



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การพัฒนาการวิเคราะห์จุดตรึงในปริภูมิอิง
ระยะทางประเภทบีและการประยุกต์ไปสู่ปัญหามากมายใน
การวิเคราะห์ไม่เชิงเส้น

โดย วุฒิพล สิ้นฐานาวรัตน์

เมษายน 2559

สัญญาเลขที่ TRG5780013

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การพัฒนาการวิเคราะห์จุดตรึงในปริภูมิอิง
ระยะทางประเภทบีและการประยุกต์ไปสู่ปัญหามากมายใน
การวิเคราะห์ไม่เชิงเส้น

ผู้วิจัย วุฒิพล สินธุนาวรัตน์
สังกัด มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัยและ
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย
สกว.และต้นสังกัดไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

สารบัญ

Abstract (บทคัดย่อ).....	2
Executive Summary	3
เนื้อหาทางวิจัย	13
Output จากโครงการ.....	15
ภาคผนวก 1	20
ภาคผนวก 2	21
ภาคผนวก 3	22
ภาคผนวก 4	27
ภาคผนวก 5	30

Abstract (บทคัดย่อ)

Project Code : TRG5780013

(รหัสโครงการ)

Project Title : Development of fixed point analysis in b-metric spaces

and its application to various problems in nonlinear analysis

(ชื่อโครงการ) การพัฒนาการวิเคราะห์จุดตรึงในปริภูมิอิงระยะทางประเภทบี

และการประยุกต์ไปสู่ปัญหามากมายในการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้น

Investigator : Wutiphol Sintunavarat

Thammasat University

(ชื่อนักวิจัย) วุฒิพลสินธุนาวัฒน์

มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

E-mail Address : wutiphol@mathstat.sci.tu.ac.th

Project Period : June 2, 2014 – June 1, 2016

(ระยะเวลาโครงการ) 2 มิถุนายน 2557 – 1 มิถุนายน 2559

Keywords : Best proximity point; b-metric spaces; Coupled fixed point;

Directed graph; Fixed point.

(คำหลัก) จุดใกล้เคียงที่ดีที่สุด; ปริภูมิอิงระยะทางประเภทบี; จุดตรึงคู่;

กราฟระบุทิศทาง; จุดตรึง

Executive Summary

1. ความสำคัญและที่มาของปัญหา

(Introduction to the research problem and its significance)

Various nonlinear problems arising in several branches of mathematics besides other some quantitative sciences, such as, economics, biology, physics, engineering, can be transform to fixed point problem for single valued mapping and multi-valued operator defined on subset of a metric space. Among them, optimization problems, differential equation problems, integral equation problems, variational problems, equilibrium problems, problems in game theory, problems in control theory have been attracted attention of researchers. The renowned Banach's contraction principle of Banach [6] is a very crucial and popular tool for solving the fixed point problems in the setting of single valued mapping. On the other hand, a study of fixed point for a multi-valued (set-valued) operators was originally initiated by von Neumann [43]. in the study of game theory. The development of geometric fixed point theory for multi-valued operator was initiated with the work of Nadler [35] in 1969. He combined the ideas of multi-valued operator and Lipschitz operator and used the concept of Hausdorff metric to establish the multi-valued operator principle, usually referred as Nadler's contraction principle. Works of Banach [6] and Nadler [35] opened an avenue for further development of fixed point theory for single valued mapping and multi-valued operator. Many researchers used different assumptions on various kinds of mappings or operators and proved several fixed point theorems (see in Alber and Guerre-Delabriere [2], Azam et al. [4], Berinde [8], Chatterjea [12], Chistyako [13], Ciric [14], Dass and Gupta [18], Geraghty [19], Huang and Zhang [22], Jaggi [25], Kannan [26], Matthews [30], Meir and Keeler [31], Mizoguchi and Takahashi [32], Mustafa and Sims [34], Perov [38], Suzuki [41], Wang et al. [44]).

The problem of existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets has been studied thoroughly because of its interesting nature. In 1986, Turinici [42] presented the first result in this direction. Afterward, Ran and Reurings [39] extend the Banach's contraction mapping principle to metric spaces endowed with a partial ordering and gave some applications of Turinici's theorem to matrix equations. Then, Nieto and Lopez [36] extended Ran and

Reurings's theorems for non-decreasing mappings and obtained a unique solution for a first order ordinary differential equation with periodic boundary conditions.

In 1987, the concept of fixed point was extend to the concept of coupled fixed points by Guo and Lakshmikantham [20]. Since then, the concept has been of interest to many researchers in metrical fixed point theory. In 2006, Bhaskar and Lakshmikantham [9] introduced the concept of mixed monotone property in partially ordered set and proved the classical coupled fixed point theorems. They also discussed an application of their result by investigating the existence and uniqueness of solution of the periodic boundary value problem. Following this result, Harjani et al. [21] (see also in [28], [29]) studied the existence and uniqueness of solutions of a nonlinear integral equation as an application of coupled fixed points.

In 2008, Jachymski [24] used the platform of graph theory instead of partial ordering and unified the results given by Ran and Reurings [36] and Nieto and Lopez [39]. He showed that a single valued mapping on a complete metric space still has a fixed point provided the mapping satisfies the contraction condition for pairs of points which form edges in the graph. Subsequently, Beg et al. [7] established a multi-valued version of the main result of Jachymski [24]. Afterwards, many authors undertook further investigations in this direction.

Recently, Samet et al. [40] introduced the concepts of α -admissible mapping and using this concept proved a fixed point theorem for single-valued mapping in metric spaces. This result show that a partial contraction can be considered as a total contraction. They also showed that these results can be utilized to derive fixed point theorems in partially ordered spaces and coupled fixed point theorems. Moreover, they applied the main results to ordinary differential equations. Afterward, Mohammadi et al. [33] introduced the concept of α -admissible for set-valued operator which is different from the notion of α_* -admissible which has been provided in [3]. Subsequently, there are a number of results via the concept of α -admissible mapping in many spaces.

On the other hand, Bakhtin [5] introduced the concept of b-metric space and show that the class of b-metric spaces contains the class of metric spaces. He also presented the contraction mapping mapping in b-metric spaces that is generalization of the Banach contraction principle in metric spaces (see also Czerwik [15]). Since b-metric space is a real generalization of metic space,

these results can be applied in a much wider class of problems. Afterward, several researchers studied fixed point theory or the variational principle for single-valued and multi-valued mappings in b-metric spaces (see [1], [10], [11], [16], [17], [23], [37] and references therein).

Inspired and motivated by the useful of the concept of b-metric, in this project, we will focus on the development of technique and procedure to claim that the existence of fixed point result of single-valued mapping and multi-valued operator in b-metric space. Firstly in this project, we will introduce and study the new classes of non-linear single valued mapping and multi-valued operator in b-metric spaces and prove fixed point theorems for these classes via the idea of via the concept of α -admissible. We also provide some example to show generality of our result. Secondary in this project, we will applying our results in this project to fixed point problems in b-metric space endowed with an arbitrary binary relation and fixed point problems in b-metric space endowed with directed graph. Further, we apply our results to the existence of a coupled fixed point and best proximity points in b-metric spaces.

The results of this project are the extension and improvements of the earlier and recent results in this field. Moreover, the results which we plan to obtain are the main ideas of this project have a great impact in the development of several branches of pure and applied mathematics and sciences. Much work is needed to develop this interesting subject.

Reference

- [1] S. M. Abusalim, M. S. Md Noorani, Fixed point and common fixed point theorems on ordered cone b -metric spaces, Abstract and Applied Analysis Volume 2013, Article ID 815289, 7 pages.
- [2] Ya. I. Alber, S. Guerre-Delabriere, Principles of weakly contractive maps in Hilbert spaces, in: I. Gohberg, Yu. Lyubich (Eds.), New Results in Operator Theory, in: Advances and Appl., vol. 98, Birkhäuser, Basel, 1997, pp. 7--22.
- [3] J. H. Asl, S. Rezapour, and N. Shahzad, On fixed points of α - ψ -contractive multifunctions, Fixed Point Theory and Applications 2012, 2012:212.

-
- [4] A. Azam, F. Brian, M. Khan, Common Fixed Point Theorems in Complex Valued Metric Spaces, *Numer. Funct. Anal. Optim.* 32 (2011), 243--253.
 - [5] I. A. Bakhtin, The contraction mapping principle in quasimetric spaces, *Funct. Anal. Unianowsk Gos. Ped. Inst.* 30 (1989) 26-37.
 - [6] S. Banach, Sur les operations dans lesensembles abstraits et leurs applications aux equations integrales, *Fund. Math.* 3 (1922) 133--181.
 - [7] I. Beg, A. R. Butt, S. Radojevic, The contraction principle for set valued mappings on a metric space with a graph, *Comput. Math. Appl.*, 60 (2010), 1214--1219.
 - [8] V. Berinde, Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration, *Nonlinear Anal. Forum* 9 (1) (2004) 43--53.
 - [9] T. G. Bhaskar, V. Lakshmikantham, Fixed point theorems in partially orderedmetric spaces and applications, *Nonlinear Anal.* 65 (2006) 1379--1393.
 - [10] M. Boriceanu, Fixed point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b -metrics, *Studia Univ. Babes-Bolyai Math.* Volume LIV (3) (2009).
 - [11] M. Boriceanu, M. Bota $\dagger$, A. Petrusel, Multivalued fractals in b -metric spaces, *Cent. Eur. J. Math.* 8 (2) (2010) 367--377.
 - [12] S. K. Chatterjea, Fixed point theorems, *C. R. Acad. Bulgare Sci.* 25 (1972) 727--730.
 - [13] V. V. Chistyakov, Modular metric spaces, I: Basic concepts, *Nonlinear Anal.* 72 (2010), 1--14.
 - [14] L.B. Ćirić, A generalization of Banach principle, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 45 (1974) 267--273.
 - [15] S. Czerwik, Contraction mappings in b -metric spaces, *Acta Math. Inform. Univ. Ostraviensis* 1 (1993) 5--11.
 - [16] S. Czerwik, K. Dłutek and S. L. Singh, Round-off stability of iteration procedures for operators in b -metric spaces, *J. Natur. Phys. Sci.* 11 (1997) 87--94.
-

-
- [17] S. Czerwik, Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* 46 (2) (1998) 263--276.
- [18] B. K. Dass, S. Gupta, An extension of Banach contraction principle through rational expression, *Indian J. Pure Appl. Math.*, vol. {6}, pp. 1455--1458, 1975.
- [19] M. Geraghty, On contractive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.* 40 (1973) 604--608.
- [20] D. Guo, V. Lakshmikantham, Coupled fixed points of nonlinear operators with applications. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.* 11 (1987) 623--632.
- [21] J. Harjani, B. L'opez, K. Sadarangani, Fixed point theorems for mixed monotone operators and applications to integral equations, *Nonlinear Anal.* {74} (2011), 1749--1760.
- [22] L. G. Huang, X. Zhang, Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, *J. Math. Anal. Appl.* 332 (2007), 1468--1476.
- [23] N. Hussain, M. H. Shah, A. A. Harandi, Z. Akhtar, Common fixed point theorems for generalized contractive mappings with applications, *Fixed Point Theory and Applications* 2013, 2013:169.
- [24] J. Jachymski, The contraction principle for mappings on a metric space with a graph, *Proc. Amer. Math. Soc.* 1 (136) (2008) 1359--1373.
- [25] D. S. Jaggi, Some unique fixed point theorems , *Indian J. Pure Appl. Math.*, vol. 8, pp. 223--230, 1977.
- [26] R. Kannan, Some results on fixed points II, *Amer. Math. Monthly* 76 (1969) 405--408.
- [27] R. P. Kelisky and T. J. Rivlin, Iterates of Bernstein polynomials, *Pacific J. Math.* 21 (1967), 511--520.
- [28] N. V. Luong, N. X. Thuan, Coupled fixed points in partially ordered metric spaces and application}, *Nonlinear Anal.* 74 (2011), 983--992.
- [29] N. V. Luong, N. X. Thuan, Coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings and an application to integral equations, *Computers and Mathematics with Applications* 62 (2011) 4238--4248.
-

-
- [30] S. G. Matthews, Partial metric topology, in Proceedings of the 8th Summer Conference on General Topology and Applications, vol. 728, 183--197, Annals of the New York Academy of Sciences, 1994.
 - [31] A. Meir, E. Keeler, A theorem on contraction mappings, J. Math. Anal. Appl. 28 (1969) 326--329.
 - [32] N. Mizoguchi, W. Takahashi, Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, J. Math. Anal. Appl. 141 (1989) 177--188.
 - [33] B. Mohammadi, S. Rezapour, N. Shahzad, Some results on fixed points of α - ψ -Ciric generalized multifunctions, Fixed Point Theory and Applications 2013, 2013:24.
 - [34] Z. Mustafa, B. Sims, A new approach to generalized metric spaces, J. Nonlinear Convex Anal. 7 (2006), 289--297.
 - [35] S. B. Nadler, Jr., Multi-valued contraction mappings, Pacific J. Math. 30 (1969) 475--488.
 - [36] J. J. Nieto, R. R. Lopez, Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, Order 22 (2005) 223--239.
 - [37] V. Parvaneh, J. R. Roshan, S. Radenovic, Existence of tripled coincidence point in ordered b-metric spaces and application to a system of integral equations, Fixed Point Theory and Applications 2013, 2013:130.
 - [38] A. I. Perov, On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations, Priblizhen. Met. Reshen. Difer. Uvavn. 2 (1964), 115--134.
 - [39] A. C. M. Ran, M. C. B. Reurings, A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, Proc. Amer. Math. Soc. 132 (5) (2004) 1435--1443.
 - [40] B. Samet, C. Vetro, P. Vetro, Fixed point theorems for α - ψ -contractive type mappings, Nonlinear Analysis 75 (2012) 2154--2165.
 - [41] T. Suzuki, A generalized Banach contraction principle that characterizes metric completeness. Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008) 1861--186.
-

-
- [42] M. Turinici, Abstract comparison principles and multivariable Gronwall-Bellman inequalities, J. Math. Anal. Appl. 117 (1986) 100--127.
- [43] J. von Neumann, Zur theorie der gesellschaftsspiele, Mathematische Annalen 100 (1) (1928) 295--320.
- [44] S. Z. Wang, B.Y. Li, Z.M. Gao, Some fixed point theorems on expansion mappings, Adv. Math. (China) 11 (2) (1982) 149--153.

2. วัตถุประสงค์ (Objectives)

- 1) Invent new sufficient conditions for the existence of fixed point for new single valued mapping in b-metric spaces and also provide some example to show generality of our result.
- 2) To establish new knowledge and fixed point theorems for multi-valued operator.
Also, state some illustrative examples to claim that our results properly generalizes some results in literature are given.
- 3) To apply our results to investigate fixed point problems in various situation as problems in space endowed with an arbitrary binary relation, problems in partially ordered space and problems in space endowed with directed graph.
- 4) To obtain and study the coupled fixed point and best proximity point problems without some conditions for single valued mapping and multi-valued operator.

3. ระเบียบวิธีวิจัย (Methodology)

- 1) Find and study the basic concept and applications of fixed point theory, coupled fixed point problems, best proximity point problem, b-metric spaces, partially ordered space, graph theory from books and research.
 - 2) Studying fixed point, coupled fixed point and best proximity point results for single valued mapping and multi-valued operator in metric spaces and related spaces.
 - 3) Find new knowledge and sufficient conditions for claim the existence of fixed point in b-metric spaces and invent new fixed point theorems for single valued mapping and multi-valued operator in b-metric spaces.
-

- 4) Establishing the applications of the results in other problems as fixed problems endowed with arbitrary binary relation, fixed point problems in partially ordered space and fixed problems endowed with directed graph.
- 5) Studying applications of our results to related fixed problem as coupled fixed point and best proximity point.
- 6) Writing and submitting the manuscripts to publish in the international journals.

4. แผนการดำเนินงานวิจัยตลอดโครงการในแต่ละช่วง 6 เดือน
(Schedule for the entire project)

First year (2014)

Activities and procedures	2014 (6 months)					
	1	2	3	4	5	6
1. Find and study related research in this project						
2. Prove and invent new theorems for single valued mapping						
3. Writing and submit paper to nice quality international journal (ISI Journal)						
4. Writing progress report for 6 months						
Activities and procedures	2014 (6 months)					
	7	8	9	10	11	12
1. Study data and more relevant research						
2. Study the applications of previous results to prove new knowledge and theorems (Also, meet mentor)						
3. Writing and submit paper to nice quality international journal (ISI Journal)						
4. Writing progress report for 1 year						

Second year (2015)

Activities and procedures	2015 (6 months)					
	1	2	3	4	5	6
1. Find more relevant works and prove new theorems for multi-valued operators (Also, meet mentor)						
2. Joint and present research in conference to find new knowledge						
3. Writing and submit paper to nice quality international journal (ISI Journal)						
4. Writing progress report for 18 months						
Activities and procedures	2015 (6 months)					
	7	8	9	10	11	12
1. Study and establish the new results and applications for multi-valued operators						
2. Writing and submit paper to nice quality international journal (ISI Journal)						
3. Joint and present research of this project in conference						
4. Writing full report for 2 years						

5. ผลงาน/หัวข้อเรื่องที่คาดว่าจะตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติ**Expected output (2 paper publication in 2014-2015)**

- 1) Title: "Best proximity point theorems via fixed point theory in b-metric spaces". Public in "Journal of Optimization Theory and Applications" (2012 Impact factor = 1.423).
- 2) Title: "Fixed point results and application on b-metric space endowed with directed graph". Public in "Abstract and Applied Analysis" (2012 Impact factor = 1.102).

6. งบประมาณโครงการ (Budget details)

Total budget cannot exceed 480,000.00 Baht for 2 years.

List	year 1	year 2	Total
1. Honorarium			
- Compensation for head of the project (10,000 Baht / month)	120,000	120,000	240,000
2. Materials			
- Office material: Paper, Ink, CD.	15,000	15,000	30,000
- Computer maintenance costs for improvement data analysis.	10,000	10,000	20,000
- Page charge (reprint)	20,000	20,000	40,000
3. Other expenses			
- Travel expenses for study basic research (Bangkok – Chiang Mai) and find mentor (Accommodation value, Travel, etc.)	25,000	25,000	50,000
- Joint workshop and conference	30,000	30,000	60,000
- Copy papers, Copy journals, Copy books about research.	10,000	10,000	20,000
4. Wage			
- Remuneration of print work for collect data and report.	10,000	10,000	20,000
Total	240,000	240,000	480,000

Normally, equipment is not supported by this type of grant, except for some cases where some specific equipment is absolutely necessary for the project, which will be considered by TRF on a case-by-case basis.

เนื้อหางานวิจัย

1. วัตถุประสงค์

- 1) คิดค้นรูปแบบของการส่งค่าเดียวและการส่งหลายค่าชนิดใหม่ซึ่งสามารถนำไปใช้งานได้กับปัญหาที่หลากหลายมากยิ่งขึ้นอันเป็นการพัฒนาองค์ความรู้ในด้านคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ซึ่งถือได้ว่าเป็นรากฐานที่สำคัญในการประยุกต์ความรู้ต่อไป
- 2) คิดค้นทฤษฎีบทเกี่ยวกับเงื่อนไขที่พอเพียงในการแสดงการมีอยู่จริงของจุดตรึงสำหรับการส่งค่าเดียวและการส่งหลายค่าชนิดใหม่ที่คิดค้นขึ้นภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางประเภทบี พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างซึ่งสามารถนำทฤษฎีบทที่ได้จากโครงการไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้ ในขณะที่ยังคงความรู้ที่มีอยู่ก่อนหน้านี้ในปัจจุบันไม่สามารถแก้ไขได้
- 3) ศึกษาแนวทางการนำทฤษฎีบทที่ได้ไปใช้แก้ปัญหามืออยู่จริงของผลเฉลยสำหรับปัญหาอื่นๆที่เกี่ยวข้อง เช่น ปัญหาเกี่ยวกับจุดตรึงคู่ ปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด

2. วิธีการทดลอง

- 1) ค้นคว้าหาเอกสาร ตำรา วารสาร และ เอกสารสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยด้านทฤษฎีจุดตรึง ปัญหาเกี่ยวกับจุดตรึงคู่ ปัญหาเกี่ยวกับจุดใกล้เคียงที่ดีที่สุด ปริภูมิอิงระยะทางประเภทบี ปริภูมิการจัดอันดับบางส่วน ทฤษฎีกราฟ จากแหล่งข้อมูลต่างๆ
- 2) ศึกษาเกี่ยวกับความรู้พื้นฐานที่มีอยู่ในเอกสารและงานวิจัยที่ค้นคว้า พร้อมทั้งศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีบทจุดตรึง จุดตรึงคู่ และจุดใกล้เคียงที่ดีที่สุดสำหรับการส่งค่าเดียวและการส่งหลายค่าสุดท้ายใต้ปริภูมิอิงระยะทาง
- 3) อาศัยองค์ความรู้ที่สำคัญต่าง ๆ ที่ได้จากการศึกษาตามระเบียบวิธีตามข้อ 1 และ 2 และประสบการณ์ที่ได้จากการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นจากผู้เชี่ยวชาญทั้งในประเทศและต่างประเทศที่มีการเชื่อมโยงการทำงานวิจัยกันอยู่ ก่อให้เกิดแนวทางในการสร้างองค์ความรู้ใหม่เกี่ยวกับการวิเคราะห์การมีอยู่จริงของจุดตรึงสำหรับการส่งค่าเดียวและการส่งหลายค่าในปริภูมิอิงระยะทางประเภทบี
- 4) อาศัยองค์ความรู้ใหม่ที่ได้จากข้อ 3 ก่อให้เกิดแนวทางในการคิดค้นบทประยุกต์เพื่อนำไปใช้แก้ไขปัญหาลักษณะเกี่ยวกับปริภูมิอิงระยะทางประเภทบีที่เกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ใดๆ รวมไปถึงปัญหาเกี่ยวกับปริภูมิอิงระยะทางประเภทบีที่เกี่ยวข้องกับการจัดอันดับบางส่วนและที่เกี่ยวข้องกับกราฟระบุทิศทาง
- 5) อาศัยองค์ความรู้ที่ได้จากข้อ 3 และ 4 ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาคำตอบของปัญหาจุดตรึงคู่และปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด อันนำไปสู่การ

ประยุกต์ใช้งานทางด้านศาสตร์อื่นๆที่สามารถเกี่ยวข้อง เช่น วิทยาศาสตร์
วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ เป็นต้น

3. ผลการทดลอง

โครงการวิจัยนี้ผู้วิจัยได้สร้างรูปแบบของตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของฟังก์ชัน (หรือ การส่ง) ใหม่ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้กับปัญหาที่หลากหลายมากขึ้นกว่ารูปแบบเดิมที่มีอยู่ รวมทั้งคิดค้นทฤษฎีบทต่างๆที่เกี่ยวข้องกับตัวแบบใหม่นี้ภายใต้ปริภูมิอิงระยะทางประเภทบี (b-metric space) พร้อมทั้งนำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้ประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาต่างๆ เช่น ปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (ค่าต่ำสุดค่าสูงสุด) ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ ปัญหาสมการเชิงปริพันธ์ ปัญหาสมการเมทริกซ์ ปัญหาเชิงคุณภาพ ปัญหาสมการเชิงแปรผัน เป็นต้น รวมไปถึงปัญหาอื่นๆที่เกี่ยวข้องอันเป็นผลมาจากการค้นพบองค์ความรู้ใหม่

4. สรุปและวิจารณ์ผลการทดลอง

ผลลัพธ์ที่ได้จากโครงการนี้นับได้ว่าเป็นองค์ความรู้ใหม่ทางทฤษฎีการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้นในแขนงของการวิเคราะห์จุดตรึง โดยทฤษฎีบทที่ได้ในโครงการนี้เป็นทฤษฎีบทจุดตรึงในปริภูมิอิงระยะทางประเภทบีได้ ซึ่งทฤษฎีบทที่ได้ี้สามารถนำไปใช้แก้ปัญหากับตัวแบบทางคณิตศาสตร์ใหม่ๆที่ทฤษฎีบทเดิมที่ผ่านมาไม่สามารถทำได้ ส่งผลให้มีเครื่องมือในการใช้แก้ปัญหาดังกล่าวทั้งในด้านคณิตศาสตร์และสาขาอื่นๆที่เกี่ยวข้องได้ อีกทั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการพิสูจน์การมีอยู่จริงของ คำตอบ/ระบบคำตอบ ของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญต่างๆได้ เช่น ปัญหาสมการเชิงปริพันธ์ ปัญหาสมการเมทริกซ์ ปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด เป็นต้น

5. ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคต

ในอนาคตหากได้รับโอกาสในการพัฒนาและต่อยอดองค์ความรู้ที่ได้จากโครงการนี้ ผู้วิจัยจะทำการศึกษาปัญหาต่างๆที่เกิดขึ้นในสังคมปัจจุบันทั้งในแง่ของวิทยาศาสตร์และสังคมศาสตร์ที่สามารถนำมาแปลงให้อยู่ในรูปแบบของการส่งที่ได้คิดค้นขึ้น พร้อมทั้งอาศัยทฤษฎีบทที่ได้จากโครงการนี้ไปใช้แก้ปัญหาดังกล่าวข้างต้นอันเป็นการยกระดับผลงานวิจัยไปสู่การแก้ปัญหาสังคมซึ่งส่งผลไปสู่การพัฒนาประเทศชาติสืบต่อไป

สุดท้ายนี้ ข้าพเจ้าจะตั้งใจและทุ่มเทในการทำงานวิจัยเพื่อพัฒนาคุณภาพงานวิจัยให้เกิดผลประโยชน์สูงสุดสืบต่อไป

Output จากโครงการ

1. ผลงานตีพิมพ์ในวารสารวิชาการนานาชาติ (ระบุชื่อผู้แต่ง ชื่อเรื่อง ชื่อวารสาร ปี เล่มที่ เลขที่ และหน้า) หรือผลงานตามที่คาดไว้ในสัญญาโครงการ
 - 1) M. A. Kutbi, **W. Sintunavarat**, Ulam-Hyers stability and well-posedness of fixed point problems for α - λ -contraction mapping in metric spaces, Abstr. Appl. Anal., Volume 2014 (2014), Article ID 268230, 6 pages. **(2013 Impact factor 1.274)**
 - 2) M. A. Kutbi, **W. Sintunavarat**, Fixed point theorems for generalized w_α -contraction multivalued mappings in α -complete metric spaces, Fixed Point Theory and Applications 2014, **2014**:139. **(2014 Impact factor 2.503)**
 - 3) M. A. Kutbi, **W. Sintunavarat**, Fixed point analysis for multi-valued operators with graph approach by the generalized Hausdorff distance, Fixed Point Theory and Applications 2014, **2014**:142. **(2014 Impact factor 2.503)**
 - 4) S. Phiangsungnoen, **W. Sintunavarat**, P. Kumam, Fixed point results, generalized Ulam-Hyers stability and well-posedness via α -admissible mappings in b -metric spaces, Fixed Point Theory and Applications 2014, **2014**:188. **(2014 Impact factor 2.503)**
 - 5) P. Kumam, **W. Sintunavarat**, The existence of fixed point theorems for partial q -set-valued quasi-contractions in b -metric spaces and related results, Fixed Point Theory and Applications 2014, **2014**:226. **(2014 Impact factor 2.503)**
 - 6) **W. Sintunavarat**, P. Kumam, The existence and convergence of best proximity points for generalized proximal contraction mappings, Fixed Point Theory and Applications 2014, **2014**:228. **(2014 Impact factor 2.503)**
 - 7) M. A. Kutbi, **W. Sintunavarat**, On new fixed point results for (α, ψ, ξ) -contractive multi-valued mappings on α -complete metric spaces and their consequences, Fixed Point Theory and Applications 2015, **2015**:2. **(2014 Impact factor 2.503)**
-

-
- 8) A. Latif, A. Ninsri, **W. Sintunavarat**, Approximate fixed point theorems for partial generalized convex contraction mappings in α -complete metric spaces, Taiwanese Journal of Mathematics 19 (1) (2015) 315--333. **(2014 Impact factor 0.621)**
 - 9) Z. Kadelburg, P. Kumam, S. Radenovic, **W. Sintunavarat**, Common coupled fixed point theorems for Geraghty-type contraction mappings using monotone property, Fixed Point Theory and Applications 2015, **2015:27. (2014 Impact factor 2.503)**
 - 10) M. A. Kutbi, D. Gopal, C. Vetro, **W. Sintunavarat**, Further generalization of fixed point theorems in Menger PM-spaces, Fixed Point Theory and Applications 2015, **2015:32. (2014 Impact factor 2.503)**
 - 11) P. Kumam, **W. Sintunavarat**, S. Sedghi, N. Shobkolaei, Common fixed point of two R -weakly commuting mappings in b -metric spaces, Journal of Function Spaces and Applications, Volume 2015 (2015), Article ID 350840, 5 pages. **(2014 Impact factor 0.587)**
 - 12) **W. Sintunavarat**, A new approach to α - ψ -contractive mappings and generalized Ulam-Hyers stability, well-posedness and limit shadowing results, Carpathian Journal of Mathematics 31 (3) (2015) 395--401. **(2014 Impact factor 0.792)**
 - 13) O. Yamaod, **W. Sintunavarat**, Y. J. Cho, Common fixed point theorems for generalized cyclic contraction pairs in b -Metric spaces with applications, Fixed Point Theory and Applications 2015, **2015:164. (2014 Impact factor 2.503)**
 - 14) J. Martinez-Moreno, **W. Sintunavarat**, Y. J. Cho, Common fixed point theorems for Geraghty's type contraction mappings using the monotone property with two metrics, Fixed Point Theory and Applications 2015, **2015:174. (2014 Impact factor 2.503)**
 - 15) **W. Sintunavarat**, The upper bound estimation for the spectral norm of r -circulant and symmetric r -circulant matrices with the Padovan sequence, J. Nonlinear Sci. Appl. 9 (1) (2016) 92--101. **(2014 Impact Factor 0.949)**
 - 16) A. Roldan, **W. Sintunavarat**, Common fixed point theorems in fuzzy metric spaces using the CLRg property, Fuzzy Sets and Systems 282 (2016) 131--142. **(2014 Impact 1.986)**
-

-
- 17) L. Aiemsomboon, **W. Sintunavarat**, On new stability results for generalized Cauchy functional equations on groups by using Brzdęk's fixed point theorem, *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 18(1) (2016), 45--59. **(2014 Impact 0.545)**
 - 18) **W. Sintunavarat**, A. Pitea, On a new iteration scheme for numerical reckoning fixed points of Berinde mappings with convergence analysis, *J. Nonlinear Sci. Appl.* 9 (5) (2016), 2553--2562. **(2014 Impact Factor 0.949)**
 - 19) O. Yamaod, **W. Sintunavarat**, Y. J. Cho, Existence of a common solution for a system of nonlinear integral equations via fixed point methods in b -metric spaces, *Open Mathematics* 14 (1) (2016), 128--145. **(2014 Impact Factor 0.578)**
 - 20) A. Latif, A. Ninsri, **W. Sintunavarat**, The (α, β) -generalized convex contractive condition with approximate fixed point results and some consequence, *Fixed Point Theory and Applications* 2016, **2016**:58. **(2014 Impact factor 2.503)**
 - 21) **W. Sintunavarat**, Fixed point results in b -metric spaces approach to the existence of a solution for nonlinear integral equations, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas* DOI 10.1007/s13398-015-0251-5 (in press) **(2014 Impact factor 0.776)**
 - 22) **W. Sintunavarat**, Nonlinear integral equations with new admissibility types in b -metric spaces, *Journal of Fixed Point Theory and Applications* DOI 10.1007/s11784-015-0276-6 (in press) **(2014 Impact 0.545)**
 - 23) H. Lakzian, D. Gopal, **W. Sintunavarat**, New fixed point results for mappings of contractive type with an application to nonlinear fractional differential equations, *Journal of Fixed Point Theory and Applications* DOI 10.1007/s11784-015-0275-7 (in press) **(2014 Impact 0.545)**
-

2. การนำผลงานวิจัยไปใช้ประโยชน์

- เชิงพาณิชย์

ยังไม่มี การนำไปใช้ประโยชน์เชิงพาณิชย์

- เชิงนโยบาย

ผลการวิจัยจากโครงการวิจัย “การพัฒนาการวิเคราะห์จุดตรึงในปริภูมิอิงระยะทางประเภทบีและการประยุกต์ไปสู่ปัญหามากมายในการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้น” ได้สร้างองค์ความรู้ใหม่ทางคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ โดยผู้วิจัยได้สร้างเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในรูปของฟังก์ชัน (หรือ การส่ง) ใหม่ขึ้นมา ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้กับปัญหาที่หลากหลายมากขึ้นกว่ารูปแบบเดิมที่มีอยู่ในปัจจุบัน รวมทั้งคิดค้นทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับตัวแบบใหม่นี้ พร้อมกันนี้ยังได้มีการพัฒนาองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์เชิงประยุกต์ โดยได้นำผลลัพธ์ที่ได้ไปใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ต่างๆ เช่น ปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุด (ค่าต่ำสุด ค่าสูงสุด) ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ ปัญหาสมการเชิงปริพันธ์ ปัญหาสมการเมทริกซ์ ปัญหาเชิงดุลยภาพ ปัญหาสมการเชิงแปรผัน เป็นต้น รวมไปถึงปัญหาอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องอันเป็นผลมาจากการค้นพบองค์ความรู้ใหม่

- เชิงสาธารณะ

โครงการวิจัย “การพัฒนาการวิเคราะห์จุดตรึงในปริภูมิอิงระยะทางประเภทบีและการประยุกต์ไปสู่ปัญหามากมายในการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้น” ได้ก่อให้เกิดความร่วมมือกับนักคณิตศาสตร์และนักวิจัยทั้งในระดับประเทศและระดับนานาชาติมากมาย ซึ่งสามารถเห็นได้จากผลผลิตที่ได้จากโครงการที่มาจากความร่วมมือในระดับงานวิจัยกับนักวิจัยต่างชาติมากมาย พร้อมกันนี้โครงการวิจัยนี้ยังก่อให้เกิดกระแสความสนใจในวงกว้างกับนักวิจัยในสาขาวิจัยนี้ ซึ่งจะเห็นได้จากการที่ผู้วิจัยมีโอกาสดำเนินการเชิญไปบรรยายทั้งในระดับประเทศและระดับนานาชาติเกี่ยวกับงานวิจัยในโครงการนี้มากมาย (ดูได้จากหัวข้อที่ 4.การบรรยายในงานปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์ในฐานะวิทยาการรับเชิญ)

- เชิงวิชาการ

มีการนำองค์ความรู้ที่เกิดจากโครงการวิจัย การพัฒนาการวิเคราะห์จุดตรึงในปริภูมิอิงระยะทางประเภทบีและการประยุกต์ไปสู่ปัญหามากมายในการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้น” ไปพัฒนาการเรียนการสอนในระดับบัณฑิตศึกษาในมหาวิทยาลัยต้นสังกัดของผู้วิจัยและมหาวิทยาลัยที่ผู้วิจัยมีเครือข่ายความร่วมมือเชิงวิชาการอยู่ ตลอดจนนำความรู้ที่ได้ไปใช้ในการสร้างและพัฒนา นักศึกษาภายใต้การควบคุมดูแลให้พร้อมก้าวไปสู่การเป็นนักวิจัยที่มีคุณภาพ

3. การเสนอผลงานในที่ประชุมวิชาการ

- 1) **W. Sintunavarat**, Multi-fractal operator results approach by fixed point method in b -metric spaces, [The 8th Asian Conference on Fixed Point Theory and Optimization 2014 \(ACFPTO2014\)](#), July 28 - 30, 2014 at the Faculty of Science, Naresuan University, **Thailand**.
- 2) **W. Sintunavarat**, A new approach to (α, ψ) -contractive mappings and generalized Ulam-Hyers stability, well-posedness and limit shadowing, [The 22nd International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications \(The 22nd ICFIDCAA\)](#), August 8-11, 2014 at Dongguk University, Gyeongju, **Korea**.
- 3) **W. Sintunavarat**, Approximate algorithm for single valued nonexpansive and multi-valued strictly pseudocontractive mappings in Hilbert spaces, [6th International Conference on Numerical Analysis 2014 \(NumAn 2014\)](#), September 2-5, 2014 at Chania, **Greece**.
- 4) L. Aiamsomboon, **W. Sintunavarat**, Stability of generalized additive Cauchy function equations by using fixed point methods, [The 40th Congress on Science and Technology of Thailand "Science and Technology towards ASEAN Development"](#), December 2-4, 2014 at Hotel Pullman Khon Kaen Raja Orchid, Khon Kaen, **Thailand**.
- 5) **W. Sintunavarat**, Discussion on weakly (α, ψ, ξ) -contractive multivalued mappings and fixed point results, [The ninth international conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis \(NACA2015\)](#), January 21 - January 25, 2015 at Rimkok Resort Hotel, Chiang Rai, **Thailand**.

ภาคผนวก 1

บทความวิจัยเฉพาะหน้าแรก (Output 1-17)

ภาคผนวก 2

บทความวิจัยฉบับเต็ม (Output 18-23)

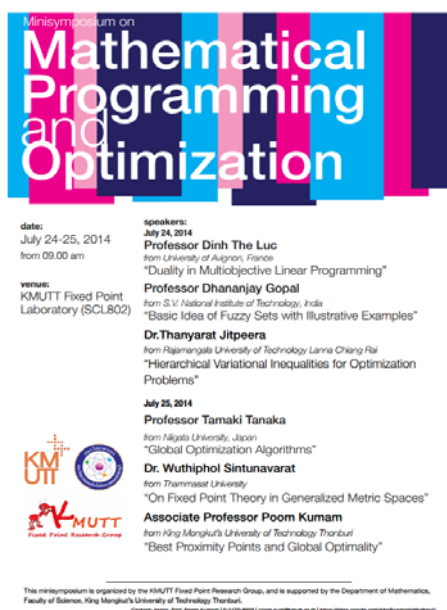
ภาคผนวก 3

กิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับการนำผลจาก
โครงการไปใช้ประโยชน์

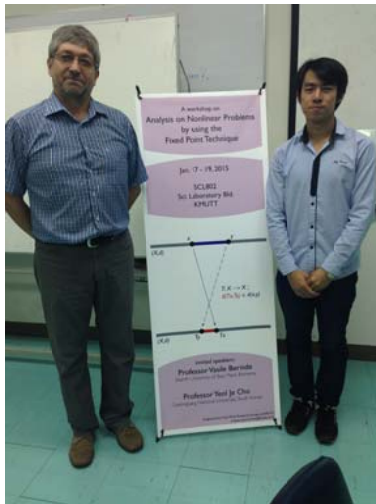
กิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับการนำผลจากโครงการไปใช้ประโยชน์

องค์ความรู้ที่ได้จากโครงการวิจัย “การพัฒนาการวิเคราะห์จุดตรึงในปริภูมิอิงระยะทางประเภทบีและการประยุกต์ไปสู่ปัญหามากมายในการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้น” ได้ก่อให้เกิดประโยชน์และความรู้เชิงวิชาการผ่านโครงการปฏิบัติการเชิงคณิตศาสตร์ดังต่อไปนี้

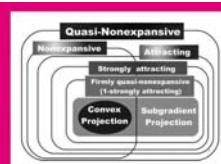
- 1) Project: Minisymposium on Mathematical Programming and Optimization
- Date: July 24 – 25, 2014
- Place : King Mongkut's University of Technology Thonburi (KMUTT), Bangmod, Bangkok 10140, Thailand.
- Topic : On fixed point theory in generalized metric spaces



- 2) Project: Analysis of nonlinear problems by using the fixed point technique
- Date: January 17 – 19, 2015
- Place : King Mongkut's University of Technology Thonburi (KMUTT), Bangmod, Bangkok 10140, Thailand.
- Topic : Fixed point results via Pompeiu-Hausdorff metric



- 3) Project: Theory of Nonlinear Operators and Equations
- Date: August 2, 2015
- Place : King Mongkut's University of Technology Thonburi (KMUTT), Bangmod, Bangkok 10140, Thailand.
- Topic : An approximate solution of nonlinear matrix equations/system via uni/multi-dimensional fixed point methods



A workshop on Theory of Nonlinear Operators and Equations

Aug. 02, 2015
SCLB02 Sci Laboratory Bldg, KMUTT

Organized by:
Professor Andrzej Cegielski
University of Zielona Gora

Dr. Supak Phiangpungnoen
King Mongkut's University of Technology Thonburi

Dr. Wutiphol Sintunavarat
Thammasat University (Changwat Center)



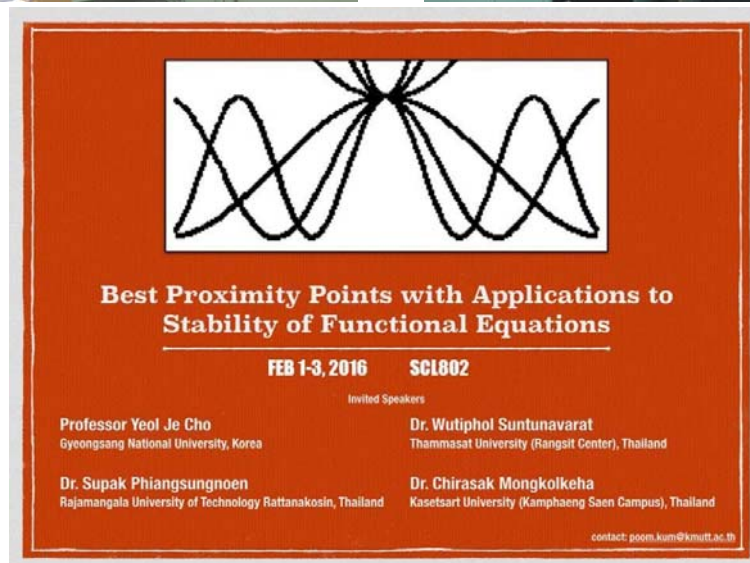
- 4) Project: Existence and Uniqueness Problems Arise in Operator Equations and Inclusions
- Date: October 26, 2015
- Place : King Mongkut's University of Technology Thonburi (KMUTT), Bangmod, Bangkok 10140, Thailand.
- Topic : Nonlinear integral equations with new admissibility types in b-metric spaces



- 5) Project: Nonlinear Analysis and Applications
- Date: January 19 – 20, 2016
- Place : University of Phayao, Phayao, Thailand.
- Topic : Development on the existence theorems related to fixed point theory and its applications



- 6) Project: Some Best Proximity Points with Applications to Stability of Functional Equations
- Date: February 1-3, 2016
- Place : King Mongkut's University of Technology Thonburi (KMUTT), Bangmod, Bangkok 10140, Thailand.
- Topic : History of metric fixed point theory with some nonlinear problems



ภาคผนวก 4

การเชื่อมโยงกับต่างประเทศ

การเชื่อมโยงกับต่างประเทศ

โครงการวิจัย “การพัฒนาการวิเคราะห์จุดตรึงในปริภูมิอิงระยะทางประเภทบีและการประยุกต์ไปสู่ปัญหามากมายในการวิเคราะห์ไม่เชิงเส้น” ได้ก่อให้เกิดความร่วมมือกับนักคณิตศาสตร์และนักวิจัยในระดับนานาชาติ ดังต่อไปนี้

- 1) Professor Yeol Je Cho
Department of Mathematics Education and the Research Institute of Natural Science,
Gyeongsang National University, Jinju 660-701, Republic of Korea
E-mail addresses: yjcho@gnu.ac.kr
 - 2) Professor Stojan Radenovic
Faculty of Mechanical Engineering, University of Belgrade, Kraljice, Marije 16, 11120 Beograd, Serbia
E-mail: sradenovic@mas.bg.ac.rs
 - 3) Professor Erdal Karapinar
Department of Mathematics, Atlm University, 06836, Incek, Ankara, Turkey
E-mail : erdalkarapinar@yahoo.com
 - 4) Professor Tayyab Kamran
Centre for Advanced Mathematics and Physics National University of Sciences and Technology Campus of College of Electrical and Mechanical Engineering Peshawar Road, Rawalpindi, Pakistan
E-mail: tayyabkamran@gmail.com
 - 5) Prof. Muhammad Usman Ali
Department of Mathematics, School of Natural Sciences, National University of Sciences and Technology H-12, Islamabad Pakistan.
E-mail: muh_usman_ali@yahoo.com
 - 6) Prof. Calogero Vetro
Dipartimento di Matematica e Informatica, Universit\`a degli Studi di Palermo, Via Archirafi 34, 90123 Palermo, Italy
E-mail : cvetro@math.unipa.it
-

- 7) Prof. Dhananjay Gopal
Department of Applied Mathematics & Humanities, S.V. National Institute of
Technology, Surat- 395 007, India
E-mail: gopal.dhananjay@rediffmail.com
- 8) Prof. Marwan A. Kutbi
Department of Mathematics, King Abdulaziz University, Saudi Arabia
E-mail: mkutbi@yahoo.com
- 9) Professor Ravi P Agarwal
Department of Mathematics,
Texas A&M University Kingsville, Kingsville, TX 78363, USA
E-mail addresses: agarwal@tamuk.edu
- 10) Prof. Juan Martinez-Moreno
Department of Mathematics,
University of Jaen, Campus las Lagunillas s/n, 23071, Jaen, Spain.
E-mail : juan.martinez@ujaen.es
- 11) Prof. Antonio Roldan
Department of Mathematics,
University of Jaen, Campus las Lagunillas s/n, 23071, Jaen, Spain.
E-mail: afroldan@ujaen.es
- 12) Prof. Abdul Latif
King Abdulaziz University, Department of Mathematics, Saudi Arabia
E-mail : alatif@kau.edu.sa
- 13) Prof. Mihai Postolache
Department of Mathematics and Informatics,
University Politehnica of Bucharest, 060042 Bucharest, Romania
E-mail : emscolar@yahoo.com
- 14) Prof. Vasile Berinde
Department of Mathematics and Computer Science,
North University of Baia Mare, Victoriei 76, 430122 Baia Mare, Romania
E-mail : vberinde@ubm.ro, vasile_berinde@yahoo.com
-

ภาคผนวก 5

รางวัลที่ได้รับ

รางวัลที่ได้รับ

1. รางวัลการศึกษายอดเยี่ยม อันดับ 1 หลักสูตรวิทยาศาสตร์ดุสิตบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ ประจำปีการศึกษา 2556 จากมูลนิธิศาสตราจารย์ ดร. แถบ นีละนิธิ (วันที่ 31 กันยายน 2557)
2. รางวัลนักวิจัยรุ่นใหม่ดีเด่นระดับคณะ ประจำปี 2557 จากมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ (วันที่ 26 พฤศจิกายน 2557)
3. รางวัลผู้มีผลงานวิจัยตีพิมพ์ในวารสารวิชาการระดับนานาชาติ ที่ปรากฏในฐานข้อมูลสากล ISI, SCOPUS ที่มีค่า Impact Factor รวมจำนวนบทความมากที่สุด ผลงานตั้งแต่ปี 2555-2556 ในกลุ่มสาขาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จากหน่วยงานวิจัยของมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ (วันที่ 26 พฤศจิกายน 2557)
4. รางวัลนักวิจัยยอดเยี่ยมรุ่นใหม่ ประเภทผลงานตีพิมพ์ในฐาน SCOPUS จำนวนสูงสุด ประจำปี 2557 จากคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ (วันที่ 9 มกราคม 2558)
5. รางวัลนักวิจัยยอดเยี่ยมรุ่นใหม่ ประเภทผลงานตีพิมพ์ในฐาน SCOPUS ที่มี Impact Factor สูงสุด ประจำปี 2557 จากคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ (วันที่ 9 มกราคม 2558)
6. รางวัลวิทยานิพนธ์ ระดับดี ประจำปี 2557 จากสำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ (วันที่ 2 กุมภาพันธ์ 2558)
7. รางวัลการนำเสนอผลงานดีเยี่ยมแบบโปสเตอร์ในการประชุมนักวิจัยรุ่นใหม่.. พบ..เมธีวิจัยอาวุโส สกว. ครั้งที่ 15 จากสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย (สกว.) และสำนักงานคณะกรรมการอุดมศึกษา (สกอ.) กระทรวงศึกษาธิการ (วันที่ 8 มกราคม 2559)