิติต่ำ ซึ่งในที่นี้ก็หมายถึงสมการควบคุมสำหรับกำหนดค่าของ  $a_j$  และ  $b_j$  ในกระบวนการต่อไปนี้จะสร้างแบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาการพาความร้อน แบบมีค่าขอบที่ขึ้นอยู่กับเวลา

เพื่อให้เข้าใจง่าย สมมติว่า ส่วนของขอบของโดเมนที่สนใจ  $\Omega$  มีค่าขอบขึ้นกับเวลานั้นอยู่ในแนวเดียวกันกับแกน  $x$  ซึ่งถ้าส่วนของขอบที่มีค่าขึ้นกับเวลาก็เพียงแค่เปลี่ยนการ อินทิเกรตตามเส้นให้เหมาะสมเท่านั้น ตามที่จะได้เห็นต่อไป การสร้างแบบจำลองมิติต่ำนั้นสามารถทำได้โดย Galerkin projection สมการควบคุมที่นำเอาค่าขอบเขตมาใส่ในสมการควบคุมแล้ว ลงบนฐาน POD ตัวที่  $j$  ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการต่อไปนี้ ซึ่งในที่นี้แต่ละสมการจะใช้ Galerkin projection ลงไปสู่ฐาน POD ของตัวแปรนั้นๆดังนี้

$$\int_{\Omega} \phi_j^{u,v} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} \right) d\mathbf{x} = 0,$$

$$\int_{\Omega} \phi_j^T \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)T - \frac{1}{RePr} \nabla^2 T + \tau_1 \Psi(\mathbf{x})(T - T_{\Gamma}) \right) d\mathbf{x} = 0,$$

ในกรณีนี้เราได้นำค่าขอบเขตที่ขึ้นอยู่กับเวลาผนวกเข้ากับสมการควบคุมสำหรับอุณหภูมิเรียบร้อยแล้ว ซึ่งเราจะเรียกว่า penalty term ซึ่งจะประกอบไปด้วย penalty parameter  $\tau_1$  ค่าขอบเขตที่ขึ้นกับเวลา  $T_{\Gamma}$  และฟังก์ชันเฉพาะ  $\Psi(\mathbf{x})$  ซึ่งจะมีค่าเป็นศูนย์เมื่ออยู่ภายในโดเมนและขอบเขตอื่นๆที่ไม่ใช่ขอบเขตที่มีค่าขอบเขตที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่กำลังพิจารณาอยู่ในขณะนี้ และมีค่าเป็นหนึ่งที่ขอบเขต  $\Gamma$

จากนั้นเราจะพิจารณาพจน์ของการฉายของความดันลงบนฐาน POD ซึ่งพิจารณาจากสมการ

$$\int_{\Omega} \phi_j \cdot \nabla p d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \phi_j p d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \phi_j \cdot \mathbf{n} p ds.$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่าพจน์แรกนั้นสามารถเป็นศูนย์เนื่องจากฐาน POD นั้นสร้างมาจากข้อมูลของความเร็วที่มี divergence free อยู่แล้วดังที่กล่าวมาในบทก่อน กล่าวคือข้อมูลของความเร็วได้มาจากการจำลองแบบเต็มของการพาความร้อนในของไหลแบบบีบอัดตัวไม่ได้ ดังนั้นทำให้ divergence ของ ฐาน POD ก็เป็น 0 ด้วยเช่นกันนอกเหนือจากนี้ในบางกรณี ที่ค่าขอบเขตของการพาความร้อนที่ให้พจน์ที่สองนั้นเป็นศูนย์ ด้วยเช่นกัน ตัวอย่างของค่าขอบเขตที่กล่าวมาคือ ค่าขอบเขตแบบ wall boundary ค่าขอบที่ไม่ขึ้นกับเวลา ค่าขอบเขตแบบ outflow และ รวมไปถึงค่าขอบเขตแบบสมมาตรของขอบเขตสองขอบเขตที่ขนานกัน

หลังจากนั้นเราจะได้แบบจำลองมิติต่ำในรูปแบบของระบบพลวัต ที่สามารถอธิบายการพาความร้อนแบบถูกบังคับที่มีค่าขอบขึ้นอยู่กับเวลาดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{da_j}{dt} &= f_j(\mathbf{a}) \\ \frac{db_j}{dt} &= g_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - G(\mathbf{b}, t) \end{aligned}$$

โดยที่  $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_M)$  และ  $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_M)$  ซึ่ง  $M$  เป็นจำนวนของ ฐาน POD ที่ใช้ในผลบวกเชิงเส้นในการประมาณค่าของความเร็วของของไหลและอุณหภูมิของของไหลซึ่งโดยทั่วไปแล้วจำนวน  $M$  ยิ่งมากยิ่งจะทำให้ผลที่ได้จากการจำลองที่ได้จากแบบจำลองมิติต่ำมีความถูกต้องใกล้เคียงกับการจำลองแบบเต็ม (full model) โดยปรกติแล้วจำนวน  $M$  ที่ใช้นั้นจะมีจำนวนน้อยกว่า degree of freedoms ที่ใช้ในการกระบวนกร simulation ของระบบเต็ม (full model) เพื่อสร้างข้อมูลการพาความร้อนอยู่อย่างมาก ตัวอย่างเช่น  $M$  อาจมีค่าเพียงแต่ 6 แต่ค่า degree of freedoms ของการทำการจำลองเพื่อสร้างข้อมูล

อาจอยู่ที่ประมาณ 1,000,000 degree of freedoms ก็เป็นไปได้ จึงเป็นที่มาของการสร้างแบบจำลองมิติต่ำ ใด ๆ ก็ตามแบบจำลองมิติต่ำนั้นถึงแม้ว่าจะมีจำนวน degree of freedoms น้อยกว่ามากแต่ก็ยัง สามารถใช้ในการจำลองที่ให้คำตอบได้อย่างแม่นยำกล่าวคือ คำนวณหาค่า ว่า  $a_j$  และ  $b_j$  และใช้ในการ ผลบวกเชิงเส้นเพื่อใช้คำนวณหาค่าของตัวแปรความเร็วและอุณหภูมิตามลำดับ

ในแบบจำลองมิติต่ำนั้นเรายังสามารถบ่งชี้ได้ว่า  $\mathbf{f}$  และ  $\mathbf{g}$  เป็นฟังก์ชันที่มาจาก convective (non-linear) และ dissipative (linear) terms สำหรับสมการของตัวแปรความเร็ว และ ตัวแปรอุณหภูมิ โดยทั่วไปแล้ว ฟังก์ชัน  $\mathbf{f}$  จะอยู่ในรูปของพจน์ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} f_j(\mathbf{a}) = & - \left( \int_{\Omega} \phi_j \cdot ((\phi_i \cdot \nabla) \phi_k) dx \right) a_i a_k \\ & - \left( -\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \phi_j \cdot \nabla^2 \phi_i dx + \int_{\Omega} \phi_j \cdot ((\phi_i \cdot \nabla) \mathbf{U}_0) dx + \int_{\Omega} \phi_j \cdot ((\mathbf{U}_0 \cdot \nabla) \phi_i) dx \right) a_i \\ & - \left( \int_{\Omega} \phi_j \cdot ((\mathbf{U}_0 \cdot \nabla) \mathbf{U}_0) dx - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \phi_j \cdot \nabla^2 \mathbf{U}_0 dx \right). \end{aligned}$$

ในส่วนของฟังก์ชัน  $\mathbf{g}$  ก็เช่นกัน ยกเว้นในพจน์แรกที่จะมีค่าของความเร็วอยู่ด้วย ดังนั้นจึงเป็นฟังก์ชันใน รูปแบบ  $\mathbf{g}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

สำหรับในส่วนของฟังก์ชัน  $\mathbf{G}$  ซึ่งเป็นพจน์ที่ได้มาจากการเพิ่มพจน์ penalty ลงไปในระบบสมการควบคุม โดยตรงนั้นจะมีรูปแบบดังนี้

$$G_j(\mathbf{b}) = \tau_1 \left( b_i \int_{\Gamma} \phi_i^T(x|_{\Gamma}) \cdot \phi_j^T(x|_{\Gamma}) dx - \int_{\Gamma} (T_{\Gamma} - T_0(x|_{\Gamma})) \cdot \phi_j^T(x|_{\Gamma}) dx \right),$$

เนื่องจากพจน์  $T_{\Gamma}$  ขึ้นอยู่กับเวลาดังนั้นจึงทำให้  $\mathbf{G}(\mathbf{b}, t)$  ขึ้นอยู่กับเวลาด้วย ซึ่งสุดท้ายแล้วรูปแบบของ แบบจำลองมิติต่ำที่ได้มาจะอยู่ในรูปแบบที่เรียกว่า Non-autonomous systems เนื่องจากมีตัวแปรของ เวลาเข้ามาเกี่ยวข้อง

จากกระบวนการการสร้างแบบจำลองมิติต่ำที่ผ่านจะเห็นได้ว่าการที่มีค่าขอบเขตที่ขึ้นอยู่กับ เวลานั้นเราสามารถจะสร้างแบบจำลองมิติต่ำแบบ Non-autonomous system ได้ โดยค่าขอบเขตที่ ขึ้นอยู่กับเวลานั้นเราสามารถจะใช้เทคนิค penalty method รองรับได้อย่างมีประสิทธิภาพ

สำหรับปัญหาที่มีค่าขอบเขตที่ขึ้นอยู่กับเวลา อยู่ในหลายๆขอบเขตนั้นก็สามารถใช้แนวทางการ สร้างแบบจำลองมิติต่ำนี้ได้โดยตรงกล่าวคือ จะเห็นว่าจำนวนพจน์ที่ได้จากการใช้ penalty method นั้น จะขึ้นอยู่กับจำนวนของขอบเขตที่มีค่าขอบที่ขึ้นอยู่กับเวลา กล่าวคือถ้ามีขอบเขตที่ขึ้นอยู่กับเวลาจำนวน N ขอบเขต ก็จะมีพจน์ที่เกิดจากการใช้ penalty method เพื่อรองรับกับปัญหาค่าขอบเขตที่ขึ้นอยู่กับ

เวลาเป็นจำนวน  $N$  พจน์เช่นกัน ซึ่งส่งผลให้มี penalty parameters ที่จะต้องกำหนดค่า จำนวน  $N$  paramters ด้วยเช่นกัน จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่าค่าของ penalty parameter นั้นจะขึ้นอยู่กับ ความละเอียดของการจำลองนั้นๆและรวมไปถึงความซับซ้อนของปัญหาที่ทำการจำลอง โดยปกติแล้วค่าของขนาดของ penalty parameters จะมีค่ามากหรือน้อยนั้นจะมีความหมายเช่นเดียวกันกับการการบังคับค่าขอบที่ขึ้นอยู่กับเวลาว่าเป็นการบังคับแบบแรงหรือแบบเบา ในกรณีของการจำลองที่มีความละเอียดสูงหรือ การจำลองแบบของปัญหาที่มีความซับซ้อน การบังคับค่าขอบที่ขึ้นกับเวลาจะต้องทำในรูปแบบแบบแรงเท่านั้น เพื่อให้ได้มาซึ่งผลการจำลองที่ถูกต้อง

### การสร้างแบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระ

สำหรับแนวทางการสร้างแบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระนั้นเราสามารถใช้นิยามการสร้างแบบจำลองในทิศทางเดียวกับการสร้างแบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบถูกบังคับได้เช่นกัน

ซึ่งในกระบวนการสร้างแบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระที่มีค่าขอบขึ้นอยู่กับเวลานั้นเราสามารถเริ่มจากการกำหนดสมการควบคุมปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระ ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{GrT}{Re^2} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T &= \nabla^2 T\end{aligned}$$

กระบวนการสร้างแบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระนั้นก็เริ่มจากการทำการฉาย Galerkin สมการควบคุมที่นำเอาค่าขอบมาใส่ในสมการควบคุมแล้ว ลงบน ฐานกระจาย POD ตัวที่  $j$  ซึ่งสามารถเขียนได้ดังสมการต่อไปนี้ ซึ่งในที่นี้แต่ละสมการจะใช้การฉาย Galerkin ลงไปสู่ฐาน POD ของตัวแปรนั้นๆ

$$\int_{\Omega} \phi_j^{u,v} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} - \frac{GrT}{Re^2} \right) d\mathbf{x} = 0,$$

$$\int_{\Omega} \phi_j^T \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T - \nabla^2 T + \tau_1 \Psi(\mathbf{x})(T - T_{\Gamma}) \right) d\mathbf{x} = 0,$$

ในกรณีนี้เราได้นำค่าขอบเขตที่ขึ้นอยู่กับเวลาผนวกเข้ากับสมการควบคุมสำหรับอุณหภูมิเรียบร้อยแล้ว ซึ่งเรียกว่าพจน์ penalty ซึ่งจะประกอบไปด้วย penalty parameter  $\tau_1$  ค่าขอบที่ขึ้นกับเวลา  $T_{\Gamma}$  และฟังก์ชันเฉพาะ  $\Psi(\mathbf{x})$  ซึ่งจะมีค่าเป็นศูนย์เมื่ออยู่ภายในโดเมนและขอบเขตอื่นๆที่ไม่ใช่ขอบที่มีค่าขอบเขตที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่กำลังพิจารณาอยู่ในขณะนี้ และมีค่าเป็นหนึ่งที่ขอบ  $\Gamma$  เช่นเดียวกันกับในกรณีของการพาความร้อนแบบถูกบังคับ ผลของการฉาย Galerkin ของพจน์ของความดันนั้นสามารถพิจารณาได้ด้วยบรรทัดฐานเดียวกัน

จากนั้นผลที่ได้จากการฉายสมการควบคุมลงบนฐาน POD คือ แบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระที่มีค่าขอบขึ้นอยู่กับเวลาในรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{da_j}{dt} &= k_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \frac{db_j}{dt} &= h_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - H(\mathbf{b}, t) \end{aligned}$$

โดยที่  $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_M)$  และ  $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_M)$  ซึ่ง  $M$  เป็นจำนวนของฐาน POD ที่ใช้ในผลบวกเชิงเส้นดังกล่าวซึ่งโดยทั่วไปแล้วจำนวน  $M$  และ ค่าของฟังก์ชัน  $\mathbf{k}$  และ  $\mathbf{h}$  ก็อยู่ในรูปที่ใกล้เคียงกับฟังก์ชัน  $\mathbf{f}$  และ  $\mathbf{g}$  ตามลำดับ

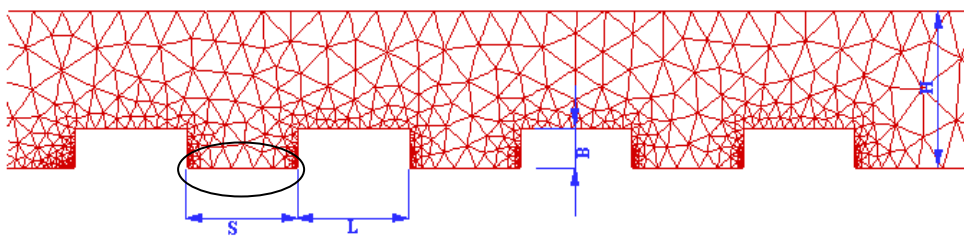
จะเห็นว่าแนวทางการสร้างแบบจำลองมิติต่ำที่ได้นำเสนอสามารถนำไปสร้างแบบจำลองมิติต่ำสำหรับการพาความร้อนแบบถูกบังคับและแบบอิสระได้ ทั้งในปัญหา สองมิติและสามมิติโดยไม่จำเป็นต้องดัดแปลงหรือแก้ไขแนวทางการสร้างแบบจำลองมิติต่ำเลย



## การนำแบบจำลองมิติต่ำไปใช้งานในงานจำลอง

**การใช้แบบจำลองมิติต่ำในการจำลองการพาความร้อนแบบถูกบังคับ**

ในบทนี้จะรายงานถึงผลการวิจัยในส่วนของการนำแบบจำลองมิติต่ำไปใช้งานจริงสำหรับงานจำลอง ซึ่งในที่นี้จะยกตัวอย่างการนำไปใช้งานของการพาความร้อนแบบถูกบังคับของการไหลในท่อ ผ่านกล่องให้ความร้อน (heated blocks) ซึ่งรูปที่ 1 ได้แสดงถึงบางส่วนของโดเมนที่ใช้ในการจำลอง ซึ่งปัญหาแบบนี้สามารถพบได้โดยทั่วไป เช่น การกระจายตัวของความร้อนในกล่อง อิเล็กทรอนิกส์ หรือการกระจายตัวของความร้อนในเครื่องคอมพิวเตอร์ เป็นต้น



**Figure 1** บางส่วนของโดเมนที่ใช้ในการจำลอง

ซึ่งรายละเอียดทางกายภาพของปัญหาการพาความร้อนนี้คือ โดเมนที่ใช้ในการจำลอง มีความยาว 120B และมีความสูงเท่ากับ (H) 4B ในช่วงตรงกลางของท่อจะมีกล่องให้ความร้อน อยู่ 4 อัน โดยที่แต่ละอันมีขนาดความยาว (L) เป็น 3B และวางห่างกันเป็นระยะทาง (S) 3B เช่นกัน ซึ่งในตัวอย่างนี้ได้มีการการตั้งค่าของค่าขอบเขตให้ขึ้นอยู่กับเวลาที่บริเวณขอบระหว่างกล่องให้ความร้อนที่ 1 และ ที่ 2 (ตามภาพ) โดยเราจะให้ค่าขอบที่ขึ้นอยู่กับเวลาอยู่ในรูปของ  $A_0 \sin(\omega t)$

สำหรับค่าขอบอื่นๆได้มีการกำหนดดังนี้

ค่าขอบสำหรับความเร็วของของไหลได้มีการกำหนดค่าขอบ ที่บริเวณไหลเข้าเป็น การไหลเข้าแบบราบเรียบและ ในส่วนของขอบเขตที่ไหลออกได้มีการกำหนดค่าขอบเป็น Neumann condition ที่กำหนดให้ ค่าของอนุพันธ์ของความเร็วเทียบกับทิศทางของ unit vector ที่ชี้ออกจากขอบนั้นมีค่าเท่ากับ 0 ส่วน ค่าขอบของขอบเขตนอกเหนือจากนี้ให้กำหนดเป็นสภาวะแบบกำแพง

ค่าขอบสำหรับอุณหภูมิ ค่าของ (normalized temperature) อุณหภูมิที่กลองให้ความร้อนทั้งสิ้น กำหนดให้เป็นหนึ่ง ซึ่งเป็นค่า normalized และในส่วนค่าขอบเขตอื่นๆ นอกเหนือจากขอบเขตระหว่าง กลองให้ความร้อนที่หนึ่งและที่สองให้ถูกกำหนดเป็นค่าขอบเขตแบบ adiabatic

ในการที่จะสร้างข้อมูลที่จะนำมาสร้างแบบจำลองมิติต่ำในตัวอย่างนี้เราได้ทำการจำลองด้วยสมการควบคุมการพาความร้อนแบบถูกบังคับด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบ spectral finite element ซึ่งในที่นี้เราสามารถใช้ Jacobi polynomial ดีกรี 7 ในการจำลอง

ตัวอย่างการพาความร้อนที่ยกมานี้เป็นตัวอย่างของการพาความร้อนแบบถูกบังคับอย่างง่าย เนื่องจากผลเฉลยของการพาความร้อนนั้นมีคุณสมบัติดังนี้ สำหรับตัวแปรความเร็ว ผลเฉลยของความเร็วจะเป็นผลเฉลยแบบไม่ขึ้นกับเวลา แต่อย่างไรก็ตามผลเฉลยของอุณหภูมิจะเป็นผลเฉลยที่ขึ้นอยู่กับเวลาและจะมีคาบเท่ากับคาบของค่าขอบเขตที่ขึ้นกับเวลาที่กำหนดให้ ซึ่งผลเฉลยที่ได้จากการจำลองแบบ ณ เวลาหนึ่งนั้นได้แสดงไว้ในรูปที่ 2 ซึ่งเป็นผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวแปรอุณหภูมิ

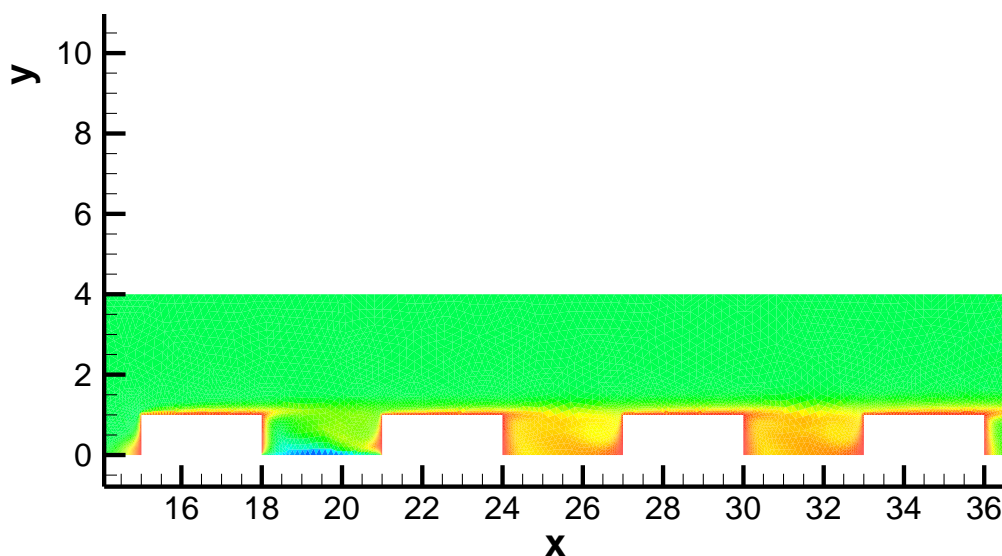


Figure 2 ผลเฉลยที่ได้จากการจำลองแบบเต็ม

แบบจำลองมิติต่ำของการพาความร้อนแบบถูกบังคับและมีค่าขอบที่ขึ้นกับเวลานั้นได้ถูกสร้างขึ้นโดยใช้ข้อมูลผลเฉลยจากการจำลองแบบโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบ spectral finite element จำนวน 20 ชุดต่อคาบของค่าขอบที่ถูกกำหนดให้อยู่ในรูปของ  $A_0 \sin(\omega t)$

จากข้อมูลที่ได้จากผลเฉลยโดยการจำลองโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบ spectral finite element เราสามารถทำการสกัดฐาน POD โดยระเบียบวิธีที่ได้กล่าวมาแล้วขั้นต้นและฐาน POD สำหรับตัวแปรความร้อนฐานที่ 1 และฐานที่สอง ได้ถูกแสดงในรูปที่ 3 และ 4 ตามลำดับ ซึ่งในที่นี้ฐาน POD ของตัวแปรความเร็วจะมีค่าเป็น 0 เนื่องจากว่าผลเฉลยของตัวแปรความเร็วไม่ขึ้นกับเวลานั่นเอง

จากรูปที่ 3 และ 4 จะเห็นได้ว่า ฐาน POD ที่หนึ่ง และ ฐาน POD ที่สองนั้นจะมีค่ามากที่บริเวณขอบที่มีการเปลี่ยนแปลงของค่าขอบที่ขึ้นอยู่กับเวลาเท่านั้นในบริเวณอื่นๆของ บริเวณที่ทำการจำลอง ค่าของฐาน POD ที่หนึ่งและที่สองจะเปลี่ยนแปลงไม่มากนักหรือไม่เปลี่ยนแปลงเลย

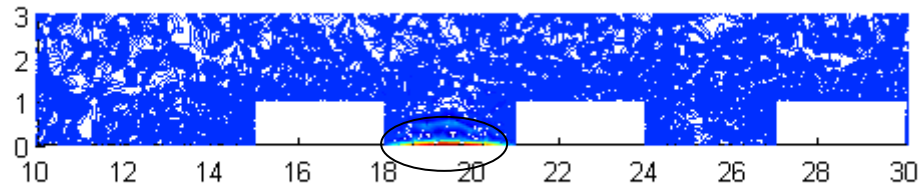


Figure 3 ฐาน POD ที่หนึ่งของการพาความร้อนแบบบังคับในท่อที่มีกลองให้ความร้อน

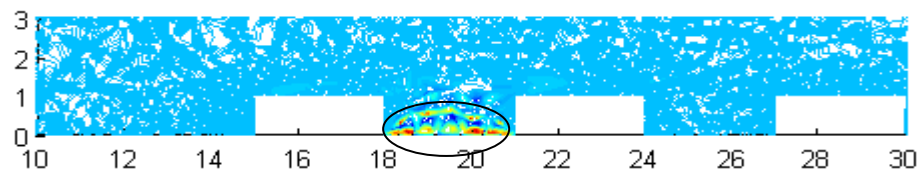


Figure 4 ฐาน POD ที่สองของการพาความร้อนแบบบังคับในท่อที่มีกลองให้ความร้อน

หลังจากแบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบถูกบังคับได้สร้างขึ้นสำหรับปัญหานี้โดยใช้ข้อมูลผลเฉลยจากปัญหาการพาความร้อนในท่อที่มีกลองให้ความร้อนแล้วนั้น เราก็สามารถใช้แบบจำลองในการทำ simulation สำหรับปัญหาเดียวกัน โดยเลือกใช้ penalty parameter ที่เหมาะสม ซึ่งผลการจำลองได้แสดงในรูปที่ 5

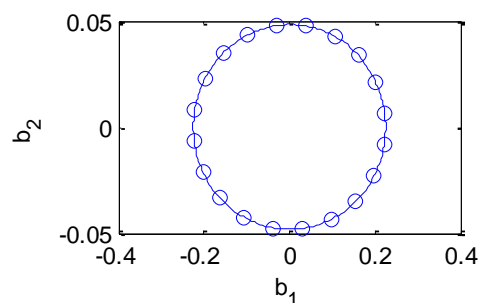


Figure 5 ผลการจำลองโดยใช้แบบจำลองมิติต่ำเทียบกับผลการจำลองจากแบบจำลองแบบเต็ม (Full model)

จากผลการจำลองที่แสดงไว้ในรูปที่ 5 สามารถอธิบายได้เพิ่มเติมดังนี้ รูปที่ 5 เป็นรูปที่แสดง Limit cycle ของสัมประสิทธิ์ที่จะใช้ในผลบวกเชิงเส้นของฐาน POD ที่ได้กล่าวมาข้างต้น ซึ่งในรูปที่ 5 นั้นได้แสดงถึงผลการจำลองที่เปรียบเทียบระหว่างค่าของสัมประสิทธิ์ที่ได้จากแบบจำลองมิติต่ำที่สร้างขึ้น ที่แสดงโดยเส้นสีน้ำเงิน และ ค่าของสัมประสิทธิ์ที่ได้จากการทำการจำลองจากแบบจำลองแบบเต็ม (Full model) ที่แสดงโดยวงกลมสีน้ำเงิน ซึ่งจะเห็นได้ว่า มีผลใกล้เคียงกันมาก

การที่แสดงผลเป็น limit cycle นั้นเนื่องมาจากว่าผลเฉลยของอนุกรมจะขึ้นอยู่กับเวลาที่ มีลักษณะเป็นฟังก์ชันของคาบ ที่มีคาบเท่ากับคาบที่ให้ไปในค่าขอบเขตที่ขึ้นอยู่กับเวลา ดังนั้นการเปรียบเทียบระหว่างสัมประสิทธิ์ของฐาน POD ที่ใช้ในผลบวกเชิงเส้นที่ได้มาจากการจำลองจากแบบจำลองมิติต่ำกับสัมประสิทธิ์ของฐาน POD ที่ใช้ในผลบวกเชิงเส้นที่ได้มาจากการจำลองแบบเต็มจึงมีความพอเพียงเนื่องจากถ้าเราต้องการหาค่าของอนุกรม ณ เวลาใด หรือ ณ ตำแหน่งใดๆ ก็ทำได้โดยการทำการบวกเชิงเส้นของฐาน POD โดยใช้ข้อมูลจากสัมประสิทธิ์ของฐานที่ได้มาจากการจำลองมิติต่ำ ณ เวลาใดๆ

จะเห็นได้ว่าแบบจำลองมิติต่ำที่ถูกสร้างขึ้นมีความสามารถในการจำลองเทียบเท่ากับแบบจำลองแบบเต็ม ซึ่ง ถ้าจะเปรียบเทียบ ความซับซ้อนของแบบจำลองนั้นสามารถเปรียบเทียบได้โดยตรงจากจำนวน degree of freedoms หรือ ตัวแปร ที่จำเป็นต้องใช้ในการทำการจำลอง จากตัวอย่างนี้เราได้ว่าแบบจำลองแบบเต็มมี degree of freedoms อยู่ที่ประมาณ 210,000 degree of freedoms ในขณะที่แบบจำลองมิติต่ำนั้นมี degree of freedoms อยู่แค่เพียง 0+2 degree of freedoms (0 สำหรับตัวแปรการไหล และ 2 สำหรับตัวแปรอนุกรม) เท่านั้น ซึ่งส่งผลโดยตรงต่อระยะเวลาในการคำนวณ และขนาดของหน่วยความจำที่ต้องใช้ในการจำลองซึ่ง ระยะเวลาในการคำนวณของแบบจำลองเต็มนั้นประมาณ สามชั่วโมงต่อ หนึ่งคาบเวลา ซึ่งสำหรับแบบจำลองมิติต่ำนั้นสามารถให้ผลการจำลองต่อหนึ่งคาบเวลาได้ภายใน 1/10 วินาทีเท่านั้น ดังนั้นจะเห็นได้ว่าแบบจำลองมิติต่ำที่ถูกสร้างขึ้นนั้นสามารถนำไปใช้งานในการทำการจำลองได้อย่างถูกต้องแม่นยำ และ รวดเร็ว

## การใช้แบบจำลองมิติต่ำในการจำลองการพาความร้อนที่มีความซับซ้อน

สำหรับปัญหาที่จะนำแบบจำลองมิติต่ำไปใช้งานในงานจำลองอันดับต่อไปจะขอยกตัวอย่างในกรณีของการพาความร้อนที่มีความซับซ้อนมากขึ้น ซึ่งตัวอย่างของการพาความร้อนนี้คือ การพาความร้อนจากท่อรูปเหลี่ยม ซึ่ง พบในการประยุกต์ใช้ในหลายๆ กรณีเช่น การระบายความร้อนจากแท่งปฏิกรณ์นิวเคลียร์ หรือ การระบายความร้อนของตึกสูงในต่อบรรยากาศรอบๆ ข้าง

สำหรับบางส่วนของโดเมนที่ใช้ในการจำลองในปัญหานี้ได้แสดงไว้ในรูปที่ 6 ซึ่งแสดงถึงท่อรูปเหลี่ยมและบริเวณรอบของท่อรูปเหลี่ยม

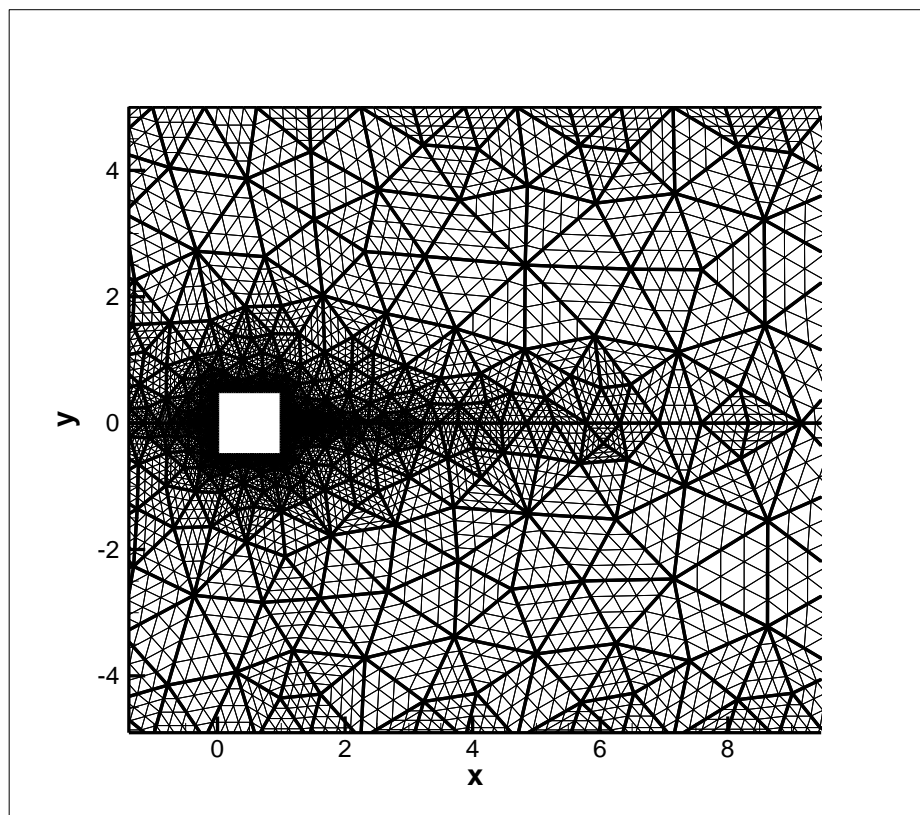


Figure 6 บางส่วนของโดเมนที่ใช้ในการจำลองของปัญหาที่มีความซับซ้อน

สำหรับค่าขอบเขตของปัญหานี้ได้มีการกำหนดดังนี้

ค่าขอบเขตสำหรับความเร็ว ได้มีการกำหนดค่าขอบ ที่ขอบเขตของไหลเข้าเป็น Uniform steady inflow และ ในส่วนของขอบเขตของไหลออกได้มีการกำหนดค่าขอบเขตเป็น Neumann condition ที่กำหนดให้ ค่าของอนุพันธ์ของความเร็วเทียบกับทิศทางของ unit vector ที่ชี้ออกจากขอบเขตนั้นมีค่าเท่ากับ 0 ส่วน ค่าขอบเขตของท่อรูปเหลี่ยมได้ถูกกำหนดเป็นกำแพงและ ได้มีการกำหนดค่าขอบเขตแบบสมมาตรสำหรับขอบเขตที่ขนานไปกับทิศทางการไหลในแนวแกน x

ค่าขอบเขตสำหรับอุณหภูมิ ค่าของ (normalized temperature) อุณหภูมิที่ต่อรูปเหลี่ยมให้ความร้อนที่สี่กำหนดให้เป็นหนึ่ง ซึ่งเป็นค่า normalized นอกเหนือจากนี้ยังกำหนดให้ค่าของอุณหภูมิ ณ ขอบเขตล่างของต่อรูปเหลี่ยมมีค่าที่ขึ้นอยู่กับเวลาซึ่งอยู่ในรูปของ  $A_0 \sin(\omega t)$  และในส่วนค่าขอบเขตอื่นๆ นอกเหนือจากนี้ถูกกำหนดเป็นค่าขอบเขตแบบ adiabatic

ในการที่จะสร้างข้อมูลที่จะนำมาสร้างแบบจำลองมิติต่ำในตัวอย่างนี้เราได้ทำการจำลองด้วยสมการควบคุมการพาความร้อนแบบถูกบังคับด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบ spectral finite element ซึ่งในที่นี้เราได้ใช้ Jacobi Polynomial ดีกรี 12 ในการจำลอง

ผลเฉลยเชิงตัวเลขของแบบจำลองแบบเต็มที่ได้จากการจำลองด้วยสมการควบคุมการพาความร้อนแบบถูกบังคับด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบ spectral finite element นั้นได้แสดงในรูป 7 และ 8 สำหรับตัวแปรของการไหลตามแนว x และ ตัวแปรอุณหภูมิ ในเวลาแตกต่างกัน

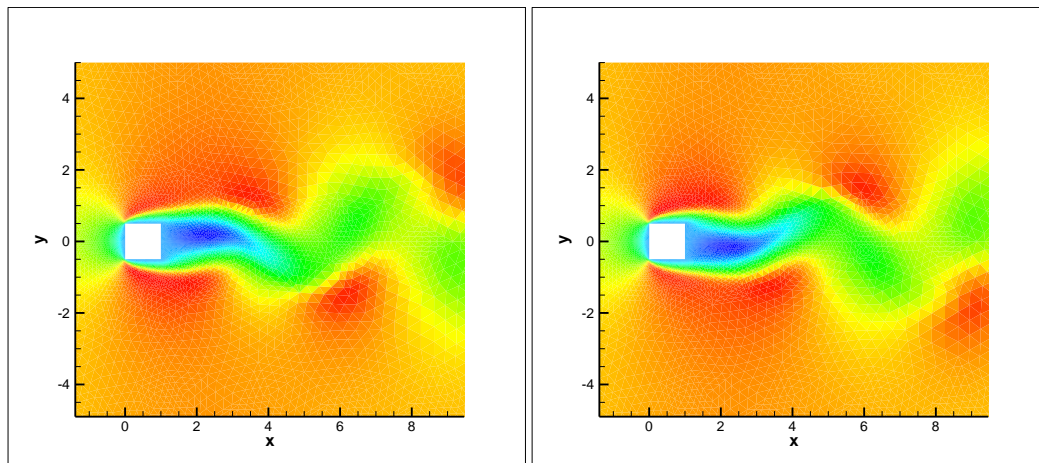


Figure 7 แสดงตัวแปรของการไหลตามแนวแกน x ในเวลาที่แตกต่างกัน

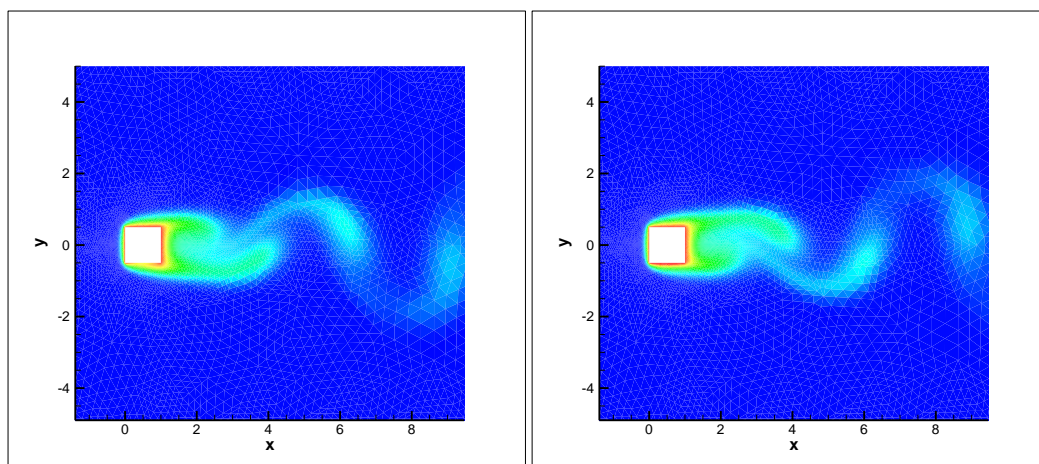


Figure 8 แสดงตัวแปรอุณหภูมิ ในเวลาที่แตกต่างกัน



ซึ่งจะเห็นได้จากรูปที่ 7 และ 8 ว่า ผลเฉลยเชิงตัวเลขสำหรับปัญหานี้มีความซับซ้อนกว่าตัวอย่างที่  
แล้วมากเนื่องจากเป็นผลเฉลยที่ขึ้นอยู่กับเวลาและมีทั้งจาก ค่าของคาบที่เข้าไปที่ค่าขอบเขต และ ค่าของ  
คาบที่ได้มาจาก vortex shedding จากลักษณะการไหลแบบนี้ ซึ่งในการวิจัยนี้ได้กำหนดให้คาบของค่า  
ขอบเขตที่ขึ้นอยู่กับเวลาให้มีค่าเท่ากับคาบที่ได้มาจาก vortex shedding หรือ การใช้คาบแบบ lock-in

หลังจากที่ได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากแบบจำลองรูปแบบเต็มแล้วนั้นเราสามารถทำการสกัดฐาน  
POD โดยระเบียบวิธีที่ได้กล่าวมาแล้วขึ้นต้นจากข้อมูลการจำลองแบบจำลองแบบเต็มจำนวน 26 ชุดและ  
ฐาน POD สำหรับตัวแปรความร้อน ฐานที่ 1 และ ฐานที่สอง ได้ถูกแสดงในรูปที่ 8 และ 9 ตามลำดับ  
และ ฐาน POD สำหรับตัวแปรความเร็วในแนวแกน x ฐานที่ 1 และ ฐานที่สอง ได้ถูกแสดงในรูปที่  
10 และ 11 ตามลำดับ

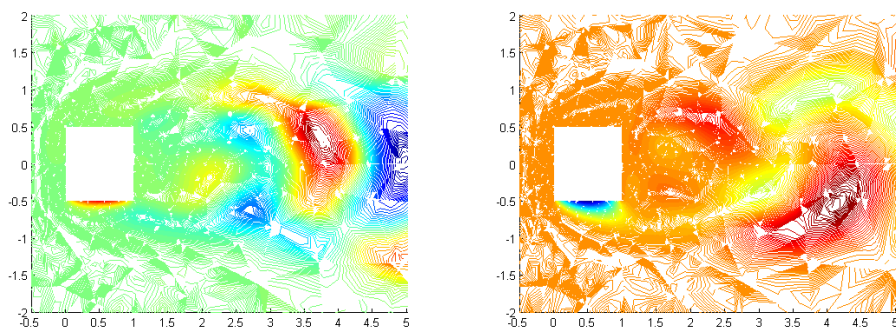


Figure 9 ฐาน POD ของความร้อน ฐานที่ 1 ซ้าย และ ฐานที่ 2 ขวา

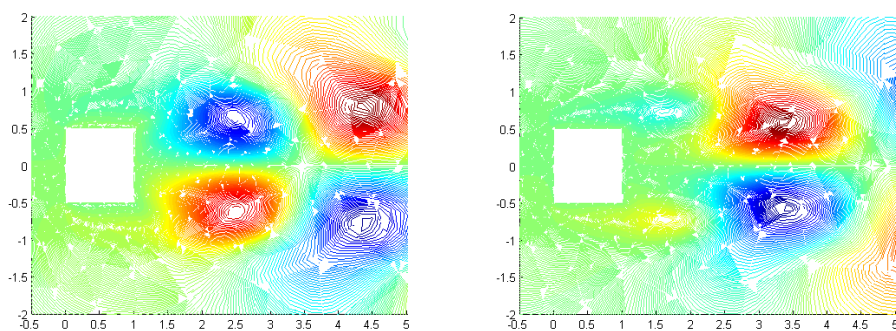
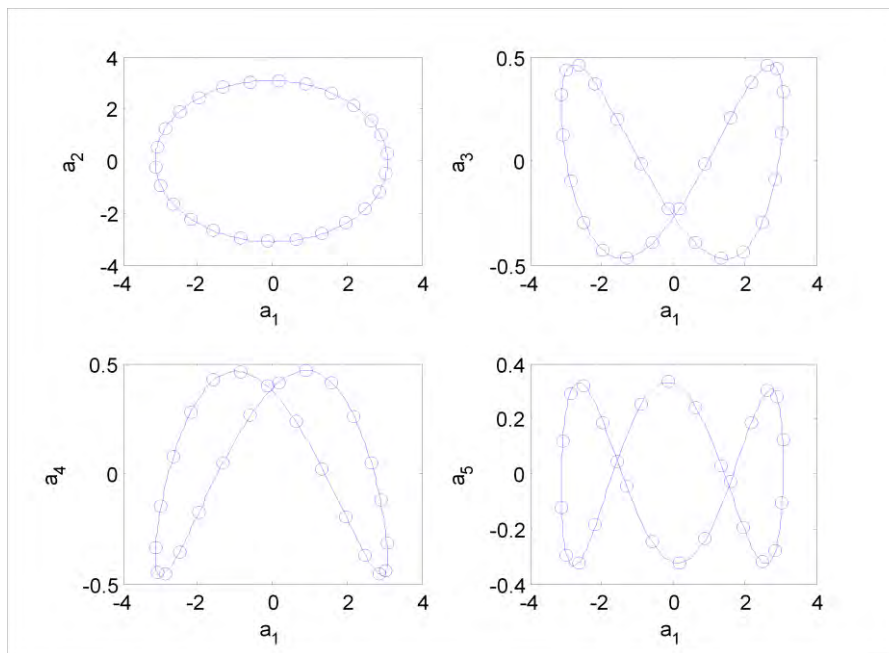


Figure 10 ฐาน POD สำหรับความเร็วในแนวแกน x ฐานที่ 1 ซ้าย และ ฐานที่ 2 ขวา

จากรูปที่ 9 และ 10 จะเห็นว่าสำหรับฐาน POD สำหรับตัวแปรความเร็วนั้นมีความเป็นสมมาตรแต่  
เนื่องจากเราได้ใส่ค่าขอบที่ขึ้นอยู่กับเวลาของตัวแปรอุณหภูมิเข้าไปที่บริเวณขอบล่างของทอรูปเหลี่ยม  
ทำให้ความสมมาตรของ ฐาน POD สำหรับตัวแปรอุณหภูมิหายไป

หลังจากที่ได้ฐาน POD สำหรับปัญหานี้มาเป็นที่เรียบร้อยแล้วเราก็สามารถสร้างแบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบมีค่าขอบที่ขึ้นอยู่กับเวลาได้โดยใช้หลักการดังที่กล่าวมาข้างต้นแล้ว และนำมาใช้ในการจำลองโดยเลือกใช้ penalty parameter ที่เหมาะสม

ผลการจำลองด้วยแบบจำลองมิติต่ำที่ถูกสร้างขึ้นได้แสดงในรูปที่ 11 และ 12 สำหรับสัมประสิทธิ์ของตัวแปรความเร็วละอุณหภูมิ เช่นเดียวกันกับตัวอย่างที่ผ่านมาผลการจำลองจะแสดงอยู่ในรูปแบบของการเปรียบเทียบ limit cycle ของสัมประสิทธิ์การกระจายของฐาน POD

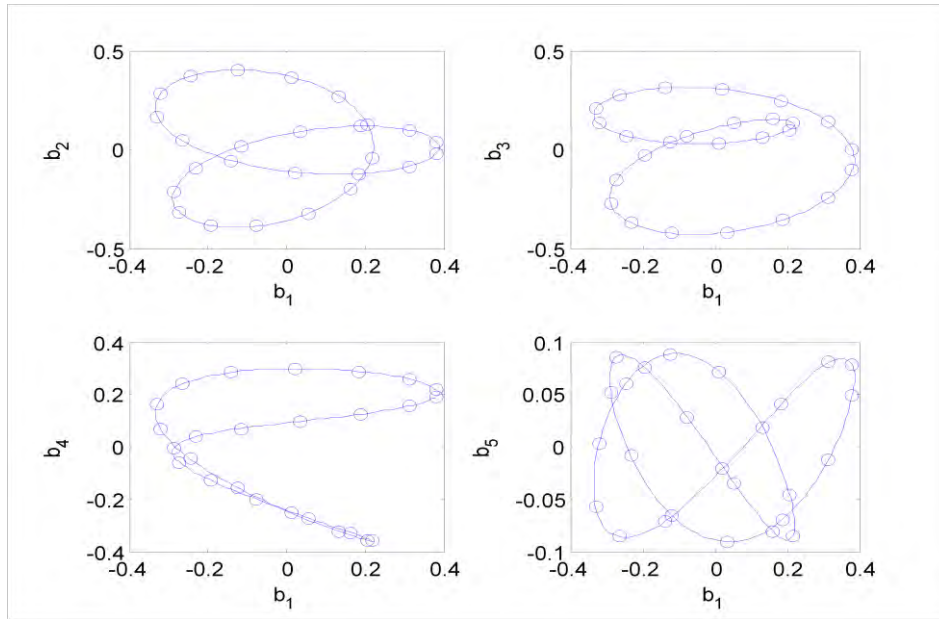


**Figure 11** ผลการจำลองจากแบบจำลองมิติต่ำเทียบกับผลการจำลองจากแบบจำลองแบบเต็มของตัวแปรความเร็ว แสดงสัมประสิทธิ์ของฐาน POD ที่ 1-5 เท่านั้น

สำหรับปัญหานี้ถ้าเปรียบเทียบ จำนวน degree of freedoms ที่ใช้ในการจำลองจากแบบจำลองแบบเต็ม จะอยู่ที่ระหว่าง 480,000 degree of freedoms สำหรับแบบจำลองแบบเต็มและ 12 (6+6) degree of freedoms (6 สำหรับตัวแปรการไหล และ 6 สำหรับตัวแปรอุณหภูมิ) สำหรับแบบจำลองมิติต่ำ จะให้ได้ว่าเราสามารถลดความซับซ้อนในการจำลองได้อย่างมาก

จากผลการจำลองของตัวอย่างทั้งสองทำให้สรุปได้ว่าแบบจำลองมิติต่ำที่สร้างขึ้นนั้นสามารถนำไปใช้งานในด้านการจำลองของการพาความร้อนได้จริง และข้อได้เปรียบจากการใช้แบบจำลองมิติต่ำคือจำนวน degree of freedoms ที่น้อย สามารถทำการจำลองได้อย่างรวดเร็ว โดยที่มีค่าความถูกต้องสูง





**Figure 12** ผลการจำลองจากแบบจำลองมิติต่ำเทียบกับผลการจำลองจากแบบจำลองแบบเต็มของตัวแปรอุณหภูมิ แสดงสัมประสิทธิ์ของฐาน POD ที่ 1-5 เท่านั้น

นอกเหนือจากนี้ ฐาน POD ยังสามารถนำไปวิเคราะห์เพื่อบ่งบอกพฤติกรรมของการพาความร้อนที่ในบางครั้งไม่สามารถมองเห็นหรือสังเกตได้ง่ายอีกด้วย ซึ่ง กระบวนการวิเคราะห์ ฐาน POD นี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในงานประยุกต์หลายๆ ด้าน เช่น image processing, biomechanics เป็นต้น

## การวิเคราะห์แบบจำลองมิติต่ำด้วยเทคนิค Bifurcation analysis

จากแบบจำลองมิติต่ำที่สร้างขึ้นทั้งสองแบบจะเห็นได้ว่า ทั้งสองแบบจำลองยังมี penalty parameter ที่ยังคงต้องการการกำหนดค่าที่แน่นอนเพื่อให้ได้ผลการจำลองที่ถูกต้องมากที่สุด ซึ่งในกระบวนการวิเคราะห์ความอ่อนไหวด้วยการทำ bifurcation analysis นั้นจะใช้ซอฟต์แวร์ opensource AUTO07p [12] ซึ่งเป็นซอฟต์แวร์สำหรับการศึกษา continuation and bifurcation สำหรับ system of ordinary differential equations โดยเฉพาะซึ่งแบบจำลองมิติต่ำที่ถูกสร้างขึ้นนั้นก็จะเป็น system of ordinary differential equations เช่นกัน นอกเหนือจากนี้ กระบวนการวิเคราะห์แบบจำลองมิติต่ำในกรณีทั่วไปด้วย AUTO07p นั้นก็สามารถเปรียบเทียบเสมือนการศึกษา Bifurcation analysis ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่เป็นสมการควบคุมปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์อื่นๆ ด้วยเช่นกัน เช่นการศึกษา attractor ที่แท้จริงของแบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาของไหลเป็นต้น

อย่างไรก็ตาม AUTO07p นั้นมีความเหมาะสมกับการใช้งานสำหรับ system of ordinary differential equations ในรูปแบบของ autonomous systems เท่านั้น กล่าวคือต้องไม่มีพจน์ที่มีตัวแปรของเวลาเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ดังนั้น จึงจำเป็นต้องแปลงแบบจำลองมิติต่ำที่มีอยู่ในรูปแบบของ system of differential equation ที่อยู่ในรูปแบบของ autonomous system ในการศึกษาที่เราจะทำการศึกษาในกรณีของปัญหาค่าขอบที่ขึ้นอยู่กับเวลาที่เป็นฟังก์ชันของ sin หรือ cos เท่านั้น สำหรับปัญหาในรูปแบบอื่นก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน กล่าวคือ สร้างระบบสมการ differential equation ที่อยู่ในรูปของ autonomous system ที่มีผลเฉลยเป็น ฟังก์ชัน sin หรือ cos หรือ ฟังก์ชันรูปแบบอื่นที่ต้องการ

สำหรับฟังก์ชันที่มีผลเฉลยเป็นฟังก์ชัน sin หรือ cos คือระบบสมการที่มีรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= p + \hat{\beta}q - p(p^2 + q^2) \\ \frac{dq}{dt} &= q - \hat{\beta}p - q(p^2 + q^2)\end{aligned}$$

โดยระบบสมการนี้จะมีผลเฉลยเป็น

$$\begin{aligned}p(t) &= \sin(\hat{\beta}t) \\ q(t) &= \cos(\hat{\beta}t)\end{aligned}$$

ดังนั้นจากแบบจำลองมิติต่ำสำหรับการพาความร้อนแบบถูกบังคับที่มีปัญหาค่าขอบขึ้นกับเวลา เราสามารถแปลงให้อยู่ในรูปแบบของแบบจำลองมิติต่ำสำหรับการพาความร้อนแบบถูกบังคับที่มีปัญหาค่าขอบเขตขึ้นกับเวลาที่เป็น autonomous system ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{da_j}{dt} &= f_j(\mathbf{a}) \\ \frac{db_j}{dt} &= g_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - G_j(\mathbf{b}, p, q) \\ \frac{dp}{dt} &= p + \omega q - p(p^2 + q^2) \\ \frac{dq}{dt} &= q - \omega p - q(p^2 + q^2)\end{aligned}$$

และในทำนองเดียวกันรูปแบบของแบบจำลองมิติต่ำสำหรับการพาความร้อนแบบถูกอิสระที่มีปัญหาค่าขอบเขตขึ้นกับเวลามีรูปแบบที่เป็น autonomous system ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{da_j}{dt} &= k_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ \frac{db_j}{dt} &= h_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - H_j(\mathbf{b}, p, q) \\ \frac{dp}{dt} &= p + \omega q - p(p^2 + q^2) \\ \frac{dq}{dt} &= q - \omega p - q(p^2 + q^2)\end{aligned}$$

ในบทนี้จะแสดงถึงผลของการวิเคราะห์แบบจำลองมิติต่ำที่ถูกสร้างขึ้นโดยเลือกใช้ปัญหาการพาความร้อนที่มีความซับซ้อนดังที่กล่าวมาข้างต้นแล้วเป็นต้นแบบของการวิเคราะห์แบบจำลองมิติต่ำสำหรับการพาความร้อน

ในการวิเคราะห์ ด้วย Bifurcation analysis ด้วย AUTO07p นั้นนอกเหนือจากการกำหนดให้ระบบรู้จัก ระบบสมการที่เราต้องการจะวิเคราะห์แล้วยังจำเป็นต้องให้ค่าเริ่มต้นของระบบสมการที่ต้องการวิเคราะห์เสียก่อน ซึ่งในที่นี้เราจะให้ค่าเริ่มต้นของระบบสมการโดยเลือกใช้ค่าคำตอบจากแบบจำลองมิติต่ำจากการใช้ penalty parameter ในแบบจำลองมิติต่ำเป็นค่าคงที่ค่าใดค่าหนึ่ง

ในส่วนของการทำ Bifurcation analysis นั้น เรามุ่งเน้นไปที่การศึกษา bifurcation analysis ของผลเฉลยหรือค่าของสัมประสิทธิ์ที่ใช้ในผลบวกเชิงเส้นของตัวแปรความเร็วของการไหลและตัวแปรของอุณหภูมิ เทียบกับ penalty parameter ซึ่งเป็น พารามิเตอร์ได้มาจากการสร้างแบบจำลองมิติต่ำโดยใช้ Penalty method ดังที่กล่าวมา

ผลของการวิเคราะห์ด้วย Bifurcation analysis ได้แสดงไว้ในรูปที่ 13 สำหรับสัมประสิทธิ์ที่ใช้ในผลบวกเชิงเส้นของตัวแปรของอุณหภูมิ ซึ่งข้อมูลจากการวิเคราะห์ bifurcation analysis โดยใช้ AUTO07p นั้นจะให้ข้อมูลของค่า magnitude ที่มากที่สุดของตัวแปร (ในที่นี้คือสำหรับสัมประสิทธิ์ที่ใช้ในผลบวกเชิงเส้นของตัวแปรความเร็วของการไหลและตัวแปรของอุณหภูมิ) ที่กำลังทำการศึกษาเทียบกับค่าต่างของ penalty parameter

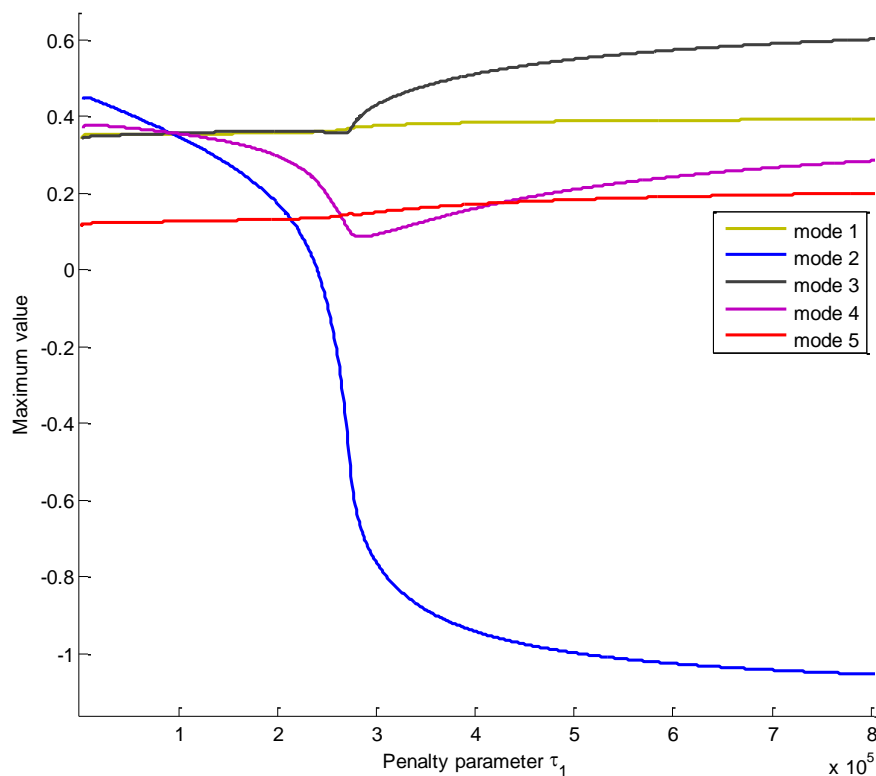


Figure 13 ผลการวิเคราะห์ Bifurcation analysis ของสัมประสิทธิ์ของฐาน POD ของอุณหภูมิ

แสดงสัมประสิทธิ์ของฐาน POD ที่ 1-5 เท่านั้น

จากผลการการศึกษา Bifurcation analysis จะเห็นว่าค่า penalty parameter ที่ทำให้ค่ามากที่สุดของสัมประสิทธิ์ของแต่ละฐาน POD ที่มีค่าใกล้เคียงกับค่ามากที่สุดของค่าสัมประสิทธิ์ของฐาน POD ที่มาจากการจำลองแบบเต็มนั้นอยู่ที่ประมาณ 10,000 อย่างไรก็ตามเราจะเห็นจากการศึกษา bifurcation

analysis ว่า ค่าคำตอบที่ได้จากแบบจำลองมิติต่านั้นมีการขึ้นอยู่กับค่าของ penalty parameter เป็นอย่างมาก การเปลี่ยนแปลง penalty parameter เพียงไม่มากนักอาจทำให้ ผลเฉลย ที่ได้นั้นคลาดเคลื่อนออกไปจากผลเฉลยที่ได้จากแบบจำลองแบบเต็มได้ จะเห็นว่าถ้านำแบบจำลองมิติต่ำที่สร้างขึ้นมานั้นไปใช้งานกับการควบคุมการพาความร้อนอาจมีปัญหาเนื่องจากว่าผลของการเปลี่ยนแปลงค่าจะกระบวนควบคุมอาจส่งไปเช่นเดียวกันการเปลี่ยนแปลงค่า penalty parameter ที่ใช้ในแบบจำลอง ทำให้ไม่ทราบแน่นอนว่าผลเฉลยที่ได้จากการควบคุมนั้นเป็นผลกระทบมาจากระบบใด อย่างไรก็ตามแบบจำลองมิติต่ำที่ถูกสร้างขึ้นนั้นยังสามารถให้คำตอบที่ใกล้เคียงกับคำตอบจากแบบจำลองแบบเต็มได้สำหรับค่า penalty parameter ที่เหมาะสมดังนั้นแบบจำลองใหม่ที่ถูกสร้างขึ้นมานี้จึงเหมาะสมในกระบวนกรจำลองมากกว่า

## ข้อสรุปผลการวิจัย

จากผลการวิจัยครั้งนี้พบว่าเราสามารถสร้างแบบจำลองมิติต่ำสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบถูกบังคับและแบบอิสระ ที่เหมาะกับปัญหาที่มีค่าขอบที่ขึ้นอยู่กับเวลาได้ และแบบจำลองมิติต่ำที่สร้างขึ้นมาสามารถนำไปใช้ในการจำลองแบบสำหรับปัญหาการพาความร้อนได้เป็นอย่างดี และ ถูกต้อง โดยที่สามารถลด degree of freedoms ที่จำเป็นต้องใช้งานสำหรับการจำลองแบบได้มากกว่า 10000 เท่า ทำให้แบบจำลองที่ถูกสร้างขึ้นนั้นมีขนาดเล็กและลดความจำเป็นในการใช้หน่วยความจำที่มีขนาดใหญ่ ซึ่งแบบจำลองที่ถูกสร้างขึ้นนั้นมีขนาดเล็กเหมาะสำหรับการนำไปใช้งานในด้านของ embedded systems หรืองานที่มีลักษณะความต้องการแบบจำลองที่มีขนาดเล็ก

อย่างไรก็ตามจากผลการวิเคราะห์แบบจำลองโดยใช้เทคนิค Bifurcation analysis นั้นปรากฏว่าแบบจำลองที่ถูกสร้างขึ้นนั้นมีความขึ้นตรงกับพารามิเตอร์ที่ใช้สร้างแบบจำลองมิติต่ำของการพาความร้อนเป็นอย่างมากซึ่งอาจไม่เหมาะสำหรับการใช้แบบจำลองชนิดนี้ในกระบวนการควบคุมเนื่องจากในกระบวนการควบคุมนั้นจะมีการเปลี่ยนแปลงค่าของฟังก์ชันที่ใช้ควบคุมการพาความร้อนที่ขอบเขตของโดเมนที่ต้องการ ซึ่งอาจส่งผลให้ค่าของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับปัญหานั้นๆของแบบจำลองมิติต่ำเปลี่ยนแปลงไปด้วยจึงทำให้ไม่สามารถระบุได้อย่างชัดเจนว่าผลของการจำลองที่มีการควบคุมการพาความร้อนอยู่ด้วยนั้นเป็นผลมาจากการควบคุม หรือ ว่า ผลจากค่าของพารามิเตอร์ของแบบจำลองมิติต่ำที่เปลี่ยนไป

## เอกสารอ้างอิง

- [1]. P. Holmes, J.L. Lumley and G. Berkooz, Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry, Cambridge University Press, Great Britain (1996).
- [2] Carlson, H., Glauser, M., Higuchi, H., and Young, M., "POD Based Experimental Flow Control on a NACA-4412 Airfoil," AIAA Paper 2004-0575, Jan. 2004.
- [3] Cohen, K., Siegal, S., McLaughlin, T., and Myatt, J., "Proper Orthogonal Decomposition Modeling of a Controlled Ginzburg-Landau CylinderWake Model," AIAA Paper 2003-2405, Jan. 2003.
- [4] X. Ma and G.E. Karniadakis, A low-dimensional model for simulating three-dimensional cylinder flows, Journal of Fluid Mechanics, 458 , pp 181-190,2002
- [5] H.M. Park and D.H. Cho, The use of the Karhunen–Loeve decomposition for the modeling of distributed parameter systems, Chem. Eng. Sci. 51 (1996) (1), pp. 81–98.
- [6] J. Rambo, Y. Joshi, Reduced-order modeling of turbulent forced convection with parametric conditions, International Journal of Heat and Mass Transfer, 50,(3-4), (2007), pp 539-551.
- [7] H.M. Park and W.J. Li, Boundary optimal control of natural convection by means of mode reduction, J. Dyn. Syst. Meas. Control 124 (2002), pp. 47–54.
- [8] I.H. Tarman and L. Sirovich, Extensions of Karhunen–Loeve based approximations of complicated phenomena, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 155 (1998), pp. 359–368.
- [9] S. Sirisup, G.E. Karniadakis, Stability and accuracy of periodic flow solutions obtained by a POD-penalty method, Physica D: Nonlinear Phenomena, 202 (3-4) ( 2005), pp 218-237
- [10] X. Zhou and L. Sirovich, Coherence and chaos in a model of turbulent boundary layer, Phys. Fluid A 4 (1992) (12), pp. 2855–2874.
- [11] J.F. Gibson, Dynamical Systems Models of Wall-Bounded, Shear-Flow Turbulence, PhD thesis, Cornell University, 2002.

[12] E. Doedel *et. al.*, "Auto-07p: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations," Tech. Rep., 2008. [Online]. Available: <http://sourceforge.net/projects/auto-07p/>



Output ที่ได้จากโครงการ

1. Manuscript เรื่อง Numerical Investigation and Proper Orthogonal Decomposition of Forced Convective Heat Transfer from Staggered Circular Cylinders โดย Saifhon Tomkratoke, Sirod Sirisup และ George Em Karniadakis ยื่นที่ International Journal of Heat & Mass Transfer
2. Manuscript เรื่อง On numerical methods for mean-reverting square root processes with jumps โดย Sirod Sirisup, Raywat Tanadkithirun และ Kittipat Wong ยื่นที่ BIT numerical
3. นำเสนอในงานประชุมวิชาการระดับนานาชาติ เรื่อง Reduced-order modeling of forced convective heat transfer with time-dependent boundary condition, 13<sup>th</sup> International Annual Symposium on Computational Science and Engineering (ANSCSE13), 2009, Bangkok, Thailand.

## ภาคผนวก

# Numerical Investigation and Proper Orthogonal Decomposition of Forced Convective Heat Transfer from Staggered Circular Cylinders

Saifhon Tomkratoke<sup>a</sup>, Sirod Sirisup<sup>a,1,\*</sup>, George Em Karniadakis<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Large-Scale Simulation Research Laboratory  
National Electronics and Computer Technology Center  
112 Thailand Science Park, Prathumthani 12120, Thailand*

<sup>b</sup>*Division of applied mathematics  
Brown university, Providence, RI USA 02912*

---

## Abstract

Incompressible flow around a pair of circular cylinders in staggered arrangements with heated upstream cylinder is investigated in this study. Three dimensional direct numerical simulation (DNS) is performed based on the spectral/hp element method with the Reynolds numbers,  $Re$ , of 500 and the Prandtl number,  $Pr$ , of 0.71. The longitudinal separation ( $L$ ) to diameter ( $D$ ) ratio ( $L/D$ ) and transverse separation ( $T$ ) to diameter ( $D$ ) ratio ( $T/D$ ) are varied from 2.5 to 5 and from 0.5 to 1, respectively. The first investigation focuses on the effects of cylinders placement on both flow structures and local heat transfer characteristics of both cylinders. Later, the identification of major spatially distributed features is done by extracting the proper orthogonal decomposition (POD) modes from ensemble of simulation solutions. The correlation between flow, heat transfer characteristics and POD modes is studied.

**Keywords:** Proper orthogonal decomposition, Forced convection, Direct numerical simulation

---

---

\*sirod.sirisup@nectec.or.th

<sup>1</sup>To whom correspondence should be addressed

## 1. Introduction

Wake vortex dynamics have long been major subject of interest to engineers and scientists for many years. Understanding wake dynamics behind a bluff body has been great challenge for decades. Despite of its simple geometry, circular cylinder wake flows exhibit rich flow features and yet have many direct engineering and science applications. The alternate shedding pattern of vortices in the wake region leads to large fluctuating pressure forces in a direction transverse to the flow and may cause vortex-induced vibrations which in some cases can trigger structural failures [1].

Two staggered cylinders flows have been subject of interest to engineering and scientific community relevance to fluid mechanics because the flows can represent many important physical phenomena, such as flow interference, complicated vortex shedding and transition. In the last decade, several studies of staggered cylinders flows have been investigated to provide a through standing of flow structures and interaction of the cylinders' wakes, [2, 3, 4, 5]. The flow interferences of the staggered cylinders flows are defined into two basic categories, [6] as:

- Wake interference: One of the cylinders is partially or completely submerged in the wake of the other, and
- Proximity interference: The two cylinders are located close to each other, but neither is submerged in the wake of the other.

Both types of flows clearly yield complicated flow structures as well as highly complex wake vortex dynamics. Besides, they also express complicated behavior of mass and energy transfer. The heat transfer characteristics of the cylinders usually depend on a given interference regime resulted from cylinders placements. However, the wake vortex dynamics in interference regime can play important role in changing heat transfer characteristics of both upstream and downstream cylinders. For example, the thermal energy is trapped in viscous layer and released from the cylinder surface by eddies and the fluctuation of heat transfer characteristics, measured by the Nusselt number, is related to the longitudinal pitch ratio ( $L/D$ ) between the cylinders [7, 8].

Recently, experimental studies of heat transfer from two staggered cylinder have been performed, [9] where a new classification of interference regimes as mode S-I, S-II, T-I and T-II and their corresponding heat and momentum

transportation mechanisms have been proposed and identified for the flow with  $Re = 7000$ .

In present study, we aim to investigate the effects of the cylinder placement on both flow structures and heat transfer characteristics of two cylinders placed in staggered arrangements at  $Re = 500$  via direct numerical simulation (DNS) approach. Here, we have carried out numerical studies on both types of interferences. Specifically for proximity interference, we focus on the biased gap flow and reattachment regimes which exhibit suppression of three dimensionality. In the studies, the transverse pitch ratio (T/D) and longitudinal pitch ratio (L/D) are systematically varied where the Reynolds number of the present study is chosen to be  $Re = 500$  where three dimensional effects are well developed, [10].

We also apply the POD technique to identify dominant spatially distributed features or POD modes of both flow and temperature fields. The proper orthogonal decomposition (POD) method is a statistical tool used to identify low-dimensional descriptions for multidimensional systems, [11]. The method has been successfully applied in wide range of scientific applications, for example, fluid flows, biomechanics and geophysical fluid dynamics [12, 13, 14, 15, 16]. The results of analyzing POD modes will allow us to elucidate the heat transfer mechanism in the problem. The paper is organized as follows. In next section, we describe the details of the simulation and analysis methods used in the current investigation. Then, we present the results with some discussions. Finally, we close the paper with summary of the investigation.

## 2. Simulation and Analysis methods

### 2.1. Computational details

Non-dimensional unsteady, incompressible, momentum and energy equations without external forcing or buoyancy effects used in this study are:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \frac{1}{RePr} \nabla^2 T\end{aligned}$$

Where,  $Re$  is the Reynolds number,  $Pr$  is the Prandtl number. Here  $Re$  is defined through:  $\frac{DU}{\nu}$  and  $D$  is the cylinder diameter.

A computational domain with dimension of  $40D \times 9D \times 1D$  (streamwise-crossflow-spanwise) was employed in this investigation. A pair of cylinders both with diameter of  $D = 1$  are placed in various staggered arrangements with longitudinal separation (L) to the cylinder diameter (D) ratio (L/D) and transverse separation (T) to the cylinder diameter (D) ratio (T/D) of 2.5-5.0 and 0.5-1.0, respectively. In each case, the computational domain is decomposed into approximately 13000 tetrahedral elements.

Uniform steady inflow is imposed on inflow boundary, zero Neumann condition is imposed on outflow boundary while no-slip condition is imposed to cylinder walls and symmetry condition is prescribed for crossflow and spanwise directions. Temperature is set to be unity only for the upstream cylinder and zero for the downstream cylinder as well as the inflow boundary while zero Neumann condition on temperature is imposed on the outflow boundary and symmetry condition is prescribed for crossflow and spanwise directions. The flow parameters used in this study are  $Re = 500$  with  $Pr = 0.71$ . Converged solutions were obtained by solving the governing equations using the spectral/hp element library [17]. The Characteristic Galerkin method is chosen to be a thermal stabilizer in the solver. The verification of the solver has been performed and the time-averaged mean Nusselt numbers are compared with the several experimental data. As shown in figure 1, the numerical results are in good agreement with the experimental data [18] .

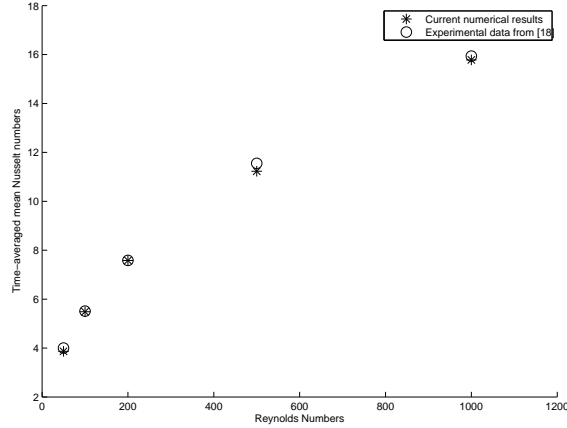


Figure 1: Comparisons of numerical and experimental data [18]

From the resolution dependency study, we conclude that the Jacobi poly-

nomial basis of order seven is sufficient for this investigation. Characteristics of local heat transfer are obtained by measuring the local Nusselt number on both cylinders' walls.

## 2.2. Proper orthogonal decomposition (POD) method

The proper orthogonal decomposition (POD) procedure extracts an empirical orthogonal features from any ensemble of data. This linear procedure produces useful reduced basis set which is optimal in  $L^2$  sense. In the POD framework for continuous problems, [11], one can represent flow field  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  (or temperature field  $T(\mathbf{x}, t)$ ) as follows:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \phi_k(\mathbf{x}), \quad (1)$$

where  $\{\phi_k(\mathbf{x})\}$  is the set of POD basis or dominant spatially distributed features which are determined by the eigenvalue problem

$$\int_A C(t, t') a_k(t') dt' = \hat{\lambda}_k a_k(t), \quad t \in A, \quad (2)$$

where  $\{a_k(t)\}$  is the set of temporal modes,  $A$  is a specified time interval and  $C(t, t')$  is the correlation function defined by

$$C(t, t') = \int_{\Omega} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(t', \mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (3)$$

The POD basis is thus defined by:

$$\phi_k(\mathbf{x}) = \int_A a_k(t) \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) dt, \quad \forall k. \quad (4)$$

The non-negative definiteness of the correlation function (3) allows us to order the eigenvalues and the corresponding POD modes by  $\hat{\lambda}_k \geq \hat{\lambda}_{k+1}$ . The POD modes contain useful information on spatial structures which can also be physically interpreted.

Here, the POD method is applied to extract dominant features or POD modes,  $\phi_k(\mathbf{x})$ , from ensembles of simulation solutions.

### 3. Results and discussion

#### 3.1. Vortex dynamics and flow interferences

##### 3.1.1. Proximity interference regime

**Reattachment regime:** Reattachment flow has been observed in the case of  $L/D = 2.5$  with  $T/D = 0.5$ , see Figure 2, first row. In this case, the gap between two cylinders is small enough to induce shear layer separating from the upstream cylinder reattaches or interacts with shear layer of downstream cylinder. This scenario is quite similar to the interference classification as mode S-Ia [9]. This was also identified as reattachment flow regime [5]. The development of three dimensional structures is well observed in the flow. We have observed the vortex structures which are quite (not exactly) similar to those of the case of single cylinder in the downstream wake. However, the vortex structures in near wake of the upstream cylinder is suppressed and there is also a significant interaction between the spanwise and streamwise vortices. Inner shear layer of the upstream cylinder merges with some part of the outer shear layer of the upstream cylinder which consequently convected downstream which later enveloping the spanwise vortex of the downstream cylinder.

**Biased gap regime:** This flow regime is observed in flow configuration of  $L/D = 2.5$  with  $T/D = 1.0$ , see Figure 2, second row. The shear layer separating from the inner surface of the upstream cylinder does not reattach onto the surface of the downstream cylinder. Instead it deflects toward the upstream cylinder and interacts with outer shear layer of the upstream cylinder. The flow in this regime is identified as mode S-II [9] and as the biased gap regime [5]. The downstream evolution is in such a way that the two spanwise vortices of the upstream cylinder amalgamate with spanwise vortex with the vortices shed from the downstream cylinder forming asymmetrical wake structures. We have observed that streamwise vortex shed from the outer side of the upstream cylinder envelopes spanwise vortices shed from the inner side of both cylinders. In this case, the location of the envelopment is faraway from the downstream cylinder compared to that in the previous regime.

##### 3.1.2. Wake interference regime

This flow regime is observed in the case of  $L/D = 5.0$  with both of  $T/D = 0.5$  and  $T/D = 1.0$ . In this regime, the downstream cylinder is submerged in the wake of the upstream cylinder, see figure 2, third and fourth



rows . The flow characteristic is identified as mode S-Ib [9]. We have observed that the streamwise vortex in the wake of upstream cylinder is fully developed and for the case of  $T/D = 1.0$ , impinges on the downstream cylinder then brakes into two equal parts, outer and inner parts, upon impingement. The outer part interacts with the shear layer of the downstream cylinder, while the inner part sweeps along the inner side of the downstream cylinder. The spanwise vortex shed from the inner side of the upstream cylinder, only in the case of  $T/D = 0.5$ , impinges directly onto the front surface of the downstream cylinder, deforms and convected along the surface of the downstream cylinder. However, The spanwise vortex shed from the outer side of the upstream cylinder is convected downstream without interacting with the downstream cylinder. The structures of vortex street in the outer region of downstream wake, for the case of  $T/D = 1.0$ , compose of the envelopment of the spanwise vortex of the downstream cylinder by the streamwise vortex of the upstream cylinder and for the case of  $T/D = 0.5$ , compose of the envelopment of the spanwise vortex of the downstream cylinder by the spanwise vortex of the upstream cylinder.

### 3.2. Local heat transfer characteristics

#### 3.2.1. Proximity interference regime

**Reattachment regime:** Figure 3, first row, shows an instantaneous plot of the thermal energy. The thermal energy from the inner side of the upstream cylinder is released, reattaches onto the front surface of the downstream cylinder and also circulates in the gap between the cylinders. This mechanism directly influences characteristics of heat transfer near the front surface of downstream cylinder. The thermal energy from the outer side of the upstream cylinder is likewise released, convected and rolls up to interact with back surface of downstream cylinder. The interaction leads to strong fluctuations of the Nusselt number in that region, see figure 5, first row.

An instantaneous distribution of the Nusselt number on the surface of the upstream cylinder is plotted in figure 4, first row . The Nusselt number highly fluctuates in the area that is closed to the separation point which locates at the 25 to -50 degrees (measured from the middle of back of the cylinder). The fluctuations of the Nusselt number at the area depend on spanwise vortex forming process on the outer surface of the upstream cylinder.

**Biased gap regime:** Similar to the flow characteristic, the thermal layer does not reattach onto the downstream cylinder but instead deflect toward the upstream cylinder and is convected downstream into the wake

region of the downstream cylinder. Thus, only small effects on heat transfer characteristics of the front surface of the downstream cylinder are founded.

The distribution of the Nusselt number on the surface of the upstream cylinder is presented in figure 4, second row . The figure shows that, the fluctuations of the Nusselt number are found in the region of 0 to -50 degrees (measured from the middle of the back of the cylinder). The scenario of the fluctuations of the Nusselt number at the area is similar to that of the reattachment regime but in this regime the highly fluctuated area is shifted downward.

The distribution of the local Nusselt number on the downstream cylinder surface is presented in figure 5, second row. The figure shows that the clusters of high temperature formed by the vortices shed from inner surface of the upstream cylinder does not make any major influences over the heat transfer characteristics of the front surface of downstream cylinder. However, the clusters bring some minor effects on heat transfer characteristics of the back surface of the downstream cylinder.

### 3.2.2. *Wake interference regime*

In this regime, the thermal structures in the upstream wake are in full three dimension, see figure 3, third and fourth rows. The heat transfer characteristics of the upstream cylinder are observed as follows. We have found that the mechanism of heat transfer behind the upstream cylinder is dominated by the vortex shedding process. The cold fluid is induced during the process of forming spanwise vortex results in increment in Nusselt number. The consequence can also be observed by a thinner thermal layer, see figure 5 third and fourth rows, as well as the rise of local Nusselt numbers in that area, see figure 4, third and fourth rows. The thermal energy is later shed together with spanwise vortex forming clusters of high temperature. In the case  $T/D = 1.0$ , the clusters of high temperature formed by vortices shed from outer surface of the upstream cylinder are convected downstream without interacting with the downstream cylinder. However, the clusters of high temperature formed by the vortices shed from inner surface of the upstream cylinder are convected and move to the lower back side of the downstream cylinder. From figure 3, fourth row, we can conclude that the clusters of high temperature formed by the vortices shed from inner surface of the upstream cylinder are the primary heat sources of the downstream cylinder. The streamwise vortex shed from the upstream cylinder impinges directly onto the front surface of the downstream cylinder causing sudden change in

the local Nusselt number of the front surface of the downstream cylinder. The vortex then splits into two parts and thermal energy captured by the vortex is transferred to the shear layer of the down stream cylinder. However, this mechanism yields only partial heat contribution.

In the case of  $T/D = 0.50$ , the clusters of high temperature formed by the vortices shed from inner surface of the upstream cylinder together with those formed by the spanwise vortex impinge onto the front surface of the downstream cylinder and then split into two parts, see Figure 3, third row. The outer part shed to a wider vortex street while the inner part shed to a narrower vortex street. The impingement leads to a significant increment of Nusselt number on the front surface of the downstream cylinder. However, if we compare the magnitudes of the Nusselt number of the case  $T/D = 1.0$  to that of the case  $T/D = 0.5$ , even though their profiles are quite similar but the peak of the Nusselt number of the case of  $T/D = 0.5$  is about twice as much compared to that of the case  $T/D = 1.0$ . This concludes that the majority of the heat is convected by the spanwise vortices.



Figure 2: Instantaneous vorticity surfaces. Top to bottom:  $T/D=0.5$ ,  $T/D=1.0$  and Left to Right:  $L/D=2.5$ ,  $L/D=5.0$ , dark gray and light gray are stream-wise vorticity and span-wise vorticity, respectively

### 3.3. Proper orthogonal decomposition

We focus on the energy distribution of the POD modes for each staggered arrangements. In all cases, the first POD mode (the mean mode) of



Figure 3: Instantaneous temperature surfaces.

both velocity and temperature fields dominates all other modes by capturing more than 60% of the total energy captured by all of the modes, see figure 6. The pairing of higher POD modes (the second and higher modes) of the temperature field is clearly observed in the case of  $L/D=5.0$  with  $T/D=1.0$ . This pairing behavior has been observed in the case of heat transfer from single cylinder at the same Reynolds number. This indicates that the downstream cylinder does not play any major role in changing characteristics of the temperature field in the case of  $L/D=5.0$  with  $T/D=1.0$ .

The analysis of major spatial distribution features of both interference types is described as follows.

### 3.3.1. Proximity interference regime

**Reattachment regime:** The reattachment to the downstream cylinder of the flow and temperature field is fully captured by the first POD mode. The higher POD modes of the temperature field indicates that the main activity region in this case includes the wake region behind the downstream cylinder. The 2S vortex shedding pattern is clearly observed and well captured in the velocity POD modes.

**Biased gap regime:** In this regime, we clearly see the deflection of the flow in the first POD mode toward the upstream cylinder. The main activity region of the temperature field includes only in some region below and behind the downstream cylinder (only some part of the wake region of the

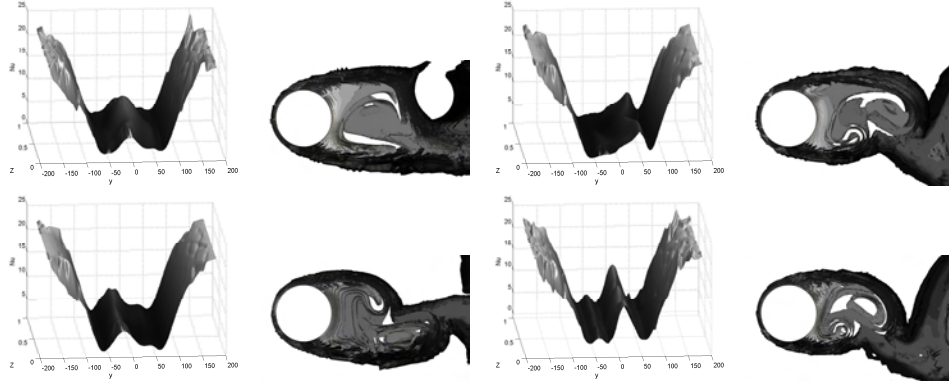


Figure 4: Instantaneous local heat transfer characteristics of the upstream cylinder. Distribution of local Nusselt number and the corresponding temperature iso-surface plot around the upstream cylinder. Top to bottom:  $T/D=0.5$ ,  $T/D=1.0$  and Left to Right:  $L/D=2.5$ ,  $L/D=5.0$

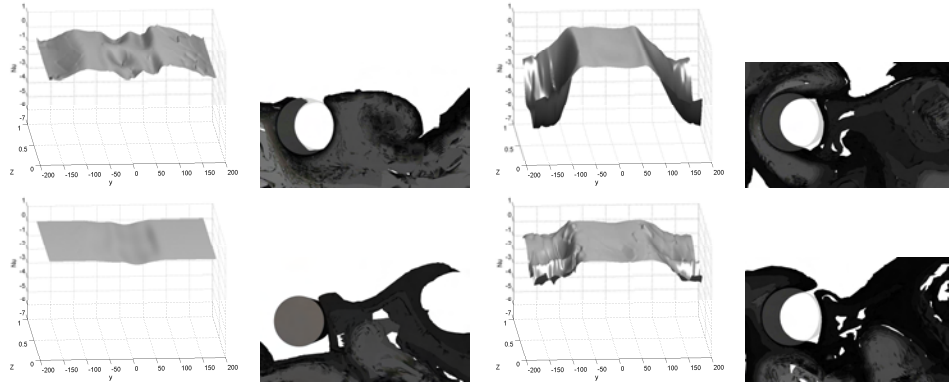


Figure 5: Instantaneous local heat transfer characteristics of the upstream cylinder. Distribution of local Nusselt number and the corresponding temperature iso-surface plot around the downstream cylinder. Top to bottom:  $T/D=0.5$ ,  $T/D=1.0$  and Left to Right:  $L/D=2.5$ ,  $L/D=5.0$

downstream cylinder). More complicated flow structures are observed in the POD modes of the temperature field as well. POD modes of velocity show more distinctive wake regions of each cylinder which are clearly observed from the distribution of the velocity modes, especially the crossflow velocity component, from the upstream and downstream cylinders.

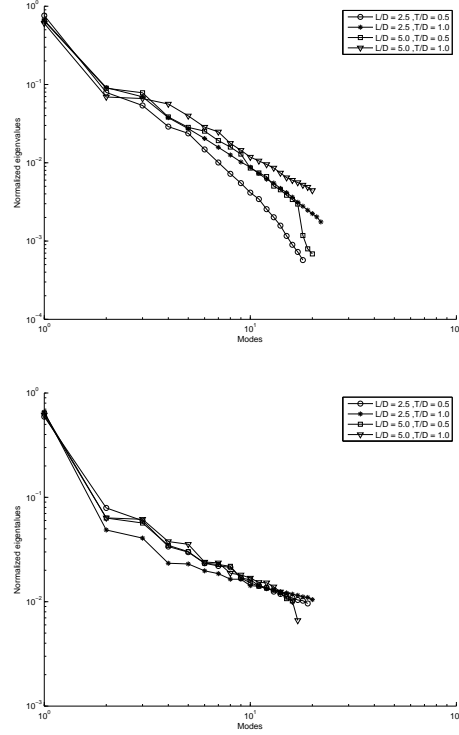


Figure 6: Energy distribution of POD modes for all staggered arrangements. Top: POD modes of velocity fields. Bottom: POD modes of temperature fields

### 3.3.2. Wake interference regime

In this regime, the main activity region of the temperature field covered entire wake regions from both cylinders which confirms the flow and heat characteristics in previous section. The patterns of the POD modes become more distinctive for each cylinder and are clearly observable in the case of  $L/D=5.0$  with  $T/D=1.0$  and  $Re = 500$ . This fact together with the distribution of the energy distribution of the eigenvalues in figure 6 indicates that the existence of the downstream cylinder provides only slightly effects to the pattern of the temperature field compared to the case of single cylinder. We also find that the lower  $T/D$  ratio, the more complicated structures in the wake region are formed.



Figure 7: Proper orthogonal decomposition modes. Left to right: ( $L/D=2.5$ ,  $T/D=0.5$ ), ( $L/D=5.0$ ,  $T/D=1.0$ ). Top to bottom: streamwise velocity first mode and second mode, temperature first mode and second mode.

#### 4. Conclusions

Incompressible flow around a pair of circular cylinders in staggered arrangements with heated upstream cylinder is investigated in this paper. The longitudinal pitch ratio ( $L/D$ ) and transverse pitch ratio ( $T/D$ ) are varied from 2.5 to 5 and 0.5 to 1, respectively. The flow parameters used in this study are  $Re = 500$  with  $Pr = 0.71$ . The configurations of the cylinders yield two types of flow interferences which are proximity interference and wake interference. We have found that there are only small effects on heat transfer characteristics on the surface of the downstream cylinder in the bi-ased gap regime while the wake interference regime leads to large interference effects on local heat transfer characteristic of the downstream cylinder. The majority of the heat is convected by the spanwise vortices. From the proper orthogonal decomposition analysis, we found that the spatial distribution of the modes in each flow regime directly relates to the flow characteristics in that particular regime. Besides, the analysis indicates that for a larger  $L/D$  and  $T/D$  ratio, the existence of the downstream cylinder slightly affects the pattern of the temperature field compared to the case of single cylinder.

## Acknowledgements

Sirod Sirisup gratefully acknowledges the supporting grant from the Thailand Research Fund under the contract TRG5180007. The authors acknowledge National Electronics and Computer Technology Center, National Science and Technology Development Agency and the Thai National Grid Center for providing computing resources that have contributed to the research results.

## References

- [1] R. Blevins, Flow Induced Vibration, Van Nostrand Reinhold Company, New York, New York, 1990.
- [2] S. Mittal, International Journal for Numerical Method in Fluids 25 (1997) 1315–1344.
- [3] D. Sumer, Journal of Fluids and Structure 20 (2005) 255–276.
- [4] B. Carmo, S. Sherwin, P. Bearman, R. Willden, J.Fluid Mech 597 (2008) 1–29.
- [5] M. Akbari, S. Price, Journal of Fluids and Structure 20 (2005) 533–884.
- [6] M. Zdrakovich, Journal of Fluids and Structures 1 (1987) 239–261.
- [7] I. Tanno, K. Morinishi, K. Mutsuno, H. Nishida, ASME Journal of Heat Transfer 49 (206) 1141–1148.
- [8] E. Buyruk, Int.Comm.Heat Mass Transfer 29 (2002) 355–366.
- [9] J. Hu, Y. Zhou, J. Fluid Mech 607 (2008) 81–107.
- [10] C. Williamson, Ann. Rev. Fluid Mech. 28 (1996) 477–539.
- [11] G. Bekooz, P. Holmes, J. Lumley, Ann. Rev. Fluid Mech. 25 (1993) 539–575.
- [12] S. Ravindran, International Journal for Numerical Methods in Fluids 34 (2000) 425–448.
- [13] J. Rambo, Y. Joshi, International Journal of Heat and Mass Transfer 50 (2007) 539–551.



- [14] N. Arifin, M. Noorani, A. Kilicman, *Nonlinear Dynamics* 48 (2007) 331–337.
- [15] D. Rempfer, *Annual Review of Fluid Mechanics* 35 (2003) 229–265.
- [16] S. Sirisup, G. Karniadakis, D. Xiu, I. Kevrekidis, *Journal of Computational Physics* 207 (2005) 568–587.
- [17] G. Karniadakis, S. Sherwin, *Spectral/hp Element Methods for Computational Fluid Dynamics*, Oxford University Press, 2005.
- [18] S. Churchill, M. Bernstein, *ASME Journal of Heat Transfer* 99 (1977) 300–306.

Editorial Manager(tm) for BIT Numerical Mathematics  
Manuscript Draft

Manuscript Number:

Title: On numerical methods for mean-reverting square root processes with jumps

Article Type: Research Paper

Corresponding Author: Dr. Sirod Sirisup, Ph.D.

Corresponding Author's Institution: National Electronics and Computer Technology Center

First Author: Sirod Sirisup, Ph.D.

Order of Authors: Sirod Sirisup, Ph.D.; Raywat Tanadkithirun; Kittipat Wong, Ph.D.

Abstract: We study two numerical methods: drift-implicit Euler method and compensated split-step backward Euler method by numerically investigating on their performance as well as accuracy in solving the mean-reverting square root process with jumps in weak sense. Rigorous error bounds and theoretical errors in weak sense for both methods are provided.

Suggested Reviewers:

BIT manuscript No.  
(will be inserted by the editor)

# On numerical methods for mean-reverting square root processes with jumps

Sirod Sirisup · Raywat Tanadkithirun · Kittipat Wong

Received: date / Accepted: date

**Abstract** We study two numerical methods: drift-implicit Euler method and compensated split-step backward Euler method by numerically investigating on their performance as well as accuracy in solving the mean-reverting square root process with jumps in weak sense. Rigorous error bounds and theoretical errors in weak sense for both methods are provided.

**Keywords** Stochastic differential equations with jumps · Numerical methods · Mean-reverting square root processes with jumps

**Mathematics Subject Classification (2000)** 60H35 · 60H10 · 60G99

## 1 Introduction

Stochastic differential equation (SDE) models find applications in various areas especially in economics and finance. One of the most famous models is geometric Brownian motion which is the asset-price model used in Black-Scholes-Merton option pricing formula. The mean-reverting square root process [2] is an SDE which has found considerable use in mathematical finance as an alternative to geometric Brownian motion. It is used as a model for volatility, interest rate, and other financial quantities, and forms the stochastic volatility component of Heston’s asset price model [3]. Moreover, it can be used for pricing bonds and barrier options [5].

However, introducing a jump process into such process makes the model become more realistic. The mean-reverting square root process with jumps on which we focus

S. Sirisup  
National Electronics and Computer Technology Center, Pathumthani, 12120, Thailand  
E-mail: sirod.sirisup@nectec.or.th

R. Tanadkithirun · K. Wong  
Department of Mathematics, Faculty of Science, Chulalongkorn University, Bangkok, 10330, Thailand  
E-mail: {xraywat, kittipat.w}@gmail.com

in this work has the form

$$dS(t) = \alpha(\mu - S(t^-))dt + \sigma\sqrt{S(t^-)}dW(t) + \delta S(t^-)d\tilde{N}(t) \quad (1.1)$$

where  $t \in [0, T]$ ,  $S(t^-)$  denotes  $\lim_{r \rightarrow t^-} S(r)$ ,  $W$  is a Wiener process and  $\tilde{N}$  is a compensated Poisson process. Here,  $S(t)$  represents the spot price at time  $t$ . The parameter  $\mu$  is the long run equilibrium price or mean reversion level,  $\alpha$  is the mean reversion rate,  $\sigma$  is the degree of volatility around it caused by noise from the Wiener process, and  $\delta$  is the degree of jumps.

We can determine solution's expectation, variance and covariance functions or even higher-order moments once strong solution in explicit form of an SDE with jumps has been found. Unfortunately, the strong solution in an explicit form to this SDE with jumps has yet been found. Rather, we would like to find its numerical approximation. Note that even though all coefficient functions satisfy the linear growth condition, we still can not directly apply the standard convergence theory for numerical approximation to this model due to the non-Lipschitz diffusion coefficient. It has the form of square root function.

To this end, we consider two numerical methods: drift-implicit Euler method and compensated split-step backward Euler method. We numerically investigate their performances as well as accuracy in solving this particular model in weak sense. Rigorous computable error bounds and theoretical errors in weak sense for both methods are also presented.

In next section, we provide details of the numerical schemes. In section 3, we provide rigorous error bounds in weak sense for drift-implicit Euler and compensated split-step backward Euler methods and other relevant theorems. In section 4, we present results from computational experiments. Lastly, we conclude our work in section 5.

## 2 Numerical Schemes

First of all, we provide the assumptions for the mean-reverting square root process with jumps. Throughout this paper, let  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  be a complete probability space with a filtration  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  satisfying the usual conditions. Let  $W$  be a Wiener process and  $N$  a Poisson process with intensity  $\lambda$  such that  $\tilde{N}(t) = N(t) - \lambda t$  is the corresponding compensated process. Assuming that  $W$  and  $N$  are independent, and both processes are defined on the aforementioned probability space. This paper considers (1.1) in which  $\alpha, \lambda$  and  $\sigma$  are positive with  $\alpha + \lambda\delta > 0$ ,  $\mu$  is nonnegative,  $S(0)$  is independent of  $W$  and  $N$ , and  $S(0) = S_0 > 0$  almost surely. The condition  $\alpha + \lambda\delta > 0$  can force (1.1) to have a unique strong solution which will never become negative with probability one, see [8].

Now, we present the two numerical schemes. We first divide the interested time interval  $[0, T]$  into  $L$  equal parts with a fixed time step size  $\Delta = \frac{T}{L}$  so that we have an equidistant time discretization  $\{t_0, t_1, \dots, t_L\}$  with  $t_n = n\Delta$ . Then, we define the discrete-time drift-implicit Euler approximation to (1.1) introduced in [1] by setting

$s_0 = ES_0$  and form

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + \{\zeta\alpha(\mu - s_{n+1}) + (1 - \zeta)\alpha(\mu - s_n)\}\Delta + \sigma\sqrt{|s_n|}\Delta W_n + \delta s_n\Delta\tilde{N}_n \quad (2.1) \\ &= s_n + \frac{\alpha(\mu - s_n)}{1 + \zeta\alpha\Delta}\Delta + \frac{\sigma\sqrt{|s_n|}}{1 + \zeta\alpha\Delta}\Delta W_n + \frac{\delta s_n}{1 + \zeta\alpha\Delta}\Delta\tilde{N}_n \end{aligned}$$

where the parameter  $\zeta$  is the degree of implicitness,  $\Delta W_n = W(t_{n+1}) - W(t_n)$  is a Wiener process increment, which is normally distributed with mean zero and variance  $\Delta$ , and  $\Delta\tilde{N}_n = \tilde{N}(t_{n+1}) - \tilde{N}(t_n)$  is a compensated Poisson process increment, which has the distribution  $Poi(\lambda\Delta) - \lambda\Delta$ . Note that any numerical method that is directly applied to (1.1) may break down due to negative values being supplied to the square root function. However, we have known that the solution  $S(t)$  will never become negative almost surely. Thus, the SDE with jumps (1.1) is equivalent to

$$dS(t) = \alpha(\mu - S(t^-))dt + \sigma\sqrt{|S(t^-)|}dW(t) + \delta S(t^-)d\tilde{N}(t)$$

which is in a better form computationally. For this reason, we use  $|s_n|$  instead of  $s_n$  under the square root function. Notice that when the degree of implicitness is zero, this method turns out to be the well-known Euler-Maruyama scheme

$$s_{n+1} = s_n + \alpha(\mu - s_n)\Delta + \sigma\sqrt{|s_n|}\Delta W_n + \delta s_n\Delta\tilde{N}_n. \quad (2.2)$$

With the exact same equidistant time discretization  $\{t_0, t_1, \dots, t_L\}$  defined earlier, the compensated split-step backward Euler scheme for (1.1) introduced in [4] is defined by letting  $s_0 = ES_0$  and forming

$$\begin{aligned} s_{n+1}^* &= s_n + \alpha(\mu - s_{n+1}^*)\Delta \\ &= \frac{s_n + \alpha\mu\Delta}{1 + \alpha\Delta}, \\ s_{n+1} &= s_{n+1}^* + \sigma\sqrt{|s_{n+1}^*|}\Delta W_n + \delta s_{n+1}^*\Delta\tilde{N}_n \quad (2.3) \\ &= s_n + \alpha(\mu - s_{n+1}^*)\Delta + \sigma\sqrt{|s_{n+1}^*|}\Delta W_n + \delta s_{n+1}^*\Delta\tilde{N}_n. \end{aligned}$$

In each marching forward step from  $s_n$  to  $s_{n+1}$ , this method has two splitted substeps dealing explicitly to the deterministic and stochastic parts. Specifically, the first substep that is to find  $s_{n+1}^*$  concerns only with the deterministic component, and the second substep which is to find  $s_{n+1}$  deals with the random parts from the Wiener process and the compensated Poisson process.

### 3 Error Bounds

This section provides rigorous error bounds in weak sense for drift-implicit Euler and compensated split-step backward Euler methods. The key ingredients of our proof are the Fubini's theorem and the Gronwall's inequality. Let us state these two theorems in the versions needed in our proof.

**Theorem 3.1** [7] *If  $A$  and  $B$  are  $\sigma$ -finite measure spaces, and either*

$$\int_A \int_B |f(x, y)| dy dx < \infty \text{ or } \int_B \int_A |f(x, y)| dx dy < \infty,$$

*then  $\int_A \int_B f(x, y) dy dx = \int_B \int_A f(x, y) dx dy$ .*

**Theorem 3.2** [6] *Let  $u, f, g$  and  $h$  be nonnegative continuous functions defined on  $J = [a, b]$ , and  $u(t) \leq f(t) + g(t) \int_a^t h(s)u(s) ds$  for all  $t \in J$ . Then, for any  $t \in J$ ,*

$$u(t) \leq f(t) + g(t) \int_a^t h(s)f(s)e^{\int_s^t h(r)g(r)dr} ds.$$

The following theorem provides the expectation of the exact solution of (1.1) for any time  $t$ .

**Theorem 3.3** [8] *For the SDE with jumps (1.1),*

$$ES(t) - \mu = e^{-\alpha t}(ES_0 - \mu)$$

*so that  $\lim_{t \rightarrow \infty} ES(t) = \mu$ .*

Also, note here that since the exact solution  $S(t)$  will never become negative almost surely,  $|S(t)| = S(t)$  almost surely. Thus,  $E|S(t)| = ES(t) = \mu + e^{-\alpha t}(ES_0 - \mu)$  which is bounded on  $[0, T]$ .

### 3.1 Drift-Implicit Euler Method

We will first deal with the drift-implicit Euler method. Throughout this subsection,  $s_n$  denotes the drift-implicit Euler numerical solution obtained from (2.1). Let us define the continuous-time drift-implicit Euler approximation

$$s(t) = s_0 + \int_0^t \frac{\alpha(\mu - \bar{s}(r))}{1 + \zeta \alpha \Delta} dr + \int_0^t \frac{\sigma \sqrt{|\bar{s}(r)|}}{1 + \zeta \alpha \Delta} dW(r) + \int_0^t \frac{\delta \bar{s}(r)}{1 + \zeta \alpha \Delta} d\tilde{N}(r) \quad (3.1)$$

where  $t \in [0, T]$  and  $\bar{s}(t)$  is the step function  $\bar{s}(t) := s_n$  for  $t \in [t_n, t_{n+1})$ . From (2.1) and (3.1), we see that at each grid point  $t_n$ ,  $s(t_n) = s_n$ . This yields that an error bound for  $s(t)$  will imply an error bound for our numerical solution  $s_n$ . We will aim at the error bound for  $s(t)$  on the whole interval  $[0, T]$ .

Notice that after we fix the interval  $[0, T]$  and the time step size  $\Delta$ ,  $E|s_n|$  is bounded. Hence,  $E|\bar{s}(t)|$  is also bounded on  $[0, T]$ . We also note here that both  $W$  and  $\tilde{N}$  are martingales, and  $s_n$  is independent of  $\Delta W_n$  and  $\Delta \tilde{N}_n$  for each  $n$ .

**Theorem 3.4**  $Es_n - \mu = \left(1 - \frac{\alpha \Delta}{1 + \zeta \alpha \Delta}\right)^n (ES_0 - \mu).$

*Proof* Taking expectation in (2.1) yields that  $Es_{n+1} = Es_n + \frac{\alpha(\mu - Es_n)\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta}$ . Therefore,  $Es_{n+1} - \mu = (Es_n - \mu) - \frac{\alpha(Es_n - \mu)\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta} = (Es_n - \mu) \left(1 - \frac{\alpha\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta}\right)$ . This leads to the desired result.

This theorem guarantees that  $\lim_{n \rightarrow \infty} Es_n = \mu$  when  $1 - \frac{\alpha\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta} > -1$  or equivalently  $(1 - 2\zeta)\alpha\Delta < 2$ . Hence, the discrete approximation of  $S(t)$  still keeps mean reversion when  $\zeta \in [\frac{1}{2}, 1]$  for any size of time step size  $\Delta$  and when  $\zeta \in [0, \frac{1}{2})$  for sufficiently small size of time step size  $\Delta$ , say  $\Delta < \frac{2}{(1 - 2\zeta)\alpha}$ . From Theorem 3.3, we also immediately obtain the following corollary.

**Corollary 3.5**  $|ES(t_n) - Es_n| = \left| e^{-\alpha n\Delta} - \left(1 - \frac{\alpha\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta}\right)^n \right| |ES_0 - \mu|$ .

This corollary gives us the exact weak error at each time step  $t_n$ , especially at the strike time  $T = t_L$ :

$$|ES(T) - Es_L| = \left| e^{-\alpha T} - \left(1 - \frac{\alpha\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta}\right)^{\frac{T}{\Delta}} \right| |ES_0 - \mu|.$$

One can write corollary 3.5 in terms of orders of  $\Delta$  at the strike time  $T = t_L$  as:

$$|ES(T) - Es_L| = \left| \left(\frac{1 - 2\zeta}{2}\right)\alpha\Delta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(\alpha T)^k}{(k-1)!} + O(\Delta^2) \right| |ES_0 - \mu| \quad (3.1)$$

Thus from 3.1, it is clear that the numerical approximation with the drift-implicit Euler method with the degree of implicitness  $\zeta = \frac{1}{2}$  is second order accurate and first order accurate with other value of the degree of implicitness  $\zeta$  in approximation of the weak error at the strike time  $T = t_L$ , respectively.

**Lemma 3.6**  $\left| E \left( s(t) - \frac{\bar{s}(t)}{1 + \zeta\alpha\Delta} \right) \right| \leq D_{\alpha,\Delta,S_0,\mu,\zeta,L}$  for any  $t \in [0, T]$  where

$$D_{\alpha,\Delta,S_0,\mu,\zeta,L} := \begin{cases} \frac{\alpha\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta} \left\{ |ES_0 - \mu| \left( \left| \zeta - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2} \right) + \zeta\mu \right\}, & \text{if } (1 - 2\zeta)\alpha\Delta < 2 \\ \frac{\alpha\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta} \left\{ \left| 1 - \frac{\alpha\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta} \right|^L |ES_0 - \mu| \left( \left| \zeta - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2} \right) + \zeta\mu \right\}, & \text{if } (1 - 2\zeta)\alpha\Delta \geq 2 \end{cases}$$

and  $L$  is the number of time steps.

*Proof* Let  $t \in [0, T]$  and  $n = \lfloor \frac{t}{\Delta} \rfloor$ , the integer part of  $\frac{t}{\Delta}$ , so that  $t \in [t_n, t_{n+1})$ . Since  $s(t_n) = s_n$  at grid point  $t_n$ , we have

$$\begin{aligned} s(t) - \frac{\bar{s}(t)}{1 + \zeta\alpha\Delta} &= s_n + \frac{\alpha(\mu - s_n)}{1 + \zeta\alpha\Delta} (t - t_n) + \frac{\sigma\sqrt{|s_n|}}{1 + \zeta\alpha\Delta} (W(t) - W(t_n)) \\ &\quad + \frac{\delta s_n}{1 + \zeta\alpha\Delta} (\tilde{N}(t) - \tilde{N}(t_n)) - \frac{s_n}{1 + \zeta\alpha\Delta}. \end{aligned}$$

By taking expectation, we acquire

$$\begin{aligned}
 E\left(s(t) - \frac{\bar{s}(t)}{1 + \zeta\alpha\Delta}\right) &= Es_n + \frac{\alpha(\mu - Es_n)}{1 + \zeta\alpha\Delta}(t - t_n) - \frac{Es_n}{1 + \zeta\alpha\Delta} \\
 &= \frac{\alpha(\mu - Es_n)}{1 + \zeta\alpha\Delta}(t - t_n) + \frac{\zeta\alpha\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta}Es_n \\
 &= \frac{\alpha(\mu - Es_n)}{1 + \zeta\alpha\Delta}(t - t_n) + \frac{\zeta\alpha\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta}(Es_n - \mu) + \frac{\zeta\alpha\mu\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta} \\
 &= (Es_n - \mu) \frac{\alpha(\zeta\Delta - (t - t_n))}{1 + \zeta\alpha\Delta} + \frac{\zeta\alpha\mu\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta}.
 \end{aligned}$$

Taking absolute through this equation yields that

$$\left| E\left(s(t) - \frac{\bar{s}(t)}{1 + \zeta\alpha\Delta}\right) \right| \leq |Es_n - \mu| \frac{\alpha|\zeta\Delta - (t - t_n)|}{1 + \zeta\alpha\Delta} + \frac{\zeta\alpha\mu\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta}.$$

We observe that  $|\zeta\Delta - (t - t_n)| \leq (|\zeta - \frac{1}{2}| + \frac{1}{2})\Delta$ . Applying Theorem 3.4, we obtain

$$\left| E\left(s(t) - \frac{\bar{s}(t)}{1 + \zeta\alpha\Delta}\right) \right| \leq \left| 1 - \frac{\alpha\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta} \right|^n |ES_0 - \mu| \frac{(|\zeta - \frac{1}{2}| + \frac{1}{2})\alpha\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta} + \frac{\zeta\alpha\mu\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta}.$$

This leads to our claim.

Remark that in computer simulation,  $\Delta$  is usually so small, thus  $(1 - 2\zeta)\alpha\Delta < 2$  holds; therefore, in this case, we choose

$$D_{\alpha,\Delta,S_0,\mu,\zeta} = \frac{\alpha\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta} \left\{ |ES_0 - \mu| \left( |\zeta - \frac{1}{2}| + \frac{1}{2} \right) + \zeta\mu \right\}$$

whose formula does not depend on the number of time steps  $L$ .

**Theorem 3.7** For any  $t \in [0, T]$ ,

$$|E(S(t) - s(t))| \leq \left( D_{\alpha,\Delta,S_0,\mu,\zeta,L} + \frac{\zeta\alpha\mu\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta} \right) (e^{\alpha T} - 1),$$

where  $D_{\alpha,\Delta,S_0,\mu,\zeta,L}$  is defined as in Lemma 3.6.

*Proof* Let  $t \in [0, T]$ . From (1.1) and (3.1), we have

$$\begin{aligned}
 S(t) - s(t) &= \alpha\mu t - \frac{\alpha\mu t}{1 + \zeta\alpha\Delta} - \alpha \int_0^t \left( S(r^-) - \frac{\bar{s}(r)}{1 + \zeta\alpha\Delta} \right) dr \\
 &\quad + \sigma \int_0^t \left( \sqrt{S(r^-)} - \frac{\sqrt{|\bar{s}(r)|}}{1 + \zeta\alpha\Delta} \right) dW(r) \\
 &\quad + \delta \int_0^t \left( S(r^-) - \frac{\bar{s}(r)}{1 + \zeta\alpha\Delta} \right) d\tilde{N}(r).
 \end{aligned}$$



Note that replacing  $r^-$  by  $r$  will not have any effect on the Lebesgue integrals. Taking expectation yields

$$E(S(t) - s(t)) = \frac{\zeta \alpha \Delta}{1 + \zeta \alpha \Delta} \alpha \mu t - \alpha E \int_0^t \left( S(r) - \frac{\bar{s}(r)}{1 + \zeta \alpha \Delta} \right) dr.$$

Next, for the right hand side of the above equation, we will apply Theorem 3.1 in order to interchange the order between the expectation and the integral. Note that the expectation is the integral with respect to the probability measure  $P$  over the whole space  $\Omega$ , and both  $\Omega$  and  $[0, t]$  are  $\sigma$ -finite measure spaces. Since  $E \left| S(r) - \frac{\bar{s}(r)}{1 + \zeta \alpha \Delta} \right| \leq E|S(r)| + \frac{E|\bar{s}(r)|}{1 + \zeta \alpha \Delta}$  which is bounded on  $[0, T]$ , we have that

$$\int_0^t E \left| S(r) - \frac{\bar{s}(r)}{1 + \zeta \alpha \Delta} \right| dr < \infty.$$

Then, we can interchange the order between the expectation and the integral as desired. After that taking the absolute value and applying Lemma 3.6, we have

$$\begin{aligned} |E(S(t) - s(t))| &= \left| \frac{\zeta \alpha \Delta}{1 + \zeta \alpha \Delta} \alpha \mu t - \alpha \int_0^t E \left( S(r) - \frac{\bar{s}(r)}{1 + \zeta \alpha \Delta} \right) dr \right| \\ &\leq \frac{\zeta \alpha \Delta}{1 + \zeta \alpha \Delta} \alpha \mu t + \alpha \int_0^t \left| E \left( S(r) - \frac{\bar{s}(r)}{1 + \zeta \alpha \Delta} \right) \right| dr \\ &\leq \frac{\zeta \alpha \Delta}{1 + \zeta \alpha \Delta} \alpha \mu t + \alpha \int_0^t |E(S(r) - s(r))| dr \\ &\quad + \alpha \int_0^t \left| E \left( s(r) - \frac{\bar{s}(r)}{1 + \zeta \alpha \Delta} \right) \right| dr \\ &\leq \frac{\zeta \alpha \Delta}{1 + \zeta \alpha \Delta} \alpha \mu t + \alpha \int_0^t |E(S(r) - s(r))| dr + \alpha \int_0^t D_{\alpha, \Delta, S_0, \mu, \zeta, L} dr \\ &= \left( D_{\alpha, \Delta, S_0, \mu, \zeta, L} + \frac{\zeta \alpha \mu \Delta}{1 + \zeta \alpha \Delta} \right) \alpha t + \alpha \int_0^t |E(S(r) - s(r))| dr. \end{aligned}$$

Now, we will apply Theorem 3.2 to this inequality. Observe that we have to check only that  $|E(S(t) - s(t))|$  is continuous. Notice that  $ES(t) = \mu + e^{-\alpha t}(ES_0 - \mu)$  and the absolute value function are continuous. We claim that  $Es(t)$  is also continuous; hence, we can acquire the desired condition for applying Theorem 3.2. To show our claim, we first note that for every measurable function  $f$ ,  $\int_0^t f(r) dr$  is continuous in  $t$ . From (3.1), we have that

$$Es(t) = Es_0 + \alpha E \int_0^t \frac{\mu - \bar{s}(r)}{1 + \zeta \alpha \Delta} dr = Es_0 + \frac{\alpha \mu t}{1 + \zeta \alpha \Delta} - \frac{\alpha}{1 + \zeta \alpha \Delta} E \int_0^t \bar{s}(r) dr.$$

Since  $E|\bar{s}(t)|$  is bounded, again, we can interchange the order between the expectation and the integral and finally acquire

$$Es(t) = Es_0 + \frac{\alpha \mu t}{1 + \zeta \alpha \Delta} - \frac{\alpha}{1 + \zeta \alpha \Delta} \int_0^t E \bar{s}(r) dr$$

which is continuous in  $t$ . Therefore, we can now apply Theorem 3.2 to the above inequality that yields

$$\begin{aligned}
 |E(S(t) - s(t))| &\leq \left( D_{\alpha, \Delta, S_0, \mu, \zeta, L} + \frac{\zeta \alpha \mu \Delta}{1 + \zeta \alpha \Delta} \right) \alpha t \\
 &\quad + \alpha \int_0^t \left( D_{\alpha, \Delta, S_0, \mu, \zeta, L} + \frac{\zeta \alpha \mu \Delta}{1 + \zeta \alpha \Delta} \right) \alpha r e^{\int_r^t \alpha dv} dr \\
 &= \left( D_{\alpha, \Delta, S_0, \mu, \zeta, L} + \frac{\zeta \alpha \mu \Delta}{1 + \zeta \alpha \Delta} \right) \left( \alpha t + \alpha^2 \int_0^t r e^{\alpha t - \alpha r} dr \right) \\
 &= \left( D_{\alpha, \Delta, S_0, \mu, \zeta, L} + \frac{\zeta \alpha \mu \Delta}{1 + \zeta \alpha \Delta} \right) \left( \alpha t + \alpha^2 \left[ \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2} - \frac{t}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right] \right) \\
 &= \left( D_{\alpha, \Delta, S_0, \mu, \zeta, L} + \frac{\zeta \alpha \mu \Delta}{1 + \zeta \alpha \Delta} \right) (e^{\alpha t} - 1) \\
 &\leq \left( D_{\alpha, \Delta, S_0, \mu, \zeta, L} + \frac{\zeta \alpha \mu \Delta}{1 + \zeta \alpha \Delta} \right) (e^{\alpha T} - 1)
 \end{aligned}$$

which completes the proof.

From Lemma 3.6 and Theorem 3.7, we see that if  $(1 - 2\zeta)\alpha\Delta < 2$ ,

$$\begin{aligned}
 |E(S(t) - s(t))| &\leq \frac{\alpha\Delta}{1 + \zeta\alpha\Delta} \left\{ |ES_0 - \mu| \left( \left| \zeta - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2} \right) + 2\zeta\mu \right\} (e^{\alpha T} - 1) \\
 &\leq \alpha\Delta \left\{ |ES_0 - \mu| \left( \left| \zeta - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2} \right) + 2\zeta\mu \right\} (e^{\alpha T} - 1).
 \end{aligned}$$

Hence, the order of weak convergence for the drift-implicit Euler numerical solution for the SDE with jumps (1.1) when time step size  $\Delta$  is sufficiently small is 1.0.

Recall that  $s_n$  and  $s(t)$  agree on every grid point and Corollary 3.5 gives a weak error at each grid point  $t_n$ . Because the number of time steps is finite,

$$\max_n \left| e^{-\alpha n \Delta} - \left( 1 - \frac{\alpha \Delta}{1 + \zeta \alpha \Delta} \right)^n \right| |ES_0 - \mu|$$

is an error bound for our numerical solution  $s_n$  for every grid point. This differs from the error bound in Theorem 3.7 which provides the error for the continuous-time drift-implicit Euler approximation  $s(t)$  for the whole interval  $[0, T]$ . Another good aspect of the error bound formula in Theorem 3.7 is that it has a simple form which is easy to be calculated and let us know the order of weak convergence for this method.

### 3.2 Compensated Split-Step Backward Euler Method

Now, we focus on the compensated split-step backward Euler method. The framework in this subsection is similar to that in the previous one thus some remarks and details of the proof will be omitted. Throughout this subsection,  $s_n$  denotes the compensated split-step backward Euler numerical solution of (1.1) which is obtained from

(2.3). We now define the continuous-time compensated split-step backward Euler approximation by

$$s(t) = s_0 + \alpha \int_0^t (\mu - \bar{s}(r)) dr + \sigma \int_0^t \sqrt{|\bar{s}(r)|} dW(r) + \delta \int_0^t \bar{s}(r) d\tilde{N}(r), \quad (3.2)$$

where  $t \in [0, T]$  and  $\bar{s}(t)$  is the step function  $\bar{s}(t) := s_{n+1}^* = \frac{s_n + \alpha\mu\Delta}{1 + \alpha\Delta}$  for  $t \in [t_n, t_{n+1})$ . From (2.3) and (3.2), we know that  $s(t_n) = s_n$  at every grid point  $t_n$ . Note that after we fix the interval  $[0, T]$  and the time step size  $\Delta$ ,  $E|s_n|$  is bounded. Therefore,  $E|\bar{s}(t)|$  is also bounded on  $[0, T]$ . Like the drift-implicit Euler method, we will seek the error bound for  $s(t)$  in order to obtain an error bound for our numerical solution  $s_n$ .

**Theorem 3.8**  $Es_n - \mu = \left( \frac{1}{1 + \alpha\Delta} \right)^n (ES_0 - \mu)$ .

*Proof* Taking expectation in (2.3) yields  $Es_{n+1} = \frac{Es_n + \alpha\mu\Delta}{1 + \alpha\Delta}$ . Then, we have  $Es_{n+1} - \mu = \frac{Es_n + \alpha\mu\Delta - \mu - \alpha\mu\Delta}{1 + \alpha\Delta} = \frac{1}{1 + \alpha\Delta} (Es_n - \mu)$ , which leads to the desired result.

This theorem guarantees that  $\lim_{n \rightarrow \infty} Es_n = \mu$  for any size of time step size  $\Delta$ . Thus, the discrete approximation  $s_n$  still keeps mean reversion for any size of time step size  $\Delta$ . This makes the compensated split-step backward Euler method seem better than the Euler-Maruyama method which is the drift-implicit Euler method with the degree of implicitness  $\zeta = 0$  whose expectation of numerical solution might diverge if the step size is not small enough.

**Corollary 3.9**  $|ES(t_n) - Es_n| = \left| e^{-\alpha n\Delta} - \left( \frac{1}{1 + \alpha\Delta} \right)^n \right| |ES_0 - \mu|$ .

Likewise, we can write corollary 3.5 in terms of orders of  $\Delta$  at the strike time  $T = t_L$  as:

$$|ES(t_n) - Es_n| = \left| -\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Delta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(\alpha T)^k}{(k-1)!} + O(\Delta^2) \right| |ES_0 - \mu| \quad (3.2)$$

This indicates that the compensated split-step backward Euler method is first order accurate in approximating the weak error at the strike time  $T = t_L$ .

**Lemma 3.10**  $|E(s(t) - \bar{s}(t))| \leq \frac{\alpha\Delta}{1 + \alpha\Delta} |ES_0 - \mu|$  for any  $t \in [0, T]$ .

*Proof* Let  $t \in [0, T]$  and  $n = \lfloor \frac{t}{\Delta} \rfloor$ , the integer part of  $\frac{t}{\Delta}$ , so that  $t \in [t_n, t_{n+1})$ . From (2.3) and (3.2), we acquire that

$$\begin{aligned} s(t) - \bar{s}(t) &= s_n + \alpha(\mu - s_{n+1}^*)(t - t_n) + \sigma\sqrt{|s_{n+1}^*|} (W(t) - W(t_n)) \\ &\quad + \delta s_{n+1}^* (\tilde{N}(t) - \tilde{N}(t_n)) - s_{n+1}^*. \end{aligned}$$

Taking expectation through this equation, we have

$$\begin{aligned} E(s(t) - \bar{s}(t)) &= Es_n - \frac{Es_n + \alpha\mu\Delta}{1 + \alpha\Delta} + \alpha \left( \mu - \frac{s_n + \alpha\mu\Delta}{1 + \alpha\Delta} \right) (t - t_n) \\ &= \frac{\alpha\Delta}{1 + \alpha\Delta} (Es_n - \mu) + \frac{\alpha(t - t_n)}{1 + \alpha\Delta} (\mu - Es_n) \\ &= \frac{\alpha(\Delta - (t - t_n))}{1 + \alpha\Delta} (Es_n - \mu). \end{aligned}$$

Taking absolution on both sides of this equation, noting that  $|\Delta - (t - t_n)| \leq \Delta$  and applying Theorem 3.8, we obtain

$$\begin{aligned} |E(s(t) - \bar{s}(t))| &\leq \frac{\alpha\Delta}{1 + \alpha\Delta} \left( \frac{1}{1 + \alpha\Delta} \right)^n |ES_0 - \mu| \\ &\leq \frac{\alpha\Delta}{1 + \alpha\Delta} |ES_0 - \mu| \end{aligned}$$

which completes the proof.

**Theorem 3.11** For any  $t \in [0, T]$ ,

$$|E(S(t) - s(t))| \leq \frac{\alpha\Delta}{1 + \alpha\Delta} |ES_0 - \mu| (e^{\alpha T} - 1).$$

*Proof* Let  $t \in [0, T]$ . From (1.1) and (3.2), we have

$$\begin{aligned} S(t) - s(t) &= -\alpha \int_0^t (S(r^-) - \bar{s}(r)) dr + \sigma \int_0^t \left( \sqrt{S(r^-)} - \sqrt{|\bar{s}(r)|} \right) dW(r) \\ &\quad + \delta \int_0^t (S(r^-) - \bar{s}(r)) d\tilde{N}(r). \end{aligned}$$

Taking expectation through this equation yields that

$$E(S(t) - s(t)) = -\alpha E \int_0^t (S(r) - \bar{s}(r)) dr.$$

With the same technique in the proof of Theorem 3.7, we can interchange the order between the expectation and the integral. Taking the absolution and applying Lemma 3.10, we acquire

$$\begin{aligned} |E(S(t) - s(t))| &= \alpha \left| \int_0^t E(S(r) - \bar{s}(r)) dr \right| \\ &\leq \alpha \int_0^t |E(S(r) - \bar{s}(r))| dr \\ &\leq \alpha \int_0^t |E(S(r) - s(r))| dr + \alpha \int_0^t |E(s(r) - \bar{s}(r))| dr \\ &\leq \alpha \int_0^t |E(S(r) - s(r))| dr + \alpha \int_0^t \frac{\alpha\Delta}{1 + \alpha\Delta} |ES_0 - \mu| dr \\ &= \alpha t \frac{\alpha\Delta}{1 + \alpha\Delta} |ES_0 - \mu| + \alpha \int_0^t |E(S(r) - s(r))| dr. \end{aligned}$$

Like the proof of Theorem 3.7, we can apply Theorem 3.2 to this inequality and finally obtain

$$\begin{aligned}
 |E(S(t) - s(t))| &\leq \alpha t \frac{\alpha \Delta}{1 + \alpha \Delta} |ES_0 - \mu| + \alpha \int_0^t \alpha r \frac{\alpha \Delta}{1 + \alpha \Delta} |ES_0 - \mu| e^{\int_r^t \alpha dv} dr \\
 &= \frac{\alpha \Delta}{1 + \alpha \Delta} |ES_0 - \mu| \left( \alpha t + \alpha^2 \int_0^t r e^{\alpha t - \alpha r} dr \right) \\
 &= \frac{\alpha \Delta}{1 + \alpha \Delta} |ES_0 - \mu| \left( \alpha t + \alpha^2 \left[ \frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2} - \frac{t}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right] \right) \\
 &= \frac{\alpha \Delta}{1 + \alpha \Delta} |ES_0 - \mu| (e^{\alpha t} - 1) \\
 &\leq \frac{\alpha \Delta}{1 + \alpha \Delta} |ES_0 - \mu| (e^{\alpha T} - 1)
 \end{aligned}$$

which completes the proof.

From this theorem, since  $\frac{\alpha \Delta}{1 + \alpha \Delta} \leq \alpha \Delta$ , we also have that

$$|E(S(t) - s(t))| \leq \alpha \Delta |ES_0 - \mu| (e^{\alpha T} - 1).$$

Consequently, the order of weak convergence for the compensated split-step backward Euler numerical solution for the SDE with jumps (1.1) is 1.0.

#### 4 Computational details

We perform numerical experiments using both schemes with parameters  $\alpha = 4, \mu = 0.5, \sigma = 0.3, \lambda = 6, \delta = 0.1, S_0 = 1$ , and  $T = 0.5$  for a range of time step sizes  $\Delta$ . For the drift-implicit Euler method, we consider 7 different values of degree of implicitness  $\zeta : 0, 0.25, 0.4, 0.5, 0.6, 0.75$ , and 1. Specifically, for each method, we consider 5 different sizes of  $\Delta : 2^{-9}, 2^{-8}, 2^{-7}, 2^{-6}$  and  $2^{-5}$ . For each time step size  $\Delta$ , we generate 5,000,000 sample paths. Then, we measure the error in weak sense, which is  $|ES(T) - Es_L|$ , and plot these errors with corresponding sizes of time step size  $\Delta$ . Here,  $ES(T)$  can be calculated from Theorem 3.3, and we find  $Es_L$  by averaging  $s_L$  of all 5,000,000 paths.

#### 5 Numerical results and discussions

First, we show, for both methods, computable weak error bounds from Theorem 3.7 and Theorem 3.11 as well as weak errors at the strike time  $T$  from Corollary 3.5 and Corollary 3.9. The error bounds are computed using the parameters specified in section 4.

We observe from Table 5.2 that the errors at the strike time for drift-implicit Euler method with  $\zeta = 0$ , which actually is the Euler-Maruyama method (2.2), drift-implicit Euler method with  $\zeta = 1$ , and compensated split-step backward Euler method are closed. In particular, from the formulae of the weak errors from Corollary 3.5 and

**Table 5.1** Weak error bounds for drift-implicit Euler and compensated split-step backward Euler methods obtained from Theorem 3.7 and 3.11, respectively, when  $\alpha = 4, \mu = 0.5, \sigma = 0.3, \lambda = 6, \delta = 0.1, S_0 = 1$ , and  $T = 0.5$

Method	$\Delta = 2^{-9}$	$\Delta = 2^{-8}$	$\Delta = 2^{-7}$	$\Delta = 2^{-6}$	$\Delta = 2^{-5}$
DIE ( $\zeta = 0$ )	0.024957250	0.049914501	0.099829002	0.199658003	0.399316006
DIE ( $\zeta = 0.25$ )	0.031135751	0.062150351	0.123818917	0.245732927	0.484019401
DIE ( $\zeta = 0.4$ )	0.034831303	0.069446262	0.138035163	0.272703614	0.532421342
DIE ( $\zeta = 0.5$ )	0.037290211	0.074291350	0.147439756	0.290411641	0.563740244
DIE ( $\zeta = 0.6$ )	0.044713456	0.089011617	0.176384984	0.346394608	0.668622150
DIE ( $\zeta = 0.75$ )	0.055826704	0.111006766	0.219471393	0.429115708	0.821450070
DIE ( $\zeta = 1$ )	0.074291350	0.147439756	0.290411641	0.563740244	1.064842683
CSSBE	0.024763783	0.049146585	0.096803880	0.187913415	0.354947561

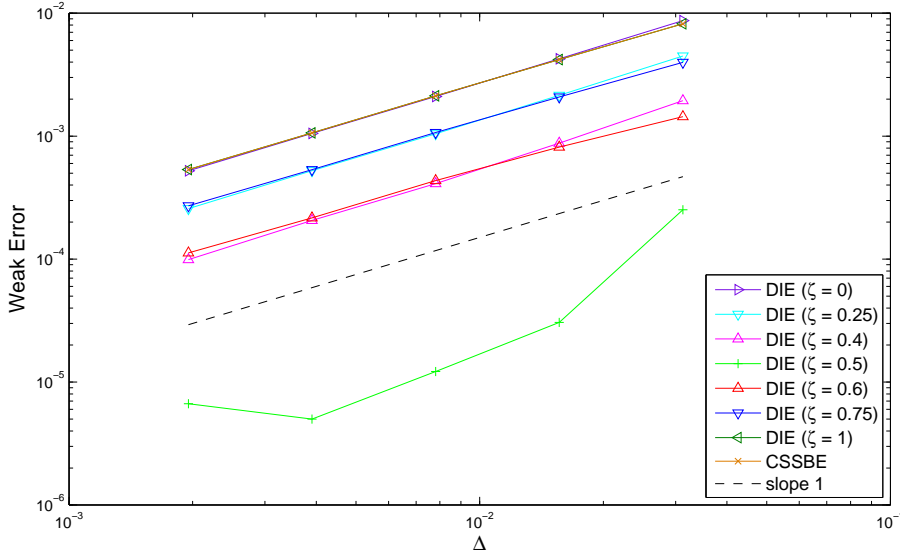
**Table 5.2** Weak errors at the strike time  $T$  for drift-implicit Euler and compensated split-step backward Euler methods acquired from Corollary 3.5 and 3.9, respectively, when  $\alpha = 4, \mu = 0.5, \sigma = 0.3, \lambda = 6, \delta = 0.1, S_0 = 1$ , and  $T = 0.5$

Method	$\Delta = 2^{-9}$	$\Delta = 2^{-8}$	$\Delta = 2^{-7}$	$\Delta = 2^{-6}$	$\Delta = 2^{-5}$
DIE ( $\zeta = 0$ )	0.000529342	0.001060060	0.002125625	0.004273248	0.008634098
DIE ( $\zeta = 0.25$ )	0.000265016	0.000531415	0.001068386	0.002159193	0.004409718
DIE ( $\zeta = 0.4$ )	0.000106420	0.000214219	0.000433970	0.000890176	0.001870210
DIE ( $\zeta = 0.5$ )	0.000000688	0.000002753	0.000011014	0.000044066	0.000176402
DIE ( $\zeta = 0.6$ )	0.000105043	0.000208712	0.000411941	0.000802044	0.001517409
DIE ( $\zeta = 0.75$ )	0.000263639	0.000525908	0.001046357	0.002071067	0.004057002
DIE ( $\zeta = 1$ )	0.000527965	0.001054554	0.002103602	0.004185203	0.008282685
CSSBE	0.000527965	0.001054554	0.002103602	0.004185203	0.008282685

3.9, we see that drift-implicit Euler method with  $\zeta = 1$  and compensated split-step backward Euler method have the same theoretical weak error. Moreover, the errors for drift-implicit Euler methods with  $\zeta = 0.25$  and  $\zeta = 0.75$  are closed together and less than those for drift-implicit Euler methods with  $\zeta = 0$  and  $\zeta = 1$ . This behavior applies to the pair of drift-implicit Euler methods with  $\zeta = 0.4$  and  $\zeta = 0.6$  as well. Such behavior implies that a pair of drift-implicit Euler methods with  $\zeta = a$  and  $\zeta = 1 - a$  have weak errors in the same neighborhood, and the drift-implicit Euler method attains the lowest weak error when  $\zeta$  is about 0.5 which conforms to the higher accuracy order, see equation 3.1.

A graph from the numerical experiments with the parameters specified in section 4 is also presented in Fig. 5.1 In the figure, the x-axis represents the size of time step size  $\Delta$  and the y-axis represents the weak error  $|ES(T) - E_{SL}|$ . The graph is plotted in log-log scale fashion thus the slope of each line will represent the order of convergence in weak sense. The reference line with slope of one is plotted in dash. From the figure, the results from the numerical experiments agree well with the trend from formulae of the weak errors from Corollary 3.5 and 3.9.

In Fig. 5.2, graphs that show weak error bounds coming from Theorem 3.7 and Theorem 3.11 and weak errors at time  $T$  obtained from Corollary 3.5 and Corollary 3.9 together with the weak error plots from corresponding simulations are illustrated. Here, we can obtain each point of weak error bounds from Table 5.1, weak errors



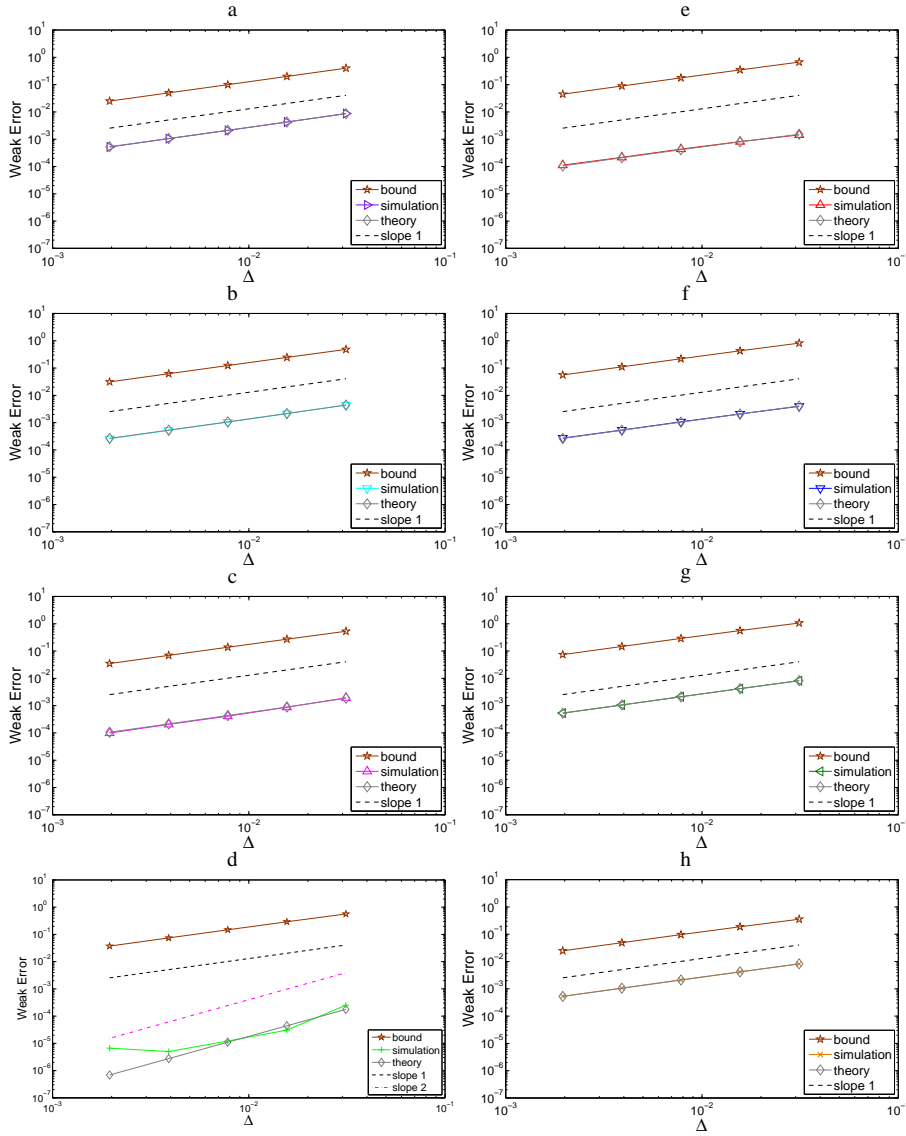
**Fig. 5.1** Weak error plots from the simulation when  $\alpha = 4, \mu = 0.5, \sigma = 0.3, \lambda = 6, \delta = 0.1, S_0 = 1$ , and  $T = 0.5$

from the simulation from Fig. 5.1, and theoretical weak errors from Table 5.2. The reference lines with slope of one are also plotted in dash and slope of two is plotted in dash dot. Notice that the error bounds for drift-implicit Euler and compensated split-step backward Euler methods do not depend on parameters  $\sigma, \lambda, \delta$ . This is because these parameters relate only to the Wiener process and the compensated Poisson process which are martingales.

Comparing between the errors from numerical experiments and the theoretical weak errors which we obtain from Corollary 3.5 and 3.9 for drift-implicit Euler and compensated split-step backward Euler methods, we see from Fig. 5.2 that these two types of error are very closed together. This means that our computer simulation agrees with the theory. The numerical approximation with drift-implicit Euler with the degree of implicitness  $\zeta = \frac{1}{2}$  is indeed able to attain the second order accuracy in predicting weak error as predict by equation 3.1. In the current work, however, the provided error bounds are in first order accuracy for both methods.

## 6 Conclusions

In this work, we have provided rigorous numerical error bounds in weak sense for drift-implicit Euler and compensated split-step backward Euler methods for the mean-reverting square root process with jumps. The numerical investigations have also been done with both methods. It is also found numerically that these methods tend to have order of weak convergence equal to the theoretical prediction.



**Fig. 5.2** Error bounds, weak error plots from the numerical experiments, and theoretical errors for drift-implicit Euler method with  $\zeta = 0$  (a),  $\zeta = 0.25$  (b),  $\zeta = 0.4$  (c),  $\zeta = 0.5$  (d),  $\zeta = 0.6$  (e),  $\zeta = 0.75$  (f),  $\zeta = 1$  (g) and compensated split-step backward Euler method (h) when  $\alpha = 4, \mu = 0.5, \sigma = 0.3, \lambda = 6, \delta = 0.1, S_0 = 1$ , and  $T = 0.5$

**Acknowledgements** The first author would like to acknowledge the supporting grant from the Thailand Research Fund under the contract number TRG5180007. The second author is also grateful to the Chulalongkorn University Graduate Scholarship to Commemorate the 72<sup>nd</sup> Anniversary of His Majesty King Bhumibol Adulyadej for granting me financial support throughout my graduate study at Chulalongkorn University.



## References

1. Bruti-Liberati, N., Platen, E., Approximation of jump diffusions in finance and economics, University of Technology Sydney, Technical report, Quantitative Finance Research Papers 176 (2006)
2. Cox, J.C., Ingersoll Jr., J.E., Ross, S.A., A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, **53**, 385-407 (1985)
3. Heston, S.I., A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, **6**, 327-343 (1993)
4. Higham, D.J., Kloeden, P.E., Numerical methods for nonlinear stochastic differential equations with jumps, *Numerische Mathematik*, **101**, 101-119 (2005)
5. Higham, D.J., Mao, X., Convergence of Monte Carlo simulations involving the mean-reverting square root process, *Journal of Computational Finance*, **8**(3), 35-61 (2005)
6. Pachpatte, B.G., *Inequalities for Differential and Integral Equations*, Academic Press, London (1998)
7. Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill Book Company, New York (1987)
8. Wu, F., Mao, X., Chen, K., Strong convergence of Monte Carlo simulations of the mean-reverting square root process with jump, *Applied Mathematics and Computation*, **206**, 494-505 (2008)

# Reduced-order modeling of forced convective heat transfer with time-dependent boundary conditions

**Sirod Sirisup**

Large-Scale Simulation research Laboratory, National Electronics and Computer Technology Center

112 Phahon Yothin Rd., Klong 1, Klong Luang, Pathumthani 12120, Thailand

E-mail: sirod.sirisup@nectec.or.th, Tel: +66-2-564-6900 ext 2276

## ABSTRACT

In this study, a new penalty method to derive reduced-order Galerkin models for forced convective heat transfer with time-dependent boundary conditions. We illustrate this new approach by using direct numerical simulation (DNS) data of two-dimensional unsteady forced convective heat transfer over a series of heat blocks.

**Keywords:** Reduced-order modeling, forced convection, proper orthogonal decomposition

## INTRODUCTION

Convective heat transfer is a scientific field of major interest to engineering and scientific researchers, as well as designers, developers, and manufacturers. Its applications run from tiny scale problems such as microchannel flows, electronics and semiconductors cooling, bio-heat transfer and buildings cooling to planetary scale ones such as upwelling currents in the oceans and heat transport in stellar atmospheres. Ability to predict the convective heat transfer behavior correctly will thus bring many new efficient innovations that will directly affect our daily life especially in energy consumption issues.

Due to simulation-based study's advantages over experimental-based study, it has now been widely used in many fields of research including convective heat transfer in order to elucidate and predict important characteristics of heat transfer behavior. However, there are two main limitations of numerical simulation. First, even though simulation can provide detailed data for interested variables (temperature, velocity or pressure etc.), such data may not readily imbue the investigator with an increased level of understanding the physics essential to a given phenomenon. A careful analysis of the data must be done in order to develop simpler models to predict important characteristics of system behavior. This process can be hindered by the gigantic size of computed data sets. Second, without the dedication of massive resources, numerical simulation of large or non-linear systems remains far too computationally expensive, if not possible.

Both limitations of numerical simulation suggest that a lower-order or low-dimensional models for a given phenomenon must be constructed to serve as the basis for additional analysis. The intent in constructing such low-dimensional models is twofold: to provide quantitatively accurate descriptions of the dynamics of systems at a much lower computational cost than the original numerical model and to provide a method by which system dynamics can be readily interpreted.

Proper orthogonal decomposition (POD) is a stochastic tool which is a popular order reduction technique used to relieve the computational expense required for simulation of very high-dimensional systems, for more detail see [1]. Recently, low-dimensional models has been constructed and widely applied to both simulation and control of fluid flow problems, see [2-4] for example. There are a number of studies in reduced order model to heat transfer problems, see [5] for heat conduction problems, [6] for forced convection problems and [7-8] for the natural convection problems .

In this paper, we will construct a reduced-order model based on the proper orthogonal decomposition (POD) technique to provide accurate descriptions of the dynamics for forced convective heat transfers. This focus of the current study is on the forced convection case with time dependent boundary conditions. Apart from the fundamental study of reduced-order model, this situation is suitable for developing a boundary feedback control in practical applications as well. The reduced-order model is developed through a penalty function Galerkin method that provides a treatment to time varying boundary conditions, see [9].

The implementation of complicated boundary conditions in Galerkin systems has historically been a matter of some controversy; see [10] and the correspondences there after. An in-depth study of boundary conditions for Galerkin POD systems was performed in [11]. Herein we introduce a penalty method, similar in spirit with the "tau" method in spectral methods but more flexible in many aspects as we will see in this study.

### POD-penalty systems for forced convection

In order to employ time-dependent boundary conditions in low-dimensional models, we formulate a new method to construct Galerkin systems. In particular, we incorporate the boundary conditions directly into the Navier-Stokes equations as constraints, enforced via suitable penalty parameters.

#### *Proper orthogonal decomposition*

The Proper Orthogonal Decomposition (POD) procedure extracts empirical orthogonal features from any ensemble of data. This linear procedure produces useful reduced basis set which is optimal in  $L^2$  sense. In the POD framework for continuous problems, [1], one can represent field  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  as follows:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t) \phi_j(\mathbf{x}),$$

$\phi_j(\mathbf{x})$  is the set of POD basis determined by the eigenvalue problem:

$$\int_A C(t, t') a_j(t') dt' = \hat{\lambda}_j a_j(t), \quad t \in A,$$

where  $a_j(t)$  is the set of temporal modes,  $A$  is a specified time interval and  $C(t, t')$  is the correlation function defined by:

$$C(t, t') = \int_{\Omega} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(t', \mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

The POD basis is thus defined by:

$$\phi_j(\mathbf{x}) = \int_A a_j(t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dt, \quad \forall j.$$

The non-negative definiteness of the correlation function allows us to order the eigenvalues and the corresponding POD modes by  $\hat{\lambda}_k \geq \hat{\lambda}_{k+1}$ . We then can truncate the summation with the information retained from the eigenvalues. This framework can be applied to the scalar field such as the temperature field as well. The difference is that the resulting POD mode will also be in scalar quantity as well.

#### *Governing equations*

The non-dimensional unsteady, incompressible, momentum and energy equations without external forcing or buoyancy effects are:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\
\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} &= -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} \\
\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T &= \frac{1}{RePr} \nabla^2 T
\end{aligned}$$

Where  $Re$  is the Reynolds number and  $Pr$  is the Prandtl number, respectively.

To derive the reduced-order model we assume that the velocity and temperature fields can be written as:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{U}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\
T(\mathbf{x}, t) &= T_0(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x}, t),
\end{aligned}$$

where  $\mathbf{U}_0$  is the time-averaged field.  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  and  $T(\mathbf{x}, t)$  are expressed in the linear combination of POD modes as follows:

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \phi_j^u(x, y) a_j(t) \\
v(x, y, t) &= \phi_j^v(x, y) a_j(t) \\
T(x, y, t) &= \phi_j^T(x, y) b_j(t)
\end{aligned}$$

where  $a_j$  and  $b_j$  are the unknown coefficients and  $\phi = (\phi^u, \phi^v)$ ,  $\phi^T$  defines the vector of the POD modal basis of velocity and temperature components, respectively.

Without loss of the generalization, we assume that the boundary  $\Gamma$  with time-dependent boundary condition is located in  $x$ -direction. The Galerkin projection of the governing equations with the penalty terms included onto the  $j^{\text{th}}$  POD mode of the velocity and temperature field are:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \phi_j \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \nabla p - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V} \right) d\mathbf{x} &= 0, \\
\int_{\Omega} \phi_j \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T - \frac{1}{RePr} \nabla^2 T + \tau_1 \Upsilon(\mathbf{x})(T - T_{\Gamma}) \right) d\mathbf{x} &= 0,
\end{aligned}$$

where  $\tau_1$  is the penalty parameter and  $T_{\Gamma}$  is the imposed time dependent boundary condition at the boundary  $\Gamma$ . The function  $\Upsilon(\mathbf{x})$  is vanished entirely in the computational domain except at the boundary  $\Gamma$  where the function takes value of unity.

$$\int_{\Omega} \phi_j \cdot \nabla p d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \phi_j p d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \phi_j \cdot \mathbf{n} p ds.$$

For the above equation, we can impose the divergence-free constraints in order to eliminate the first contribution of the pressure term and, in some case, with the aid from the boundary condition of the velocity, the second contribution of the pressure term is eliminated as well.

We then arrive at the dynamical system that describes the reduced order models for the forced convective heat transfer with time dependent boundary.

$$\begin{aligned}
\frac{da_j}{dt} &= f_j(\mathbf{a}) \\
\frac{db_j}{dt} &= g_j(\mathbf{b}) - G_j(\mathbf{b})
\end{aligned}$$

with  $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_M)$  and  $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \dots, b_M)$  where  $M$  is the number of the POD basis retained in the model.  $f(\mathbf{a})$  and  $g(\mathbf{b})$  include the convective and dissipative terms in the momentum and energy conservation laws, respectively. Specifically,  $f(\mathbf{a})$  is in the form of

$$\begin{aligned}
f_j(\mathbf{a}) = & - \left( \int_{\Omega} \phi_j \cdot ((\phi_i \cdot \nabla) \phi_k) d\mathbf{x} \right) a_i a_k \\
& - \left( -\frac{1}{Re} \int_{\Omega} \phi_j \cdot \nabla^2 \phi_i d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \phi_j \cdot ((\phi_i \cdot \nabla) \mathbf{U}_0) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \phi_j \cdot ((\mathbf{U}_0 \cdot \nabla) \phi_i) d\mathbf{x} \right) a_i \\
& - \left( \int_{\Omega} \phi_j \cdot ((\mathbf{U}_0 \cdot \nabla) \mathbf{U}_0) d\mathbf{x} - \frac{1}{Re} \int_{\Omega} \phi_j \cdot \nabla^2 \mathbf{U}_0 d\mathbf{x} \right).
\end{aligned}$$

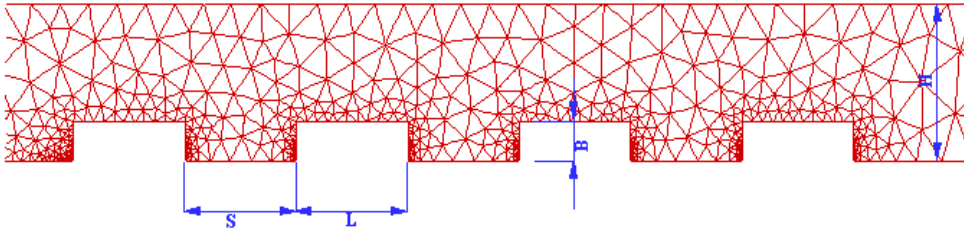
Likewise,  $\mathbf{g}(\mathbf{b})$  composes of the similar entries except the first term will be altered since it consists of the velocity component as well. The major interest is rather in  $G_j(\mathbf{b})$ . The full form of can be written as follows:

$$G_j(\mathbf{b}) = \tau_1 \left( b_i \int_{\Gamma} \phi_i^T(x|_{\Gamma}) \cdot \phi_j^T(x|_{\Gamma}) dx - \int_{\Gamma} (T_{\Gamma} - T_0(x|_{\Gamma})) \cdot \phi_j^T(x|_{\Gamma}) dx \right),$$

Since the term  $T_{\Gamma}$  is time-dependent, we now obtain a non-autonomous system. The issue of the sensitivity of the penalty parameter of this system must be further investigated in order to compare and elucidate issues in the complicated boundary condition [10].

### Computational details

Figure 1 shows the computational domain of a demonstration study. The length of the computational domain is 120B with the height (H) of 4B. The width of each heated block is  $L = 3B$  and two blocks are placed with a distance  $S=3B$  apart. Uniform steady boundary conditions are imposed at the inflow boundary. On outflow boundary, the zero Neumann condition on velocity is imposed while No-slip condition is imposed to the rest boundaries. Boundary conditions for the temperature field are specified as follows: the temperature is kept fixed at unity on the heated blocks and the zero Neumann condition on temperature is prescribed on all other boundaries. In this simulation, we set  $B = 1$ . The time dependent boundary condition for temperature is prescribed in the horizontal region between the first and the second blocks. Converged solutions were obtained by using the spectral/hp element solver, [12] with additional module of forced convection. The spectral/hp element method allows us to solve partial differential equations in complex geometries with the exponential convergence can still be obtained for  $C^0$  solutions.



**Figure 1.** Part of the computation domain.

Full details and discussion of the results will be presented in the conference and in other upcoming works

### LITERATURE CITED

1. P. Holmes, J.L. Lumley and G. Berkooz, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge University Press, Great Britain (1996).
2. Carlson, H., Glauser, M., Higuchi, H., and Young, M., "POD Based Experimental Flow Control on a NACA-4412 Airfoil," AIAA Paper 2004-0575, Jan. 2004.

3. Cohen, K., Siegal, S., McLaughlin, T., and Myatt, J., "Proper Orthogonal Decomposition Modeling of a Controlled Ginzburg-Landau CylinderWake Model," AIAA Paper 2003-2405, Jan. 2003.
4. X. Ma and G.E. Karniadakis, A low-dimensional model for simulating three-dimensional cylinder flows,
5. H.M. Park and D.H. Cho, The use of the Karhunen–Loeve decomposition for the modeling of distributed parameter systems, *Chem. Eng. Sci.* 51 (1996) (1), pp. 81–98.
6. J. Rambo, Y. Joshi, Reduced-order modeling of turbulent forced convection with parametric conditions, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50,(3-4), (2007), pp 539-551.
7. H.M. Park and W.J. Li, Boundary optimal control of natural convection by means of mode reduction, *J. Dyn. Syst. Meas. Control* 124 (2002), pp. 47–54.
8. I.H. Tarman and L. Sirovich, Extensions of Karhunen–Loeve based approximations of complicated phenomena, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 155 (1998), pp. 359–368.
9. S. Sirisup, G.E. Karniadakis, Stability and accuracy of periodic flow solutions obtained by a POD-penalty method, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 202 (3-4) ( 2005), pp 218-237
10. X. Zhou and L. Sirovich, Coherence and chaos in a model of turbulent boundary layer, *Phys. Fluid A* 4 (1992) (12), pp. 2855–2874.
11. J.F. Gibson, *Dynamical Systems Models of Wall-Bounded, Shear-Flow Turbulence*, PhD thesis, Cornell University, 2002.

## ACKNOWLEDGMENTS

The author acknowledges National Electronics and Computer Technology Center, National Science and Technology Development Agency for computing services that have contributed to the research results. Financial support by Thailand research fund (TRF) is also gratefully acknowledged.