



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี
โดยใช้การคิดขั้นสูง

โดย ดร.วาสกรี่ แสงป้อม และคณะ

มิถุนายน 2559

สัญญาเลขที่ TRG5780236

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี
โดยใช้การคิดขั้นสูง

1. ดร.วาสุกรี แสงป้อม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ
ศูนย์สุพรรณบุรี
2. ดร.ณิศรา สุทธิสังข์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล
พระนคร
3. ดร.ญานิน กองทิพย์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ประสานมิตร

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัยและ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย สกว.และมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล
สุวรรณภูมิไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

รูปแบบ Abstract (บทคัดย่อ)

Project Code : TRG5780236

(รหัสโครงการ)

Project Title : การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูง
(ชื่อโครงการ)

Investigator : ชื่อนักวิจัย และสถาบัน
(ชื่อนักวิจัย)

1. ดร.วาสุกรี แสงป้อม มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ ศูนย์สุพรรณบุรี
2. ดร.ณิศรา สุทธิสังข์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล พระนคร
3. ดร.ญานิน กองทิพย์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

E-mail Address :

1. ดร.วาสุกรี แสงป้อม wasukree_j@hotmail.com
2. ดร.ณิศรา สุทธิสังข์ muinisara@hotmail.com
3. ดร.ญานิน กองทิพย์ yanin_70@hotmail.com

Project Period :

(ระยะเวลาโครงการ)

ตั้งแต่วันที่ 2 เดือน มิถุนายน พ.ศ. 2557 ถึงวันที่ 1 เดือน มิถุนายน พ.ศ. 2559

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหาโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์และเพื่อศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหาโดยใช้การคิดขั้นสูง ระเบียบวิธีการวิจัยใช้การผสมผสานระหว่างการวิจัยเชิงคุณภาพและการวิจัยเชิงปริมาณ จากการเก็บรวบรวมข้อมูลจากแบบสำรวจการคิดขั้นสูง แบบสังเกตการคิดขั้นสูง แบบสัมภาษณ์ ในการแก้ปัญหา 5 สถานการณ์ปัญหาปลายเปิด กลุ่มเป้าหมายของการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักศึกษาที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชาแคลคูลัส 1 จากมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ ศูนย์สุพรรณบุรี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒในเนื้อหา การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชันใช้กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์การคิดขั้นสูงของ Tall (1991) ผลการวิจัย พบว่า การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาเกิดขึ้นจากการกระตุ้นการสอนของครูโดยใช้สถานการณ์ปัญหาปลายเปิด โดยใช้การเชื่อมโยงจากวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหาเพื่อสร้างแนวคิดที่สำคัญจากการแก้ปัญหา ดังนี้ 1) ขั้นการใช้วิธีการเดียว 2) ขั้นการใช้วิธีการที่หลากหลาย 3) ขั้นกระบวนการ 4) ขั้นการเกิดแนวคิด 5) ขั้นการนำแนวคิดที่ได้ไปใช้ต่อ และขั้นสุดท้ายคือ 6) ขั้นการขยายแนวคิด ซึ่งเป็นข้อค้นพบที่เกิดขึ้นจากการวิจัยครั้งนี้ ข้อเสนอแนะสำหรับงานวิจัยในอนาคตขยายแนวคิดโดยใช้กระบวนการทัศน์ทางด้านสังคม

Keywords : การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์, การเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์, การแก้ปัญหา (คำหลัก)

Abstract

Project Code : TRG5780236

Project Title : Students' mathematical learning by Advanced Mathematical Thinking

Investigator : Assist. Prof. Dr. Mitree Inprasitha

E-mail Address :

- | | |
|-------------------------|------------------------|
| 1. Dr. Wasukree Sangpom | wasukree_j@hotmail.com |
| 2. Dr. Nisara Suthisung | muinisara@hotmail.com |
| 3. Dr. Yanin Kongthip | yanin_70@hotmail.com |

Project Period :

2 June . 2014 - 1 June 2016

Abstract:

This research aims to explore and study the learning of mathematics undergraduates in problem solving by using advanced mathematical thinking. Methodology used a mix method of qualitative and quantitative research from the collection of information surveys advanced mathematical thinking, observation of advanced mathematical thinking, interviewing of advanced mathematical thinking and an open-ended problem solving situations 5. The target group of this research include students enrolled calculus one course from Rajamangala University of Technology Suvarnabhumi Suphanburi Campus, Rajamangala University of Technology Phra Nakhon and Srinakarintaravirod University in contents Application Functions. The theoretical framework used to analyze the Tall's (1991) ideas of advanced mathematical thinking. The results showed that Advanced mathematical thinking of students caused by stimulation of the teachers using the open-ended problems by using the connection from the procedures in problem solving into mathematical concepts. The steps is as follows: 1) procedure 2) the procedures 3) process 4) concept 5. Revise concept and the final stage 6) extension concept

Application of advanced mathematical thinking in teaching approach can be brought to use as the guideline for students' learning method preparation in the future and learning of the advanced mathematical thinking that students can create by their own using mathematical learning.

Keywords : Advanced mathematical thinking, Mathematical learning, Problem-solving

การวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนจากสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัย และ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ

และขอขอบคุณดีให้บุพการีและคณาจารย์

กิตติกรรมประกาศ

โครงการวิจัยการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงนี้สำเร็จ ลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจาก ผศ.ดร. ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ คณบดีคณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัย ขอนแก่น เป็นนักวิจัยที่ปรึกษา ที่กรุณาให้คำปรึกษา แนวคิด ข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ในการ ดำเนินการวิจัย ตลอดจนแนะนำวิธีการสร้างความรู้ที่มีคุณค่าอย่างยิ่งจากการอ่านบทความ วารสาร เอกสาร หนังสือ ตำราทางด้านคณิตศาสตร์ศึกษาเพื่อให้เห็นทิศทางการวิจัยและสามารถตอบปัญหา ของสังคมได้ รวมถึงพยายามให้เครื่องมือในการการศึกษาเกี่ยวกับกระบวนการคิดของมนุษย์ซึ่งเป็นการ ยากที่จะค้นหาและเรียนรู้ด้วยตนเองได้ คณะผู้วิจัยขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้ด้วย

ขอขอบพระคุณสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัยและมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล สุวรรณภูมิที่ได้กรุณามอบทุนสนับสนุนโครงการวิจัยการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับ ปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงและสนับสนุนการนำองค์ความรู้จากผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์ในรูปแบบ ต่าง ๆ ได้แก่ ผลงานตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ ระดับชาติ ไปเป็นประโยชน์ด้านวิชาการ การเรียนรู้ การเรียนการสอน รวมถึงการนำผลงานวิจัยไปวิจัยต่อยอดในครั้งนี้

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีของงานวิจัยฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบเป็นเครื่องบูชาแด่พระคุณของ พ่อแม่ ผู้ให้กำเนิดพร้อมอบรมเลี้ยงดูและบูรพาจารย์ทุกท่านที่ได้ให้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้แก่ ผู้วิจัย

วาสุกรี แสงป้อม
ณิศรา สุทธิสังข์
ญานิน กองทิพย์

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
คำอุทิศ	ค
กิตติกรรมประกาศ	ง
สารบัญตาราง	จ
สารบัญภาพ	ฉ
บทที่ 1 บทนำ	1
1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
2. คำถามการวิจัย	3
3. วัตถุประสงค์ของการวิจัย	3
4. ขอบเขตของการวิจัย	3
5. นิยามศัพท์เฉพาะ	4
6. ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย	4
บทที่ 2 วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	5
1. แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	5
2. แนวคิดเกี่ยวกับวิธีการแบบเปิด	10
3. แนวคิดเกี่ยวกับการเรียนรู้	13
4. แนวคิดเกี่ยวกับกิจกรรมคณิตศาสตร์	24
5. แนวคิดเกี่ยวกับการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์	29
6. แนวคิดเกี่ยวกับการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์	33
7. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์	37
8. กรอบแนวคิด (Conceptual Framework) ของงานวิจัย	39
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	41
1. การกำหนดขอบเขต	41
2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	41
3. ขั้นตอนการสร้างแบบสอบถามที่เกี่ยวข้องกับความคิดขั้นสูง	42
4. การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล	43
5. การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้	43

บทที่ 4	ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	45
	1. ผลการวิจัยระยะที่ 1	45
	2. ผลการวิจัยระยะที่ 2	51
บทที่ 5	สรุปผล อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ	82
	1. สรุปผล	83
	2. อภิปรายผล	86
	3. ข้อเสนอแนะ	87
บรรณานุกรม		88
ประวัติผู้เขียน		94

สารบัญตาราง

		หน้า
ตารางที่ 1	ความแตกต่างที่สำคัญระหว่างการสอนเกี่ยวกับการแก้ปัญหา กับการสอนผ่านการแก้ปัญหา	6
ตารางที่ 2	เพศของผู้ตอบแบบสอบถาม	45
ตารางที่ 3	อายุของผู้ตอบแบบสอบถาม	46
ตารางที่ 4	มหาวิทยาลัยของผู้ตอบแบบสอบถาม	47
ตารางที่ 5	ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ร้อยละ และระดับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์	48
ตารางที่ 6	เพศของผู้ตอบแบบสอบถามระยะที่ 2	51
ตารางที่ 7	อายุของผู้ตอบแบบสอบถามระยะที่ 2	51
ตารางที่ 8	มหาวิทยาลัยของผู้ตอบแบบสอบถามระยะที่ 2	52
ตารางที่ 9	ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ร้อยละ และระดับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์	53

สารบัญภาพ

	หน้า
ภาพที่ 1	วิธีการแบบเปิด 4 ชั้นของลำดับวิธีการสอนในชั้นเรียน ที่เน้นการแก้ปัญหาโดย (Inprasitha, 2010)
ภาพที่ 2	ทฤษฎีการเชื่อมโยงของ Thorndike
ภาพที่ 3	รูปแบบกิจกรรมทางคณิตศาสตร์
ภาพที่ 4	ระดับการคิดขั้นพื้นฐานและการคิดขั้นสูงตามแนวคิดของ Anderson & Kraththwohl (2000)
ภาพที่ 5	การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนในการแก้ปัญหา ทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ (Tall, 1991)
ภาพที่ 6	การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์และการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาใน การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พัฒนาจากกรอบการคิดขั้นสูงของ Tall, 1991

บทที่ 1

บทนำ

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

คณิตศาสตร์เป็นองค์ประกอบสำคัญที่กำหนดไว้ในเป้าหมายหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียนและระดับอุดมศึกษา (NCTM, 1989; NCTM, 2000; Evitts, 2004; Mousley, 2004; กระทรวงศึกษาธิการ, 2551) เนื่องจากหลักสูตรคณิตศาสตร์ในระดับอุดมศึกษามีความเป็นนามธรรมทำให้ผู้เรียนเผชิญกับความยุ่งยากในการหาคำตอบและการแก้ปัญหา (Tall, 1991; p.20) และผู้เรียนยังเกิดความยุ่งยากในการถ่ายทอดว่าได้เรียนรู้อะไรที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันหรือสาขาวิชาชีพได้ (Byrnes, 2001) สิ่งสำคัญคือ ผู้เรียนต้องอาศัยสิ่งที่ผู้เรียนเรียนรู้มาก่อนหน้านี้มาใช้ในการเรียนรู้ (Tall, 1991; p.20) เพื่อสามารถเรียนรู้ในชั่วโมงต่อไปหรือระดับชั้นที่สูงขึ้น

การจัดกระบวนการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ตามแนวการจัดการศึกษา มาตรา 22 กล่าวว่าจัดการศึกษาต้องยึดหลักว่าผู้เรียนทุกคนมีความสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้และถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุดกระบวนการจัดการศึกษาต้องส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาความรู้ตามธรรมชาติและเต็มตามศักยภาพ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551) แต่เนื่องจากการจัดการเรียนและการสอนในชั้นเรียนยังคงเป็นแบบบรรยายเนื้อหาที่ผู้สอนพยายามนำเนื้อหาที่อยู่นอกตัวผู้เรียนเข้าไปในตัวผู้เรียนเพื่อก่อให้เกิดการเรียนรู้ของผู้เรียน และที่สำคัญเนื้อหาของระดับชั้นเหมือนการแบ่งเค้กอีกทั้งเน้น การท่องจำ กฎ สูตร (วินัย รอดจำ, 2552) ในภาคปฏิบัติการขับเคลื่อนทั้งหลักสูตรและการปฏิรูปการศึกษาที่ผ่านมาไม่ประสบความสำเร็จและไม่สามารถสร้างพื้นฐานในการคิดวิเคราะห์ การคิดขั้นสูง และทักษะในการแก้ปัญหาแก่เยาวชนไทย (กษมา วรวรรณ ณ อยุธยา, 2552) พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 ให้หลักการไว้ว่าผู้เรียนทุกคนมีความสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้และถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุดเป็นการเรียนรู้ในสถานการณ์จริงซึ่งสถานการณ์จริงของผู้เรียนแต่ละคนไม่เหมือนกัน (สิริพร ทิพย์คง, 2545; ประเวศ วะสี, 2545) ดังนั้น จึงต้องตระหนักถึงผู้เรียนแต่ละคนเป็นตัวตั้ง ผู้สอนต้องเลือกจัดให้ผู้เรียนได้เรียนรู้จากประสบการณ์ กิจกรรมและ การทำงาน อันนำไปสู่การพัฒนาผู้เรียนครบทุกด้าน ทั้งทางกาย ทางจิตใจ หรือ ทางอารมณ์ ทางสังคม และทางสติปัญญาซึ่งรวมถึงพัฒนาการทางจิตวิญญาณ

การจัดการเรียนและการสอนของชั้นเรียนประเทศไทยส่วนใหญ่อาศัยบทบาทของผู้สอนเป็นผู้บรรยาย ผู้บอกผู้สาธิตเกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์อันก่อให้เกิดการเรียนรู้ของผู้เรียนซึ่งมองในส่วนของที่ผู้เรียนที่ได้มาในลำดับสุดท้าย (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2550) ไม่ได้เน้นกระบวนการให้ผู้เรียนได้แสวงหาความรู้ได้ด้วยตนเอง ผู้สอนมีอำนาจและยึดว่าตนเองเป็นผู้รู้มากที่สุดถูกต้องที่สุดกระบวนการเรียนรู้ผู้เรียนมีหน้าที่รับและปรับตัว ให้สอดคล้องกับเนื้อหาความรู้และวิธีการของผู้สอน (คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, 2543) การเรียนรู้และการสอนคณิตศาสตร์อาศัยแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน ซึ่งมีลักษณะเด่น คือ คำตอบถูกต้องเพียงคำตอบเดียวไม่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันเข้าร่วมจากการวิเคราะห์หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของประเทศไทยพบว่า ส่วนใหญ่ ประกอบด้วยแบบฝึกหัดที่ใช้ฝึกทักษะโดยเฉพาะทักษะการคิดคำนวณและทบทวน กฎ สูตร หรือหลักการที่เรียนไปแล้ว (Inprasitha, 1997) จึงทำให้ไม่มีพื้นที่ในการค้นคว้าวิธีการเรียนรู้

ที่จะเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง อีกทั้งกระทรวงศึกษาธิการ (2553) เสนอแนะว่า บัณฑิตระดับอุดมศึกษาเป็นผู้มีความรู้ มีคุณธรรม จริยธรรม มีความสามารถในการเรียนรู้และพัฒนาตนเอง สามารถประยุกต์ใช้ความรู้เพื่อการดำรงชีวิตในสังคมได้ ดังนั้นการสอนที่ดีจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อผู้สอนรู้จักวิธีคิดของผู้เรียนในชั้นเรียน โดยการเปลี่ยนชั้นเรียนที่เน้นให้ผู้เรียนได้เรียนรู้เพื่อสร้างความหมายสิ่งเรียนรู้ด้วยตนเองและสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ได้

การเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญได้เปิดโอกาสให้ผู้เรียนคิดและเรียนรู้ด้วยตนเองอย่างมีความหมาย ผู้เรียนได้มีการเชื่อมโยงส่งเสริมการคิดทางคณิตศาสตร์ในสาขาอื่น ๆ จากบริบทคณิตศาสตร์ที่ให้ผู้เรียนเห็นคณิตศาสตร์ในฐานะวิธีการเพื่อเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง (Coxford, 1995: p.3) ชั้นเรียนคณิตศาสตร์ต้องแสดงให้เห็นถึงการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ที่ผู้เรียนสร้างด้วยตนเอง (Ito-Hino, 1995) ผู้เรียนควรมองคณิตศาสตร์ให้เชื่อมโยงกันโดยสามารถรู้ว่าคุณค่าความรู้จะถูกใช้เมื่อไรและอย่างไร (NCTM, 1989) เพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนได้พัฒนาขีดความสามารถของตนเองอย่างเต็มศักยภาพโดยยึดผู้เรียนเป็นศูนย์กลางแห่งการเรียนรู้ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551)

การเชื่อมโยงในฐานะเครื่องมือการแก้ปัญหาจากสถานการณ์ปัญหาซึ่งไม่ได้สนใจในคำตอบสิ่งสำคัญอยู่ที่กระบวนการที่ได้มารวมถึงความเข้าใจเกี่ยวกับการเชื่อมโยงควรเกิดขึ้นมาจากการสำรวจเกี่ยวกับสถานการณ์ปัญหาสอดคล้องกับกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในแง่ของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ (Hodgson, 1995) และเป็นหลักสำคัญในการสอนคณิตศาสตร์ คือ การแก้ปัญหาและเสนอแนะมุมของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนระดับขั้นพื้นฐานและระดับอุดมศึกษาแนวคิดเกี่ยวกับขั้นตอนกระบวนการแก้ปัญหาเป็นตัวเชื่อมโยงที่ถูกใช้มากผ่านการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียน การตั้งประเด็นคำถามให้กับผู้เรียนที่มองเห็นความสัมพันธ์และค้นหาการเชื่อมโยงการสร้างและการเลือกปัญหาและกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อให้ผู้เรียนเข้าใจคณิตศาสตร์

การเชื่อมโยงการคิดพื้นฐานไปสู่การคิดขั้นสูงเป็นกระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์รูปแบบหนึ่งที่พัฒนากระบวนการคิดของผู้เรียน Tall (1991; p.20) ได้เสนอแนะการพิจารณาการเชื่อมโยงการคิดพื้นฐานไปสู่การคิดขั้นสูงจากการเปลี่ยนแปลงอย่างมีนัยสำคัญ โดยการบอกเล่า อธิบาย บรรยายของผู้เรียนไปสู่การให้คำจำกัดความอย่างชัดเจน หรือ จากการอธิบายเพื่อโน้มน้าวไปสู่การพิสูจน์ หรือ การเปลี่ยนแปลงจากความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกันของคณิตศาสตร์พื้นฐานไปสู่ผลลัพธ์ของ การคิดขั้นสูง อย่างกรณีที่คุณเรียนจำเป็นต้องนำสูตรและความรู้ที่มีมาก่อนไปประยุกต์ใช้เพื่อหาคำตอบต่อไป แต่การเปลี่ยนแปลงดังกล่าวก่อให้เกิดความยุ่งยากในกระบวนการคิดของผู้เรียนระดับปริญญาตรีที่ต้องเผชิญ นอกจากนี้ Skemp (1971) ได้แสดงความคิดเห็นถึงการสอนในระดับอุดมศึกษาในปัจจุบันมุ่งเน้นผลผลิตของกระบวนการคิดมากกว่าที่จะคำนึงถึงกระบวนการคิดของผู้เรียน ถ้ามีการจัดการเรียนการสอนเพื่อสนับสนุนให้เกิดการคิดขั้นสูงก็จะเป็นประโยชน์เพื่อพัฒนาวิธีการคิดของผู้เรียนได้ต่อไป

นอกจากนี้ Byness (2001) ได้เสนอแนะถึงความคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนสามารถพิจารณาได้จาก ทักษะเชิงบริบทและการพัฒนาความรู้เชิงในการประยุกต์ใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ การพัฒนาความเข้าใจทางวิธีการเชิงความคิดรวบยอด และวิธีการเรียนรู้ในแนวทางของตนเอง และ Tall (1991; p.3.) เสนอประเด็นวิจัยการสอนและการเรียนรู้การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ เกี่ยวกับความคิดรวบยอดของผู้เรียน การจัดการเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ขั้นสูง และ

บริบทที่เกี่ยวข้องกับการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ ดังนั้น การศึกษาการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนโดยใช้การคิดขั้นสูงภายใต้การปฏิรูปวิธีการสอนหรือกระบวนการสอนมีความสอดคล้องและเกี่ยวข้องกับประเด็นวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในกระบวนการแก้ปัญหาในบริบทการจัดการเรียนการสอนซึ่งทำให้ผู้เรียนเชื่อมโยงความรู้ทางคณิตศาสตร์และคาดหวังให้ผู้เรียนสร้างความรู้ตามศักยภาพของตนเอง สอดคล้องกับการให้ผู้เรียนสร้างวิธีการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ที่เน้นการสร้างความคิดรวบยอดของผู้เรียน

2. คำถามการวิจัย

2.1 การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ นักศึกษามีวิธีการแก้ปัญหาอย่างไร

2.2 การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหา โดยใช้การคิดขั้นสูงมีลักษณะเป็นอย่างไร

3. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

3.1 เพื่อสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหา โดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

3.2 เพื่อศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหา โดยใช้การคิดขั้นสูง

4. ความสำคัญของการวิจัย

4.1 เป็นแนวทางในการจัดเรียนรู้คณิตศาสตร์ให้นักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหา โดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

4.2 เป็นแนวทางในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหา โดยใช้การคิดขั้นสูง

5. ขอบเขตของการวิจัย

5.1 ขอบเขตด้านกลุ่มเป้าหมาย

กลุ่มเป้าหมายของการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ นักศึกษาที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชาแคลคูลัส 1 มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ ศูนย์สุพรรณบุรี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

5.2 ขอบเขตด้านเนื้อหา

เนื้อหาทางด้านคณิตศาสตร์ของการวิจัยครั้งนี้ ได้แก่ เรื่อง การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

5.3 ขอบเขตด้านสถานที่

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ ศูนย์สุพรรณบุรี

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

6. นิยามศัพท์เฉพาะ

6.1 การเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Learning) หมายถึง การเชื่อมโยงระหว่างขั้นตอนที่เป็นกระบวนการกับความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ในขณะที้นักศึกษาแก้ปัญหา

6.2 การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ (Advanced Mathematical Thinking) หมายถึง การเชื่อมโยงวิธีการคิดทางคณิตศาสตร์เพื่อสร้างและพัฒนาไปสู่ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ โดยอาศัยขั้นตอนตามแนวคิดของ Tall (1991) ดังต่อไปนี้

5.2.1 ขั้นการใช้วิธีการเดียว (procedure)

5.2.2 ขั้นการใช้วิธีการที่หลากหลาย (multi-procedure)

5.2.3 ขั้นกระบวนการ (a process)

5.2.4 ขั้นการเกิดแนวคิด (concept)

5.2.5 ขั้นการนำแนวคิดที่ได้ไปใช้ต่อ (revise-concept)

5.2.6 ขั้นการขยายแนวคิด (extension concept)

6.3 การแก้ปัญหา (problem solving) หมายถึง วิธีการคิดด้วยตนเองจากการแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่ตนเองเรียนรู้มาก่อนหน้านี้ วิธีการเรียนรู้ที่นักศึกษานำมาใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งเกิดจากความเข้าใจของนักศึกษาที่มีต่อการแก้ปัญหาและสะท้อนถึงความหมายทางคณิตศาสตร์ที่นักศึกษาร่างขึ้นในการแก้ปัญหา

7. ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย

7.1 ผู้สอนได้เรียนรู้การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ในกระบวนการเรียนรู้จากธรรมชาติการคิดของนักศึกษา

7.2 นักศึกษาได้พัฒนาศักยภาพในการเรียนรู้ด้วยตนเองโดยอาศัยประสบการณ์เกี่ยวกับการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ในกระบวนการเรียนรู้ของนักศึกษา

7.3 เป็นแนวทางการจัดประสบการณ์การเรียนรู้ระดับอุดมศึกษาที่เน้นการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์และกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาให้เกิดขึ้นไปพร้อมๆ กัน

7.4 เป็นแนวทางในการพัฒนาความสามารถของผู้เรียน ให้มีความสามารถตามที่ระบุไว้ในหลักสูตรการศึกษาที่เน้นทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

7.5 เป็นแนวทางในการพัฒนาการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญตามพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2542

บทที่ 2

วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเกี่ยวกับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงได้มี
การศึกษาวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องตามลำดับดังนี้

1. แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
2. แนวคิดเกี่ยวกับวิธีการแบบเปิด
3. แนวคิดเกี่ยวกับการเรียนรู้
4. แนวคิดเกี่ยวกับกิจกรรมคณิตศาสตร์
5. แนวคิดเกี่ยวกับการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์
 - 5.1 ความหมายของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์
 - 5.2 ความสำคัญของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์
6. แนวคิดเกี่ยวกับการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์
 - 6.1 ความหมายของการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์
 - 6.2 ความสำคัญของการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์
 - 6.3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องและแนวคิดของการคิดขั้นสูง
7. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์
8. กรอบแนวคิดการวิจัย

1. แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน

ในการกล่าวถึงการแก้ปัญหาของนักศึกษาในงานวิจัยนี้ เป็นการจัดชั้นเรียนโดยใช้การ
แก้ปัญหเป็นฐานในการสร้างความคิดซึ่งมีการปฏิรูปการเรียนการสอนและเป็นการจัดการเรียนการ
สอนที่ใช้ปัญหาในฐานะการบูรณาการการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (NCTM, 1980, 1989, 2000)

Isoda (1996) กล่าวว่า ครูและนักคณิตศาสตร์ส่วนใหญ่เชื่อว่าปัญหาคณิตศาสตร์
(mathematics problems) เป็นผลมาจากการดำเนินชีวิตประจำวัน ซึ่งเป็นแนวคิดอีกวิธีการหนึ่ง
โดยอาศัยสิ่งที่ทำสืบทอดกันมาของประเทศญี่ปุ่น แต่ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นผลมาจากการสร้าง
สถานการณ์ปัญหาจากสิ่งที่ใกล้ตัวผู้เรียนจึงทำให้เกิดบทเรียนตามลำดับในแนวทางการแก้ปัญหา
ประเทศญี่ปุ่นตั้งแต่ปี ค.ศ. 1960-1969 โดยมีการนิยามสถานการณ์ปัญหาเป็นการเผชิญกับสิ่งที่ไม่
รู้จัก เมื่อเปรียบเทียบกับสิ่งที่เรียนมาก่อน ปัญหาจึงถูกสร้างในลำดับการสอนที่มีการพัฒนาและการ
วางแผนหลักสูตรแล้วทำให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยอาศัยความรู้ที่มีการก่อนหน้า

Isoda (2007) กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ได้มาจากสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน
แต่ในบางครั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ในแต่ละบทเรียนก็ไม่ได้มาจากสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน ส่วน
ใหญ่เป็นส่วนที่ตัดมาจากหนังสือเรียน (textbooks) รวมเล่มต้นแบบงานวิจัยที่ได้รวบรวมไว้
(source books) หนังสือแบบฝึกทักษะ (exercise books) นอกจากนี้ ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มาจาก
หนังสือเรียนหรือหลักสูตรได้ทำให้ผู้เรียนสามารถตระหนักถึงเป้าหมาย บริบท การเลือกและการสร้าง

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยครูจะพยายามซ่อนเป้าหมายของบทเรียนไว้ในสถานการณ์ปัญหาที่เชื่อมโยงกับประสบการณ์ในชีวิตประจำวันของผู้เรียนจากการวางแผนการจัดการเรียนรู้

Isoda, Nobuchi, and Morita (2009) กล่าวว่า สมัยก่อนกระดานดำถูกใช้เพื่อนำเสนอสิ่งต่าง ๆ ที่ครูต้องการจะถ่ายทอดให้ผู้เรียน แต่การที่จะสามารถนำความคิดของผู้เรียนออกมาได้ จำเป็นต้องใช้การนำเสนอแนวคิดของผู้เรียนลงไปในกระดานดำ วิธีการใช้กระดานดำในการแก้ปัญหา และการสรุป จึงต้องมีการวางแผนตั้งประเด็นคำถามจากหัวข้อ มีการคาดการณ์แนวคิดของผู้เรียน วางแผนตำแหน่งที่จะมีการติดแผ่นนำเสนอ มีการคาดการณ์ว่าต้องการให้ผู้เรียนพูดคำสำคัญอะไร คำสำคัญที่ผู้เรียนพูดควรมีการแสดงออกอย่างชัดเจน การเรียงลำดับแนวคิดของผู้เรียนที่เลือกมาจึงสามารถนำไปสู่การสรุปได้อย่างราบรื่น และผู้เรียนสามารถได้แนวคิดที่จะสรุปจากกระดานดำ

Takahashi (2007) กล่าวว่า ความสำคัญของการสอนผ่านการแก้ปัญหาเป็นมากกว่า ปัญหา (task) กับผู้เรียนเพื่อแก้ปัญหาสำหรับสิ่งที่ยังไม่ได้เรียน มีขั้นตอนการหาคำตอบ ตามตารางที่ 1 แสดงความแตกต่างที่สำคัญระหว่างการสอนเกี่ยวกับการแก้ปัญหาที่มีลักษณะง่ายต่อการตีความ เกี่ยวกับแนวทางการแก้ปัญหาสิ่งนี้ได้ข้อเสนอนี้จากการปฏิรูปของสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา

ตารางที่ 1 ความแตกต่างที่สำคัญระหว่างการสอนเกี่ยวกับการแก้ปัญหากับการสอนผ่านการแก้ปัญหา

การสอนเกี่ยวกับการแก้ปัญหา (Teaching of problem solving)	การสอนผ่านการแก้ปัญหา (Teaching through problem solving)
การสอนเกี่ยวกับการแก้ปัญหาคืออะไร? การแก้ปัญหาในฐานะแนวทางที่จะพัฒนาทักษะและยุทธวิธีในการแก้ปัญหา	การสอนผ่านการแก้ปัญหาคืออะไร? การแก้ปัญหาในฐานะเป็นแนวทางที่มีประสิทธิภาพเพื่อนำไปสู่การพัฒนาความคิดรวบยอดและทักษะทางคณิตศาสตร์
วิธีการที่บูรณาการการสอนเกี่ยวกับการแก้ปัญหาลงไปในหลักสูตร โดยทั่วไปบทเรียนที่อาศัยแนวทางนี้สามารถพบข้อสรุปจากการพัฒนาทักษะและยุทธวิธีในการแก้ปัญหา การสรุปบทเรียนเมื่อผู้เรียนแต่ละคนเกิดการแสดงคำตอบของปัญหา (ที่แสดงและพูดคุย)	วิธีการที่บูรณาการการสอนผ่านการแก้ปัญหาลงไปในหลักสูตร บทเรียนที่อาศัยแนวทางนี้สามารถพบตลอดทั้งหลักสูตรเพื่อพัฒนาความคิดรวบยอด ทักษะ และขั้นตอนทางคณิตศาสตร์ การอภิปรายเพื่อเปรียบเทียบคำตอบที่แตกต่างของผู้เรียนเป็นสิ่งที่สำคัญสำหรับผู้เรียนที่ได้มาซึ่งความรู้ใหม่และความเข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

Leikin and Waynberg (2007) กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่มองจากแง่มุมของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ คำตอบที่หลากหลายของการเชื่อมโยงปัญหาต้องอาศัยความเหมือนและความแตกต่างระหว่างการแสดงที่หลากหลายของความคิดรวบยอดที่เหมือนกันระหว่างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่าง ขั้นตอนระหว่างสาขาของคณิตศาสตร์ที่แตกต่างและเครื่องมือที่ได้รับ

การยอมรับเพื่อการพัฒนาการเชื่อมโยงในความรู้ทางคณิตศาสตร์คือการแก้ปัญหาในวิธีที่แตกต่าง (Fennema & Romberg, 1999; Coxford, 1995; NCTM, 2000; Polya, 1973)

Okubo (2007) กล่าวว่า แนวทางของคณิตศาสตร์จากแง่มุมของการได้มาซึ่งแหล่งแรกเริ่มและพื้นฐานความรู้ ทักษะคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียนของประเทศญี่ปุ่นได้พัฒนาความสามารถแก้ปัญหาและส่งเสริมการสร้างวิธีการเรียนรู้ของผู้เรียนที่มีเป้าหมายในการพัฒนามุมมองของการเรียนรู้ทักษะการแก้ปัญหาของผู้เรียนผ่าน 5 ขั้นตอน จากการสร้างวิธีการเรียนรู้ที่เป็นรากฐานและความสำคัญในการสอนของชั้นเรียนคณิตศาสตร์ ดังนี้

(1) การจัดเตรียมปัญหา (problem setting) ปัญหาที่ศึกษาถูกสร้างผ่านการนำเข้าสู่หน่วยของรายวิชา คาบเรียน

(2) การแก้ปัญหา (problem solving) ผู้เรียนพยายามเข้าสู่สถานการณ์และทำความเข้าใจปัญหา

(3) การวางแผนเพื่อหาคำตอบ (solution planning) ผู้เรียนกำหนดตรงไปที่สิ่งที่ต้องการแก้ปัญหาตามความเข้าใจของตนเอง

(4) การดำเนินการเพื่อหาคำตอบ (solution execution) คำตอบไปสู่ปัญหาเป็นความพยายามที่อาศัยการวางแผน การหาคำตอบและการสรุปคร่าว ๆ คือ สิ่งที่ต้องดูความสนใจ

(5) การศึกษาเพื่อหาคำตอบ (solution study) ผู้เรียนประเมินกระบวนการที่พอจะทำได้และประสบความสำเร็จ ชัดเจนที่ซึ่งมีความเข้าใจเพื่อจะสืบเสาะต่อไป

ชุมชนคณิตศาสตร์ศึกษาได้ให้ความสำคัญกับการเชื่อมโยงในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ไปสู่โลกความจริง (real world) (Boaler, 1997; NRC, 1990; NCTM, 2000; Steen, 1997) การเชื่อมโยงโลกความจริงเป็นที่คาดหวังเพื่อประโยชน์ของคนส่วนมาก อย่างเช่น สนับสนุนความเข้าใจความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน (De Lange, 1996; Steen & Forman, 1995) ดังนั้นครูควรนำเสนอปัญหาคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงโลกแห่งความจริง (Ginsburg, 2008) เพื่อช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ตามขีดความสามารถของตนอย่างเต็มศักยภาพ

Takahashi (2006) กล่าวว่า บทเรียนทางคณิตศาสตร์ของญี่ปุ่นตั้งแต่ระดับชั้นประถมศึกษาให้ความสำคัญกับการแก้ปัญหา วิธีการสอนนี้เรียกว่า โครงสร้างการแก้ปัญหาที่ถูกออกแบบเพื่อสร้างความท้าทายในคณิตศาสตร์และกระตุ้นความสร้างสรรค์ในกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ อีกทั้งปัญหาทางคณิตศาสตร์ในหนังสือเรียนญี่ปุ่นส่วนใหญ่ได้แสดงออกมาให้เห็นความเกี่ยวข้องกับการนำเสนอที่สนับสนุนกระบวนการแก้ปัญหาที่ผูกติดกับแนวคิดของผู้เรียนทั้งหมด ดังนั้นเมื่อพิจารณาหนังสือเรียนคณิตศาสตร์ของญี่ปุ่นจะเห็นว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์และกิจกรรมต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นได้ผ่านการวิจัยในชั้นเรียนมาแล้วเพื่อเป้าหมายของการพัฒนาความคิดรวบยอดและทักษะทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน

NCTM (2000) กล่าวว่า การแก้ปัญหาในทางคณิตศาสตร์ศึกษาเป็นการนิยามในฐานะที่มีส่วนร่วมในงาน (task) ซึ่งขั้นตอนของการแสวงหาคำตอบไม่ทราบล่วงหน้า และการเชื่อมโยงในฐานะที่เป็นเครื่องมือการแก้ปัญหาเพื่อสนับสนุนการใช้การเชื่อมโยงในการแก้ปัญหาซึ่งทำให้เกิดการสร้างหรือเลือกสถานการณ์ปัญหาที่มีคุณค่าในเชิงการสอน

Hodgson (1995) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ทำหน้าที่เป็นเครื่องมือในกระบวนการแก้ปัญหา สิ่งที่สำคัญของมุมมองนี้เกี่ยวข้องกับผลลัพธ์ของการเชื่อมโยงในการสอน คือ กิจกรรมในชั้นเรียนที่ต้องเตรียมการสำหรับผู้เรียนเพื่อสร้างการเชื่อมโยงใหม่และใช้สำหรับการเชื่อมโยงในสภาพแวดล้อมการแก้ปัญหา เนื่องจากผู้เรียนสามารถแก้ปัญหาได้ด้วยตนเองความสามารถสร้างการเชื่อมโยง ถ้าผู้เรียนไม่สามารถสร้างการเชื่อมโยง ดังนั้น การเชื่อมโยงไม่สามารถแสดงบทบาทในการแก้ปัญหา

Stigler and Hiebert (1999) กล่าวว่า การวิเคราะห์การเปรียบเทียบบทเรียนในประเทศสหรัฐอเมริกา ประเทศเยอรมันและประเทศญี่ปุ่น พบว่า การส่งเสริมแนวคิดเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบที่หลากหลายต่อปัญหา ได้ส่งเสริมคุณภาพของบทเรียนเมื่อแก้ปัญหาในวิธีการที่แตกต่างกัน การสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่สนับสนุนโดยการเปลี่ยนระหว่างการแสดงแทน ยุทธวิธีการเปรียบเทียบและการเชื่อมโยงความคิดรวบยอดและแนวคิดที่แตกต่าง (Fennema & Romberg, 1999; Silver et al., 2005)

Schoenfeld (1989) กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ช่วยให้ผู้เรียนยอมรับความท้าทายของปัญหาจนกว่าจะต้องการแก้ปัญหาด้วยตัวเอง การสร้างบรรยากาศที่สนับสนุนการแก้ปัญหาให้กับผู้เรียนได้มีความพร้อมในการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคย ไม่กลัวเมื่อติดขัดขณะแก้ปัญหา ผู้เรียนมีโอกาสแก้ปัญหาในแนวทางของตนเอง ครูต้องสอนวิธีการทำงาน เช่น ให้ผู้เรียนคิดกับสิ่งที่ทำการอภิปรายร่วมกันเกี่ยวกับกระบวนการที่เกี่ยวข้องในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ผู้เรียนได้สะสมสิ่งที่ต้องใช้ในการแก้ปัญหาซึ่งผู้เรียนจะเรียนรู้ได้มากขึ้น ถ้าครูพยายามให้ความสนใจยุทธวิธีหรือกระบวนการที่เกี่ยวข้อง

Schoenfeld (1985) นำเสนอมุมมองการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพื่อความเข้าใจและการสอนคณิตศาสตร์ควรดำเนินการในฐานะขอบเขตการแก้ปัญหาและจำแนกเกี่ยวกับความรู้หรือทักษะเป็นสิ่งที่จำเป็นในความสำเร็จในคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 4 อย่าง ดังนี้

- (1) ทรัพยากรเชิงการรู้ (resources) ข้อเสนอและความรู้เชิงขั้นตอนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์
- (2) สิ่งที่ช่วยในการแก้ปัญหา (heuristics) ยุทธวิธีและเทคนิคที่สนับสนุนการแก้ปัญหา เช่น การมองย้อนกลับหรือ การวาดภาพ
- (3) การควบคุม (control) การตัดสินใจเกี่ยวกับการใช้ทรัพยากรเชิงการรู้และยุทธวิธี ใช้ทรัพยากรเชิงการรู้เมื่อไร และยุทธวิธีอะไร
- (4) ความเชื่อ (beliefs) มุมมองทางคณิตศาสตร์เพื่อกำหนดวิธีการแก้ปัญหา

Polya (1973) กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่มีเนื้อหาสาระ กระบวนการในการแสวงหาความรู้ที่ผู้เรียนไม่คุ้นเคยมาก่อนและไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที การหาคำตอบจะต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์และศาสตร์อื่น ๆ รวมกับความสามารถด้านการวิเคราะห์ การสังเคราะห์ และการตัดสินใจ การเรียนและการสอนเกี่ยวกับการแก้ปัญหาจึงเป็นการฝึกให้ผู้เรียนมีวิธีการที่ดีในการแก้ปัญหามากกว่าที่จะสอนให้ผู้เรียนรู้ตอบของ

ปัญหาโดยพยายามส่งเสริมให้ผู้เรียนค้นพบรูปแบบหรือวิธีการแก้ปัญหาด้วยตนเอง นั่นคือ เน้นทักษะ และกระบวนการคิดของผู้เรียน กระบวนการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่นิยมใช้กันอย่างแพร่หลาย คือ เทคนิควิธีสอนแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจโจทย์ (understanding the problem)

ขั้นนี้เป็นการวิเคราะห์ประเด็นปัญหาว่า โจทย์ต้องการทราบอะไร โจทย์ให้ข้อมูลอะไรบ้าง โดยเริ่มจากให้ผู้เรียนอ่านโจทย์ปัญหา พิจารณา และบอกรายละเอียดทั้งหมดตามความเข้าใจของผู้เรียนเอง

ขั้นที่ 2 วางแผนการแก้ปัญหา (devising a plan)

ขั้นนี้ผู้แก้ปัญหาอาจพิจารณาว่าเคยพบปัญหานี้มาก่อนหรือไม่ หรือเคยเห็นปัญหาที่เหมือน ๆ กันหรือคล้ายคลึงกันบ้างหรือไม่ ผู้แก้ปัญหาเห็นความเกี่ยวข้องในปัญหานี้หรือไม่ รู้ทฤษฎีอะไรที่จะนำมาช่วยในการแก้ปัญหาหรือไม่ พิจารณาสถานการณ์ที่โจทย์ถามหรือตัวไม่ทราบค่าเปรียบเทียบกับปัญหาที่คุ้นเคยที่มีตัวไม่ทราบค่าเหมือนกันหรือคล้ายคลึงกัน พิจารณาวางแผนนำปัญหาที่คุ้นเคยนั้นมาช่วยในการแก้ปัญหาใหม่ได้หรือไม่ นำผลที่ได้จากปัญหาก่อน ๆ มาแก้ปัญหานี้ได้หรือไม่ ผู้แก้ปัญหานี้จะใช้วิธีอะไรแจกแจงสิ่งที่สามารถนำมาช่วยแก้ปัญหา

ขั้นที่ 3 ปฏิบัติตามแผนที่วางไว้ (carrying out the plan)

ขั้นนี้ผู้แก้ปัญหาดำเนินการตามแผนโดยเริ่มต้นตรวจสอบแต่ละขั้นของแผน ปรับปรุงแผน แล้วลงมือปฏิบัติจนสามารถหาคำตอบได้

ขั้นที่ 4 การตรวจสอบ (looking back)

ขั้นนี้เป็นการตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้ปัญหาว่าถูกต้องหรือไม่ ครูผู้สอนควรจัดกิจกรรมให้ผู้เรียนได้มองย้อนกลับไปทบทวนและตรวจสอบขั้นตอนต่าง ๆ ที่ผ่านมา โดยพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบ และพิจารณาว่าน่าจะมีคำตอบอื่นหรือวิธีการคิดเป็นอย่างอื่นได้อีกหรือไม่

จากการศึกษาค้นคว้าข้างต้นสรุปได้ว่า การแก้ปัญหามustเริ่มต้นพิจารณาจากปัญหาทางคณิตศาสตร์มาจากไหน การนำเสนอปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงโลกแห่งความจริง หรือสิ่งที่ใกล้ตัวผู้เรียน สิ่งที่คุณเรียนคุ้นเคยจะช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ตามขีดความสามารถของตนอย่างเต็มศักยภาพ แนวคิดที่นำมาใช้ในงานวิจัยนี้ ได้แก่ การพิจารณาปัญหาทางคณิตศาสตร์จากความคุ้นเคยที่อยู่ในชีวิตประจำวันของผู้เรียน การแก้ปัญหามustเป็นวิธีการหรือแนวทางที่แต่ละคนจะเข้าสู่ปัญหา ค้นหาวิธีการแก้ปัญหาจากทรัพยากรเชิงการรู้ที่ตนเองมีอยู่ อภิปรายร่วมกับสมาชิกภายในกลุ่ม และทั้งชั้นเรียนไม่ได้พิจารณาการแก้ปัญหามustในฐานขั้นตอน (method) การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ทำหน้าที่ในฐานะเป็นเครื่องมือในกระบวนการแก้ปัญหาซึ่งเครื่องมือที่ผู้เรียนใช้ไม่ใช่เพียงแค่ในเชิงกายภาพยังรวมถึงในทางความคิดด้วย และการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์จำเป็นต้องอาศัยการคิดพื้นฐานเพื่อพัฒนาไปสู่การสร้างความรู้ หรือการคิดขั้นสูงจำเป็นต้องสะสมความรู้ที่ได้เรียนมาก่อนหน้านั้นเพื่อสร้างความรู้ใหม่

2. แนวคิดเกี่ยวกับวิธีการแบบเปิด

การศึกษาเกี่ยวกับวิธีการแบบเปิดเพื่อสนับสนุนทั้งกิจกรรมเชิงสร้างสรรค์ของผู้เรียนและแนวทางในการคิดทางคณิตศาสตร์ระหว่างการแก้ปัญหาที่ผู้เรียนสามารถดำเนินการได้ตามศักยภาพของผู้เรียนเอง ดังนี้

Nohda (1983) กล่าวว่า วิธีการแบบเปิดได้เน้นปัญหาที่ไม่สิ้นสุดที่คำตอบเดียวและไม่ใช้วิธีการเดียวในการเข้าสู่ปัญหาหนึ่งๆ ถือเป็นแง่มุมที่สำคัญของวิธีการแบบเปิด ลักษณะของชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิด คือ มีการอภิปรายเกี่ยวกับแนวคิดและแง่คิดที่หลากหลายของผู้เรียนสามารถพัฒนาแนวคิดและแง่คิดที่หลากหลายผ่านประสบการณ์เพื่อให้ผู้เรียนทุกคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ในแนวทางที่ตอบสนองความสามารถของผู้เรียนขยายต่อกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ อีกทั้งยังเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้เรียนรู้อย่างเต็มตามศักยภาพ ความชัดเจนอีกอย่างหนึ่งสำหรับการเรียนคณิตศาสตร์ ผู้เรียนส่วนมากสามารถเรียนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นได้ด้วยตัวเองเมื่อถึงชั้นมัธยมศึกษาปลายกลับรู้สึกว้าไม่มีความจำเป็นที่จะต้องเรียนเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เกินระดับมัธยมศึกษา ซึ่งสิ่งนี้น่าจะเป็นผลมาจากลักษณะของคณิตศาสตร์ที่มันยาก ไม่ว่าจะเป็นเรื่องความเป็นโครงสร้าง ความเป็นนามธรรม หรือความที่ต้องมีกฎเกณฑ์มากมาย

การสอนโดยใช้วิธีการแบบเปิดยึดหลักการ 3 ประการ ดังนี้

(1) มีความสัมพันธ์กับความเป็นอิสระของกิจกรรมของผู้เรียน นั่นคือ ต้องตระหนักในคุณค่าของกิจกรรมของผู้เรียนโดยที่จะพยายามไม่เข้าไปสอดแทรกโดยไม่จำเป็น

(2) มีความสัมพันธ์กับธรรมชาติของความรู้ทางคณิตศาสตร์ในเชิงวิวัฒนาการและเชิงบูรณาการ เนื่องจากเนื้อหาคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่เปราะบางและมีความเป็นทฤษฎี ดังนั้นความรู้เรื่องใดเรื่องหนึ่งยังมีความสำคัญมากเท่าใดก็ยิ่งทำให้เกิดความรู้ที่มีลักษณะเชิงอุปมา มีความพิเศษและความเป็นลักษณะต่างๆ ไปมากขึ้นเท่านั้น

(3) มีความสัมพันธ์กับการตัดสินใจที่มีประโยชน์ต่อครูในชั้นเรียนคณิตศาสตร์บ่อยครั้งที่ครูต้องเผชิญกับแนวคิดของผู้เรียนที่ครูไม่ได้คาดการณ์มาก่อน ครูต้องมีบทบาทสำคัญในการทำให้แนวคิดเหล่านั้นมีบทบาทอย่างเต็มที่ในชั้นเรียน โดยทำอย่างไรให้ผู้เรียนคนอื่นจะสามารถเข้าใจความคิดได้แท้จริง รวมถึงแนวคิดที่ไม่ได้คาดการณ์มาก่อน

Becker and Shimada (1997) ได้ให้ความสำคัญของวิธีการแบบเปิดว่าเป็นปัญหาที่ถูกสร้างให้มีคำตอบที่ถูกต้องหลากหลายคำตอบ การเรียนการสอนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์แบบเดิม เมื่อผู้เรียนถูกตั้งคำถามเพื่อเน้นหรือพัฒนาขั้นตอนวิธีการ (methods) แนวทาง (ways) หรือวิธี (approaches) ในการได้คำตอบของปัญหาที่กำหนดให้จะไม่ใช้การหาคำตอบของปัญหา ในความหมายของวิธีการแบบเปิด ผู้เรียนกำลังเผชิญหน้าและลงมือกับปัญหาปลายเปิด เมื่อตั้งคำถามให้หาสิ่งที่ไม่ใช่คำตอบ แต่เป็นวิธีการไปถึงคำตอบ จึงไม่ได้มีอยู่เพียงวิธีการเดียวแต่มีอยู่หลากหลายอย่าง ชั้นเรียนจะดำเนินไปโดยใช้คำตอบที่ถูกต้องหลายๆ คำตอบที่มีต่อปัญหาที่กำหนดให้ เพื่อจัดเตรียมประสบการณ์ในการค้นหาสิ่งใหม่ๆ กระบวนการที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนนั้น สิ่งใหม่ๆ ที่เกิดขึ้นเป็นการรวมความรู้ (knowledge) ทักษะ (skills) หรือวิธีคิด (ways of thinking) ที่แต่ละคนได้เรียนรู้มาก่อนหน้านี้ จุดมุ่งหมายและกระบวนการเป็นจุดประสงค์ที่แสดงการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ศึกษาเกิดขึ้นได้อย่างเป็นธรรมชาติในชั้นเรียนหรือในชีวิตประจำวันของผู้เรียน

Sawada (1997) กล่าวว่า ประโยชน์ของการแก้ปัญหาโดยใช้ปัญหาปลายเปิด ดังนี้

- (1) ผู้เรียนมีส่วนร่วมในบทเรียนอย่างกระตือรือร้น แสดงวิธีคิดได้อย่างอิสระ ซึ่งเป็นการสนับสนุนให้เกิดวิธีการคิดที่หลากหลาย ผู้เรียนแต่ละคนได้มีโอกาสแสดงวิธีคิดของตนเองรวมทั้งได้เรียนรู้วิธีการคิดของคนอื่น เพื่อสามารถนำคำตอบมาอภิปรายและเปรียบเทียบกัน
- (2) ผู้เรียนใช้ความรู้ ความเข้าใจ ทักษะการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ เนื่องจากมีการเข้าสู่วิธีการหาคำตอบจากกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ได้อย่างหลากหลาย
- (3) ผู้เรียนแต่ละคนสามารถเข้าร่วมกิจกรรมในชั้นเรียนตามที่ตนเองสนใจและมีความถนัด เกี่ยวกับปัญหาปลายเปิด จึงทำให้ผู้เรียนมีโอกาสค้นพบคำตอบด้วยตนเอง
- (4) ผู้เรียนได้รับการจัดบทเรียนให้มีประสบการณ์ในการคิดอย่างมีเหตุผลผ่านการอภิปรายและเปรียบเทียบในชั้นเรียน ผู้เรียนได้รับแรงจูงใจภายในที่จะนำเสนอเหตุผลในวิธีคิดให้แก่ผู้อื่น
- (5) ผู้เรียนมีประสบการณ์ในการค้นพบและเรียนรู้จากกลุ่มเพื่อนในการแสดงวิธีการคิด สิ่งที่ยากมาก คือการตั้งคำถามให้มีประสิทธิภาพ การพัฒนาสถานการณ์ปัญหาให้มีความหมาย และการสรุปบทเรียน

Nohda (2000) กล่าวว่า ปัญหาปลายเปิดมีลักษณะเป็นสถานการณ์ปัญหาที่เปิดโอกาสให้ผู้เรียนสามารถแก้ปัญหาได้เต็มศักยภาพเนื่องจากผู้เรียนสามารถสร้างปัญหาของตนเองได้จากสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดที่กำหนดให้และเปิดโอกาสให้ผู้เรียนสามารถมีประสบการณ์ที่ยาวนานในการแก้ปัญหาแต่ละครั้ง การอาศัยความหมายของวิธีการแบบเปิดที่จำแนกปัญหาปลายเปิดออกได้เป็น 3 ชนิด ซึ่งแต่ละชนิดมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

- (1) กระบวนการเปิด ปัญหาชนิดนี้มีแนวทางในการแก้ปัญหาซึ่งเป็นปัญหาค้นคว้าที่กำหนดให้ได้อย่างหลากหลาย แน่นอนว่าปัญหาคณิตศาสตร์ทุกปัญหาต่างก็เป็นปัญหาปลายเปิดโดยนัยนี้ อย่างไรก็ตามประเด็นที่น่าสนใจก็คือ โดยทั่วไปปัญหาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนจะเน้นการพิจารณาคำตอบเพียงคำตอบเดียว รวมทั้งไม่ได้เน้นแง่มุมเชิงกระบวนการของปัญหา
- (2) ผลลัพธ์เปิด ปัญหาปลายเปิดชนิดนี้มีคำตอบที่ถูกต้องหลากหลาย
- (3) แนวทางการพัฒนาปัญหาปลายเปิด หลังจากผู้เรียนได้แก้ปัญหาไปแล้ว ผู้เรียนสามารถพัฒนาไปเป็นปัญหาใหม่ด้วยการเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขหรือองค์ประกอบของปัญหาเดิม

การประเมินกิจกรรมของผู้เรียนในการสอนที่ใช้วิธีการแบบเปิดเป็นสิ่งที่มีความสำคัญเนื่องจากเป้าหมายของวิธีการแบบเปิดไม่ต้องการได้คำตอบที่ถูกต้องอย่างเดียวยวบรวมถึงเพื่อส่งเสริมแนวคิดทางคณิตศาสตร์และการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่อาศัยจากแนวทางของการได้มาซึ่งคำตอบที่หลากหลาย เช่น แนวทางการแก้ปัญหาของแต่ละคน แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ผู้เรียนแต่ละคนค้นพบ การนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน

Isoda (2010) กล่าวว่า การจัดการเรียนและการสอนในชั้นเรียนที่ใช้วิธีการแบบเปิดเน้นการแก้ปัญหาในฐานะแนวทางการสอน (problem-solving as teaching approach) เริ่มต้นจากการพิจารณาความแตกต่างระหว่างปัญหาและสิ่งที่เป็นปัญหา ดังนี้ ปัญหา คือ งานที่กำหนดให้โดยครูและ การทำให้เป็นปัญหา คือ ปัญหาที่เกิดจากผู้เรียน การสร้างปัญหาเป็นสิ่งสำคัญเนื่องจากในชั้นเรียนซึ่งปัญหาที่จะช่วยผลักดันให้ผู้เรียนเข้าสู่สถานการณ์ปัญหาเพื่อดึงแนวคิดของผู้เรียนว่าอธิบายอย่างไร ส่งเสริมให้เข้าสู่วิธีการคิด ปัญหาที่ครูนำเสนอให้กับผู้เรียนจึงเป็นสิ่งสำคัญในการทำ

ให้ปัญหานั้นเป็นของผู้เรียน บทบาทของครูต้องพยายามรวบรวมแนวคิดของผู้เรียนในชั้นของการเรียนรู้ด้วยตนเองของผู้เรียนจากฐานการคิดของความหลากหลายทั้งในส่วนของการตอบของปัญหา กระบวนการแก้ปัญหา จนกระทั่งสามารถพัฒนาไปเป็นปัญหาอื่นได้ ครูต้องพยายามให้ความสำคัญกับแนวคิดของผู้เรียนทุกแนวคิดและเชื่อมโยงแนวคิดต่างๆจากการอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นที่ใช้กระดานดำที่แสดงถึงการแก้ปัญหาและสรุปให้เห็นในคาบนั้น มีการดำเนินกิจกรรมการเรียนการสอนและสามารถส่งเสริมการเรียนรู้ของผู้เรียนเนื่องจากในส่วนของกระดานดำที่แสดงให้เห็นว่าปัญหาคืออะไร ผู้เรียนมีแนวคิดอย่างไร ครูพยายามสรุปเชื่อมโยงเพื่อให้ผู้เรียนหากรณีทั่วไป กฎ สูตรทางคณิตศาสตร์

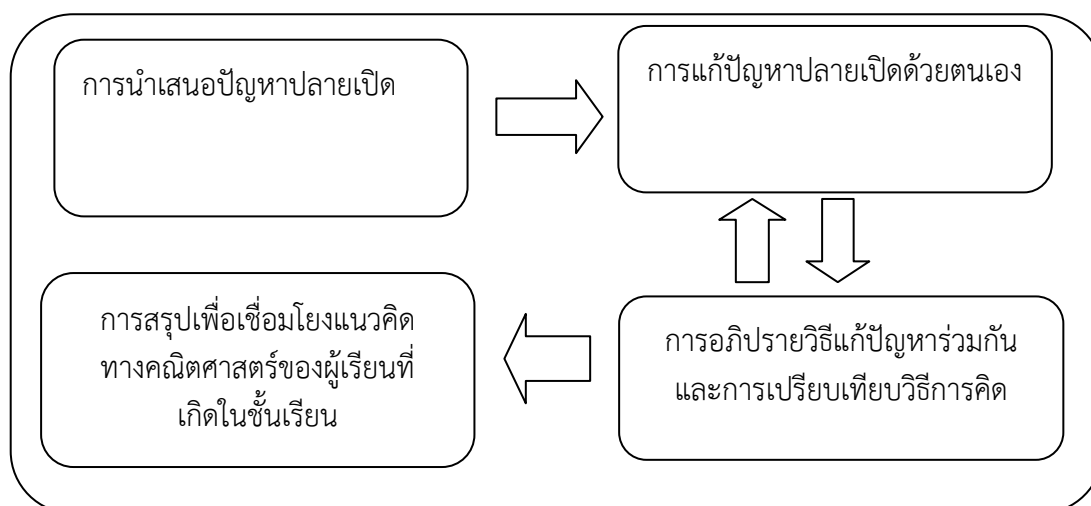
Inprasitha (2010) กล่าวว่า วิธีการแบบเปิด 4 ขั้นของลำดับวิธีการสอนในชั้นเรียนที่เน้นการแก้ปัญหา ตามภาพที่ 1 ประกอบด้วย

ขั้นที่ 1 การนำเสนอปัญหาปลายเปิดโดยครูนำเสนอปัญหาปลายเปิดพร้อมสื่อให้ผู้เรียนและผู้เรียนทำความเข้าใจปัญหาปลายเปิด

ขั้นที่ 2 การแก้ปัญหาปลายเปิดเป็นชั้นของการเรียนรู้ด้วยตนเองจากการแก้ปัญหาปลายเปิดด้วยวิธีการที่หลากหลาย และครูรวบรวมวิธีการแก้ปัญหาปลายเปิดของผู้เรียน

ขั้นที่ 3 การอภิปรายวิธีแก้ปัญหาร่วมกันและการเปรียบเทียบวิธีการคิดโดยผู้เรียนนำเสนอวิธีการแก้ปัญหาปลายเปิดและครูพยายามให้ความสำคัญกับแนวคิดของผู้เรียนทุกแนวคิดและเชื่อมโยงแนวคิดต่างๆ

ขั้นที่ 4 การสรุปเพื่อเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่เกิดในชั้นเรียน การสรุปเพื่อเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนที่เกิดในชั้นเรียนโดยครูพยายามสรุปเชื่อมโยงเพื่อให้ผู้เรียนหากรณีทั่วไป กฎ สูตรทางคณิตศาสตร์ จากนั้นให้ผู้เรียนบันทึกแนวคิดที่เกิดขึ้นบนกระดานหรือชั้นเรียนลงในสมุดด้วยภาษาของตนเอง



ภาพที่ 1 วิธีการแบบเปิด 4 ขั้นตามลำดับวิธีการสอนในชั้นเรียน ที่เน้นการแก้ปัญหาโดย Inprasitha (2010)

จากการศึกษาค้นคว้าข้างต้นสรุปได้ว่าการสอนโดยใช้วิธีการแบบเปิดมีเป้าหมายเพื่อให้ผู้เรียนทุกคนสามารถเรียนคณิตศาสตร์ในแนวทางที่ตอบสนองความสามารถควบคู่ไปกับระดับการ

ตัดสินใจด้วยตนเองในการเรียนรู้และสามารถขยายหรือเพิ่มเติมคุณภาพของกระบวนการและผลที่เกิดขึ้นเกี่ยวกับคณิตศาสตร์และให้ได้แนวคิดที่หลากหลายออกมาแต่ไม่ได้หยุดยั้งแค่นั้น เพื่อเปรียบเทียบและให้เกิดการนำเสนอที่หลากหลายซึ่งสามารถผลักดันผู้เรียนให้เกิดการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ด้วยตัวเองและค่อยๆ เปลี่ยนชั้นเรียนไปที่ระดับที่จะทำให้ผู้เรียนเรียนรู้ได้ด้วยตนเองหรือกล่าวได้ว่าครูที่ใช้วิธีการแบบเปิดในการสอนจำเป็นที่จะต้องพยายามเข้าใจแนวคิดของผู้เรียนให้มากที่สุด วิธีการเลือกแนวคิดของผู้เรียนไม่ได้รอให้แนวคิดของผู้เรียนสมบูรณ์ มีความตั้งใจไม่ให้เป็นแนวคิดที่จะนำมาขยายนั้นสมบูรณ์ เพราะว่าผู้เรียนจะมีตำแหน่งได้ย้อนกลับไปคิดอีกครั้งและเป็นประเด็นที่จะทำให้ครูนำไปอภิปรายร่วมกันทั้งชั้นเรียน ทำให้แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนในกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ขึ้นไปอยู่ในระดับสูงขึ้นโดยเปิดโอกาสให้ผู้เรียนใช้การเจรจาต่อรองความหมายกับผู้เรียนคนอื่น ครูที่ใช้วิธีการแบบเปิดต้องพยายามสนับสนุนให้ผู้เรียนได้มีการบริหารจัดการตนเอง เพื่อขยายต่อกิจกรรมในเชิงคณิตศาสตร์ และที่สำคัญเป็นแนวทางการสอนที่ทำให้บรรลุวัตถุประสงค์ ผู้เรียนสนุกสนานกับการเรียนแต่ก็ต้องไปถึงวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้แนวคิดที่นำมาใช้ในงานวิจัยซึ่งอยู่ในบริบทชั้นเรียนของประเทศไทยในช่วง ปี พ.ศ. 2549 - 2551 วิธีการแบบเปิดเน้นที่ความหลากหลายของวิธีการและคำตอบไม่ได้กำหนดเวลาการแก้ปัญหาของผู้เรียน ปี พ.ศ. 2552 - 2553 วิธีการแบบเปิดเน้นลำดับวิธีการสอน 4 ขั้นในชั้นเรียนที่เน้นการแก้ปัญหาในฐานะแนวทางการสอนตามแนวคิด Inprasitha (2010) กำหนดเวลาในการแก้ปัญหาของผู้เรียนอย่างชัดเจน

3. แนวคิดเกี่ยวกับการเรียนรู้

ในการกล่าวถึงทฤษฎี แนวคิดเกี่ยวกับการเรียนรู้ และการเปลี่ยนกระบวนการทัศนการเรียนรู้ในงานวิจัยนี้เป็นการศึกษาทฤษฎี แนวคิดเกี่ยวกับการเรียนรู้เป็นพื้นฐานสำคัญที่สามารถช่วยให้เข้าใจแนวคิดใหม่ๆ ในการเรียนรู้ของมนุษย์เริ่มตั้งแต่อดีตของมนุษย์ในแต่ละยุค ผู้วิจัยจำแนกเป็น 3 กลุ่มดังต่อไปนี้

3.1 ทฤษฎีเกี่ยวกับการเรียนรู้ช่วงก่อนคริสต์ศตวรรษที่ 20

3.1.1 ทฤษฎีของกลุ่มที่เน้นทางด้านสมองหรือสติปัญญา (Mental Discipline)
เชื่อว่า สมองหรือสติปัญญาสามารถพัฒนาโดยการฝึกฝนโดยให้บุคคลเรียนรู้สิ่งที่ยากๆ ยิ่งยากมากเท่าไรสมองจะได้รับการฝึกให้แข็งแกร่งขึ้นเท่านั้น หลักการในการจัดการเรียนการสอนตามทฤษฎีนี้จึงเน้นการพัฒนาให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้โดยการกระตุ้นความรู้ในตัวผู้เรียนให้แสดง วิธีการสอนทฤษฎีของกลุ่มที่เน้นทางด้านสมองหรือสติปัญญา ได้แก่ วิธีการสอนแบบโสเครติส และวิธีการสอนแบบบรรยาย (Bigge, 1964) เป็นวิธีการสอนที่ใช้คำถามเพื่อดึงความรู้ในตัวผู้เรียนออกมาให้กระจ่างชัดและช่วยเพิ่มประสบการณ์ให้แก่ผู้เรียนเป็นวิธีการสอนที่ช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ได้ดี

3.1.2 ทฤษฎีของกลุ่มที่เน้นการพัฒนาตามธรรมชาติ (Natural Unfoldment)
เชื่อว่า ธรรมชาติเป็นแหล่งเรียนรู้ที่สำคัญผู้เรียนควรเรียนรู้ไปตามธรรมชาติ การใช้ของจริงเป็นสื่อในการสอนจะช่วยให้เด็กเรียนรู้ได้ดี การเล่นเป็นการเรียนรู้ที่สำคัญของผู้เรียน การจัดการศึกษาควรพิจารณาระดับของอายุเป็นหลัก การจัดการเรียนการสอนตามทฤษฎีนี้เน้นการจัดประสบการณ์เรียนรู้ให้แก่ผู้เรียนและต้องมีความแตกต่างไปจากผู้ใหญ่ยึดผู้เรียนเป็นศูนย์กลางให้อิสระภาพเพื่อเรียนรู้ตาม

ความต้องการและความสนใจของแต่ละบุคคล คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคลและความพร้อมของผู้เรียน (ทศนา แชนนี, 2551: p. 47)

3.1.3 ทฤษฎีของกลุ่มที่เน้นการรับรู้และการเชื่อมโยงความคิด (Apperception) เชื่อว่า การเรียนรู้เกิดจากแรงกระตุ้นภายนอกหรือสิ่งแวดล้อม การเรียนรู้เกิดจากการที่บุคคลได้รับประสบการณ์ผ่านทางประสาทสัมผัสทั้ง 5 และความรู้สึก คือ การตีความหรือแปลความหมายจากการสัมผัส การจัดการเรียนและการสอนตามทฤษฎีนี้เน้นให้ผู้เรียนได้รับประสบการณ์ผ่านทางประสาทสัมผัสทั้ง 5 และสร้างความสัมพันธ์ระหว่างความรู้เดิมกับความรู้ใหม่ซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจได้เป็นอย่างดี (Bigge, 1964: p. 40)

จากการศึกษาทฤษฎีเกี่ยวกับการเรียนรู้ช่วงก่อนคริสต์ศตวรรษที่ 20 การจัดการเรียนรู้ให้กับผู้เรียน อาศัยแนวคิดเกี่ยวกับวิธีการสอนแบบบรรยายซึ่งบทบาทของครูจะเป็นผู้บรรยาย ผู้บอก ผู้สาธิต เกี่ยวกับเนื้อหาทางด้านคณิตศาสตร์อันก่อให้เกิดการเรียนรู้ของผู้เรียนซึ่งมองในส่วนของผลลัพธ์ที่ผู้เรียนได้มาในลำดับสุดท้าย ไม่ได้เน้นกระบวนการให้ผู้เรียนได้แสวงหาความรู้ได้ด้วยตนเอง ซึ่งสอดคล้องกับชั้นเรียนของประเทศไทยในปัจจุบัน และแนวคิดที่นำมาใช้ในงานวิจัยนี้ ได้แก่ ความเชื่อในเรื่องความรู้ต้องมีการอ้างเหตุผลสนับสนุนจากประสบการณ์ทางประสาทสัมผัส ระดับอายุของผู้เรียนในการเรียนรู้ การคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล การให้อิสระภาพเพื่อเรียนรู้ตามความต้องการและความสนใจของแต่ละบุคคล

3.2 ทฤษฎีเกี่ยวกับการเรียนรู้ในช่วงคริสต์ศตวรรษที่ 20

3.2.1 ทฤษฎีการเรียนรู้กลุ่มพฤติกรรมนิยม (Behaviorism)

นักวิชาการกลุ่มนี้มองธรรมชาติของมนุษย์มีลักษณะเป็นกลาง การกระทำของมนุษย์เกิดจากอิทธิพลสิ่งแวดล้อมภายนอกเป็นตัวกำหนดพฤติกรรมของบุคคล (Baruque & Melo, 2004)

การเรียนรู้เกิดจากการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้าและการตอบสนอง กลุ่มพฤติกรรมนิยมให้ความสนใจกับพฤติกรรมมาก เพราะพฤติกรรมเป็นสิ่งที่เห็นได้ชัด สามารถวัดและทดสอบได้ (Schoenfeld, 1987: p.5) ทฤษฎีนี้ ประกอบด้วย แนวคิดที่สำคัญ 3 แนวคิด ดังนี้

1) ทฤษฎีการเชื่อมโยงของ Thorndike (Thorndike's Classical Connectionism) ธอร์นไคค์เป็นนักจิตวิทยาชาวอเมริกัน กล่าวว่า ความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งเร้า (stimulus) กับการตอบสนอง (response) การเรียนรู้เกิดจากการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้าและการตอบสนองโดยบุคคลจะลองผิดลองถูกในรูปแบบต่าง ๆ จนกว่าจะเป็นที่พอใจ ตามภาพที่ 2 (Klausmeier, 1985)



ภาพที่ 2 ทฤษฎีการเชื่อมโยงของ Thorndike

จากภาพที่ 2 ถ้ามีสิ่งเร้า (S) มาทำให้เกิดการเรียนรู้ บุคคลจะเลือกตอบสนองเป็น $R_1 R_2 \dots R_n$ จนเป็นที่พอใจที่สุด การตอบสนองไม่เหมาะสมจะถูกขจัดทิ้งไปเหลือเพียงการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้า (S) และการตอบสนอง (R) ซึ่งให้ผลเป็นที่พอใจเท่านั้น

Klausmeier (1985) กล่าวว่า การเรียนรู้ตามทฤษฎีการเชื่อมโยง ประกอบด้วย กฎแห่งความพร้อม (Law of Readiness) คือ สภาพความพร้อมของผู้เรียนทั้งทางร่างกายและจิตใจ ความพร้อมทางร่างกาย หมายถึง ความพร้อมทางวุฒิภาวะและอวัยวะต่าง ๆ ของร่างกาย ความพร้อมทางด้านจิตใจ เป็นความพร้อมที่เกิดจากความพึงพอใจเป็นสำคัญ ถ้าเกิดความพึงพอใจย่อมนำไปสู่การเรียนรู้ ถ้าเกิดความไม่พอใจจะทำให้ไม่เกิดการเรียนรู้ หรือทำให้การเรียนรู้หยุดชะงัก กฎการฝึกหัด (law of exercise) คือ การสร้างความมั่นคงการเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้ากับการตอบสนอง ที่ถูกต้อง โดยการฝึกกระทำซ้ำบ่อย ๆ ย่อมทำให้เกิดการเรียนรู้ได้นานและคงทนถาวร แบ่งเป็นกฎย่อยได้แก่ กฎแห่งการใช้ (law of use) เมื่อเกิดความเข้าใจหรือเรียนรู้แล้วจะมีการกระทำหรือนำสิ่งที่เรียนรู้ไปใช้บ่อย ๆ จะทำให้การเรียนรู้นั้นคงทนถาวร และ กฎแห่งการไม่ใช้ (law of disuse) เมื่อเกิดความเข้าใจหรือเรียนรู้แล้วไม่ได้กระทำซ้ำจะทำให้การเรียนรู้นั้นไม่คงทนถาวร ในที่สุดเกิดการลืมจนไม่เรียนรู้ กฎแห่งผลที่ได้รับ (law of effect) คือ ผลที่ได้รับเมื่อบุคคลแสดงพฤติกรรมการเรียนรู้แล้ว ถ้าได้รับผลที่พึงพอใจ บุคคลย่อมอยากเรียนรู้ต่อไปอีก แต่ถ้าได้รับผลที่ไม่พึงพอใจบุคคลไม่ยอมเรียนรู้หรือเกิดความเบื่อหน่ายต่อการเรียนรู้ ดังนั้น ถ้าทำให้การเชื่อมโยงระหว่างสิ่งเร้ากับการตอบสนองมีความมั่นคงต้องให้ผู้เรียนได้รับผลที่พึงพอใจ

2) ทฤษฎีเกี่ยวกับการวางเงื่อนไข (Conditioning Theory) มี 4 ทฤษฎี ดังนี้

(1) ทฤษฎีการวางเงื่อนไขแบบอัตโนมิติของ Pavlov (Pavlov's Classical Conditioning Theory) การเรียนรู้ของสิ่งมีชีวิตเกิดจากการตอบสนองต่อสิ่งเร้าที่ถูกวางเงื่อนไข สรุปได้ดังนี้ พฤติกรรมตอบสนองของมนุษย์เกิดจากการวางเงื่อนไขที่ตอบสนองต่อความต้องการทางธรรมชาติ พฤติกรรมตอบสนองของมนุษย์สามารถเกิดขึ้นได้จากสิ่งเร้าที่เชื่อมโยงกับสิ่งเร้าตามธรรมชาติ พฤติกรรมตอบสนองของมนุษย์ที่เกิดจากสิ่งเร้าที่เชื่อมโยงกับสิ่งเร้าตามธรรมชาติจะลดลงเรื่อย ๆ และหยุดลงในที่สุด หากไม่ได้รับการตอบสนองตามธรรมชาติ พฤติกรรมตอบสนองของมนุษย์ต่อสิ่งเร้าที่เชื่อมโยงกับสิ่งเร้าตามธรรมชาติจะลดลงและหยุดไป เมื่อได้รับการตอบสนองตามธรรมชาติและจะกลับปรากฏขึ้นได้อีกโดยไม่ต้องใช้สิ่งเร้าตามธรรมชาติ มนุษย์มีแนวโน้มที่จะรับรู้สิ่งเร้าที่มีลักษณะที่คล้ายกันและตอบสนองเหมือนกันบุคคลมีแนวโน้มที่จำแนกลักษณะของสิ่งเร้าให้แตกต่างกันและเลือกตอบสนองได้ถูกต้อง (Hergenhahn & Olson, 1993)

(2) ทฤษฎีการวางเงื่อนไขแบบอัตโนมิติของ Watson (Watson's Classical Conditioning Theory) กล่าวว่า มนุษย์เกิดมาจะมีอาการตอบสนองบางอย่างติดตัวมาด้วยและการเรียนรู้ คือ การเอาสิ่งเร้าต่างๆ เข้าไปผูกพันไว้กับการตอบสนองขั้นมูลฐานซึ่งได้มาแต่กำเนิด เน้นการตอบสนองต่อสิ่งเร้าที่วางเงื่อนไข การเรียนรู้จะคงทนถาวรหากมีการให้สิ่งเร้าที่สัมพันธ์กันนั้นควบคู่กันไปอย่างสม่ำเสมอ (Nance, 1970)

(3) ทฤษฎีการวางเงื่อนไขแบบต่อเนื่องของ Guthrie (Guthrie's Contiguous Conditioning Theory) การเรียนรู้เกิดขึ้นพร้อมกับสิ่งเร้าและการเคลื่อนไหวของร่างกาย หมายถึง สิ่งเร้าทุกอย่างย่อมมีภาวะที่ก่อให้เกิดพฤติกรรมได้หมด ไม่มีข้อยกเว้นใด ๆ สิ่งเร้า

แต่ละอย่างเน้นหลักการจูงใจการเรียนรู้เมื่อเกิดขึ้นแล้วแม้เพียงครั้งเดียว ก็นับว่าได้เรียนรู้แล้วไม่จำเป็นต้องทำซ้ำ (Klausmeier, 1985)

(4) ทฤษฎีการวางเงื่อนไขแบบโอเปอแรนท์ของ Skinner (Skinner's Operant Conditioning Theory) เน้นการเสริมแรงหรือให้รางวัล การกระทำใดๆ ถ้าได้รับการเสริมแรงจะมีแนวโน้มที่จะเกิดขึ้นอีก การเสริมแรงที่แปรเปลี่ยนทำให้การตอบสนองคงทนกว่าการเสริมแรงที่ตายตัว การจัดการเรียนการสอนตามทฤษฎีนี้จึงเน้นที่การเสนอสิ่งเร้าในการเรียนการสอน การจัดกิจกรรมอย่างต่อเนื่องมีการเสริมแรงหรือให้รางวัลเพื่อให้ผู้เรียนเกิดความพึงพอใจที่จะเรียนรู้ (Gredler, 2001)

3) ทฤษฎีการเรียนรู้ของ Hull (Hull's Systematic Behavior Theory) เชื่อว่า เมื่อร่างกายเมื่อยล้าการเรียนรู้ของมนุษย์จะลดลง การตอบสนองต่อการเรียนรู้จะเกิดขึ้นได้ดีเมื่อได้รับการเสริมแรง เป้าหมายการจัดการเรียนการสอนตามทฤษฎีนี้คำนึงถึงความพร้อม ความสามารถ เวลาที่ผู้เรียนจะเรียนรู้ได้ดี การจัดการเรียนและการสอนควรให้ทางเลือกที่หลากหลายเพื่อตอบสนองระดับความสามารถของผู้เรียนเป็นสำคัญ (Nance, 1970)

4) ทฤษฎีการเรียนรู้กลุ่มพุทธินิยม (Cognitivism) เน้นกระบวนการทางปัญญา หรือความคิดเป็นกระบวนการภายในสมอง เชื่อว่า การเรียนรู้ของมนุษย์ไม่ใช่เรื่องของพฤติกรรมที่เกิดจากกระบวนการตอบสนองต่อสิ่งเร้าเพียงอย่างเดียวเท่านั้น แต่การเรียนรู้ของมนุษย์มีความซับซ้อนมากกว่านั้น เนื่องจากการเรียนรู้เป็นกระบวนการทางความคิดที่เกิดจากการสะสมข้อมูล การสร้างความหมายและความสัมพันธ์ของข้อมูลและการดึงข้อมูลออกมาใช้ในการกระทำและการแก้ปัญหา การเรียนรู้จึงเป็นกระบวนการทางสติปัญญาของมนุษย์ในการที่จะสร้างความรู้ความเข้าใจให้แก่ตนเอง มี 7 ทฤษฎี ได้แก่

(1) ทฤษฎี Gestalt (Gestalt Theory) แนวความคิดเกี่ยวกับการเรียนรู้ของทฤษฎีนี้ คือ การเรียนรู้เป็นกระบวนการทางความคิดซึ่งเป็นกระบวนการภายในตัวมนุษย์ซึ่งจะเรียนรู้จากสิ่งเร้าที่เป็นส่วนรวมได้ดีกว่าส่วนย่อย การจัดการเรียนการสอนตามทฤษฎีนี้จะเน้นกระบวนการคิด เป็นการสอนที่เสนอภาพรวมก่อนการเสนอส่วนย่อยส่งเสริมให้ผู้เรียนมีประสบการณ์มากและหลากหลายซึ่งจะช่วยให้ผู้เรียนสามารถริเริ่มที่จะคิดแก้ปัญหาได้และเกิดการเรียนรู้ที่เข้าใจอย่างลึกซึ้ง (Wertheimer, 1993)

(2) ทฤษฎีสนาม (Field Theory) แนวความคิดเกี่ยวกับการเรียนรู้ของทฤษฎีนี้ คือ การเรียนรู้เกิดขึ้นเมื่อบุคคลมีแรงจูงใจหรือแรงขับที่จะกระทำไปสู่เป้าหมาย การจัดการเรียนและการสอนตามทฤษฎีนี้เน้นการเข้าไปอยู่ในโลกของผู้เรียน เพื่อสร้างแรงจูงใจหรือแรงขับโดยการจัดสิ่งแวดล้อมทั้งทางกายภาพและจิตวิทยาที่ให้ความสนใจและสนองความต้องการของผู้เรียนเป็นสิ่งจำเป็นในการช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ (Wertheimer, 1993)

(3) ทฤษฎีเครื่องหมาย (Sign Theory) แนวความคิดเกี่ยวกับการเรียนรู้ของทฤษฎีนี้ คือ การเรียนรู้เกิดจากการใช้สัญลักษณ์เป็นตัวชี้ทางให้แสดงพฤติกรรมไปสู่เป้าหมายการจัดการเรียนและการสอนตามทฤษฎีนี้เน้นการสร้างแรงขับและแรงจูงใจให้ผู้เรียนบรรลุเป้าหมายจากการใช้เครื่องหมาย หรือสิ่งอื่นที่เป็นตัวบ่งชี้ควบคู่กัน (Tolman, 1992)

(4) ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญา (Intellectual Development Theory) นักวิชาการที่สำคัญของทฤษฎีนี้มี 2 คน ได้แก่ Piaget และ Bruner แนวคิดเกี่ยวกับการเรียนรู้ทฤษฎีนี้เน้นเรื่องพัฒนาการทางด้านสติปัญญาของมนุษย์ที่เป็นไปตามวัยและ เชื่อว่า มนุษย์เลือกที่จะรับรู้สิ่งที่ตนเองสนใจ การเรียนรู้เกิดจากระบวนการการค้นพบด้วยตนเอง หลักการจัด การเรียนและการสอนตามทฤษฎีนี้ คือ คำนึงถึงพัฒนาการทางสติปัญญาของผู้เรียนและจัด ประสบการณ์ให้ผู้เรียนอย่างเหมาะสมกับพัฒนาการนั้น ให้ผู้เรียนได้มีประสบการณ์และมีปฏิสัมพันธ์ กับสิ่งแวดล้อม ผู้เรียนได้ค้นพบการเรียนรู้ด้วยตนเองส่งเสริมให้ผู้เรียนได้คิดอย่างอิสระและสอนการ คิดแบบรวบยอดเพื่อช่วยสนับสนุนความคิดสร้างสรรค์ของผู้เรียน

(5) ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของ Piaget (Piaget's Theory of Intellectual Development)

Huitt and Hummel (2003) กล่าวว่า พัฒนาการเป็นผลมาจาก กระบวนการเปลี่ยนแปลงวุฒิภาวะเนื่องจากความเจริญด้านร่างกาย และการได้รับประสบการณ์ต่าง ๆ ผู้เรียนแต่ละคนมีอัตราการเจริญเติบโตแตกต่างกัน พัฒนาการเรียนรู้ทางการเรียนรู้ก็แตกต่างกัน เมื่อกล่าวถึง พัฒนาการ สิ่งที่คำนึงถึง คือ พัฒนาการทางสติปัญญา อารมณ์ สังคม และร่างกาย พัฒนาการทางสติปัญญาของคนมีลักษณะเดียวกันในช่วงอายุเท่ากัน และแตกต่างในช่วงอายุต่างกัน พัฒนาการทางสติปัญญาเป็นผลมาจากการปฏิสัมพันธ์ระหว่างบุคคลกับสิ่งแวดล้อม โดยที่บุคคล พยายามปรับตัวให้อยู่ในสภาวะสมดุลด้วยการใช้กระบวนการดูดซึม(assimilation) และกระบวนการ ปรับให้เหมาะสม (accommodation) จนเกิดการเรียนรู้โดยเริ่มจากการสัมผัส ต่อมาจึงเกิดความคิดทาง รูปธรรมและพัฒนไปเรื่อย ๆ จนเกิดความคิดที่เป็นนามธรรม ซึ่งเป็นการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง ตามลำดับขั้น กระบวนการดูดซึม เป็นกระบวนการที่เกิดจากเด็กมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อม แล้วรับ หรือดูดซึมภาพหรือเหตุการณ์ต่าง ๆ ไว้ในความคิดของตัวเอง กระบวนการปรับให้เหมาะสม เป็น กระบวนการปรับความรู้ที่มีอยู่ให้เข้ากับสิ่งแวดล้อมใหม่หรือสามารถปรับความคิดที่มีอยู่ให้สอดคล้อง กับสิ่งใหม่ ทำให้ผู้เรียนอยู่ในสภาวะสมดุล (equilibrium) ทำให้ผู้เรียนสามารถปรับตัวเข้ากับ สิ่งแวดล้อมได้ (adaptation) และเกิดโครงสร้างทางสติปัญญาเรียกว่า สคีมา (schema) บุคคลจะใช้ ติความหมายสิ่งที่รับรู้

Piaget ได้จัดกระบวนการทางสติปัญญา (cognitive process) ออกเป็น 4 ขั้น แต่ละขั้นกำหนดอายุไว้เป็นช่วงอายุเท่า ๆ กัน ช่วงที่กำหนดเป็นการกำหนดโดย ประมาณ (Huitt & Hummel, 2003) ประกอบด้วยทั้ง 4 ขั้น

(1) ขั้นการสัมผัสและการเคลื่อนไหว (Sensory-motor Stage) (แรก เกิด-2 ปี) วัยนี้เป็นวัยที่เด็กมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมโดยใช้ประสาทสัมผัสและการเคลื่อนไหวของ อวัยวะต่างๆ ของร่างกายเด็กวัยนี้มีความรู้ได้ตามขีดจำกัดของอาการสัมผัสด้วยประสาทสัมผัสและ การเคลื่อนไหวด้วยอวัยวะที่ใช้กล้ามเนื้อ ซึ่งถ้าพิจารณาให้ลึกซึ้งแล้วเด็กรับรู้ได้มากจากการ ประสานงานระหว่างตากับมือเป็นสำคัญ ซึ่งบ่งชี้ว่าประสบการณ์ตรงของเด็กน่าจะมีผลต่อความรู้ ความเข้าใจมากกว่าประสบการณ์ทางอ้อม

(2) ขั้นก่อนเข้าสู่การคิดแก้ปัญหา (Preoperational Stage)

(อายุ 2-7 ปี) เด็กวัยก่อนเข้าเรียนและวัยอนุบาลอยู่ในขั้นนี้ ซึ่งมีโครงสร้างของปัญญา (structure) ที่จะใช้สัญลักษณ์แทนวัตถุสิ่งของที่อยู่รอบๆ ตัวได้ หรือมีพัฒนาการทางด้านภาษา เด็กวัยนี้จะเริ่มด้วยการพูดเป็นประโยคและเรียนรู้คำต่างๆ เพิ่มขึ้น และรู้จักคิด อย่างไรก็ตามความคิดของเด็กวัยนี้ยังมีข้อจำกัดหลายอย่าง ขั้นนี้สามารถจำแนกเป็น ขั้นคิดเบื้องต้น (preconception) (อายุ 2-4 ปี) เด็กวัยนี้มีความคิดรวบยอดเพียงแต่ขาดความสมบูรณ์และขาดเหตุผลที่ถูกต้อง เรื่องสำคัญที่เด็กขาดความคิดรวบยอดคือ การคิดเชิงอนุรักษ์ และการคิดย้อนกลับและ ขั้นคิดเอง (intuitive) (อายุ 4-7 ปี) เป็นช่วงที่เด็กรับรู้จากสิ่งเร้าแล้วคิดตามนั้น โดยไม่สามารถไตร่ตรองโดยวิจลนญาณได้ เช่น เมื่อผู้ใหญ่พูดว่า “เมื่อวานเพิ่งบินกลับมาจากเชียงใหม่” เด็กก็จะคิดว่าเป็นการบินมาอย่างนก

(3) ขั้นคิดแก้ปัญหาเชิงรูปธรรม (Concrete Operational Stage)

(อายุ 7-11 ปี) พัฒนาการทางปัญญาและความคิดของเด็กวัยนี้แตกต่างกับเด็กในขั้นที่ 2 มาก เด็กวัยนี้จะสามารถสร้างกฎเกณฑ์และตั้งกฎเกณฑ์ในการแบ่งสิ่งต่างๆ ออกเป็นหมวดหมู่ได้ คือ เด็กสามารถที่จะอ้างอิงด้วยเหตุผลและไม่ขึ้นกับการรับรู้จากรูปร่างเท่านั้น เด็กวัยนี้สามารถแบ่งกลุ่มโดยใช้เกณฑ์หลายๆ อย่าง และสามารถคิดย้อนกลับได้ ความเข้าใจเกี่ยวกับกิจกรรมและความสัมพันธ์ของตัวเลขก็เพิ่มมากขึ้นเด็กวัยนี้ถ้าได้รับการนำเสนอปัญหาที่เป็นรูปธรรมแล้วจะคิดแก้ปัญหาได้ดี มีความเข้าใจปัญหาถูกต้อง แต่คนจำนวนมากมักเข้าใจผิดเกี่ยวกับรูปธรรม เช่น สัญลักษณ์ ที่เป็นตัวหนังสือ ตัวเลขที่จริงเป็นตัวแทนของนามธรรมหรือรูปธรรมก็ได้โดยสัญลักษณ์ต่างๆ นั้น แม้จะมองเห็นก็ถือว่าเป็น “นามธรรม”

(4) ขั้นคิดแก้ปัญหาเชิงนามธรรม (Formal Operational Stage)

(อายุ 11 ปี ขึ้นไป) ขั้นนี้พัฒนาการทางปัญญาและความคิดของเด็กเป็นขั้นสุดยอด คือ เด็กในวัยนี้จะเริ่มคิดเป็นผู้ใหญ่ ความคิดแบบเด็กสิ้นสุดลง เด็กสามารถที่จะคิดหาเหตุผลนอกเหนือไปจากข้อมูลที่มีอยู่สามารถที่จะคิดเป็นนักวิทยาศาสตร์ สามารถที่จะตั้งสมมติฐานและทฤษฎี ความจริงที่เห็นด้วยการรับรู้ไม่สำคัญเท่ากับการคิดถึงสิ่งที่เป็นไปได้

การพัฒนาของผู้เรียนในแต่ละขั้นเกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง จากขั้นที่ต่ำไปสู่ขั้นที่สูง โดยไม่มีการกระโดดข้ามขั้น บางช่วงของการพัฒนาอาจเกิดขึ้นเร็วหรือช้าได้ การพัฒนาจะเกิดขึ้นเองตามธรรมชาติ แต่สิ่งแวดล้อม วัฒนธรรมรวมทั้งวิธีการดำรงชีวิตมีส่วนให้ผู้เรียนพัฒนาแตกต่างกัน

(6) ทฤษฎีการเรียนรู้โดยการค้นพบของ Bruner (Bruner's Theory of Discovery Learning)

Bruner (1974) เสนอแนวคิดเกี่ยวกับการเรียนรู้ เชื่อว่า ผู้เรียนทุกระดับขั้นของพัฒนาการ ความสามารถในการเรียนรู้เนื้อหาวิชาใดก็ได้ ถ้าสอนให้เหมาะสมกับความสามารถของผู้เรียน การเรียนรู้ตามแนวคิดนี้แบ่งเป็น 3 ขั้น ดังนี้

(1) การเรียนรู้ด้วยการกระทำ (Enactive Representation) เป็นระยะการแก้ปัญหาด้วยการกระทำตั้งแต่แรกเกิดจนถึง 2 ปี ซึ่งตรงกับขั้นการสัมผัสและการเคลื่อนไหว (Sensory-motor Stage) ของ Piaget เป็นขั้นที่เด็กเรียนรู้ด้วยการกระทำหรือประสบการณ์มากที่สุด

(2) การเรียนรู้จากจินตนาการ (Iconic Representation) เป็นขั้นที่เด็กมีระยะการแก้ปัญหาด้วยการรับรู้แต่ยังไม่รู้จักใช้เหตุผล ซึ่งตรงกับ ขั้นคิดแก้ปัญหาเชิงรูปธรรม (Concrete Operational Stage) ของ Piaget ผู้เรียนในวัยนี้เกี่ยวข้องกับความเป็นจริงมากขึ้นจะเกิดความคิดจากการรับรู้เป็นส่วนใหญ่และภาพแทนในใจอาจจะจินตนาการบ้างแต่ไม่ลึกซึ้ง

(3) การใช้สัญลักษณ์ (Symbolic Representation) เป็นพัฒนาการสูงสุดทางด้านความรู้และความเข้าใจ เปรียบได้กับขั้นระยะการแก้ปัญหาด้วยเหตุผลกับสิ่งที่เป็นามธรรม (Formal Operational Stage) ผู้เรียนสามารถถ่ายทอดประสบการณ์โดยใช้สัญลักษณ์หรือภาพ สามารถคิดหาเหตุผลและเข้าใจสิ่งที่เป็นามธรรมตลอดจนสามารถคิดแก้ปัญหาได้

การจัดการเรียนและการสอนครูสามารถช่วยในการจัดประสบการณ์การเรียนรู้ ทฤษฎีของ Bruner มีส่วนคล้ายกับทฤษฎีของ Piaget คือ เน้นความสัมพันธ์ระหว่างวัฒนธรรม สิ่งแวดล้อมกับพัฒนาการทางสติปัญญาซึ่ง Piaget มองข้ามตำแหน่งนี้ Bruner จึงเสนอแนวคิดใหม่ที่สนใจพฤติกรรมของเด็กตั้งแต่วัยทารกปรากฏการณ์ที่ค้นพบ คือ ทารกเรียนรู้รอบ ๆ ตนนับตั้งแต่วินาทีแรกที่เกิดขึ้น ถ้าสังเกตโดยใกล้ชิดจะเห็นว่าทารกเรียนรู้ขั้นต้นของมนุษย์เริ่มต้นที่ตาจากการจับจ้องและเคลื่อนไปตามวัตถุที่จับจ้องอะไรแล้วทำให้ทารกบังคับกล้ามเนื้อให้ปฏิบัติการทำให้มืออีกข้างหนึ่งเอื้อมไปประสานงานระหว่างมือกับตาเป็นไปอย่างคล่องแคล่ว Bruner เห็นว่า คนทุกคนจะมีพัฒนาการทางความรู้ความเข้าใจโดยผ่านกระบวนการที่ เรียกว่า การกระทำ (acting) การจินตนาการ (imaging) และการทำให้เป็นสัญลักษณ์ (symbolizing) เป็นกระบวนการที่ต่อเนื่องไปตลอดชีวิตไม่ใช่ว่าเกิดขึ้นเพียงช่วงใดช่วงหนึ่งในระยะแรก ๆ ของชีวิตเท่านั้น

7) ทฤษฎีการเรียนรู้ที่มีความหมาย (A Theory of Meaning Verbal learning) เชื่อว่า การเรียนรู้มีความหมายแก่ผู้เรียน หากการเรียนรู้สามารถเชื่อมโยงกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งที่รู้มาก่อน การจัดการเรียนและการสอนตามทฤษฎีนี้ คือ มีการนำเสนอความคิดรวบยอดหรือกรอบมโนทัศน์ หรือกรอบแนวคิดในเรื่องใดเรื่องหนึ่งแก่ผู้เรียนก่อนการสอนเนื้อหาอื่นๆ จะช่วยให้ผู้เรียนได้เรียนเนื้อหาสาระนั้นอย่างมีความหมาย (Ausubel, 1968)

2. ทฤษฎีการเรียนรู้กลุ่มมนุษยนิยม (Humanism) ให้ความสำคัญของความเป็นมนุษย์และมองมนุษย์ว่ามีคุณค่า มีความดีงาม มีความสามารถ มีความต้องการ และมีแรงจูงใจภายในที่จะพัฒนาศักยภาพของตนเองหากมีอิสรภาพ มนุษย์จะพยายามพัฒนาตนเองไปสู่ความเป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์ (Huitt, 2001)

3. ทฤษฎีเงื่อนไขการเรียนรู้ของ Gagne (Gagne's Theory of Conditions of Learning) อธิบายการเกิดการเรียนรู้และทฤษฎีการจัดการเรียนการสอน เป็นการประยุกต์ความรู้เกี่ยวกับการเรียนรู้มาใช้เป็นประโยชน์ในการสนับสนุนให้เกิดการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ การเรียนรู้มีองค์ประกอบสำคัญ 3 อย่าง ดังนี้ (Gagne, Briggs, & Wager, 1992)

- (1) ผลการเรียนรู้หรือความสามารถด้านต่างๆ ของมนุษย์
- (2) กระบวนการเรียนรู้และจดจำอันเป็นผลจากการจัดกระทำข้อมูลในสมอง และ
- (3) ผลจากเหตุการณ์ภายนอกที่มีต่อกระบวนการเรียนรู้ภายในตัวมนุษย์

จากการศึกษาทฤษฎีเกี่ยวกับการเรียนรู้ช่วงคริสต์ศตวรรษที่ 20 ครูผู้สอนยังคงฝึกให้ผู้เรียนทำการฝึกปฏิบัติ (drill and practice) จนมั่นใจว่าผู้เรียนมีทักษะพื้นฐานทางด้านคณิตศาสตร์ สิ่งที่ชัดเจน คือ ผู้เรียนใช้การท่องจำที่ปราศจากความเข้าใจ และแนวคิดที่นำมาใช้ในงานวิจัยนี้ ได้แก่ การเสริมแรงหรือให้รางวัลทำให้ผู้เรียนเกิดความพึงพอใจที่จะเรียนรู้ การจัดการเรียนและการสอนควรคำนึงถึงความสามารถของผู้เรียนเป็นสำคัญ จากทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของ Piaget อาศัยจุดเด่นของผู้เรียนจากช่วงอายุเพื่ออธิบายกลุ่มเป้าหมายการวิจัยนี้และทฤษฎีการเรียนรู้โดยการค้นพบของ Bruner ในการสนับสนุนแนวคิดเกี่ยวกับระดับขั้นของพัฒนาการความสามารถในการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับความสามารถของผู้เรียน

3.3.3 ทฤษฎีเกี่ยวกับการเรียนรู้ร่วมสมัย

3.3.3.1 ทฤษฎีกระบวนการทางสมองในการประมวลข้อมูล (Information Processing Theory) เป็นทฤษฎีที่ศึกษาเกี่ยวกับกระบวนการพัฒนาสติปัญญาของมนุษย์โดยให้ความสนใจเกี่ยวกับการทำงานของสมอง ทฤษฎีนี้มีแนวคิดว่าการทำงานของสมองมนุษย์มีความคล้ายคลึงกับการทำงานของคอมพิวเตอร์หลักการจัดการเรียนการสอนตามทฤษฎี คือ การนำเสนอสิ่งที่ผู้เรียนรู้จักหรือมีข้อมูลอยู่จะสามารถช่วยให้ผู้เรียนหันมาใส่ใจและรับรู้สิ่งนั้นจัดสิ่งเร้าในการเรียนรู้ให้ตรงกับความต้องการของผู้เรียน สอนให้ฝึกการจำโดยใช้วิธีการที่หลากหลายหากต้องการให้ผู้เรียนจดจำเนื้อหาสาระใด ๆ ได้เป็นเวลานานสาระนั้นต้องได้รับการเข้ารหัสเพื่อนำไปเข้าหน่วยความจำระยะยาว วิธีการเข้ารหัสสามารถทำได้หลายวิธี เช่น การท่องจำ การทบทวนหรือการใช้กระบวนการขยายความคิด (Reiser & Dempsey, 2007)

3.3.3.2 ทฤษฎีพหุปัญญา (Theory of Multiple Intelligences) ทฤษฎีนี้มีความเชื่อพื้นฐานที่สำคัญ 2 ประการ (Gardner, 1999a) ได้แก่

1) สติปัญญาของบุคคลไม่ได้มีเพียงความสามารถทางภาษาและทางคณิตศาสตร์เท่านั้น แต่มีอยู่ 8 ประเภท ได้แก่ สติปัญญาด้านดนตรี สติปัญญาด้านการเคลื่อนไหวร่างกายและกล้ามเนื้อ สติปัญญาด้านการใช้เหตุผลเชิงตรรกะและคณิตศาสตร์ สติปัญญาด้านภาษา สติปัญญาด้านมิติสัมพันธ์ สติปัญญาทางด้านการเข้ากับผู้อื่น สติปัญญาด้าน การเข้าใจตนเอง สติปัญญาด้านความเข้าใจในธรรมชาติ

2) สติปัญญาของแต่ละบุคคลจะไม่คงที่อยู่ที่ระดับที่ตนมีตอนเกิด แต่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ หากได้รับการส่งเสริมที่เหมาะสม

3.3.3.3 ทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเอง (Constructivism)

ช่วง 20 ปีที่ผ่านมา การเปลี่ยนแปลงเกี่ยวกับธรรมชาติของการเรียนรู้จากปัจจัยภายนอกของผู้เรียน ได้แก่ บุคลิกภาพของครู การให้คำชมเชย การแสดงออก ปัจจัยภายในของผู้เรียน ได้แก่ ความรู้ความเข้าใจที่มีอยู่ของผู้เรียน ความจำความสามารถในการจัดกระทำข้อมูล ความตั้งใจ ความคิดรวบยอดที่คลาดเคลื่อน ปัจจัยภายในมีส่วนช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้อย่างมีความหมาย พบว่า สิ่งที่ผู้เรียนเรียนรู้มาก่อนมีส่วนเกี่ยวข้องและส่งเสริมความเข้าใจของผู้เรียน

กลุ่มทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเอง เชื่อว่า การเรียนรู้เกิดมาจากการประสบการณ์ (Baruque & Melo, 2004: p.346) เป็นกระบวนการสร้างความรู้มากกว่าการรับความรู้ เป้าหมายการจัดการเรียนรู้ในการสนับสนุนการสร้างความรู้มากกว่าการถ่ายทอดความรู้ เน้น

การสร้างความรู้ใหม่อย่างเหมาะสมของแต่ละบุคคล และสิ่งแวดล้อมมีความสำคัญในการสร้างความหมายของความเป็นจริง การเรียนรู้เน้นให้ผู้เรียนลงมือปฏิบัติการสร้างความรู้ แนวคิดที่เป็นรากฐานสำคัญ คือ Piaget ชาวสวิสเซอร์แลนด์ และ Vygotsky ชาวรัสเซีย แบ่งเป็น 2 ประเภท ได้แก่ กลุ่มแนวคิดการสร้างความรู้เชิงปัญญา (cognitive constructivism) และ กลุ่มแนวคิดการสร้างความรู้เชิงสังคม (social constructivism)

1) กลุ่มแนวคิดการสร้างความรู้เชิงปัญญา พื้นฐานแนวคิดมาจาก Piaget เน้นให้ผู้เรียนสร้างความรู้จากการปฏิบัติ เชื่อว่า ผู้เรียนถ้าถูกระตุ้นด้วยสถานการณ์ปัญหาที่ก่อให้เกิดความขัดแย้งทางสติปัญญา หรือเรียกว่า การเสียสมดุลทางสติปัญญา (disequilibrium) ต้องพยายามปรับหน่วยเชิงการรู้ (cognitive structuring) ให้อยู่ในภาวะสมดุล (equilibration) จากการดูดซึม (assimilation) เป็นการรับสิ่งใหม่จากสิ่งแวดล้อมไปอยู่ในหน่วยเชิงการรู้ หรือปรับเปลี่ยนหน่วยเชิงการรู้ (accommodation) เป็นการเชื่อมโยงหน่วยเชิงการรู้ที่มีมาก่อนกับข้อมูลใหม่ จนสามารถปรับหน่วยเชิงการรู้ให้อยู่ในภาวะสมดุล หรือสามารถสร้างความรู้ใหม่มาได้

2) กลุ่มแนวคิดการสร้างความรู้เชิงสังคม พื้นฐานแนวคิดมาจาก Vygotsky ชาวรัสเซีย แนวคิดที่สำคัญ คือ ปฏิบัติสัมพันธ์ทางสังคมมีบทบาทในการพัฒนาความรู้ รวมทั้งศักยภาพการพัฒนาเชิงการรู้อาจมีข้อจำกัดเกี่ยวกับช่วงการพัฒนา เรียกว่า zone of proximal development กรณีที่ผู้เรียนต่ำกว่าต้องได้รับการช่วยเหลือในการเรียนรู้ เรียกว่า scaffolding

Bruner (1966) กล่าวว่า ทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเอง การเรียนรู้จะเกิดขึ้นได้อย่างมีประสิทธิภาพเนื่องจากผู้เรียนสามารถแปลความหมายของข้อมูลโดยใช้ประสบการณ์ของตนเองเป็นสำคัญ ได้แก่ ความรู้ในระดับความคิดรวบยอด กฎเกณฑ์ ความสัมพันธ์ ผู้เรียนต้องอาศัยการแปลความหมายด้วยตนเองที่มีการขยาย การตัด การเพิ่ม ข้อมูลนั้น ครูไม่สามารถให้ความรู้แก่ผู้เรียนเพราะความรู้ผู้เรียนต้องสร้างขึ้นเอง ดังนั้นครูต้องสอนข้อมูลที่มีความหมายและสัมพันธ์กับผู้เรียน ความรู้เป็นกระบวนการไม่ใช่ผลผลิต (knowing is a process, not a product)

Nodding (1990) กล่าวว่า ทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเอง การเรียนรู้ของบุคคลจะอาศัยวิธีการที่แตกต่างกันจากประสบการณ์ที่ผ่านมา หน่วยเชิงการรู้ที่มีอยู่ ความสนใจแรงจูงใจภายในเป็นพื้นฐาน และยืนยันว่าความรู้ทั้งหมด คือ บุคคลจะสร้าง เข้าใจและได้รับจากความพยายามปฏิบัติ โดยผ่านโลกทางกายภาพ โลกทางสังคม ในการมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมและแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับคนอื่นเพื่อแปลความหมายด้วยตนเอง

Von Glasersfeld (1991) กล่าวว่า ทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเอง มีรากฐานมาจากปรัชญา จิตวิทยา การศึกษาเกี่ยวกับการสื่อความหมาย การควบคุมกระบวนการการสื่อความหมายของบุคคล ที่อ้างถึงหลักการสำคัญ 2 ข้อ ได้แก่ ความรู้ไม่ได้เกิดจากการรับรู้เพียงอย่างเดียวแต่เป็นการสร้างโดยบุคคลที่มีความรู้ความเข้าใจและหน้าที่ของการรับรู้เป็นการปรับตัว ประมวลประสบการณ์ทั้งหมดไม่ได้ค้นหาสิ่งที่เป็นจริง

Thornton and Wilson (1993) กล่าวว่า หัวใจของทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเอง คือ การจัดกิจกรรมเพื่อให้ผู้เรียนสามารถค้นพบด้วยตนเองซึ่งเป็นกระบวนการที่ทำให้เกิดความเชื่อมโยงระหว่างข้อมูลที่มีอยู่และข้อมูลที่ได้รับมาใหม่ การเรียนจึงเริ่มจากพื้นฐานความรู้ของ

ผู้เรียนมากกว่าการสอนของครู ครูต้องคอยประเมินวิธีการคิดของผู้เรียนจากการอภิปรายและส่งเสริมวิธีการคิดของผู้เรียนให้กว้างขึ้น

Gadanidis (1994) กล่าวว่า ทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเองเป็นการบูรณาการแนวคิดเกี่ยวกับการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน กลุ่มทฤษฎีนี้เห็นว่ากิจกรรมทางสติปัญญาทุกกิจกรรมจะลงท้ายด้วยการสร้างสิ่งใหม่ขึ้นมาโดยสิ่งที่สร้างใหม่จะเชื่อมโยงกับสิ่งที่มีอยู่เดิม หลักสำคัญ ได้แก่ ความรู้ความเข้าใจจะต้องสร้างโดยผู้เรียนต้องมีส่วนร่วม และกระบวนการเรียนรู้เป็นกระบวนการของการจัดการที่จะปรับสิ่งที่เรียนรู้ให้เข้ากับโลกประสบการณ์ที่มีอยู่ของผู้เรียน

Fosnot (1996) กล่าวว่า ทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเอง (Constructivism) มีรากฐานมาจากปรัชญา จิตวิทยา และมานุษยวิทยา เป็นการอธิบาย ความรู้คืออะไร ได้รับความรู้มาอย่างไร ความรู้เป็นสิ่งที่เปลี่ยนแปลงและสร้างภายในตัวบุคคลอาศัยสังคมและวัฒนธรรม การเรียนรู้เป็นกระบวนการที่เรียนรู้ได้ด้วยตนเองในการต่อสู้กับความขัดแย้งที่เกิดขึ้นระหว่างความรู้เดิมและความรู้ใหม่ การสร้างความรู้บุคคลเป็นผู้สร้างขึ้นจากเครื่องมือผ่านกิจกรรมทางสังคม

Goldin (1996) กล่าวว่า ทฤษฎีเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ศึกษาที่จะสนับสนุนทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเอง (Constructivism) ความรู้เป็นสิ่งที่สามารถพัฒนาได้และเชื่อมโยงไปยังโลกประสบการณ์ของความรู้บุคคลนั้น แนวคิดที่สำคัญในเชิงทฤษฎีซึ่งจำแนกระบบการแสดงผลภายในไปยังการแสดงแทนภายนอก สำนวนแนวคิดการแสดงแทนที่เหมาะสมจากการสร้างการแสดงผลแทนด้วยตนเอง ทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเอง ปฏิเสธแนวคิดทางด้านปรัชญาแบบเดิมนำมาซึ่งโครงสร้างเชิงแนวคิดว่าเป็นวิธีการที่สอดคล้องกันเกี่ยวกับการศึกษาการดำรงอยู่ ที่ซึ่งไม่ได้ปฏิเสธแนวคิดกลุ่มเพียเจต์เพื่ออ้างอิงถึงการแสดงผลแทนจากการจำจากประสบการณ์ที่คล้ายกันก่อนหน้านี้ แนวคิดของ Kaput (1991) ได้อภิปรายในบริบทเกี่ยวกับการแสดงผลแทนที่หลากหลาย ที่อ้างอิงไปยัง โครงสร้างในเชิงกราฟและในเชิงสัญลักษณ์เพื่อเตรียมโอกาสของการเรียนรู้

Von Glasersfeld (1996) กล่าวว่า มุมมองกลุ่มทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเองแบบสุดโต่ง (Radical Constructivism) ในบริบททฤษฎีของความรู้ไม่สนใจบทบาทของปฏิสัมพันธ์เชิงสังคมในการสร้างความรู้ เริ่มต้นจากสมมติฐานว่าความรู้ทุกอย่างเป็นสิ่งที่ได้จากการรับรู้และประสบการณ์ในเชิงความคิด ไม่ได้ปฏิเสธในเชิงสังคมว่ามีอิทธิพลในเรื่องการสร้างเชิงการรู้ของแต่ละคน แนวคิดพื้นฐานต้องตระหนักถึงคำถาม ได้แก่ ความรู้คืออะไรและทำให้ได้มาอย่างไร

Mayer (1996) กล่าวว่า ทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเองเกี่ยวกับการเรียนรู้ จะเกิดขึ้นเมื่อผู้เรียนมีความแข็งแกร่งหรืออ่อนแอระหว่างสิ่งเร้าและการตอบสนองเป็นมุมมองในช่วงต้นของศตวรรษที่ 20 ศึกษาภายใต้ห้องปฏิบัติการที่จัดสภาพแวดล้อมจากการเรียนรู้ของสัตว์ ในปี ค.ศ. 1950-1979 การเรียนรู้ เป็นการได้รับความรู้บนพื้นฐานวิธีคิด การเรียนรู้เกิดเมื่อผู้เรียนสามารถเก็บข้อมูลไว้ในความจำระยะยาว ในปี ค.ศ. 1980 และ ปี ค.ศ. 1990 การเรียนรู้ คือ การสร้างความรู้บนพื้นฐานการเรียนรู้จะเกิดขึ้นเมื่อ ผู้เรียนกระตือรือร้นในการสร้างสิ่งที่ใช้แทนการรู้ขณะปฏิบัติงานทำให้เป็นฐานการคิดในเชิงการศึกษา

Atherton (2011) กล่าวว่า แนวคิดทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเองตามแนวคิดของเพียเจต์เป็นการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นให้ผู้เรียนลงมือกระทำในการสร้างความรู้มากกว่าเป็นผู้รับ การถ่ายทอดความรู้จากครูโดยอธิบายจากพัฒนาการทางเซาว์ปัญญาของบุคคลมีการปรับตัวผ่านทาง กระบวนการดูดซึม และกระบวนการปรับโครงสร้างทางปัญญา พัฒนาการเกิดขึ้นเมื่อบุคคลรับและ ซึมซาบข้อมูล หรือประสบการณ์ใหม่เข้าไปสัมพันธ์กับความรู้หรือโครงสร้างทางปัญญาที่มีอยู่เดิม หาก ไม่สามารถสัมพันธ์กันได้ จะเกิดภาวะไม่สมดุลขึ้น บุคคลจะพยายามปรับสภาวะให้อยู่ในภาวะสมดุล โดยใช้กระบวนการปรับโครงสร้างทางปัญญาและเชื่อว่า ทุกคนมีการพัฒนาเซาว์ปัญญาไปตามลำดับ ขึ้นจากการมีปฏิสัมพันธ์และประสบการณ์กับสิ่งแวดล้อมตามธรรมชาติ และประสบการณ์ที่เกี่ยวกับการคิดเชิงตรรกะและคณิตศาสตร์ รวมทั้งการถ่ายทอดความรู้ทางสังคม (social transmission) วุฒิ ภาวะ (maturity) และกระบวนการพัฒนาความสมดุล (equilibration) ของบุคคลนั้น

วัฒนาพร ระงับทุกข์ (2542) กล่าวว่า แนวคิดทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วย ตนเองเป็นกระบวนการเรียนรู้ที่เกิดภายในตัวบุคคลซึ่งสร้างความรู้จากความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่พบ กับความรู้ความเข้าใจที่มีอยู่ เกิดเป็นโครงสร้างทางปัญญา ผู้สอนไม่สามารถปรับเปลี่ยนโครงสร้างของ ผู้เรียนแต่สามารถช่วยให้ปรับเปลี่ยนโครงสร้างทางปัญญาได้ โดยจัดสิ่งแวดล้อมที่กระตุ้นให้ผู้เรียนเกิด ความขัดแย้งทางปัญญาหรือเกิดภาวะที่ไม่สมดุลทางปัญญาเป็นภาวะที่ประสบการณ์ใหม่ไม่สอดคล้อง กับประสบการณ์ที่มีอยู่ ผู้เรียนต้องพยายามปรับข้อมูลใหม่กับประสบการณ์ที่มีอยู่แล้วสร้างความรู้ ใหม่ด้วยตนเอง

สุมาลี ชัยเจริญ (2547) กล่าวว่า ทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเอง (Constructivism) เชื่อว่า การเรียนรู้เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายในตัวผู้เรียน ซึ่งเป็นผู้สร้างความรู้ จากความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่พบกับความรู้ความเข้าใจที่มีมาก่อนโดยพยายามนำความรู้เกี่ยวกับ ปรากฏการณ์ที่พบมาสร้างเป็นโครงสร้างทางปัญญา เป็นหน่วยที่เล็กที่สุดของโครงสร้างความรู้ใน สมอง ที่ประกอบไปด้วย ความหมายสิ่งต่าง ๆ ที่ใช้ภาษาหรือเกี่ยวกับเหตุการณ์แต่ละบุคคลมี ประสบการณ์หรือเหตุการณ์อาจเป็นความเข้าใจหรือความรู้แต่ละคน

3.3.3.4 ทฤษฎีการเรียนรู้แบบร่วมมือ (Theory of Cooperative or Collaborative Learning) แนวคิดของทฤษฎีนี้ คือ การเรียนรู้เป็นกลุ่มย่อยโดยมีสมาชิกกลุ่มที่มี ความสามารถแตกต่างกันประมาณ 4-6 คน ช่วยกันเรียนรู้เพื่อไปสู่เป้าหมายของกลุ่ม โดยผู้เรียนมี ปฏิสัมพันธ์ระหว่างกันในลักษณะแข่งขันกันต่างคนต่างเรียนและร่วมมือกัน หรือช่วยกันในการ เรียนรู้ การจัดการเรียนการสอนเน้นให้ผู้เรียนช่วยกันในการเรียนรู้ โดยมีกิจกรรมที่ให้ผู้เรียนมีการ ฟังพาดูอาศัยกันในการเรียนรู้ปรึกษาหารือกันอย่างใกล้ชิดมีการสัมพันธ์กันมีการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม มีการวิเคราะห์กระบวนการของกลุ่ม แบ่งหน้าที่รับผิดชอบงานร่วมกัน (Lynch, 2010)

การเปลี่ยนกระบวนทัศน์เรื่องของการเรียนรู้ (paradigm Shift on Learning) การปฏิรูปการศึกษาของประเทศไทยเป็นผลมาจากพระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พุทธศักราช 2542 มีวาระแห่งชาติที่ชัดเจน เรื่อง การปฏิรูปกระบวนการเรียนรู้ ที่มีเป้าหมายที่จะเคลื่อนย้ายสังคม ที่เน้นการเรียนรู้แต่เพียงผลลัพธ์มาเป็นสังคมที่เน้น ทั้งผลลัพธ์และกระบวนการ รวมทั้งคุณลักษณะที่ พึงประสงค์ที่สังคมต้องการ ซึ่งแนวคิดในการปฏิรูปการศึกษาดังกล่าวสะท้อนให้เห็นได้จากความ พยายาม ในการกำหนดความสามารถและคุณลักษณะของเยาวชน ที่ต้องการผ่านหลักสูตรการศึกษา

ขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2552) และมีการปรับปรุงพัฒนาไปสู่หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 หลักสูตรทั้งสอง ฉบับมีลักษณะเป็นหลักสูตรอิงมาตรฐานที่ยึดคุณภาพผู้เรียนตามมาตรฐานเป็นสำคัญ เนื่องจากแนวคิดเรื่อง การปฏิรูปการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญที่นักการศึกษาพยายามเผยแพร่แก่ครูในระบบโรงเรียนเป็นเพียงแค่ว่าที่ได้รับ การเผยแพร่ในกลุ่มครูเท่านั้น สารสำคัญหรือปรัชญาในการปฏิรูปการเรียนรู้ไม่ได้รับการเผยแพร่ไป ด้วย การปฏิรูปการเรียนรู้เป็นกระบวนการในการเรียนรู้ของผู้เรียน ปัญหาที่ครูยังไม่เข้าใจชัดเจน ว่ากระบวนการเรียนรู้คืออะไร การปฏิรูปกระบวนการเรียนรู้ของผู้เรียนได้ ครูบางคนอาจจะคิดว่าต้อง จัดกิจกรรมการเรียนการสอนทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้นกว่าเดิมถือเป็นแนวคิดที่ล้าสมัยมาก

จากการศึกษาทฤษฎี แนวคิด การเปลี่ยนกระบวนทัศน์ เกี่ยวกับการเรียนรู้ผู้วิจัย จำแนกทฤษฎีเกี่ยวกับการเรียนรู้ออกเป็น 3 ช่วง คือ ช่วงก่อนคริสต์ศตวรรษที่ 20 ช่วงคริสต์ศตวรรษที่ 20 และทฤษฎีการเรียนรู้ร่วมสมัย กระบวนการเรียนรู้ของผู้เรียนแต่เดิมนักวิชาการมองว่าเกิดจาก ครูเป็นผู้ถ่ายทอด ผู้บอกความรู้ สาคิด ให้ผู้เรียนฝึกจนชำนาญ ดังนั้น การจะเปลี่ยนกระบวนทัศน์เรื่องของการเรียนรู้ทฤษฎีเกี่ยวกับการเรียนรู้ของผู้เรียน ครูจะต้องเปลี่ยนบทบาทจากที่เคยเป็นผู้ถ่ายทอด บอก สาคิดมาเป็นเพียงผู้คอยสนับสนุน อำนวยความสะดวกที่จะทำให้ผู้เรียนเกิดกระบวนการเรียนรู้ด้วยตัวเอง และชั้นเรียนคณิตศาสตร์โรงเรียนชุมชนบ้านชนบท ภายใต้โครงการพัฒนาวิชาชีพครูคณิตศาสตร์ด้วยนวัตกรรมการศึกษาขั้นเรียน (Lesson Study) และวิธีการแบบเปิด (Open Approach) ผู้วิจัยอาศัยแนวคิดในการเปลี่ยนบทบาทของครูจากที่เคยเป็นผู้ถ่ายทอด บอก สาคิดมาเป็นเพียงผู้คอยสนับสนุน อำนวยความสะดวกเพื่อให้ผู้เรียนเกิดกระบวนการเรียนรู้ด้วยตัวเองและเชื่อว่า การเรียนรู้เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายในตัวผู้เรียนผู้เรียนสร้างด้วยตนเอง ความรู้จากความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งที่พบเห็นกับความรู้ความเข้าใจที่มีอยู่ ผู้เรียนเป็นผู้จัดกระทำกับข้อมูลหรือประสบการณ์ต่างๆ และสร้างความหมายให้กับสิ่งนั้นด้วยตนเอง ความรู้เป็นสิ่งที่สามารถพัฒนาได้ และเชื่อมโยงไปยังโลกประสบการณ์ของความรู้ตามทฤษฎีการสร้างความรู้ด้วยตนเอง

4. แนวคิดเกี่ยวกับกิจกรรมคณิตศาสตร์

การใช้วัตกรรมการศึกษาที่เรียกว่า “วิธีการแบบเปิด” (Open Approach) ได้ใช้สถานการณ์ปัญหาเพื่อกระตุ้นให้ผู้เรียนเรียนรู้ซึ่งเป็นการผลักดันผู้เรียนให้เข้าสู่กิจกรรมทางคณิตศาสตร์ จากโลกชีวิตจริง (World of reality) ไปสู่โลกคณิตศาสตร์ (World of mathematics) และนิศรา สุทธิสังข์ (2552) ได้ทำการสำรวจความคิดเห็นของครูในการพิจารณาการสร้างความคิดรวบยอดของนักเรียนจากการสร้างสถานการณ์ปัญหาในโลกชีวิตจริง พบว่า ครูคำนึงถึงกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดให้เกิดขึ้นกับนักเรียน และปรารถนาให้นักเรียนสร้างความคิดรวบยอดด้วยตัวของนักเรียนเอง จากกิจกรรมการเรียนการสอนที่ครูจัดประสบการณ์เรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ ซึ่งจะช่วยส่งเสริมและพัฒนาให้นักเรียนสร้างความคิดรวบยอดได้โดยใช้สถานการณ์ปัญหาที่เน้นการเชื่อมต่อโลกชีวิตจริงกับโลกคณิตศาสตร์ ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนมองภาพปัญหานั้นๆ อย่างเป็นรูปธรรมมากขึ้น และเสมือนนักเรียนกำลังเผชิญอยู่ในสถานการณ์ปัญหานั้น จากการสร้างสถานการณ์ปัญหาให้ใกล้ชิดกับชีวิตจริงของนักเรียน

กิจกรรมทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งจำเป็นที่ครูควรจัดเตรียมเพื่อนำเสนอให้กับผู้เรียนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี และที่สำคัญอีกประการหนึ่งคือการเตรียมสถานการณ์ปัญหาจากโลกชีวิตจริงของผู้เรียนเพื่อให้ผู้เรียนเข้าร่วมก่อนที่จะเข้าสู่โลกคณิตศาสตร์ ซึ่งจะทำให้ผู้เรียนเห็นประโยชน์ของการนำคณิตศาสตร์ไปใช้

4.1 ความหมายของกิจกรรมทางคณิตศาสตร์

กิจกรรมทางคณิตศาสตร์ช่วยให้ผู้เรียนเข้าสู่คณิตศาสตร์ด้วยการลงมือแก้ปัญหาเพื่อพยายามหาคำตอบจากปัญหาในโลกชีวิตจริงของผู้เรียนที่ผู้เรียนมีประสบการณ์ในชีวิตจริงแล้วพยายามเชื่อมโยงมาสู่หลักการทางคณิตศาสตร์เหมือนนำความรู้เข้ามาสู่โลกคณิตศาสตร์ อีกทั้งยังทำให้ผู้เรียนได้เข้าร่วมในกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ผ่านโลกชีวิตจริงเพื่อพัฒนามาสู่โลกสัญลักษณ์ด้วย

Shimada & Becker (1997) อธิบายถึงการปรับใช้กิจกรรมของนักเรียนซึ่งถูกกระตุ้นโดยวิธีการในขั้นตอนที่หลากหลายเกี่ยวกับกิจกรรมคณิตศาสตร์และจัดกลุ่มพื้นที่ของการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนไว้ด้วยกันเรียกว่า “กิจกรรมทางคณิตศาสตร์” (Mathematical activity) ซึ่งพิจารณานัยสำคัญของสิ่งเหล่านี้ด้วยการคาดหวังถึงความสัมพันธ์ระหว่างโลกของคณิตศาสตร์และโลกชีวิตจริงตามแผนภาพที่ 5 และเป็นกระบวนการพัฒนาการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนจากการเริ่มต้นที่มีสองโลกคือโลกชีวิตจริงและโลกของคณิตศาสตร์ และมีปัญหาเพื่อแก้ในโลกชีวิตจริงโดยปัญหาในโลกชีวิตจริงนี้ไม่จำเป็นต้องเป็นโลกที่ปรากฏเชิงกายภาพ แต่อาจเป็นโลกเชิงนามธรรมซึ่งเป็นนามธรรมน้อยกว่าโลกคณิตศาสตร์ และการเปลี่ยนแปลงจากโลกชีวิตจริงไปสู่โลกคณิตศาสตร์อาศัยกระบวนการนามธรรมและถูกเปลี่ยนแปลงไปสู่ภาษาทางคณิตศาสตร์ผ่านกระบวนการนามธรรม กระบวนการนี้มาจากกระบวนการต่างๆ เพื่อบรรลุผลไปสู่โลกคณิตศาสตร์อย่างหลากหลาย เช่น การสร้างทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ ซึ่งนักเรียนอาจนำความรู้ที่ได้เรียนมาใช้ เช่นเดียวกับปัญหาในโลกชีวิตจริงของนักเรียน เนื่องจากนักเรียนอาจนำปัญหาที่เคยประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับธรรมชาติที่คล้ายคลึงกัน การค้นหาลักษณะทั่วไป และการประยุกต์ใช้ ขั้นตอนนี้ผู้แก้ปัญหาพยายามสร้างปัญหาใหม่ในแนวทางการคิดที่นักเรียนชื่นชอบ ซึ่งถูกเรียกว่าการทำให้เป็นสัญลักษณ์ (Axiomatization) และเมื่อคณิตศาสตร์ถูกประยุกต์ใช้ไปสู่ปัญหาที่แท้จริง ปัญหาถูกเปลี่ยนไปสู่โลกของคณิตศาสตร์ ส่งผลให้ปัญหาเริ่มต้นด้วยปัญหาที่เป็นรูปธรรมและท้ายที่สุดได้สรุปเป็นขั้นตอนซึ่งเป็นอิสระจากตัวอย่างที่เป็นรูปธรรม

สิ่งที่สำคัญคือการแก้ปัญหาในโลกชีวิตจริงเพื่อประยุกต์ใช้ในการนำเสนอสู่โลกคณิตศาสตร์ซึ่งมีความแตกต่างกันในความหมายดัง 3 รูปแบบต่อไปนี้

รูปแบบที่ 1 รูปแบบเชิงการแสดงผลแทนคณิตศาสตร์ (A representational model) เช่น กลุ่มของเมทริกซ์ (Matrices) เรขาคณิตนอนยูคลิด เป็นรูปแบบที่ใช้สัญลักษณ์ สัจพจน์ หรือนิยามทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นคณิตศาสตร์ขั้นสูง

รูปแบบที่ 2 รูปแบบกึ่งเชิงคณิตศาสตร์ (A quasi-mathematical model) ในความหมายเชิงทฤษฎีที่เป็นนามธรรม ซึ่งถูกเชื่อมโยงด้วยโลกต่างๆ ซึ่งบรรยายโลกชีวิตจริง เช่น ความเร็วคงที่ของรถที่วิ่ง ราคาต่อหน่วยของผลไม้ เป็นรูปแบบที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริงและเห็นได้ในเชิงกายภาพแต่อาศัยทฤษฎีทางคณิตศาสตร์เพื่อสร้างโมเดลทางคณิตศาสตร์ หรือการนำเสนอสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

รูปแบบที่ 3 รูปแบบเชิงกายภาพในโลกเชิงประจักษ์ซึ่งสอดคล้องหรือสัมพันธ์กับความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์อย่างเฉพาะ (Physical models in the empirical world that are only locally isomorphic to mathematical concepts or relations) เป็นการนำเสนอเชิงกายภาพเกี่ยวกับแนวคิดเชิงนามธรรม ที่สนับสนุนและเอื้อประโยชน์เพื่อทำความเข้าใจความคิดรวบยอดของนักเรียน เป็นการนำเสนอถึงแนวคิดเชิงนามธรรม หรือทฤษฎีต่างๆ ในลักษณะรูปธรรม เพื่อสนับสนุนความเข้าใจผ่านการใช้วัตถุรูปธรรม เป็นรูปแบบที่เห็นได้จากลักษณะภายนอกของวัตถุและใช้การจัดกลุ่ม การจำแนกประเภท ความคล้าย ความเหมือนซึ่งเห็นจากลักษณะภายนอกและอาศัยภาษาพูดแทนปริมาณวัตถุเหล่านั้น เช่น การนับ การรวมกลุ่มของที่เหมือนกัน การบ่งบอกลักษณะเชิงกายภาพของรูปทรงเรขาคณิต เป็นต้น

จากการทบทวนวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องเพื่อศึกษาความหมายของกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ ดังกล่าว ผู้วิจัยได้สรุปความหมายกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ ดังนี้ กิจกรรมทางคณิตศาสตร์หมายถึง การใช้แนวคิด วิธีการต่างๆ ในการแก้ปัญหาโดยปฏิสัมพันธ์กับสื่ออุปกรณ์เพื่อสนับสนุนการคิดคำนวณเชิงสัญลักษณ์ อาศัยสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดเป็นตัวขับเคลื่อนให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปัญหาจากโลกชีวิตจริงของนักเรียนที่คุ้นเคยหรือมีประสบการณ์มาก่อนไปสู่โลกคณิตศาสตร์ที่แสดงออกมาในรูปแบบของการคำนวณโดยใช้สัญลักษณ์ และการออกแบบสื่อให้สอดคล้องกับสถานการณ์ปัญหาเพื่อให้ นักเรียนคิดแก้ปัญหาได้ด้วยตนเอง

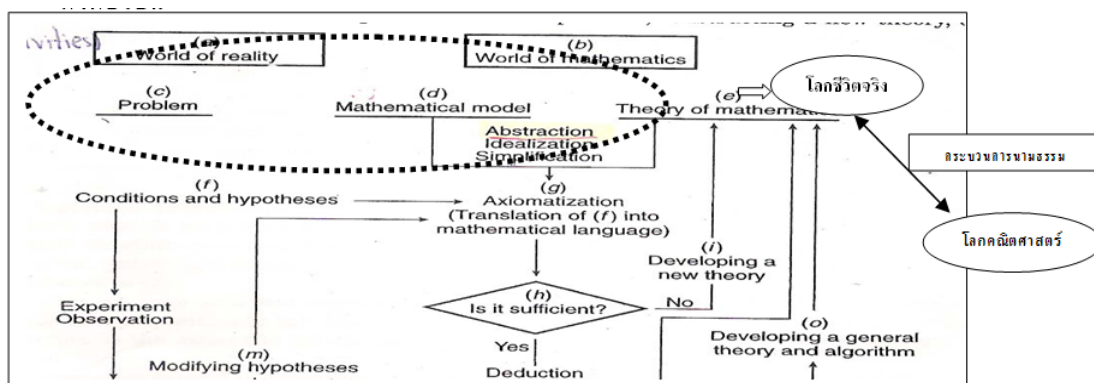
และในงานวิจัยนี้เมื่อพิจารณาดำเนินงานของการสร้างสถานการณ์ปัญหาให้ใกล้เคียงกับชีวิตจริงของนักเรียนเพื่อให้ นักเรียนเข้าร่วมในกิจกรรมการแก้ปัญหาและการผลักดันให้นักเรียนใช้สื่อเพื่อสนับสนุนการคิดคำนวณเชิงสัญลักษณ์ทำให้เกิดความเชื่อมโยงระหว่างโลกชีวิตจริงกับโลกคณิตศาสตร์ของนักเรียนและทำให้เกิดพื้นที่ในการพิจารณาการคิดของนักเรียนในฐานะเป็นกิจกรรมทางคณิตศาสตร์

กิจกรรมทางคณิตศาสตร์จึงมีความสำคัญและเป็นตัวขับเคลื่อนให้เกิดการเปลี่ยนแปลงปัญหาจากโลกชีวิตจริงของนักเรียนไปสู่ปัญหาในโลกคณิตศาสตร์เพื่อให้ นักเรียนคิดคำนวณ และเกิดเป็นพื้นที่ในการคิดของนักเรียน

4.2 ความสำคัญของกิจกรรมทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษาเอกสารต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยครั้งนี้ อธิบายถึงความหมายและความเกี่ยวข้องของกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่เป็นการเชื่อมต่อโลกชีวิตจริงและโลกคณิตศาสตร์ เพื่อที่จะสร้างปัญหาให้นักเรียนได้ลงมือแก้ตัวอย่างหลากหลายตามวิธีการคิดของนักเรียน ดังนี้

Inprasitha (1997) ได้กล่าวถึงความสำคัญของสถานการณ์ปัญหาลักดันให้เกิดกิจกรรมทางคณิตศาสตร์จากโลกชีวิตจริงไปสู่โลกของคณิตศาสตร์ ตามรูปแบบ ดังภาพที่ 3 ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 3 รูปแบบกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ (อ้างอิงมาจาก Becker & Shimada, 1997; p.4)

ภายใต้ความเข้าใจพื้นฐานเกี่ยวกับรูปแบบกิจกรรมทางคณิตศาสตร์นี้ นั่นคือมีหลายพื้นที่ของการคิดที่เกี่ยวข้องใกล้ชิดกับคณิตศาสตร์ เช่น ความเข้าใจของทฤษฎีที่มีอยู่ทางคณิตศาสตร์ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ การสร้างทฤษฎีใหม่ หรือการแก้ปัญหาสาขาที่ไม่ใช่คณิตศาสตร์ โดยการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ ซึ่งพื้นที่การคิดเหล่านี้ถูกจัดกลุ่มไว้ด้วยกันเรียกว่า “กิจกรรมทางคณิตศาสตร์” ในชั้นเรียนแบบเดิมนั้น เมื่อผู้สอนเสนอแนวความคิดรวบยอดใหม่สู่ชั้นเรียนมักจะเป็นการเริ่มต้น โดยทั่วไปด้วยการชี้แนะปัญหาที่ช่วยให้นักเรียนเห็นความจำเป็นของความคิดรวบยอดใหม่ เป็นการสร้างความคิดรวบยอดใหม่โดยทั่วไปบนการเรียนรู้ของนักเรียนที่มีมาก่อน และนำไปสู่ทฤษฎีใหม่ แต่ในชั้นเรียนใหม่เป็นการเรียนการสอนปัญหาที่เริ่มต้นจากโลกที่แท้จริง (Real world) เพื่อให้ นักเรียนพัฒนาไปสู่โลกคณิตศาสตร์ (Mathematical world) สำหรับนักคณิตศาสตร์ศึกษา มุมมองจากรูปแบบนี้ กิจกรรมทางคณิตศาสตร์ควรขยายไปสู่แง่มุมการเรียนรู้และการสอนคณิตศาสตร์ (Shimada & Becker, 1997)

Shimizu (2009) อธิบายถึง คณิตศาสตร์สำหรับโรงเรียน (School mathematics) เป็นสิ่งที่มีคุณค่าสำหรับการพัฒนาศักยภาพความเป็นมนุษย์ ซึ่งแตกต่างจากคณิตศาสตร์ทั่วไป นักคณิตศาสตร์ศึกษาสามารถสังเกตได้ว่าเด็กสร้างคณิตศาสตร์ได้อย่างไร โดยที่นักคณิตศาสตร์ทั่วไปไม่อาจตระหนักถึงคุณค่าในการสร้างคณิตศาสตร์ หลักสูตรคณิตศาสตร์ในปัจจุบันนี้เน้นกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ การซาบซึ้งถึงการใช้คณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน และเน้นในโลกแห่งคณิตศาสตร์รวมเข้าด้วยกัน และมีคำถามเกิดขึ้นว่า ทำอย่างไรจึงทำให้คณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันและโลกคณิตศาสตร์ไปด้วยกัน และหนึ่งในสองของการท้าทายสำหรับหลักสูตรในโรงเรียนคือการส่งเสริมกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ให้กับเด็กและครู สำหรับเด็กคือในฐานะที่เป็นวิธีการสำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพื่อทำคณิตศาสตร์ด้วยตัวของนักเรียนเอง และสำหรับครูคือในฐานะ เป็นวิธีการสำหรับการสอนคณิตศาสตร์และจัดเตรียมโอกาสสำหรับนักเรียนเพื่อทำคณิตศาสตร์ด้วยตัวของนักเรียนเอง ซึ่งรูปแบบกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญคือ กิจกรรมสำหรับการสร้างคณิตศาสตร์ กิจกรรมสำหรับการใช้คณิตศาสตร์ และกิจกรรมสำหรับการสื่อสารคณิตศาสตร์ และครูจะนำเสนอกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนอย่างไร (Shimizu, 2009)

จากการศึกษาความสำคัญของกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ จากวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง ผู้วิจัยได้สรุปความสำคัญของกิจกรรมทางคณิตศาสตร์นี้ ดังนี้ กิจกรรมทางคณิตศาสตร์ทำให้เกิดความเชื่อมต่อระหว่างโลกชีวิตจริงโดยพิจารณาผ่านสื่อเชิงกายภาพและโลกคณิตศาสตร์โดยพิจารณาผ่านสัญลักษณ์ในการคำนวณ เป็นสิ่งสำคัญในการพิจารณาพื้นที่การคิดของนักเรียนจากตัวสถานการณ์ปัญหาในโลกชีวิตจริงมาสู่โลกคณิตศาสตร์ และเป็นมุมมองในการวิจัยครั้งนี้

4.3 แนวคิดของกิจกรรมทางคณิตศาสตร์

Nohda (1998) อธิบายถึงการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้วิธีการแบบเปิด (Open-Approach) และหมายรวมถึงการคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematical thinking) บนกิจกรรมของนักเรียน (Students' activities) ซึ่งจุดประสงค์ของการสอนโดยใช้วิธีการแบบเปิดนี้เพื่อสนับสนุนทั้งกิจกรรมที่หลากหลายและการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในการแก้ปัญหาอย่างทันทีทันใด และในฐานะการสอนในกิจกรรมของปฏิสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์และนักเรียนถูกสนับสนุน ด้วยวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย โดยที่กิจกรรมทางคณิตศาสตร์และกิจกรรมของนักเรียนถูกทำให้เปิดใน 3 ลักษณะคือ กิจกรรมของนักเรียนเปิด กิจกรรมทางคณิตศาสตร์เปิด กิจกรรมทางคณิตศาสตร์มีแนวทางที่แตกต่างกันของการคิดทั้งกิจกรรมทางคณิตศาสตร์และกิจกรรมของนักเรียนถูกทำให้รวมเป็นหนึ่งเดียวกัน และในงานวิจัยนี้พิจารณาถึงข้อความที่สำคัญของ Nohda ที่ว่า “กิจกรรมทางคณิตศาสตร์ถูกพิจารณาเป็นกิจกรรมในกระบวนการนามธรรม จากประสบการณ์เชิงรูปธรรมของโลกชีวิตจริงไปสู่โลกคณิตศาสตร์” และเป็นช่องทางในการทำงานวิจัยนี้ กิจกรรมดังกล่าวประกอบด้วยกิจกรรมของการใช้และการแสดงแทนในโลกคณิตศาสตร์ นอกจากนี้แล้วกิจกรรมของนักเรียนอาจรวมถึงกระบวนการต่างๆ เช่น การตีความ การสำรวจ การกำหนดปัญหา การสำรวจอย่างเป็นระบบ การรวบรวมและการบันทึกข้อมูล การทดสอบข้อคาดการณ์ การแสดงข้อค้นพบที่ไม่เป็นทางการ การทำเป็นสัญลักษณ์ การทำเป็นสูตร การทำเป็นกรณีทั่วไป การอธิบาย การตัดสินใจ และการค้นหาการสื่อสาร ดังนั้นนามธรรมและการทำเป็นกรณีทั่วไป (Generalization) ถูกทำให้บรรลุผลได้ ด้วยกิจกรรมทางคณิตศาสตร์และกิจกรรมของนักเรียนที่รวมเป็นหนึ่งเดียวกัน

จากการศึกษาแนวคิดกิจกรรมทางคณิตศาสตร์จากวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องดังกล่าว ผู้วิจัยได้สรุปแนวคิดที่สำคัญของกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ ดังนี้ กิจกรรมทางคณิตศาสตร์ถูกนำมาใช้ในการพิจารณาการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์เพื่อพิจารณากระบวนการนามธรรมซึ่งนำไปสู่ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ และเป็นสิ่งที่ทำให้นักเรียนเข้าใจหรือสร้างความหมายในเรื่องนั้นๆ ได้ โดยอาศัยสถานการณ์ปัญหาเป็นตัวขับเคลื่อนให้เกิดการเปลี่ยนแปลงจากโลกชีวิตจริงของนักเรียนที่นักเรียนเคยประสบหรือคุ้นเคยมาก่อนไปสู่โลกสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยครั้งนี้อธิบายหน้าที่ของกระบวนการนามธรรมเพื่อสร้างความคิดรวบยอดของนักเรียนในชั้นเรียนที่ใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด โดยพิจารณาผ่านกิจกรรมทางคณิตศาสตร์จากการเชื่อมต่อโลกเชิงกายภาพและโลกเชิงสัญลักษณ์

ในงานวิจัยนี้กิจกรรมทางคณิตศาสตร์นับเป็นพื้นที่ในการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนอาศัยกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนด้วยวิธีการต่างๆ ในการแก้ปัญหาเพื่อสร้างความคิดรวบยอด และใช้สถานการณ์ปัญหาเป็นตัวขับเคลื่อนเพื่อให้นักเรียนแก้ปัญหาที่อยู่ในโลกชีวิตจริงหรือโลกที่นักเรียนคุ้นเคยมาก่อนไปสู่การแก้ปัญหาในโลกคณิตศาสตร์

5. แนวคิดเกี่ยวกับการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

การกล่าวถึงการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ในงานวิจัยนี้ นำเสนอหัวข้อตามลำดับ ดังนี้

5.1 ความหมายของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

การศึกษาการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ผู้วิจัยพยายามศึกษาจากกรอบแนวคิดการวิจัย ที่นักวิชาการแต่ละคนกล่าวถึงการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์และมุมมองการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ชนาธิป พรกุล (2543) กล่าวว่า การบูรณาการ คือ การเชื่อมโยงความรู้และประสบการณ์ทุกชนิดที่บรรจุอยู่ในแผนของหลักสูตรเป็นการเชื่อมโยงแนวนอนระหว่างหัวข้อและเนื้อหาต่างๆที่เป็นความรู้ทั้ง 3 ด้าน ได้แก่ พุทธิพิสัย ทักษะพิสัย และจิตพิสัย การบูรณาการทำให้ผู้เรียนได้รับความรู้เป็นอันหนึ่งอันเดียวกัน และรู้ในเรื่องนั้นอย่างลึกซึ้ง การบูรณาการความรู้เป็นสิ่งที่จำเป็นโดยเฉพาะในยุคที่มีความรู้ ข้อมูลข่าวสารมากจึงเกิดเป็นหลักสูตรที่ เรียกว่า หลักสูตรบูรณาการ (integrated curricular) ซึ่งพยายามหาประเด็นหลักในโปรแกรมวิชาโดยนำความคิดหลักในวิชา มาสัมพันธ์กัน

สุวิทย์ มูลคำ (2543) กล่าวว่า การเชื่อมโยง หรือ การบูรณาการ คือ การนำศาสตร์สาขาวิชาต่าง ๆ ที่มีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกันมาผสมผสานเข้าด้วยกัน เพื่อประโยชน์ในการจัดหลักสูตรแบบบูรณาการ คือ หลักสูตรที่นำเอาเนื้อหาของวิชาต่าง ๆ มาหลอมรวมเข้าด้วยกันทำให้เอกลักษณ์ของแต่ละรายวิชาหมดไป และ การเรียนการสอนด้วยวิธีการบูรณาการ เรียกว่า การจัดการเรียนการสอนแบบบูรณาการ (integrated instruction) คือ เน้นที่องค์รวมของเนื้อหามากกว่าองค์ความรู้ของแต่ละรายวิชาและเน้นที่การเรียนรู้ของผู้เรียนเป็นสำคัญยิ่งกว่าการบอกเนื้อหาของผู้สอน

อัมพร ม้าคะนอง (2547) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถของผู้เรียนในความสัมพันธ์ของความรู้หรือปัญหาที่เคยเรียนมากับความรู้ ปัญหา หรือสถานการณ์ปัญหาอื่นที่ตนเองค้นพบการเชื่อมโยงอาจทำได้หลากหลายชั้นเรียนคณิตศาสตร์ประกอบด้วย 3 ลักษณะ ดังนี้

- (1) การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน
- (2) การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ในสิ่งที่ผู้เรียนเรียนกับเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่น
- (3) การเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์หรือสาขาวิชาอื่น

บงกชรัตน์ สมานสินธุ์ (2551) กล่าวว่า ทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นความสามารถของผู้เรียนในการนำความรู้ที่เกิดจากการเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาสาระภายในวิชาคณิตศาสตร์คณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นและคณิตศาสตร์กับชีวิตประจำวัน มาใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาใหม่ ซึ่งครูผู้สอนควรจะชี้ให้ผู้เรียนเห็นถึงสิ่งที่พบ และให้ทำกิจกรรมเพื่อส่งเสริมความสามารถในการเชื่อมโยง

Evitts (2004) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เป็นลักษณะที่ผู้เรียนใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยการเลือกสถานการณ์ปัญหาจากสมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งสหรัฐอเมริกา เพื่อให้ผู้เรียนเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาด้วยตัวเองแล้ววิเคราะห์การแก้ปัญหาในการจำแนกแต่ละลักษณะของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนแต่ละคน

Eric (2000) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เป็นการสร้างความเชื่อมโยงระบบ พิกัดฉากจากความเข้าใจของผู้เรียน การแสดงแทนที่หลากหลายของฟังก์ชันที่มีอยู่ในหลักสูตร คณิตศาสตร์ของโรงเรียนระดับมัธยมศึกษา ผู้เรียนที่มีการเชื่อมโยงความรู้โดยใช้ตัวแทนทาง พืชคณิตและตัวแทนเชิงกราฟของฟังก์ชันในการแก้ปัญหาของผู้เรียน มีความถูกต้องในการเชื่อมโยง ความรู้ของผู้เรียนได้มากกว่า

Lawson and Chinnappan (2000) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็น ความสัมพันธ์ระหว่างการแก้ปัญหากับการสร้างองค์ความรู้ของผู้เรียน และตัวชี้วัดความสามารถด้าน เนื้อหาและการเชื่อมโยงความรู้ในการแก้ปัญหาทางเรขาคณิต ในการตอบสนองของปัญหา ซึ่ง ประยุกต์ใช้และรายละเอียดความตระหนักรู้ที่ชี้ให้เห็นในไดอะแกรมเชิงเรขาคณิต ความสำคัญของ ความรู้เกี่ยวกับปัญหา ข้อเสนอแนะที่ใช้จากผู้เรียนเป็นการประยุกต์ใช้ปัญหาที่ออกแบบให้ผู้เรียน

NCTM (2000) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ สามารถพบในหัวข้อทาง คณิตศาสตร์ ผ่านสาระและมาตรฐานกระบวนการ นอกเหนือรายวิชาคณิตศาสตร์ เช่น การเชื่อมโยง ไปยังสาระอื่นหรือบริบทโลกชีวิตจริง การเชื่อมโยงทำให้คณิตศาสตร์มีความหมาย ง่ายต่อการเรียนรู้ การตระหนักรู้และการสร้างการเชื่อมโยงสามารถช่วยผู้เรียนในความพยายามที่จะแก้ปัญหา การให้ เหตุผล การสื่อสาร เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ได้อย่างดี

Burkett (1998) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เป็นการทดสอบศักยภาพของ การเชื่อมโยงและวิธีการที่ผู้เรียนสร้างการเชื่อมโยงระหว่าง ตาราง สัญลักษณ์ และการแสดงแทนโดย กราฟ จากการตอบสนองของผู้เรียนที่ระบุวิธีการในสิ่งที่ผู้เรียนสร้างการเชื่อมโยงของผู้เรียนและการ ตอบสนองที่ได้แก้ไขใหม่เป็นการเปรียบเทียบเพื่อจำแนกการเปลี่ยนในศักยภาพของการเชื่อมโยง

Drexel (1997) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เป็นความสามารถในการเชื่อมโยง ความคิดรวบยอดเรื่องเศษส่วนร่วม (common fraction) และเศษส่วนทศนิยม (decimal fraction) หรือเศษส่วนที่มีพหุคูณของ 10 ผู้เรียนเกรด 6 เพื่อจำแนก เปรียบเทียบ ดำเนินการบวกและลบ เศษส่วนทศนิยม สามารถนำหลักการของเศษส่วนไปใช้กับเศษส่วนทศนิยมได้ และผู้เรียนมีความรู้ สามารถเชื่อมโยงความคิดรวบยอดเรื่องเศษส่วนและเศษส่วนทศนิยมมาสัมพันธ์กันได้ที่มีความหมาย ต่อความเข้าใจโน้มนำ และการดำเนินการในทศนิยม

Hodgson (1995) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในกระบวนการ การแก้ปัญหา ทำให้การสอนในชั้นเรียนผู้สอนต้องเตรียมปัญหาทางคณิตศาสตร์มาเป็นอย่างดีเพื่อ สนับสนุนให้ผู้เรียนใช้การเชื่อมโยงในการแก้ปัญหาของผู้เรียน

Ito-Hino (1995) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นการให้เหตุผลของผู้เรียนซึ่ง ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ของประเทศญี่ปุ่นจะยึดผู้เรียนเป็นหลักเพื่อแสดงบทบาทหลักในการสร้างการ เชื่อมโยง ผู้เรียนจะใช้ความรู้ที่เรียนรู้ความคิดรวบยอดมาก่อนหน้านี้และขั้นตอนจากสิ่งที่อยู่ใน ชีวิตประจำวันมาให้เหตุผล สิ่งที่ผู้เรียนได้รับและพัฒนาความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ใหม่อาศัย ความรู้ ความคุ้นเคยกับปัญหาที่ให้ผู้เรียน

Wood (1993) กล่าวว่า การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ เป็นการสร้างความเข้าใจทาง คณิตศาสตร์ที่ผู้สอนระดับมัธยมศึกษา อาศัยเรื่องเพศอธิบายการเชื่อมโยงระหว่างเพศชายและเพศ หญิงเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ จากวิธีการสอนผู้เรียนและธรรมชาติของหนังสือเรียนในการระบุความ

เป็นไปได้เกี่ยวกับการปฏิบัติในลักษณะของรายวิชาที่แยกเป็นส่วน เช่น พีชคณิต เรขาคณิต สถิติในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนมัธยมศึกษา

NCTM (1991) กล่าวว่า ความหมายการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ คือ การบูรณาการแนวคิดที่มีความสัมพันธ์กันให้เป็นองค์ประกอบเดียวกัน แบ่งได้ดังนี้

(1) การเชื่อมโยงภายในวิชา เป็นการนำเนื้อหาภายในวิชาเดียวกัน ไปสัมพันธ์กันให้ผู้เรียนได้ประยุกต์ความรู้และทักษะไปใช้ในชีวิตจริง ช่วยผู้เรียนเข้าใจถึงความแตกต่างของเนื้อหาภายในวิชารวมถึง พีชคณิต เรขาคณิต และตรีโกณมิติ ที่จะช่วยทำให้การเรียนรู้ของผู้เรียนมีความหมาย

(2) การเชื่อมโยงระหว่างวิชา เป็นการรวมศาสตร์ต่าง ๆ ตั้งแต่ 2 สาขาขึ้นไป ภายใต้หัวข้อที่เกี่ยวข้องกันเพื่อที่จะให้มีความสัมพันธ์กัน เช่น วิชาคณิตศาสตร์กับวิชาวิทยาศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ สังคมศาสตร์ กีฬาหรือศิลปะ เป็นการเรียนรู้โดยใช้ความรู้ ความเข้าใจและทักษะในวิชาต่าง ๆ มากกว่าหนึ่งวิชาเพื่อช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ที่ลึกซึ้งและตรงกับสภาพชีวิตจริง

5.2 ความสำคัญของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

Kennedy and Tipp (1994) กล่าวว่า ความสำคัญการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ว่า ผู้เรียนควรจะเชื่อมโยงสิ่งที่ป็นรูปธรรม แผนภาพ สัญลักษณ์ ความคิดรวบยอด ซึ่งผสมผสานกับกระบวนการเพื่อที่จะบูรณาการเนื้อหาและวิธีการต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ รวมถึงเชื่อมโยงคณิตศาสตร์ไปยังชีวิตประจำวันและควรสร้างการเชื่อมโยงให้เกิดขึ้นในชั้นเรียนอย่างสม่ำเสมอ ระหว่างการสอน ควรให้ผู้เรียนทำสิ่งที่ป็นรูปธรรมและเปลี่ยนสิ่งที่ทำมาเป็นรูปภาพ แผนผัง กราฟ และสัญลักษณ์ ตัวอย่างเช่น ครูสอนการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ผู้เรียนเกรด 3 โดยเชื่อมโยงระหว่าง คณิต กับ การเขียนเศษส่วน ที่ผู้เรียนสามารถเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับชีวิตจริงด้วยปัญหาที่ผู้เรียนเผชิญและเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ

Noss, Healy and Hoyles (1997) กล่าวว่า การกระทำเกี่ยวกับการสร้างการเชื่อมโยงเป็นสิ่งที่สำคัญ เนื่องจากความหมายทางคณิตศาสตร์ได้จากการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ดังนั้น การเชื่อมต่อการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ไปยังความรู้และความเข้าใจ สามารถที่จะส่งเสริม แต่ดูเหมือนว่า การกระทำเกี่ยวกับการสังเกตความสัมพันธ์และทำให้เกิดการเชื่อมโยงไม่ว่าจะเป็นระหว่างการแสดงแทนเชิงความสัมพันธ์ที่แตกต่างหรือสาระทางด้านคณิตศาสตร์นั้นเป็นแง่มุมที่สำคัญของงานทางด้านคณิตศาสตร์และไม่เพียงแค่ว่าพิจารณาเกี่ยวกับการเชื่อมโยงเพื่อที่จะไปยังความรู้อื่น

NCTM (2000) กล่าวว่า ความสำคัญของการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่ระดับอนุบาลจนถึงเกรด 12 ดังนี้

คำอธิบายการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนเกรด K-2

การให้ความสำคัญของการเชื่อมโยงสำหรับเริ่มพัฒนาการทางคณิตศาสตร์ คือ ความสามารถที่จะเข้าใจคณิตศาสตร์ (intuitive mathematics) คณิตศาสตร์ที่ไม่เป็นทางการ (informal mathematics) สิ่ง que ผู้เรียนได้เรียนผ่านประสบการณ์ตรงของตัวเองและคณิตศาสตร์ที่เรียนในโรงเรียน การเชื่อมโยงอื่น ๆ ระหว่างความคิดรวบยอดในหัวข้อคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน คณิตศาสตร์และความรู้สาขาอื่น และคณิตศาสตร์ที่อยู่ในชีวิตประจำวัน เป็นการส่งเสริมการเชื่อมโยง

ระหว่างประสบการณ์ที่ไม่เป็นทางการของผู้เรียนและคณิตศาสตร์ที่เป็นทางการ (NCTM, 2000: p.132)

คำอธิบายการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนเกรด 3-5

การคิดอย่างคณิตศาสตร์ที่มองจากการเชื่อมโยงและการสร้างการเชื่อมโยงเป็นการสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ถ้าไม่มีการเชื่อมโยง ผู้เรียนต้องเรียนและจำด้วยความคิดรวบยอดที่ถูกแยกซึ่งมีจำนวนมาก เกี่ยวกับการเชื่อมโยง ถ้าผู้เรียนเรียนแล้วสามารถเชื่อมโยงได้เป็นการสร้างความเข้าใจใหม่จากความรู้ที่มีอยู่ก่อนหน้านี้ (NCTM, 2000: p.274) และระบุหัวข้อทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญไว้ 3 ประเด็นในเกรด 3-5 ได้แก่ การให้เหตุผลทางการคูณ (multiplicative reasoning) สิ่งที่มีค่าเท่ากัน (equivalence) และคำนวณอย่างคล่องแคล่ว (computational fluency) (NCTM, 2000: p.144) แต่ละหัวข้อประกอบด้วย การเชื่อมโยงจำนวนมากเพื่อให้เป็นเรื่องเด่นและสร้างโดยการเน้นการเชื่อมโยงภายในและระหว่างหัวข้อทางคณิตศาสตร์ เป้าหมายเพื่อสามารถจัดการวางแผนความคิดที่สำคัญ ผู้เรียนได้รับประโยชน์เพราะว่าเป็นสิ่งที่ง่ายกว่าที่เรียนและจำแนวคิดใหม่ถ้าสามารถทำให้เกิดความสัมพันธ์ไปยังสิ่งที่ผู้เรียนเข้าใจอยู่แล้ว

การเข้าสู่สถานการณ์ด้วยวิธีการที่หลากหลาย แก้ปัญหาและเรียนรู้ความคิดรวบยอดใหม่ ผู้เรียนควรพัฒนากิจนิสัยการมองจากการเชื่อมโยงซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของการเรียนรู้และประสบการณ์ การแก้ปัญหา ผู้เรียนจะตระหนักเกี่ยวกับความหลากหลายของสถานการณ์ในแนวคิดที่สามารถใช้ประโยชน์เช่นเดียวกับการช่วยเพื่อให้รู้และอภิปรายการเชื่อมโยงภายในหัวข้อคณิตศาสตร์และระหว่างลักษณะของสถานการณ์ปัญหา

การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่มีความสำคัญเพราะว่าสามารถช่วยให้ผู้เรียนบรรลุผลสำเร็จเกี่ยวกับความคิดรวบยอดใหม่และเห็นว่าคณิตศาสตร์เข้าใจได้ง่าย ผู้เรียนควรจะถูกเสนอแนะและส่งเสริมในชั้นเรียนคณิตศาสตร์เพื่อที่จะพัฒนาลักษณะนิสัยการมองเพื่อการเชื่อมโยงและความสงสัยเกี่ยวกับการเชื่อมโยง เช่น ภายในหัวข้อของคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงจากบทนิยามเบื้องต้นและสถานการณ์ที่ใช้ความซับซ้อนนำไปสู่การพัฒนาเชิงเหตุผลและความเข้าใจที่ลึกซึ้ง ขณะที่การเชื่อมโยงระหว่างหัวข้อทางคณิตศาสตร์และแสดงกระบวนการซึ่งคณิตศาสตร์ไม่ใช้การสะสมของแนวคิดที่แยกเป็นส่วน ๆ การเชื่อมโยงช่วยให้ผู้เรียนระลึกทักษะและความคิดรวบยอดและใช้ในสถานการณ์การแก้ปัญหาอย่างเหมาะสม

Skemp (1971) กล่าวถึงว่า ในปัจจุบันนี้การสอนคณิตศาสตร์ในระดับวิทยาลัยมหาวิทยาลัยเน้น ผลลัพธ์ (product) ของผู้เรียนมากกว่ากระบวนการคิด (process) ของผู้เรียน อีกทั้งเนื้อหาการเรียนคณิตศาสตร์ในระดับปริญญาตรีมีความเป็นนามธรรมสูง ความรู้พื้นฐานในเนื้อหาต่างๆ และวิธีการต่างๆ ที่เป็นพื้นฐานถูกนำมาใช้สอนเพื่อให้ผู้เรียนสามารถสร้างความคิดรวบยอดและพัฒนาองค์ความรู้ด้วยตนเอง

ผู้เรียนจำเป็นต้องเชื่อมโยงความรู้เก่าและวิธีการแก้ปัญหาเพื่อสร้างความรู้ใหม่และวิธีการใหม่ วิธีการสอนจำเป็นต้องปรับเปลี่ยนเพื่อให้ผู้เรียนสามารถสร้างความรู้และแก้ปัญหาตามแนวทางของตนเองนอกเหนือจากการอธิบาย บรรยายไปสู่การให้นิยาม อย่างมีกฎเกณฑ์และสามารถพิสูจน์ได้จากการพัฒนาการคิดพื้นฐานไปสู่การคิดขั้นสูงของผู้เรียน

6. แนวคิดเกี่ยวกับการคิดขั้นสูง

6.1 ความหมายของการคิดขั้นสูง

การคิดเป็นกระบวนการทำงานของสมองที่อาศัยประสบการณ์ที่ผ่านมาสัมพันธ์กับสิ่งเร้าและสภาพแวดล้อม เพื่อนำมาวิเคราะห์เปรียบเทียบสังเคราะห์ และประเมินอย่างมีระบบและเหตุผลให้ได้แนวทางในการแก้ปัญหาอย่างเหมาะสมหรือสร้างสรรค์สิ่งใหม่ดังนั้นจึงควรส่งเสริมให้มีอยู่ในคุณลักษณะของเยาวชนไทย (กองวิจัยทางการศึกษา กรมวิชาการ, 2542; กระทรวงศึกษาธิการ, 2542; ทิศนา แคมมณี, 2549; 2551)

การคิดเป็นกิจกรรมทางความคิดมีลักษณะเป็นกระบวนการทางสมองของมนุษย์ อาศัยความรู้เกี่ยวกับเรื่องที่กำลังคิด ประสบการณ์ที่ได้รับมา นำมาสัมพันธ์กับบริบทและสิ่งแวดล้อมซึ่งผู้คิดมีเป้าหมายในการคิดที่ชัดเจน พร้อมทั้งกำหนดเป้าหมาย สิ่งสำคัญ ผู้คิดต้องมีสติ ระลึกรู้ว่ากำลังคิดเรื่องอะไรอยู่เพื่อให้ตนเองบรรลุผลความคิดที่มีประสิทธิภาพ (เกรียงศักดิ์ เจริญวงศ์ศักดิ์, 2546; สุวิทย์ มูลคำ, 2547; สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2550)

การรู้คิด (Cognition) และสมรรถภาพของสมอง (mental ability) มีความสัมพันธ์กันอย่างยิ่ง โดยสมรรถภาพของสมองเป็นศักยภาพที่มีอยู่ภายในแต่ละบุคคล และการคิดเป็นทักษะเชิงปฏิบัติของบุคคลที่เกิดจากการใช้สมรรถภาพสมองร่วมกับประสบการณ์ที่เกิดจากการเรียนรู้และการฝึกฝน ด้วยเหตุนี้นิยามการคิด จึงเป็นเรื่องเดียวกับสมรรถภาพสมองโดยตรง (ศรีธร, 2544)

การคิดเป็นการแก้ปัญหาที่เกิดจากการคาดคะเน การอ่าน การตัดสินใจ การสะท้อนผลเกี่ยวกับสิ่งที่จะเกิดขึ้นในสิ่งตรงกันข้าม (Perkins, Tishman & Goodrich, 1994)

ทักษะการคิด เป็นพฤติกรรมความคิดที่มีลักษณะเป็นรูปธรรมที่ช่วยให้มองเห็นพฤติกรรมความคิดหรือความสามารถย่อย ๆ ที่ใช้ในการแสวงหาข้อมูล โดยการอธิบายถึงสาเหตุที่มาของปัญหาและปรากฏการณ์การคาดคะเนสิ่งที่จะเกิดการจัดกระทำสื่อความหมายและการตรวจพิสูจน์ข้อมูลนั้นๆ (เบญจมาศ เกตุแก้ว, 2548)

ทักษะการคิดขั้นสูง เป็นคุณลักษณะทางความคิดของมนุษย์ที่ใช้กลยุทธ์ทางความคิดที่ซับซ้อน ลึกซึ้ง สร้างสรรค์ มีหลักเกณฑ์ที่ต้องอาศัยคุณภาพความคิดขั้นสูงในการประมวลองค์ความรู้ ประสบการณ์ต่าง ๆ เพื่อนำไปสู่ผลลัพธ์เรื่องใดเรื่องหนึ่งโดยอาจใช้ทักษะความคิดหลาย ๆ ด้านประกอบกัน (อุษณีย์ โพธิสุข, 2544)

ทักษะการคิดขั้นสูงเป็นทักษะทางด้านการคิดที่เกิดขึ้นด้วยกระบวนการที่ซับซ้อนและมีขั้นตอนการคิดหลายขั้นตอน (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา, 2550)

การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์เป็นการพัฒนาการคิดจากการคิดพื้นฐาน (Elementary Thinking) ไปสู่การคิดขั้นสูง (Advanced Mathematical Thinking) โดยการเปลี่ยนแปลงการคิดจากการอธิบาย บรรยาย ไปสู่การให้นิยาม คำจำกัด อาศัยการพิสูจน์อย่างเป็นแบบแผน มีหลักการและเหตุผล (Tall, 1991, 1995)

การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนสามารถพิจารณาได้จาก ทักษะเชิงบริบทและการพัฒนาความรู้ในการประยุกต์ใช้หลักการทางคณิตศาสตร์ การพัฒนาความเข้าใจวิธีการเชิงความคิดรวบยอด และวิธีการเรียนรู้ในแนวทางของตนเอง (Byness, 2001)

จากการประมวลความหมายของการคิด การคิดเป็นกระบวนการทางสมองของมนุษย์ ที่ใช้สัญลักษณ์หรือการแสดงแทนเหตุการณ์หรือสถานการณ์ต่าง ๆ โดยมีการจัดระบบความรู้ ข้อมูล เป็นประสบการณ์เดิมกับประสบการณ์ใหม่ที่ไปได้ทั้งในรูปแบบธรรมดาและสลับซับซ้อนสามารถแสดงออกได้หลายลักษณะ เช่น การให้เหตุผลในการแก้ปัญหาต่าง ๆ

6.2 ความสำคัญของลักษณะของการคิด

กรมวิชาการ (2542) กล่าวว่า ลักษณะของการคิด ประกอบด้วย ทักษะการคิดพื้นฐาน และทักษะการคิดขั้นสูงหรือทักษะการคิดที่ซับซ้อน ดังต่อไปนี้

1. ทักษะการคิดพื้นฐาน (Basic Skills) แบ่งเป็นทักษะการสื่อความหมาย และทักษะการคิดที่เป็นแกนหรือทักษะการคิดทั่วไป

1.1 ทักษะการสื่อความหมาย (Communication Skills) เป็นทักษะการรับสารที่แสดงถึงความคิดของผู้อื่นเข้ามาเพื่อรับรู้ ตีความแล้วจดจำและเมื่อต้องการที่เจาะลึก เพื่อนำมาเรียบเรียงและถ่ายทอดความคิดเห็นของตนให้แก่ผู้อื่น โดยแปลงความคิดให้อยู่ในรูปภาษาต่างๆ ทั้งที่เป็นข้อความ คำพูด ศิลปะ ดนตรี คณิตศาสตร์ ฯลฯ

ทักษะการสื่อความหมาย ประกอบด้วย ทักษะที่สำคัญ ได้แก่ การฟัง (Listening) การอ่าน (Reading) การรับรู้ (Perceiving) การจดจำ (Managing) การจำ (Remembering) การคงสิ่งที่ยืนยันไว้ภายหลังการเรียนรู้ (Retention) การบอกความรู้ได้จากตัวเลือกที่กำหนดให้ (Recognizing) การบอกความรู้ออกมาด้วยตนเอง (Recalling) การใช้ข้อมูล (Using Information) การบรรยาย (Describing) การอธิบาย (Explaining) การทำให้กระจ่าง (Clarifying) การพูด (Speaking) การเขียน (Writing) และการแสดงออกถึงความหมายของตน

1.2 ทักษะการคิดที่เป็นแกนหรือทักษะการคิดทั่วไป เป็นทักษะการคิดที่จำเป็นต้องใช้อยู่เสมอในชีวิตประจำวันและเป็นพื้นฐานการคิดขั้นสูงที่มีความสลับซับซ้อนซึ่งคนเราจำเป็นต้องใช้ในการเรียนรู้เนื้อหาวิชาการต่างๆ ตลอดจนการใช้ชีวิตอย่างมีคุณภาพ

ทักษะการคิดที่เป็นแกน ประกอบด้วย การสังเกต (Observing) การสำรวจ (Exploring) การตั้งคำถาม (Questioning) การเก็บรวบรวมข้อมูล (Information Gathering) การระบุ (Identifying) การจำแนกแยกแยะ (Discriminating) การจัดลำดับ (Ordering) การเปรียบเทียบ (Comparing) การจัดหมวดหมู่ (Classifying) การสรุปอ้างอิง (Inferring) การแปล (Translating) การตีความ (Interpreting) การเชื่อมโยง (Connecting) การขยายความ (Elaborating) การให้เหตุผล (Reasoning) และการสรุปย่อ (Summarizing)

2. ทักษะการคิดขั้นสูงหรือทักษะการคิดที่ซับซ้อน เป็นทักษะการคิดที่มีขั้นตอนหลายขั้น และต้องอาศัยทักษะการสื่อความหมายและทักษะการคิดที่เป็นแกนหลายๆ ทักษะในแต่ละขั้น ทักษะการคิดขั้นสูงจึงจะพัฒนาได้เมื่อผู้เรียนได้ผ่านการพัฒนาทักษะการคิดพื้นฐานจนเกิดความชำนาญแล้ว

ทักษะการคิดขั้นสูง ได้แก่ การสรุปความ (Drawing Conduction) การให้คำจำกัดความ (Defining) การวิเคราะห์ (Analyzing) การผสมผสานข้อมูล (Integrating) การจัดระบบความคิด (Organizing) การสร้างองค์ความรู้ใหม่ (Constructing) การกำหนดโครงสร้างความรู้ (Structuring) การแก้ไขปรับปรุงโครงสร้างความรู้ใหม่ (Restructuring) การค้นหาแบบแผน

(Finding Patterns) การหาความเชื่อพื้นฐาน (Finding Underlying Assumption) การคาดคะเน หรือการพยากรณ์ (Predicting) การตั้งสมมติฐาน (Formulating Hypothesis) การทดสอบ สมมติฐาน (Testing Hypothesis) การตั้งเกณฑ์ (Establishing Criteria) การพิสูจน์ความจริง (Verifying) และการประยุกต์ใช้ความรู้ (Applying)

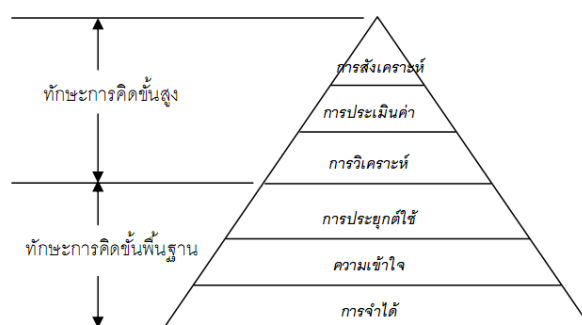
ทักษะการคิด เป็นสิ่งสำคัญถ้าผู้สอนไม่กำหนดกิจกรรมการคิดที่จะเปลี่ยนพฤติกรรมดังกล่าว ข้างต้น เสริมความมั่นใจให้ผู้เรียน สร้างเครื่องมือได้แก่วิธีการเรียนรู้ให้กับผู้เรียน ใช้การระดมสมอง การคิดอย่างมีเหตุผล แล้วทักษะการคิดที่ถือว่าเป็นทักษะพื้นฐานของการพัฒนาทักษะอื่นๆ ย่อมไม่ได้รับการพัฒนา

Tall (1988i) กล่าวว่า การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ถูกนิยามในเชิงโครงสร้างที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอด จึงจำแนกลักษณะการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ดังนี้

- (1) คุณลักษณะของความเป็นนามธรรม (abstraction) ไปสู่บทนิยามในเชิงความคิดรวบยอด (concept definitions) ของความคิดรวบยอดในเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical concepts)
- (2) การใช้บทนิยามในเชิงความคิดรวบยอดที่เป็นนามธรรมเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพในการคิด
- (3) มีจุดยืนการพิสูจน์เชิงเหตุผลมากกว่าการให้เหตุผลสิ่งที่มีความเกี่ยวข้องกัน
- (4) การลดคุณสมบัติของความคิดรวบยอดในเชิงคณิตศาสตร์
- (5) การนำไปใช้ถ้าคุณลักษณะของความเป็นคณิตศาสตร์ยังคงอยู่แล้วสามารถนำไปใช้ในเรื่องอื่นได้

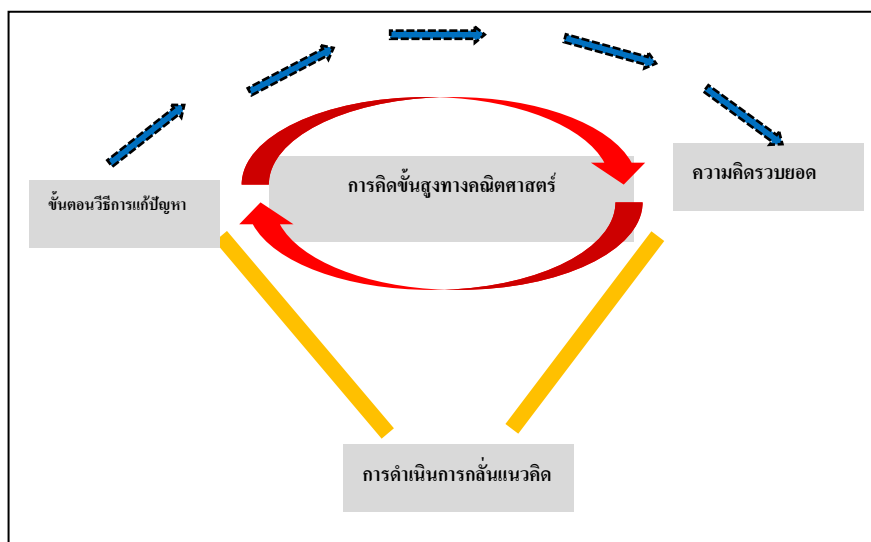
6.3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องและแนวคิดของการคิดขั้นสูง

Anderson & Kraththwohl (2001) นำเสนอ Bloom Revised Taxonomy โดยแบ่งส่วนที่เป็นการคิดออกเป็น 2 ระดับ คือ การคิดขั้นต่ำ (Lower-order Thinking) และการคิดขั้นสูง (Higher-order Thinking) ดังนี้ ระดับความจำ ความเข้าใจ การประยุกต์เป็นระดับการเรียนรู้ในระดับล่างหรือการคิดขั้นต่ำ ส่วนการวิเคราะห์ การประเมินค่า และการคิดสังเคราะห์เป็นการเรียนรู้ในระดับสูงหรือการคิดขั้นสูง ดังภาพที่ 4



ภาพที่ 4 ระดับการคิดขั้นพื้นฐานและการคิดขั้นสูงตามแนวคิดของ Anderson & Kraththwohl (2000)

Tall (1991) อธิบายถึงการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์จำเป็นต้องอาศัยการคิดพื้นฐานเพื่อพัฒนาไปสู่การสร้างความรู้ หรืออธิบายได้อีกนัยหนึ่งว่า การคิดขั้นสูงจำเป็นต้องสะสมความรู้ที่ได้เรียนมาก่อนหน้านั้นเพื่อสร้างความรู้ใหม่ และ Tall (1995) กล่าวว่า การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์เป็นการสร้างแนวคิดใหม่หรือการขยายแนวคิดที่มีอยู่เดิม ดังภาพที่ 5



ภาพที่ 5 การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามแนวคิดของ (Tall, 1991: p. 107)

จากภาพที่ 5 การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์เกิดขึ้นในกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดซึ่งอาศัยการดำเนินการกลั่นแนวคิดเป็นตัวเชื่อมโยงกระบวนการและความคิดรวบยอดเพื่อสร้างและพัฒนาความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ซึ่งการเรียนรู้ที่ได้จากการเชื่อมโยงระหว่างขั้นตอนและความคิดรวบยอดเป็นความสัมพันธ์ของความรู้ที่แต่ละคนสามารถอธิบายหรือลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตร การรับรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

การดำเนินการกลั่นแนวคิด (Compression) เป็นการดำเนินการกลั่นแนวคิดเป็นกรอบในการอธิบายกระบวนการสร้างแนวคิดหรือความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ซึ่งพิจารณาจากวิธีการในการแก้ปัญหาไปสู่กระบวนการแก้ปัญหาและพัฒนาไปสู่ความคิดรวบยอด

ความคิดรวบยอดเชิงกระบวนการ (Procept) เป็นความคิดรวบยอดเชิงกระบวนการเป็นกรอบหรือพื้นที่ในการพิจารณาหลักการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์โดยพิจารณาจากวิธีการในการแก้ปัญหาไปสู่กระบวนการในการแก้ปัญหาและนำไปสู่การสร้างความคิดรวบยอดในท้ายสุด ความคิดรวบยอดเชิงกระบวนการจึงมีลำดับขั้นตอนที่ต่อเนื่องกันของกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ซึ่งอาศัยการดำเนินการกลั่นแนวคิดเป็นเครื่องมือในการสร้างความคิดรวบยอด

Dossey (1992) กล่าวว่า ความเข้าใจที่มีต่อความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายมีความสำคัญอย่างมากต่อการพัฒนาและความสำเร็จในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในระบบโรงเรียนและต่อความเข้าใจเกี่ยวกับการวิจัยเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในระบบ

โรงเรียน ความเข้าใจเกี่ยวกับธรรมชาติของความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่อยู่นอกตัวครูหรือผู้เรียน ทำให้ครุคณิตศาสตร์ของประเทศไทยแสดงบทบาทการนำความรู้หรือเนื้อหาเหล่านั้นมาส่งต่อ (Transmission) ให้ผู้เรียน ดังนั้นสิ่งที่ป็นเนื้อหาใหม่ทั้งหมดเป็นสิ่งที่ผู้เรียนไม่เคยเรียนรู้มาก่อน หน้าที่ของผู้สอนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ คือ การพยายามอธิบาย บรรยาย สาธิต ผู้เรียนมีหน้ารับฟัง เท่านั้นไม่มีโอกาสในการอภิปราย แสดงความคิดเห็นของตนเอง

สิ่งที่ทำให้การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์เกิดขึ้นในตัวผู้เรียน ผู้สอนต้องทำให้ชั้นเรียน คณิตศาสตร์เน้นการแก้ปัญหาเพื่อเป็นจุดเริ่มต้นของการเข้าถึงกระบวนการคิดและกระบวนการ เรียนรู้ของผู้เรียนจึงจะสามารถปฏิรูปกระบวนการเรียนรู้ได้

7. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการคิดขั้นสูง

Tall (1991) เสนอแนะถึงประเด็นวิจัยที่นำไปสู่การสอนและเรียนรู้เกี่ยวกับการคิดขั้นสูง ทางคณิตศาสตร์ ใน 3 ประเด็น

- 1) ประเด็นวิจัยที่เกี่ยวกับความคิดรวบยอดของผู้เรียน
- 2) ประเด็นวิจัยที่เกี่ยวกับการจัดการเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ขั้นสูง
- 3) ประเด็นวิจัยที่เกี่ยวกับบริบทแวดล้อมภายนอกที่เกี่ยวข้อง (external environment)

สำหรับการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์

Robert & Schwarzenberger (1991 cited in Tall, 1991) เสนอคำถามวิจัยที่ เกี่ยวข้องกับการพัฒนาการคิดขั้นสูงของนักศึกษาแต่ละคนและการเชื่อมโยงการเรียนรู้ของนักศึกษา ที่แตกต่างกัน จากการศึกษาใน 5 ตัวแปร ดังนี้

1) ตัวแปรเชิงสังคม เน้นกลุ่มของผู้เรียนในการเรียนคณิตศาสตร์ พิจารณาถึงชั้นเรียน คณิตศาสตร์ไม่ได้แตกต่างจากชั้นเรียนประถมศึกษา นั่นคือ ผู้สอนยังคงมีบทบาทสำคัญในการวางแผน ทางการจัดการเรียนการสอนให้ผู้เรียนดำเนินตาม ผู้เรียนยังคงเรียนตามแนวทางที่ผู้สอนกำหนด ผู้เรียนไม่ได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง

2) ตัวแปรด้านเนื้อหาคณิตศาสตร์ การจัดการเรียนการสอนโดยใช้เนื้อหาที่มากในเวลาที่ มีน้อยการศึกษาพบว่า ประสบการณ์ของผู้เรียนแต่ละคนเป็นประโยชน์กับผู้เรียนคนอื่นๆ ปัญหาต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ในบริบทที่แตกต่างกันไม่ได้ถูกอธิบายรายละเอียด ทำให้ผู้เรียนไม่สามารถ เข้าใจความคิดรวบยอดใหม่ๆ ในช่วงเวลาที่กำหนด ทั้งความเป็นนามธรรม การเป็นกรณีทั่วไปและ การสร้างทฤษฎีหรือกฎเกณฑ์ต่างๆ ทำให้เกิดปัญหากับผู้เรียนในการเรียนรู้ ซึ่งผู้เรียนต้องดูดซับเรื่อง ต่างๆ อย่างรวดเร็ว ทั้งที่ความเป็นจริงแล้วเรื่องต่างๆ เหล่านี้ต้องใช้ระยะเวลาในการพัฒนาเพื่อสร้าง ความเข้าใจ ผู้เรียนจำเป็นต้องสร้างองค์ความรู้ใหม่ ตัวอย่างเช่น เนื้อหาเรื่อง “เวกเตอร์” ถูกสอน อย่างเป็นรูปธรรมในวิชาฟิสิกส์ แต่เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ถูกสอนอย่างเป็นนามธรรม ลำดับคอนเวอร์ เจนและอนุกรมถูกสอนด้วยความเป็นกรณีทั่วไปและรวมเนื้อหาเข้าด้วยทั้งที่ความเป็นจริงควรสอนแต่ ละเนื้อหาแยกจากกัน การสอนเนื้อหาขั้นสูงเหล่านี้ไม่ได้สอนจากการคิดพื้นฐาน ซึ่งในช่วงปีแรกของการ เรียนระดับมหาวิทยาลัยผู้เรียนต้องเผชิญ และที่สำคัญทำให้เกิดความไม่ต่อเนื่องในการ เปลี่ยนแปลงจากการคิดพื้นฐานไปสู่การคิดขั้นสูง

3) ตัวแปรด้านการประเมินงานของผู้เรียน มีงานวิจัยจำนวนมากพบว่าผู้เรียนมีความยากลำบากในการพิสูจน์ทั้งการพิสูจน์โดยอุปนัยและการพิสูจน์โดยการหาข้อขัดแย้ง กระบวนการประเมินต้องใช้เวลายาวนานเพื่อให้ทราบถึงเหตุและผลของการสอนและความรู้ที่นักศึกษาได้รับ

4) ตัวแปรเชิงจิตวิทยาและลักษณะเชิงการรู้ของผู้เรียน เป็นพฤติกรรมการทำงานของผู้เรียนในการเรียนรู้หรือแก้ปัญหา จากการศึกษพบว่า ผู้เรียนนำความรู้ในระดับมัธยมศึกษาที่ถูกสอนโดยใช้วิธีการพิสูจน์และนำมาประยุกต์ใช้จำนวนน้อย ขั้นตอนของวิธีการแก้ปัญหาที่ไม่เหมาะสม ผู้เรียนที่เรียนดีมักจะแสดงความสามารถรอบด้านในการหาวิธีการแก้ปัญหา ผู้เรียนหลายคนจะใช้วิธีการเฉพาะในการแก้ปัญหา

5) ตัวแปรเกี่ยวกับความรู้ที่ผู้เรียนได้รับในคณิตศาสตร์ขั้นสูง อ้างถึง Schoenfeld (1985) กล่าวว่า การแก้ปัญหาของผู้เรียนมีข้ออาศัยเพียงความรู้ที่ผู้เรียนมีแต่อาศัย ยุทธวิธีและวิธีการในการให้รายละเอียดของการแก้ปัญหาที่มากกว่า Polya (1945) นั่นคือ ทำความเข้าใจปัญหา วางแผน การแก้ปัญหา ดำเนินการแก้ปัญหา ย้อนกลับหรือตรวจสอบวิธีการแก้ปัญหา

ประเภทของงานวิจัยเกี่ยวกับการคิดขั้นสูงแยกเป็น 3 ประเภทได้ ดังนี้ คือ

1) งานวิจัยเกี่ยวกับความคิดรวบยอดของคณิตศาสตร์ขั้นสูง ดังเช่น Schwarzenberger & Tall (1978), Tall & Vinner (1981), Cornu (1982) ได้กำหนดทวิลักษณะของกระบวนการคิดในฐานะที่เป็นกระบวนการ-ความคิดรวบยอด (process-concept) ทวิลักษณะที่เกิดขึ้นเป็นสิ่งที่ยากลำดับในการเรียนรู้เรื่อง ความคิดรวบยอดเรื่องฟังก์ชัน

2) งานวิจัยเกี่ยวกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ขั้นสูง ดังเช่น Douady (1986) ได้ทำการทดสอบประสิทธิภาพของการพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหานักศึกษา มีขั้นตอนดังนี้ คือ 1) อธิบายสิ่งที่เกี่ยวข้องกับการแก้ปัญหา (explanation) 2) สร้างการแก้ปัญหาตามแนวการสอน (institutionalization) 3) การทำความเข้าใจกับปัญหาโดยการให้ปัญหา (familiarization) ต่อไปในเปรียบเสมือนกับแนวคิดทาง จิตวิทยาด้วยวิธีการเสริมแรง 4) การแก้ปัญหาในบริบทอื่นๆ (transfer) Artigue (1987) ได้นำแนวคิดของ Douady มาใช้ และได้เสนอแนะวิธีการสอนเรื่องสมการอนุพันธ์ แบ่งเป็น 4 ขั้นตอน คือ 1) อธิบายถึงเครื่องมือพื้นฐานในการหาอนุพันธ์ 2) สร้างความคิดรวบยอดใหม่ผ่านตัวอย่างต่างๆ ที่สอดคล้องกับการหาสมการอนุพันธ์ และ 3) เปรียบเทียบระหว่างวิธีการเชิงคุณสมบัติและวิธีการเชิงพีชคณิต 4) นำแนวคิดของสมการเชิงอนุพันธ์ไปแก้ปัญหาอื่นๆ เช่น พื้นที่ผิวของกรวย

3) งานวิจัยเกี่ยวกับบริบทแวดล้อมที่เกี่ยวข้องกับการคิดขั้นสูง การจัดสภาพแวดล้อมบรรยากาศ การเรียนการสอนด้วยการสนับสนุนให้ผู้เรียนได้มีการอธิบาย หาข้อโต้แย้ง เพื่อสร้างกิจกรรมทางคณิตศาสตร์และลดช่องว่างการเรียนการสอนระหว่างครูกับผู้เรียน Legrand et al (1988) ได้เสนอแนะเงื่อนไขพื้นฐานที่ไม่สนับสนุนการคิดพื้นฐาน ดังนี้ 1) การปรามนักศึกษาเมื่อเสนอวิธีคิด 2) การสอนเป็นพิธีการและมีรูปแบบไม่ชัดเจน 3) การให้ผู้เรียนเข้าร่วมเนื้อหาสาระที่ใช้สอนโดยผู้สอน 4) การใช้อำนาจและบทบาทการสอนของครูอย่างเต็มที่ 5) การใช้ปัญหาที่ซับซ้อนเพื่อป้องกันมิให้ผู้เรียนที่มีความรู้มาก่อนนำวิธีการมาใช้ หรือใช้วิธีการง่าย ๆ ในการสร้างความคิดรวบยอด

นอกจากนี้ Robert et al (1987) ได้ทำการศึกษาการจัดสภาพแวดล้อมการสอนเพื่อให้ผู้เรียนใช้วิธีการทำเป็นกรณีทั่วไป (Generalization) โดยใช้ปัญหาที่คล้ายคลึงกันเพื่อให้ผู้เรียนเข้าร่วมในกระบวนการแก้ปัญหา พบว่า ผู้เรียนสามารถสามารถใช้เครื่องมือในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ และ Robert & Tenaud (1989) ได้เสนอแนะบริบทแวดล้อมภายนอกเพื่อสนับสนุนการคิดขั้นสูง คือ ความสลับซับซ้อนของเนื้อหาต้องพยายามเปลี่ยนแปลงบรรยากาศแวดล้อมของการจัดการเรียนการสอนและความเป็นนามธรรมของคณิตศาสตร์ต้องให้ผู้เรียนเข้าถึงสาระด้วยวิธีการของการสอนมากกว่าให้ผู้เรียนมุ่งเผชิญความเป็นนามธรรมโดยตรง

6. กรอบแนวคิดการวิจัย

การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหาโดยใช้การคิดขั้นสูง การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในกระบวนการแก้ปัญหาภายใต้บริบทชั้นเรียนคณิตศาสตร์ของประเทศไทยเป็นการนำแนวคิดไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ (Inprasitha, M. (2010)) มาประยุกต์ใช้เพื่อให้เหมาะสมกับบริบทของการจัดการเรียนการสอนมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ ศูนย์สุพรรณบุรีมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร และมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร แบ่งเป็น 4 ขั้นตอนของลำดับวิธีการสอน ดังนี้

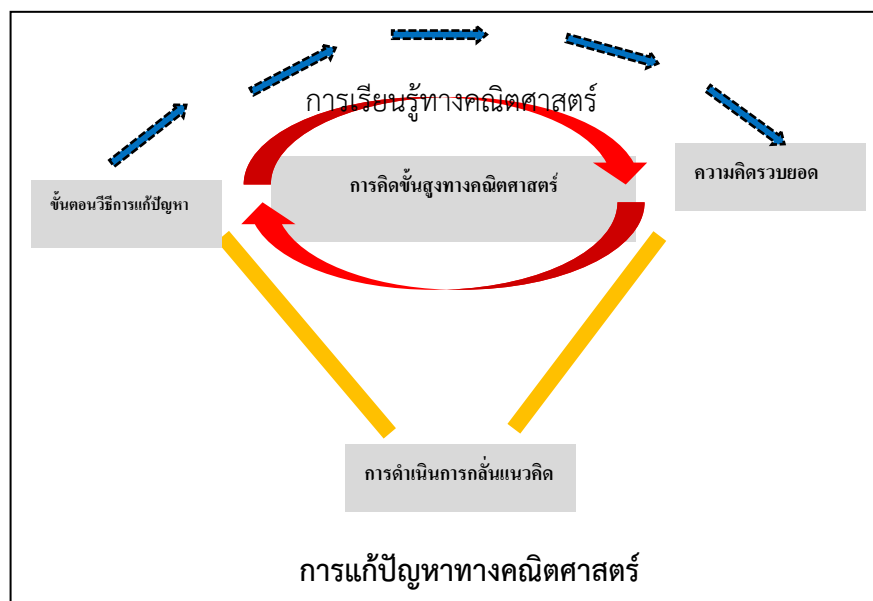
ขั้นที่ 1 การนำเสนอปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยผู้สอนนำเสนอปัญหาทางคณิตศาสตร์ให้กับนักศึกษาและนักศึกษาทำความเข้าใจปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเองโดยมีผู้สอนเป็นผู้อำนวยความสะดวกให้ความช่วยเหลือ

ขั้นที่ 2 การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาอาศัยแนวคิดของ Tall, D. (1991, 1995) เพื่ออธิบายการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ในมุมมองของการสะสมความรู้ที่ได้เรียนมาก่อนหน้านี้ในการสร้างความรู้ใหม่และขยายแนวคิดที่มีอยู่เดิม และอาศัยแนวคิดของ Evits (2004) เพื่ออธิบายการเชื่อมโยงวิธีการคิดและการสร้างความคิดรวบยอด เป็นขั้นของการเรียนรู้ด้วยตนเองและผู้สอนรวบรวมวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา

ขั้นที่ 3 การอภิปรายวิธีแก้ปัญหาพร้อมกันและเปรียบเทียบวิธีการคิดโดยนักศึกษานำเสนอวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และผู้สอนพยายามให้ความสำคัญกับแนวคิดของนักศึกษาทุกแนวคิดและเชื่อมโยงแนวคิดต่าง ๆ

ขั้นที่ 4 การสรุปเพื่อเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาที่เกิดในชั้นเรียน คณิตศาสตร์โดยผู้สอนพยายามสรุปเชื่อมโยงเพื่อให้นักศึกษาหากรณีทั่วไป กฎ สูตรทางคณิตศาสตร์ จากนั้นให้นักศึกษาทบทวนสิ่งที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนโดยผู้สอนเปิดโอกาสให้นักศึกษาได้ซักถามเพื่อนร่วมชั้นเรียนหรือซักถามผู้สอน

ตามกรอบแนวคิดของ Tall (1991) อธิบายถึงการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์จำเป็นต้องอาศัยการคิดพื้นฐานเพื่อพัฒนาไปสู่การสร้างความรู้ หรืออธิบายได้อีกนัยหนึ่งว่า การคิดขั้นสูงจำเป็นต้องสะสมความรู้ที่ได้เรียนมาก่อนหน้านั้นเพื่อสร้างความรู้ใหม่ และ Tall (1995) กล่าวถึง การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์เป็นการสร้างแนวคิดใหม่หรือการขยายแนวคิดที่มีอยู่เดิม



ภาพที่ 6 การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์และการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พัฒนาจากกรอบการคิดขั้นสูงของ Tall, 1991

จากภาพที่ 6 การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์เกิดขึ้นในกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดที่อาศัยการดำเนินการกลั่นแนวคิดเป็นตัวเชื่อมโยงกระบวนการและความคิดรวบยอดเพื่อสร้างและพัฒนาความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นการเรียนรู้ที่ได้จากการเชื่อมโยงระหว่างขั้นตอนและความคิดรวบยอดเป็นความสัมพันธ์ของความรู้ที่แต่ละคนสามารถอธิบายหรือลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตร การรับรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

การดำเนินการกลั่นแนวคิด (Compression) เป็นกรอบในการอธิบายกระบวนการสร้างแนวคิดหรือความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ซึ่งพิจารณาจากวิธีการในการแก้ปัญหาไปสู่กระบวนการแก้ปัญหาและพัฒนาไปสู่ความคิดรวบยอด

ความคิดรวบยอดเชิงกระบวนการ (Procept) เป็นกรอบหรือพื้นที่ในการพิจารณาหลักการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ โดยพิจารณาจากวิธีการในการแก้ปัญหาไปสู่กระบวนการในการแก้ปัญหาและนำไปสู่การสร้างความคิดรวบยอดในท้ายสุด ความคิดรวบยอดเชิงกระบวนการจึงมีลำดับขั้นตอนที่ต่อเนื่องกันของกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดในการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ซึ่งอาศัยการดำเนินการกลั่นแนวคิดเป็นเครื่องมือในการสร้างความคิดรวบยอด

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยเรื่องการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงครั้งนี้ คณะผู้วิจัยกำหนดจุดมุ่งหมาย เพื่อสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหา โดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ และ เพื่อศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหาโดยใช้การคิดขั้นสูง ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้นำมาวิเคราะห์ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ คณะผู้วิจัยใช้การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณในการสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ที่คณะผู้วิจัยสร้างขึ้น โดยพิจารณาคะแนนจาก แบบสำรวจ สำหรับข้อมูลเชิงคุณภาพคณะผู้วิจัยใช้ในการศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูง โดยพิจารณาผลงานเขียนของนักศึกษาที่เป็นกลุ่มเป้าหมายในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ผลการสังเกตพฤติกรรมของกลุ่มเป้าหมายเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาขณะลงมือแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และกล้องบันทึกภาพนิ่ง ช่วยในการบันทึกรายละเอียดของวิธีการคิดแก้ปัญหา และผลการสัมภาษณ์นักศึกษากลุ่มเป้าหมาย โดยมีกล้องวิดีโอ ช่วยในการบันทึกรายละเอียดของการสัมภาษณ์ คณะผู้วิจัยดำเนินการวิจัยตามลำดับ ดังนี้

1. การกำหนดขอบเขต
2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. ขั้นตอนการสร้างแบบสอบถามที่เกี่ยวข้องกับความคิดขั้นสูง
4. การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้

1. การกำหนดขอบเขต

1. ด้านเนื้อหาในรายวิชาแคลคูลัส 1 ระดับปริญญาตรี
2. กลุ่มเป้าหมายเป็น นักศึกษาระดับปริญญาตรีใน 3 มหาวิทยาลัย คือ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ ศูนย์สุพรรณบุรี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร และมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร
3. กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีในการวิเคราะห์การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์และการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พัฒนาจากกรอบการคิดขั้นสูงของ Tall, 1991

2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในงานวิจัยครั้งนี้ คือ

1. แบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ที่คณะผู้วิจัยสร้างขึ้น จำนวน 16 ข้อ
2. แบบสัมภาษณ์เพื่อศึกษาการคิดขั้นสูง

3. แบบสังเกตเพื่อศึกษาการคิดขั้นสูง
4. เครื่องบันทึกการสอนในชั้นเรียนทั้งภาพนิ่งและภาพเคลื่อนไหว เครื่องบันทึกเสียง
5. สถานการณ์ปัญหาปลายเปิดจำนวน 5 สถานการณ์ ดังนี้
 - สถานการณ์ปัญหาที่ 1 ฉันเปลี่ยนแปลงอย่างไร
 - สถานการณ์ปัญหาที่ 2 ช่วยฉันด้วย
 - สถานการณ์ปัญหาที่ 3 ฉันคือใคร
 - สถานการณ์ปัญหาที่ 4 ใครเร็วกว่ากัน
 - สถานการณ์ปัญหาที่ 5 การสร้างกล่องจากตาราง

3. ขั้นตอนการสร้างแบบสอบถามที่เกี่ยวข้องกับการคิดขั้นสูง

คณะผู้วิจัยดำเนินการสร้างแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี โดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้างแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี โดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 2 นำแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ไปให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบและปรับปรุงตามที่ยุทธวิธีให้ข้อเสนอแนะ

ขั้นที่ 3 นำแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่างที่ไม่ใช่กลุ่มเป้าหมาย

ขั้นที่ 4 นำแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่างที่ไม่ใช่กลุ่มเป้าหมายมาพิจารณาปรับแก้ข้อความเพื่อนำไปใช้กับกลุ่มเป้าหมาย

คณะผู้วิจัยกำหนดประเด็นการสัมภาษณ์เพื่อศึกษาการคิดขั้นสูง ดังนี้

วิธีการแก้ปัญหา ความรู้ที่นำมาใช้แก้ปัญหาในเรื่องที่เคยเรียนมาแล้วหรือก่อนหน้านี้ ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาความรู้ที่ได้จากการแก้ปัญหาเพิ่มเติมการประยุกต์อนุพันธ์สามารถนำไปใช้ในวิชาชีพได้หรือไม่เกี่ยวข้องกับสาขาวิชาชีพของตนเองอย่างไร ลักษณะเด่นของกลุ่มเป้าหมาย คือ กล้าคิด ไม่กลัวในคำตอบที่ผิด สามารถอธิบายวิธีการคิดแก้ปัญหาของตนเองให้คนอื่นฟังได้ลักษณะของการสัมภาษณ์ผู้วิจัยนำผลงานของนักศึกษาวិธีการคิดแก้ปัญหาที่นักศึกษาคิด

คณะผู้วิจัยกำหนดประเด็นการสังเกตเพื่อศึกษาการคิดขั้นสูง ดังนี้

ขั้นตอนในกระบวนการแก้ปัญหาของนักศึกษาและการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ซึ่งต้องสะสมความรู้ที่ได้เรียนมาก่อนหน้านั้นในการสร้างความรู้ใหม่และขยายแนวคิดที่มีอยู่เดิมจากกระบวนการแก้ปัญหาด้วยตนเองไม่ได้พิจารณาความสามารถในการสอนของผู้สอน

4. การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล

คณะผู้วิจัยดำเนินการวิจัยโดยใช้วิธีการวิจัยแบบผสมผสานระหว่างการวิจัยเชิงปริมาณและการวิจัยเชิงคุณภาพ ดังนี้

ระยะที่ 1 สร้างแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นแบบสำรวจที่คณะผู้วิจัยได้สร้างขึ้นเอง ใช้การวิจัยเชิงปริมาณ

ระยะที่ 2 ศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูง ใช้การวิจัยเชิงคุณภาพ ดำเนินการดังนี้

ขั้นที่ 1 ออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงเพื่อหาแนวทางในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงจำนวน 5 สถานการณ์ปัญหา

ขั้นที่ 2 ศึกษาการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงโดยใช้การสังเกตแบบมีส่วนร่วมเพื่อศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษา

ขั้นที่ 3 วิเคราะห์การคิดขั้นสูงจากการสัมภาษณ์ บันทึกสนทนา และผลงานของนักศึกษา โดยอาศัยกรอบการวิเคราะห์การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์และการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พัฒนาจากกรอบการคิดขั้นสูงของ Tall, 1991

5. การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้

คณะผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์การวิจัยแบบผสมผสานระหว่างการวิจัยเชิงปริมาณและการวิจัยเชิงคุณภาพ เป็น 2 ระยะ ดังนี้

ระยะที่ 1 สร้างแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นแบบสำรวจที่คณะผู้วิจัยได้สร้างขึ้นเอง ใช้การวิจัยเชิงปริมาณ

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. นำคะแนนจากแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s.d) และร้อยละ

2. นำคะแนนจากแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์มาให้ค่าประเมินและให้ค่าระดับ

ระยะที่ 2 ศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูง ใช้การวิจัยเชิงปริมาณและการวิจัยเชิงคุณภาพ ดำเนินการดังนี้

การดำเนินการวิจัยเชิงปริมาณ โดยสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. นำคะแนนจากแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงมาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s.d) และร้อยละ

2. นำคะแนนจากแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงมาให้ค่าประเมินและให้ค่าระดับ

การวิจัยเชิงคุณภาพ ดำเนินการตามขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงเพื่อหาแนวทางในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงจำนวน 5 สถานการณ์ปัญหา

ขั้นที่ 2 ศึกษาการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงโดยใช้การสังเกตแบบมีส่วนร่วมเพื่อศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษา

ขั้นที่ 3 วิเคราะห์การคิดขั้นสูงจากการสัมภาษณ์ บันทึกสนทนัม และผลงานของนักศึกษา โดยอาศัยกรอบการวิเคราะห์การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์และการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พัฒนาจากกรอบการคิดขั้นสูงของ Tall, 1991

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยเรื่องการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูง คณะผู้วิจัยกำหนดจุดมุ่งหมาย เพื่อสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหาโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ และ เพื่อศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหาโดยใช้การคิดขั้นสูง ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้นำมาวิเคราะห์ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ คณะผู้วิจัยใช้การวิเคราะห์ข้อมูลเชิงปริมาณในการสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ที่คณะผู้วิจัยสร้างขึ้น นำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลแบ่งเป็น 2 ตอน ได้แก่ ตอนที่ 1 การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหา โดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ตอนที่ 2 การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหาโดยใช้การคิดขั้นสูง

ตอนที่ 1 การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหาโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

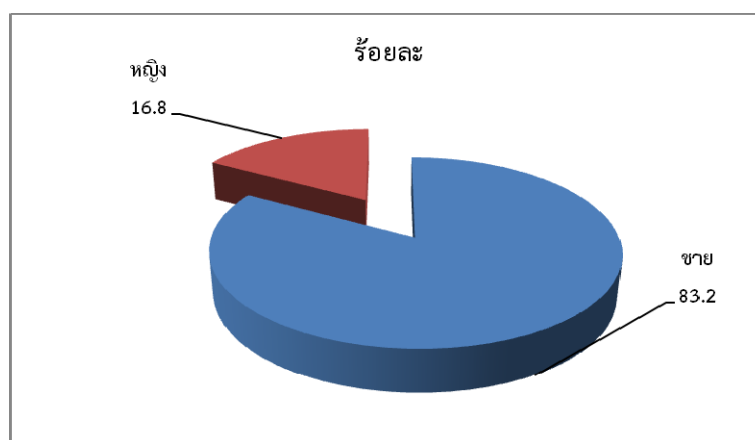
ส่วนที่ 1 ข้อมูลทั่วไปของผู้ตอบแบบสอบถาม

ในการศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหาโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ คณะผู้วิจัยจำแนกเพศของผู้ตอบแบบสำรวจ ผลการวิเคราะห์ข้อมูล แสดงดังตารางและแผนภูมิ

ตารางที่ 2 เพศของผู้ตอบแบบสอบถาม (ร้อยละ)

เพศ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ชาย	183	83.2
หญิง	37	16.8
รวม	220	100.00

แผนภูมิที่ 1 เพศของผู้ตอบแบบสอบถาม (ร้อยละ)

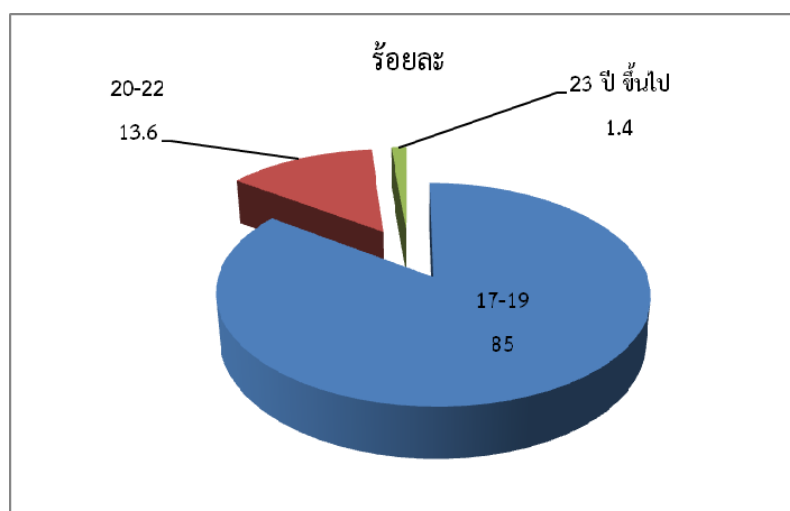


จากตารางที่ 2 และแผนภูมิที่ 1 พบว่า ผู้ตอบแบบสอบถามการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงส่วนใหญ่เป็นเพศชาย จำนวน 183 คน คิดเป็นร้อยละ 83.2 รองลงมาเป็นเพศหญิง จำนวน 37 คน คิดเป็นร้อยละ 16.8

ตารางที่ 3 อายุของผู้ตอบแบบสอบถาม (ร้อยละ)

อายุ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
17-19	187	85.0
20-22	30	13.6
23 ปี ขึ้นไป	3	1.4
รวม	222	100.00

แผนภูมิที่ 2 อายุของผู้ตอบแบบสอบถาม (ร้อยละ)

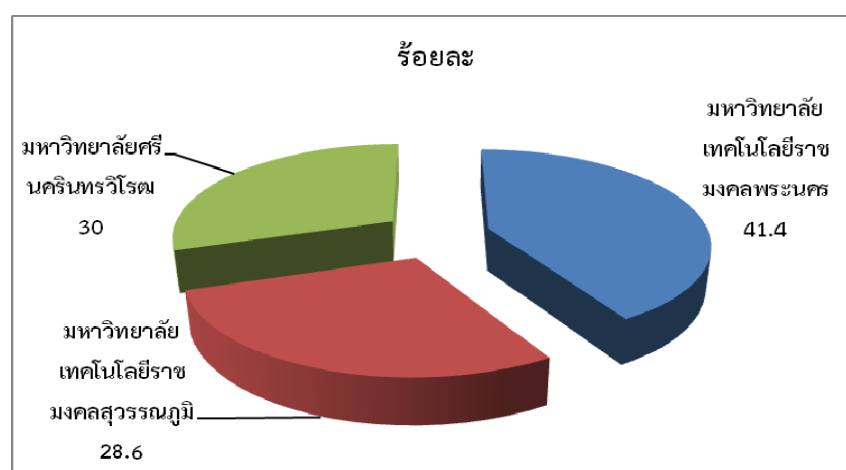


จากตารางที่ 3 และแผนภูมิที่ 2 พบว่า ผู้ตอบแบบสอบถามการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของ นักศึกษาระดับปริญญาตรีที่ใช้การคิดขั้นสูงส่วนใหญ่มีอายุ 17-19 ปี จำนวน 187 คน คิดเป็น ร้อยละ 85.0 รองลงมาอายุ 20-22 ปี จำนวน 30 คน คิดเป็นร้อยละ 13.6 และอายุ 23 ปี ขึ้นไป จำนวน 3 คน คิดเป็นร้อยละ 1.4

ตารางที่ 4 มหาวิทยาลัยของผู้ตอบแบบสอบถาม (ร้อยละ)

มหาวิทยาลัย	จำนวน (คน)	ร้อยละ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร	91	41.4
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ	63	28.6
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร	66	30.0
รวม	220	100.00

แผนภูมิที่ 3 มหาวิทยาลัยของผู้ตอบแบบสอบถาม (ร้อยละ)



จากตารางที่ 3 และแผนภูมิที่ 3 พบว่า ผู้ตอบแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของ นักศึกษาระดับปริญญาตรีที่ใช้การคิดขั้นสูงศึกษาอยู่ที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระ นคร จำนวน 91คน คิดเป็นร้อยละ 41.4 รองลงมาศึกษาอยู่ที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล สุวรรณภูมิ จำนวน 63 คน คิดเป็นร้อยละ 28.6 และศึกษาอยู่ที่มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ จำนวน 66 คน คิดเป็นร้อยละ 30.0

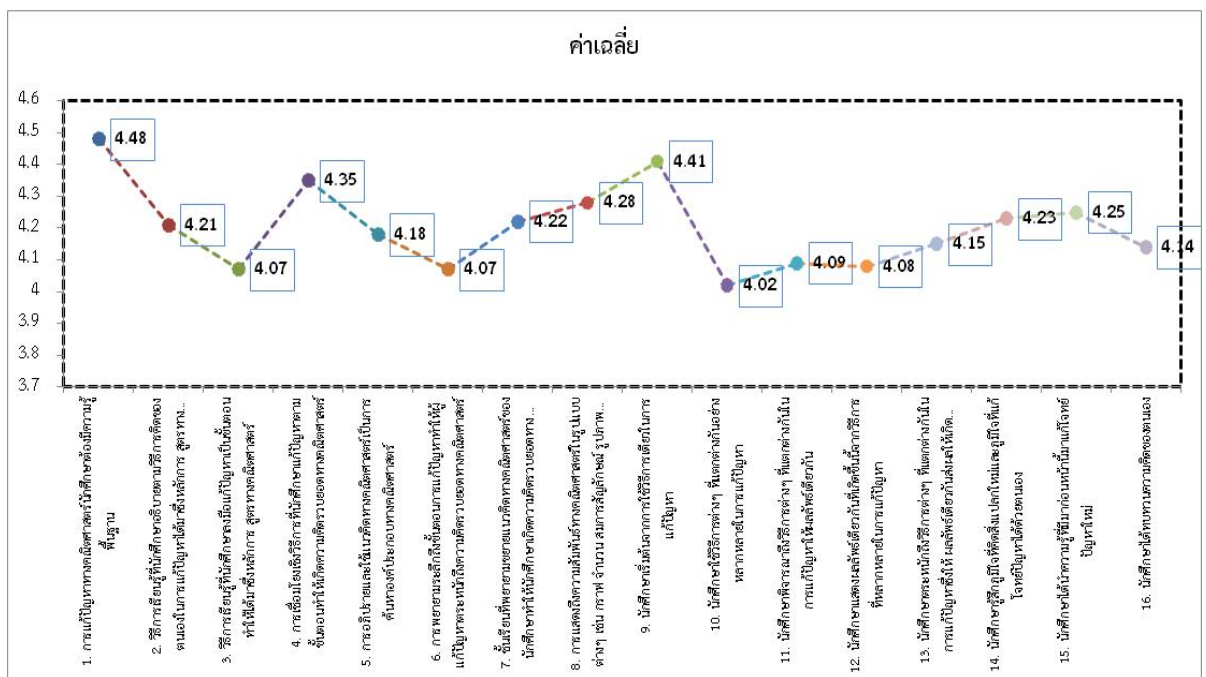
ตารางที่ 5 ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ร้อยละ และระดับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของ
นักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

รายการ	ค่าเฉลี่ย	ส่วน เบี่ยงเบน มาตรฐาน	ร้อยละ	ค่า ประเมิน	ระดับ
1. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นักศึกษาต้องมีความรู้พื้นฐาน	4.48	0.32	89.60	มาก	1
2. วิธีการเรียนรู้ที่นักศึกษาอธิบายตามวิธีการคิดของตนเองในการแก้ปัญหาได้มาซึ่งหลักการ สูตรทางคณิตศาสตร์	4.21	0.24	84.20	มาก	5
3. วิธีการเรียนรู้ที่นักศึกษาลงมือแก้ปัญหาเป็นขั้นตอนทำให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตรทางคณิตศาสตร์	4.07	0.28	81.40	มาก	13
4. การเชื่อมโยงเชิงวิธีการที่นักศึกษาแก้ปัญหาตามขั้นตอนทำให้เกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์	4.35	0.38	87.00	มาก	3
5. การอธิบายและใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์เป็นการค้นหาคำตอบประกอบทางคณิตศาสตร์	4.18	0.18	83.60	มาก	8
6. การพยายามระลึกถึงขั้นตอนการแก้ปัญหาทำให้ผู้แก้ปัญหาระหนักถึงความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์	4.07	0.52	81.40	มาก	13
7. ชั้นเรียนที่พยายามขยายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาทำให้นักศึกษาเกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์	4.22	0.49	84.40	มาก	5
8. การแสดงถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่างๆ เช่น กราฟ จำนวน สมการ สัญลักษณ์ รูปภาพ และภาษาพูดที่ทำให้เกิดความหมายของแต่ละคนในการเกิดการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์	4.28	0.41	85.60	มาก	4
9. นักศึกษาเริ่มต้นจากการใช้วิธีการเดียวในการแก้ปัญหา	4.41	0.18	88.20	มาก	2
10. นักศึกษาใช้วิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันอย่างหลากหลายในการแก้ปัญหา	4.02	0.29	80.40	มาก	14
11. นักศึกษาพิจารณาถึงวิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหาให้ผลลัพธ์เดียวกัน	4.09	0.24	81.80	มาก	11

ตารางที่ 5 ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ร้อยละ และระดับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของ นักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

รายการ	ค่าเฉลี่ย	ส่วน เบี่ยงเบน มาตรฐาน	ร้อยละ	ค่า ประเมิน	ระดับ
12. นักศึกษาแสดงผลลัพธ์เดียวกันที่เกิดขึ้นนี้ จากวิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา	4.08	0.57	81.60	มาก	12
13. นักศึกษาตระหนักถึงวิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหาซึ่งให้ ผลลัพธ์เดียวกันส่งผล ให้เกิดแนวคิดที่ใช้แก้ปัญหาร่วมกัน และนา แนวคิดที่ใช้ร่วมกันนี้ไปหาผลลัพธ์ในการ แก้ปัญหาใหม่หรือนำไปใช้เพื่อสร้างความรู้ใหม่	4.15	0.25	83.00	มาก	9
14. นักศึกษารู้สึกภูมิใจที่คิดสิ่งแปลกใหม่และ ภูมิใจที่แก้โจทย์ปัญหาได้ด้วยตนเอง	4.23	0.27	84.60	มาก	7
15. นักศึกษาได้นำความรู้ที่มีมาก่อนหน้านี้มาแก้ โจทย์ปัญหาใหม่	4.25	0.41	85.00	มาก	6
16. นักศึกษาได้ทบทวนความคิดของตนเอง	4.14	0.38	82.80	มาก	10
ค่าเฉลี่ย	4.22	0.33	84.40	มาก	

แผนภูมิที่ 6 ค่าเฉลี่ยและระดับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้ การคิดขั้นสูง



จากตารางที่ 5 และแผนภูมิที่ 6 ระดับประเมินค่าเฉลี่ยของผู้ตอบแบบสอบถามการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูง มีค่าเฉลี่ยรวม 4.22 คิดเป็นร้อยละ 84.40 อยู่ในเกณฑ์มากหากแยกเป็นรายข้อ พบว่า ระดับค่าประเมินเรียงตามค่าเฉลี่ย ดังนี้ คือ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นักศึกษาต้องมีความรู้พื้นฐาน มีค่าเฉลี่ย 4.48 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 89.60 รองลงมา คือ นักศึกษาเริ่มต้นจากการใช้วิธีการเดียวในการแก้ปัญหา มีค่าเฉลี่ย 4.41 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 88.20 การเชื่อมโยงเชิงวิธีการที่นักศึกษาแก้ปัญหาตามขั้นตอนทำให้เกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์มีค่าเฉลี่ย 4.35 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 87.00 การแสดงถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่างๆ เช่น กราฟ จำนวน สมการสัญลักษณ์ รูปภาพ และภาษาพูดที่ทำให้เกิดความหมายของแต่ละคนในการเกิดการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ มีค่าเฉลี่ย 4.28 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 85.60 ชั้นเรียนที่พยายามขยายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาทำให้นักศึกษาเกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์มีค่าเฉลี่ย 4.22 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 84.40 วิธีการเรียนรู้ที่นักศึกษ้อธิบายตามวิธีการคิดของตนเองใน 84.20 นักศึกษาได้นำความรู้ที่มีมาก่อนหน้านี้มาแก้โจทย์ปัญหาใหม่มีค่าเฉลี่ย 4.25 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 85.00 นักศึกษารู้สึกภูมิใจที่คิดสิ่งแปลกใหม่และภูมิใจที่แก้โจทย์ปัญหาได้ด้วยตนเองมีค่าเฉลี่ย 4.23 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 84.60 การอภิปรายและใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์เป็นการค้นหาคำตอบประกอบทางคณิตศาสตร์มีค่าเฉลี่ย 4.18 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 83.60 นักศึกษาตระหนักถึงวิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหาซึ่งให้ผลลัพธ์เดียวกันส่งผลให้เกิดแนวคิดที่ใช้แก้ปัญหาร่วมกัน และนำแนวคิดที่ใช้ร่วมกันนี้ไปหาผลลัพธ์ในการแก้ปัญหาใหม่หรือนำไปใช้เพื่อสร้างความรู้ใหม่มีค่าเฉลี่ย 4.15 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 83.00 นักศึกษารู้สึกภูมิใจที่คิดสิ่งแปลกใหม่และภูมิใจที่แก้โจทย์ปัญหาได้ด้วยตนเองมีค่าเฉลี่ย 4.14 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 82.80 นักศึกษาพิจารณาถึงวิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหาให้ผลลัพธ์เดียวกันมีค่าเฉลี่ย 4.09 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 81.80 นักศึกษาแสดงผลลัพธ์เดียวกันที่เกิดขึ้นนี้จากวิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหามีค่าเฉลี่ย 4.08 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 81.60 วิธีการเรียนรู้ที่นักศึกษาลงมือแก้ปัญหาเป็นขั้นตอนทำให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตรทางคณิตศาสตร์และการพยายามระลึกถึงขั้นตอนการแก้ปัญหาทำให้ผู้แก้ปัญหาตระหนักถึงความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์มีค่าเฉลี่ย 4.07 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 81.40 และนักศึกษามีวิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันอย่างหลากหลายในการแก้ปัญหามีค่าเฉลี่ย 4.02 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 80.40

ตอนที่ 3 ข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะเพิ่มเติม

1. การใช้สถานการณ์ปัญหาเพื่อให้นักศึกษาได้เข้าร่วมก่อให้เกิดการกระตุ้นความสนใจในการเรียนรู้และก่อให้เกิดกระบวนการต่างๆ ที่นักศึกษาใช้ในการแก้ปัญหา
2. สถานการณ์ปัญหาที่เป็นรูปธรรมซึ่งทำให้ผู้เรียนได้เข้าร่วมในกิจกรรมการแก้ปัญหาทำให้นักศึกษาเกิดความสนใจในการเรียนรู้ มากกว่าการเรียนรู้แบบผู้สอนเป็นผู้บรรยาย

ตอนที่ 2 การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหาโดยใช้การคิดขั้นสูง

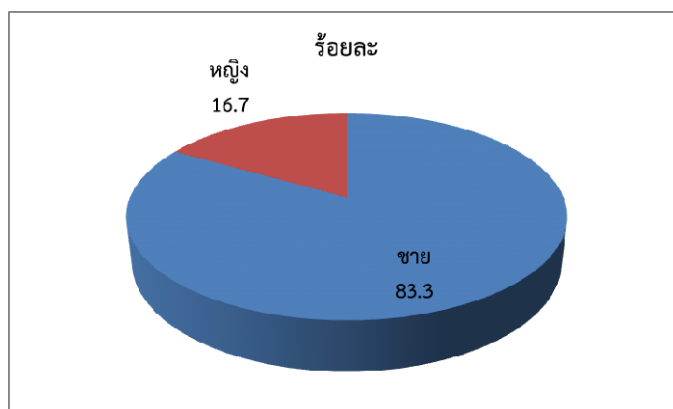
ส่วนที่ 1 ข้อมูลทั่วไปของผู้ตอบแบบสอบถาม

ในการศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหาโดยใช้การคิดขั้นสูง คณะผู้วิจัยจำแนกเพศของผู้ตอบแบบสำรวจ ผลการวิเคราะห์ข้อมูลแสดงดังตารางและแผนภูมิ

ตารางที่ 6 เพศของผู้ตอบแบบสอบถาม (ร้อยละ)

เพศ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
ชาย	185	83.3
หญิง	37	16.7
รวม	222	100.00

แผนภูมิที่ 7 เพศของผู้ตอบแบบสอบถาม (ร้อยละ)

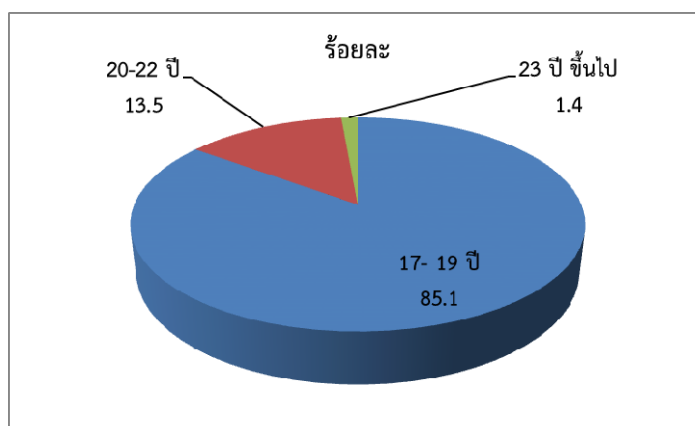


จากตารางที่ 6 และแผนภูมิที่ 7 พบว่า ผู้ตอบแบบสอบถามการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงส่วนใหญ่เป็นเพศชาย จำนวน 185 คน คิดเป็นร้อยละ 83.3 รองลงมาเป็นเพศหญิง จำนวน 37 คน คิดเป็นร้อยละ 16.7

ตารางที่ 7 อายุของผู้ตอบแบบสอบถาม (ร้อยละ)

เพศ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
17-19	189	85.1
20-22	30	13.5
23 ปี ขึ้นไป	3	1.4
รวม	222	100.00

แผนภูมิที่ 8 อายุของผู้ตอบแบบสอบถาม (ร้อยละ)

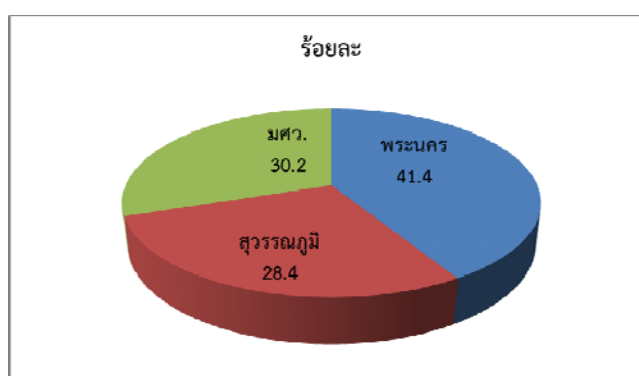


จากตารางที่ 7 และแผนภูมิที่ 8 พบว่า ผู้ตอบแบบสอบถามการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของ นักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงส่วนใหญ่มีอายุ 17-19 ปี จำนวน 189 คน คิดเป็น ร้อยละ 85.1 รองลงมามีอายุ 20-22 ปี จำนวน 30 คน คิดเป็นร้อยละ 13.5 และอายุ 23 ปี ขึ้นไป จำนวน 3 คน คิดเป็นร้อยละ 1.4

ตารางที่ 8 มหาวิทยาลัยของผู้ตอบแบบสอบถาม (ร้อยละ)

เพศ	จำนวน (คน)	ร้อยละ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร	92	41.4
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ	63	28.4
มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร	67	30.2
รวม	222	100.00

แผนภูมิที่ 9 มหาวิทยาลัยของผู้ตอบแบบสอบถาม (ร้อยละ)



จากตารางที่ 8 และแผนภูมิที่ 9 พบว่า ผู้ตอบแบบสอบถามการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของ นักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงศึกษาอยู่ที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระ นคร จำนวน 92 คน คิดเป็นร้อยละ 41.4 รองลงศึกษาอยู่ที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคล สุวรรณภูมิ จำนวน 63 คน คิดเป็นร้อยละ 28.4 และศึกษาอยู่ที่มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ จำนวน 67 คน คิดเป็นร้อยละ 30.2

ตารางที่ 9 ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ร้อยละ และระดับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของ นักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูง

รายการ	ค่าเฉลี่ย	ส่วน เบี่ยงเบน มาตรฐาน	ร้อยละ	ค่า ประเมิน	ระดับ
1. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักศึกษาต้องมีความรู้พื้นฐาน	4.85	0.12	97.00	มากที่สุด	1
2. วิธีการเรียนรู้ที่นักศึกษาอธิบายตาม วิธีการคิดของตนเองในการแก้ปัญหา ได้มาซึ่งหลักการ สูตรทางคณิตศาสตร์	4.21	0.70	84.20	มาก	11
3. วิธีการเรียนรู้ที่นักศึกษาลงมือ แก้ปัญหาเป็นขั้นตอนทำให้ได้มาซึ่ง หลักการ สูตรทางคณิตศาสตร์	4.64	0.47	92.80	มากที่สุด	10
4. การเชื่อมโยงเชิงวิธีการที่นักศึกษา แก้ปัญหาตามขั้นตอนทำให้เกิดความคิด รวบยอดทางคณิตศาสตร์	4.68	0.46	93.60	มากที่สุด	8
5. การอภิปรายและใช้แนวคิดทาง คณิตศาสตร์เป็นการค้นหาคำตอบประกอบ ทางคณิตศาสตร์	4.68	0.46	93.60	มากที่สุด	8

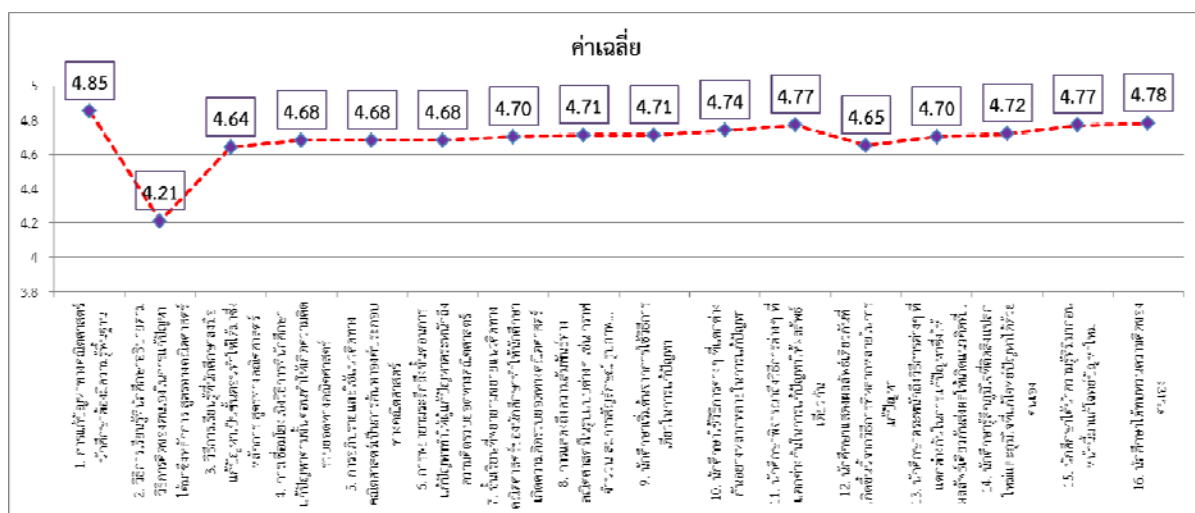
ตารางที่ 9 ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ร้อยละ และระดับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของ
นักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูง

รายการ	ค่าเฉลี่ย	ส่วน เบี่ยงเบน มาตรฐาน	ร้อยละ	ค่า ประเมิน	ระดับ
6. การพยายามระลึกถึงขั้นตอนการ แก้ปัญหาทำให้ผู้แก้ปัญหาระหนักถึง ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์	4.68	0.46	93.60	มากที่สุด	8
7. ชั้นเรียนที่พยายามขยายแนวคิดทาง คณิตศาสตร์ของนักศึกษาทำให้นักศึกษา เกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์	4.70	0.45	94.00	มากที่สุด	7
8. การแสดงถึงความสัมพันธ์ทาง คณิตศาสตร์ในรูปแบบต่างๆ เช่น กราฟ จำนวน สมการสัญลักษณ์ รูปภาพ และ ภาษาพูดที่ทำให้เกิดความหมายของแต่ ละคนในการเกิดการเชื่อมโยงทาง คณิตศาสตร์	4.71	0.45	94.20	มากที่สุด	6
9. นักศึกษาเริ่มต้นจากการใช้วิธีการ เดียวในการแก้ปัญหา	4.71	0.45	94.20	มากที่สุด	6
10. นักศึกษาใช้วิธีการต่างๆ ที่แตกต่าง กันอย่างหลากหลายในการแก้ปัญหา	4.74	0.43	94.80	มากที่สุด	4
11. นักศึกษาพิจารณาถึงวิธีการต่างๆ ที่ แตกต่างกันในการแก้ปัญหาให้ผลลัพธ์ เดียวกัน	4.77	0.42	95.40	มากที่สุด	3
12. นักศึกษาแสดงผลลัพธ์เดียวกันที่ เกิดขึ้นนี้จากวิธีการที่หลากหลายในการ แก้ปัญหา	4.65	0.50	93.00	มากที่สุด	9
13. นักศึกษาตระหนักถึงวิธีการต่างๆ ที่ แตกต่างกันในการแก้ปัญหาซึ่งให้ ผลลัพธ์เดียวกันส่งผลให้เกิดแนวคิดที่ใช้ แก้ปัญหาร่วมกัน และนาแนวคิดที่ใช้ ร่วมกันนี้ไปหาผลลัพธ์ในการแก้ปัญหา ใหม่หรือนำไปใช้เพื่อสร้างความรู้ใหม่	4.70	0.46	94.00	มากที่สุด	7
14. นักศึกษารู้สึกภูมิใจที่คิดสิ่งแปลก ใหม่และภูมิใจที่แก้โจทย์ปัญหาได้ด้วย ตนเอง	4.72	0.44	94.40	มากที่สุด	5

ตารางที่ 9 ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ร้อยละ และระดับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของ นักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูง

รายการ	ค่าเฉลี่ย	ส่วน เบี่ยงเบน มาตรฐาน	ร้อยละ	ค่า ประเมิน	ระดับ
15. นักศึกษาได้นำความรู้ที่มีมาก่อนหน้านี้มาแก้โจทย์ปัญหาใหม่	4.77	0.41	95.40	มากที่สุด	3
16. นักศึกษาได้ทบทวนความคิดของตนเอง	4.78	0.40	95.60	มากที่สุด	2
ค่าเฉลี่ย	4.70	0.48	94.00	มากที่สุด	-

แผนภูมิที่ 10 ค่าเฉลี่ยและระดับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูง



จากตารางที่ 6 และแผนภูมิที่ 6 ระดับประเมินค่าเฉลี่ยของผู้ตอบแบบสอบถามการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูง มีค่าเฉลี่ยรวม 4.70 คิดเป็นร้อยละ 94.00 อยู่ในเกณฑ์มากที่สุด หากแยกเป็นรายข้อ พบว่า ระดับค่าประเมินเรียงตามค่าเฉลี่ย ดังนี้ คือ การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์นักศึกษาต้องมีความรู้พื้นฐาน มีค่าเฉลี่ย 4.85 (อยู่ในเกณฑ์มากที่สุด) คิดเป็นร้อยละ 97.00 รองลงมา ได้แก่ นักศึกษาได้ทบทวนความคิดของตนเอง มีค่าเฉลี่ย 4.78 (อยู่ในเกณฑ์มากที่สุด) คิดเป็นร้อยละ 95.60 นักศึกษาพิจารณาถึงวิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหาก็ผลพลได้เช่นกัน และนักศึกษาได้นำความรู้ที่มีมาก่อนหน้านี้มาแก้โจทย์ปัญหาใหม่ มีค่าเฉลี่ย 4.77 (อยู่ในเกณฑ์มากที่สุด) คิดเป็นร้อยละ 95.40 นักศึกษาใช้วิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันอย่างหลากหลายในการแก้ปัญหามีค่าเฉลี่ย 4.74 (อยู่ในเกณฑ์มากที่สุด) คิดเป็นร้อยละ 94.80 นักศึกษารู้สึกภูมิใจที่คิดสิ่งแปลกใหม่และภูมิใจที่แก้

โจทย์ปัญหาได้ด้วยตนเอง มีค่าเฉลี่ย 4.72 (อยู่ในเกณฑ์มากที่สุด) คิดเป็นร้อยละ 94.40 การแสดงถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่างๆ เช่น กราฟ จำนวน สมการสัญลักษณ์รูปภาพ และภาษาพูดที่ทำให้เกิดความหมายของแต่ละคนในการเกิดการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์และนักศึกษาเริ่มต้นจากการใช้วิธีการเดียวในการแก้ปัญหา มีค่าเฉลี่ย 4.71 (อยู่ในเกณฑ์มากที่สุด) คิดเป็นร้อยละ 94.20 ชั้นเรียนที่พยายามขยายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาทำให้นักศึกษาเกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์และนักศึกษาระหนักถึงวิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหาซึ่งให้ ผลลัพธ์เดียวกันส่งผลให้เกิดแนวคิดที่ใช้แก้ปัญหาร่วมกัน และนาแนวคิดที่ใช้ร่วมกันนี้ไปหาผลลัพธ์ในการแก้ปัญหาใหม่หรือนำไปใช้เพื่อสร้างความรู้ใหม่ มีค่าเฉลี่ย 4.70 (อยู่ในเกณฑ์มากที่สุด) คิดเป็นร้อยละ 94.00 การเชื่อมโยงเชิงวิธีการที่นักศึกษาแก้ปัญหาตามขั้นตอนทำให้เกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ การอภิปรายและใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์เป็นการค้นหาคำตอบทางคณิตศาสตร์ และการพยายามระลึกถึงขั้นตอนการแก้ปัญหาทำให้ผู้แก้ปัญหาตระหนักถึงความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ มีค่าเฉลี่ย 4.68 (อยู่ในเกณฑ์มากที่สุด) คิดเป็นร้อยละ 93.60 นักศึกษาแสดงผลลัพธ์เดียวกันที่เกิดขึ้นนี้จากวิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา มีค่าเฉลี่ย 4.65 (อยู่ในเกณฑ์มากที่สุด) คิดเป็นร้อยละ 93.00 วิธีการเรียนรู้ที่นักศึกษาลงมือแก้ปัญหาเป็นขั้นตอนทำให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตรทางคณิตศาสตร์ มีค่าเฉลี่ย 4.64 (อยู่ในเกณฑ์มากที่สุด) คิดเป็นร้อยละ 92.80 และวิธีการเรียนรู้ที่นักศึกษ้อธิบายตามวิธีการคิดของตนเองในการแก้ปัญหาได้มาซึ่งหลักการ สูตรทางคณิตศาสตร์ มีค่าเฉลี่ย 4.21 (อยู่ในเกณฑ์มาก) คิดเป็นร้อยละ 84.20 ตามลำดับ

ตอนที่ 3 ข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะเพิ่มเติม

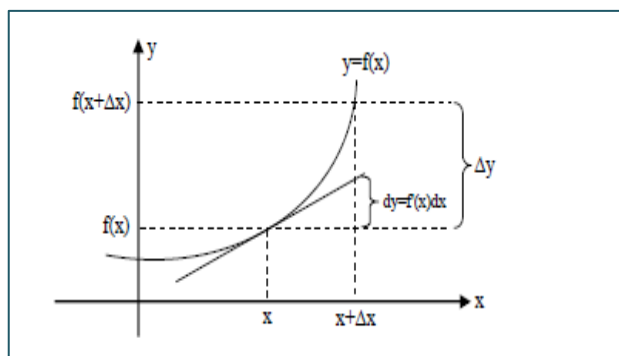
1. การเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เกิดจากกิจกรรมการแก้โจทย์ปัญหาที่เป็นรูปธรรมทำให้นักศึกษาได้เข้าร่วมในการแก้ปัญหาและกระตุ้นให้เกิดความสนใจในการเรียนรู้
2. การเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ให้ผู้เรียนได้เข้าร่วมในกิจกรรมการแก้ปัญหาทุกคนทำให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในการแก้ปัญหา
3. การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ควรให้ผู้เรียนได้นำเสนอแนวคิดทุกคน

สำหรับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหาโดยใช้การคิดขั้นสูง ดำเนินการวิเคราะห์ ดังนี้

สถานการณ์ปัญหาที่ 1 “ฉันเปลี่ยนแปลงอย่างไร”

คำชี้แจง

คำสั่งที่ 1: จากภาพที่กำหนดให้นักศึกษาแต่ละคนจินตนาการการเคลื่อนที่ของกราฟว่าเปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อเลื่อนตามแกน x และเลื่อนตามแกน y



จากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักศึกษาได้ใช้แนวคิด ดังต่อไปนี้

1. ทิศทางการเคลื่อนที่ของกราฟจากล่างขึ้นบน

ในขณะที่กราฟเคลื่อนที่ไปทางขวา
ห่างจากแกน x กราฟจะเคลื่อนที่
สูงขึ้นห่างจากแกน y

2. ลักษณะกราฟจากการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้ง

กราฟเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง และ
เคลื่อนที่เป็นเส้นโค้ง

3. ระยะทางจากแกน x และแกน y แปรผันตรงกับการเคลื่อนที่ของกราฟ

ระยะห่างจากการแกน x และแกน
 y มากขึ้น เมื่อกราฟเคลื่อนห่างจาก
แกน x มากขึ้น และกราฟสูงขึ้น

จากการจินตนาการของนักศึกษา นักศึกษาเห็นถึงความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ระหว่างแกน x และ แกน y

- คำสั่งที่ 2: 1. ให้นักศึกษาเลื่อนกราฟจากแผ่นพลาสติกไปตามรางเลื่อน x และ y
 2. ให้นักศึกษาพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างแกน x และ แกน y

หมายเหตุ: ครูคอยกระตุ้นให้นักศึกษาคิดและใช้หลักการทางคณิตศาสตร์

อุปกรณ์ แผ่นพลาสติกใสและรางเลื่อนแกน x และ แกน y ดังรูป ข้างล่าง



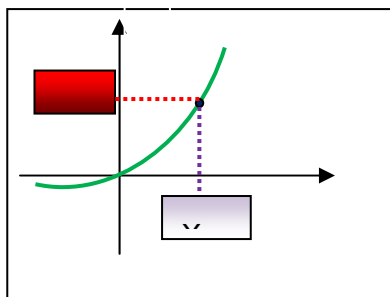
จากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้นักศึกษาได้ใช้แนวคิด ดังต่อไปนี้

1. นักศึกษาในแต่ละกลุ่มจินตนาการและพูดคุยกันว่าเมื่อเลื่อนกราฟจะเลื่อนไปยังทิศทางใด เมื่อเลื่อนแกน x



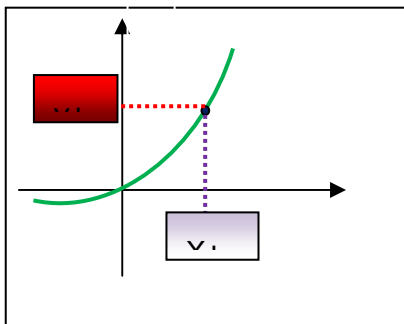
2. เมื่อนักศึกษาในแต่ละกลุ่มเลื่อนแกน x ไปในทิศทางทั้งซ้ายและขวา

2.1 นักศึกษาสังเกตทิศทางการเลื่อนของแกน x กับแกน y



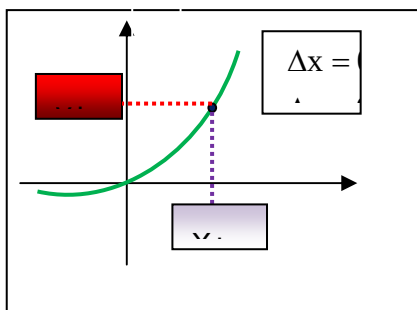
ในขณะที่กราฟเคลื่อนที่ไปทางขวาห่างจากแกน x กราฟจะเคลื่อนที่สูงขึ้นห่างจากแกน y และในขณะที่กราฟเคลื่อนที่ไปซ้ายห่างจากแกน x กราฟจะเคลื่อนที่ต่ำลงจากแกน y
 นักศึกษาสังเกตการณ์แปรผันตรงของแกน x และแกน y

2.2 นักศึกษาพิจารณาถึงค่า Δx และค่า Δy กับระยะทาง



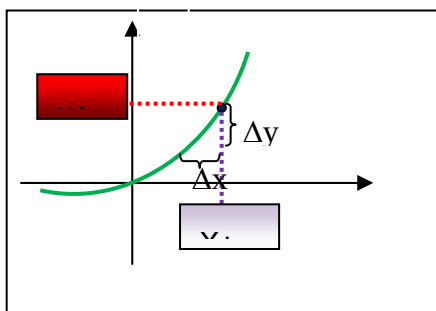
ในขณะที่กราฟเคลื่อนที่ไปทางขวาห่างจากแกน x ค่าของ Δx จะมากขึ้น กราฟจะเคลื่อนที่สูงขึ้นห่างจากแกน y ค่าของ Δy จะมากขึ้น และในขณะที่กราฟเคลื่อนที่ไปซ้ายห่างจากแกน x ค่าของ Δx จะน้อยลง กราฟจะเคลื่อนที่ต่ำลงห่างจากแกน y ค่าของ Δy จะน้อยลง

2.3 นักศึกษาพิจารณาถึงค่า Δx และค่า Δy กับ จุดเปลี่ยนแปลงของกราฟ



ถ้า $\Delta x = 0$ และ $\Delta y = 0$ กราฟจะไม่เกิดการเปลี่ยนแปลง นั่นแสดงได้ว่า ถ้า $\Delta x \rightarrow 0$ และ $\Delta y \rightarrow 0$ กราฟจะเกิดการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย

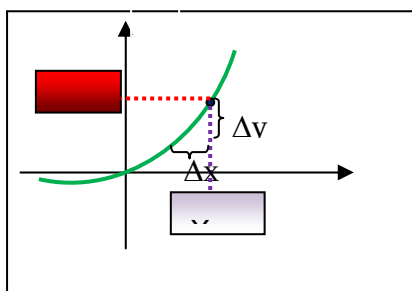
2.4 นักศึกษาพิจารณาความสัมพันธ์ของ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ กับความชัน



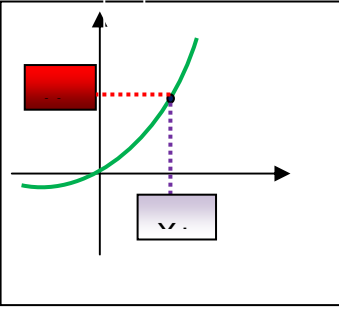
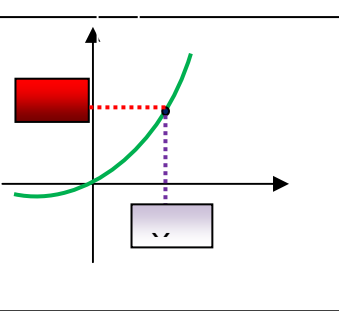
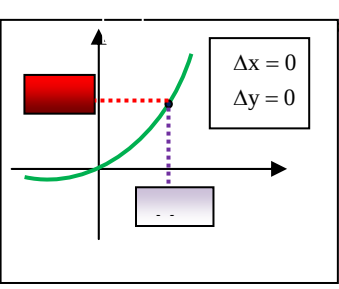
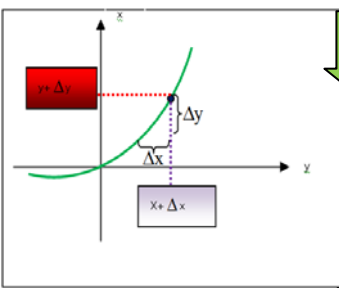
นักศึกษาค้นคว้าถึงความชันที่ได้จาก $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ซึ่งสัมพันธ์กับ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x}$

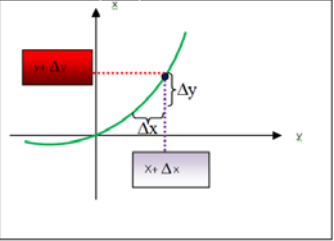
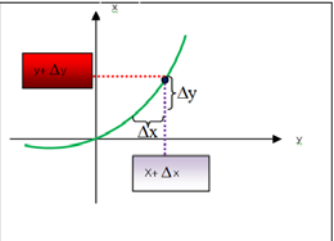
2.5 นักศึกษาพิจารณาถึง ค่า $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x}$ (ความชัน) กับการหาอนุพันธ์

อนุพันธ์



นักศึกษาค้นคว้าถึงความชันที่ได้จาก $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ซึ่งสัมพันธ์กับ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x}$ ซึ่งเป็นการหาค่าการเปลี่ยนแปลง ณ จุดๆ หนึ่ง

หลักฐาน	การวิเคราะห์	การตีความ
	1. นักศึกษาสังเกตทิศทางการเลื่อนของแกน x กับแกน y	- นักศึกษาใช้วิธีการเดียวในการแก้ปัญหา
	2. นักศึกษาใช้วิธีการที่หลากหลายในการหาความสัมพันธ์ของแกน x กับแกน y ในขณะที่ยเลื่อน	- นักศึกษาใช้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา - นักศึกษาค้นหาวิธีการในการหาคำตอบเพื่อสร้างแนวคิด
	3. นักศึกษาพิจารณาถึงค่า Δx และค่า Δy กับ จุดเปลี่ยนแปลงของกราฟ และพิจารณาค่า $\Delta x \rightarrow 0$ และ $\Delta y \rightarrow 0$	- นักศึกษาตระหนักถึงวิธีการที่หลากหลายช่วยให้เกิดวิธีการและคำตอบของการคำนวณที่แม่นยำ - นักศึกษาพิจารณาค่า Δx และค่า Δy
	4. นักศึกษาตระหนักถึงแนวคิดที่เกิดขึ้นเพื่อหาความสัมพันธ์ของ Δx และ Δy กับการหาความชัน	- นักศึกษาตระหนักถึงแนวคิดที่เกิดขึ้น - นักศึกษาเกิดการเรียนรู้จากวิธีการในการแก้ปัญหาไปสู่แนวคิด

หลักฐาน	การวิเคราะห์	การตีความ
	5. นักศึกษาพิจารณาถึง ค่า $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} \quad (\text{ความ}$ ชัน) กับการหาอนุพันธ์	- นักศึกษานำแนวคิดที่เกิดขึ้นไปใช้หรือการขยายแนวคิด - นักศึกษาใช้การขยายแนวคิดเชื่อมโยงจากวิธีการแก้ปัญหาไปสู่แนวคิด
	6. นักศึกษาต่อยอดแนวคิดที่มีมาก่อนไปสู่การหานิยามของอนุพันธ์ - นักศึกษานำความรู้เรื่องการหาความชัน กับความสัมพันธ์ของ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ มาพิจารณา $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} \quad \text{ซึ่ง}$ เป็นนิยามของอนุพันธ์	- นักศึกษาต่อยอดแนวคิดให้มีความสลับซับซ้อนมากขึ้น - นักศึกษาใช้ความรู้ที่มีมาก่อนมาต่อยอดความรู้ - นักศึกษาได้มาซึ่งหลักการ สูตร การรับรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

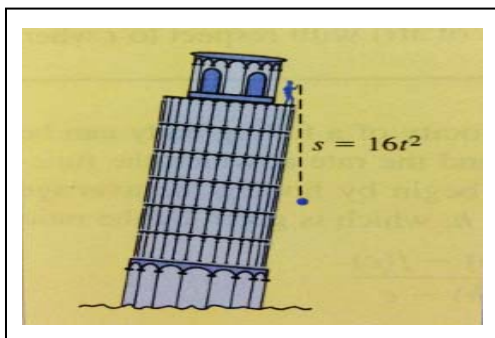
นักศึกษาสามารถเห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta x \rightarrow 0$ และ $\Delta y \rightarrow 0$ กับความสัมพันธ์ของความชันซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ และพัฒนาสู่การหานิยามของอนุพันธ์โดยใช้ความรู้ที่มีมาก่อนหน้า

นำมาใช้ในการหาค่า $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x}$ ซึ่งเป็นผลมาจากการสร้างสถานการณ์ปัญหา

ให้นักศึกษาได้ลงมือปฏิบัติจริง โดยนักศึกษาใช้การพัฒนาวิธีการคิดจากวิธีการแก้ปัญหาที่ได้ลงมือปฏิบัติไปสู่วิธีการคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความสลับซับซ้อน และเชื่อมโยงวิธีการคิดต่างๆ จากวิธีการคิดหาค่าความเร็วเพื่อสร้างวิธีการคิดในการหานิยามของอนุพันธ์ และสร้างแนวคิดในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ อาศัยวิธีการแก้ปัญหาวิธีการเดียวไปสู่วิธีการที่หลากหลาย ทำให้นักศึกษาขยายแนวคิดจากแนวคิดพื้นฐานไปสู่แนวคิดที่แนวคิดที่มีความสลับซับซ้อนขึ้น โดยการต่อยอดจากแนวคิดหรือวิธีการคิดที่มีมาก่อนหน้าในการอธิบายหรือลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตร เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

สถานการณ์ปัญหาที่ 2 ช่วยฉันด้วย

คำชี้แจง จากรูปถ้านักศึกษาขึ้นไปยืนบนตึกแล้วปล่อยลูกหินลงมาดังรูป โดยกำหนดระยะทาง $s = 16t^2$ เมื่อ t คือเวลามีหน่วยเป็นวินาที



ให้นักศึกษาช่วยกันแสดงวิธีคิด ดังนี้

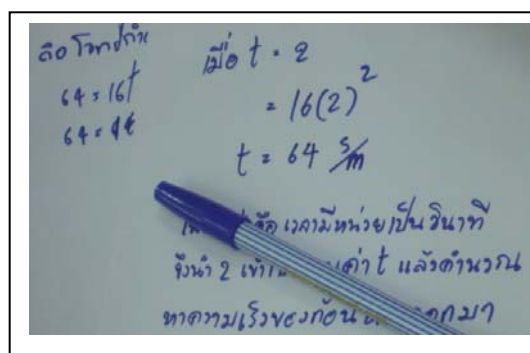
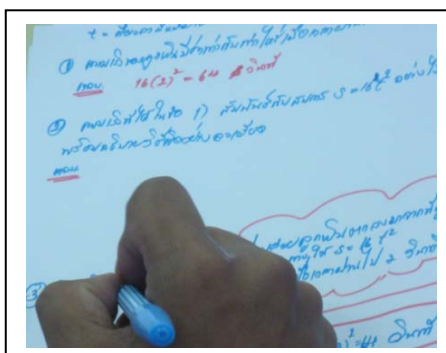
1. ความเร็วของลูกหินมีค่าเท่ากับเท่าไรเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที
2. ความเร็วที่ได้ในข้อ 1) สัมพันธ์กับสมการ $s = 16t^2$ อย่างไรบ้างพร้อมอธิบายวิธีคิด

อย่างละเอียด

3. ให้นักศึกษานำเสนอหน้าชั้นเรียน

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา เป็นขั้นของการเรียนรู้ด้วยตนเองและผู้สอน รวบรวมวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา ดังนี้

1. นักศึกษาแก้ปัญหาโดยการแทนค่าสมการ $s = 16(2)^2 = 64$ วินาที



2. นักศึกษาแก้ปัญหาจากการแทนสมการ $v = \frac{s}{t}$ เมื่อ $v = u + gt$,

$$s = \left(\frac{v+u}{2} \right) t = \left(ut + \frac{1}{2} gt^2 \right)$$

$$\text{และ } v^2 = u^2 + 2gs$$

1) $v = \frac{s}{t} = \frac{16t^2}{8t^2} \text{ m/s}$

2) 1. ความเร็ว (v)
2. ระยะทาง (s)
3. เวลา (t)
4. ความเร่ง/วินาที (m/s²)

$v = \frac{s}{t}$ $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
 $v = u + gt$ $u = \text{ความเร็วก่อน}$
 $s = \left(\frac{v+u}{2} \right) t$
 $s = \left(ut + \frac{1}{2} gt^2 \right)$
 $v^2 = u^2 + 2gs$

$v = \frac{s}{t}$ $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
 $v = u + gt$ $u = \text{ความเร็วก่อน}$
 $s = \left(\frac{v+u}{2} \right) t$
 $s = \left(ut + \frac{1}{2} gt^2 \right)$
 $v^2 = u^2 + 2gs$

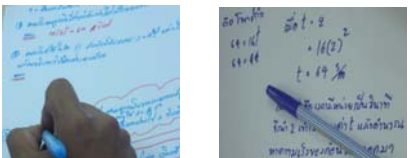
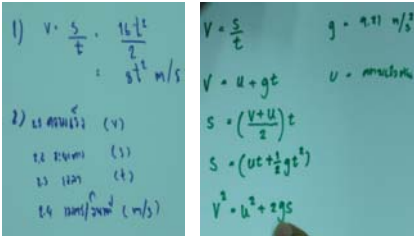
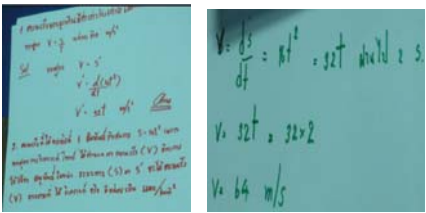
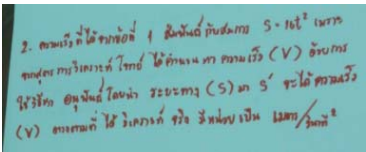
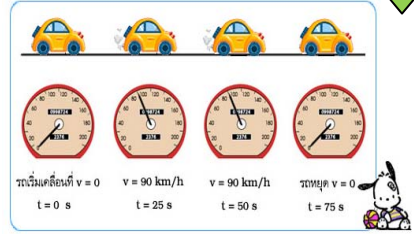
3. นักศึกษาแก้ปัญหาจากแนวคิดเรื่อง การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. ความเร็ว (v) m/s 2. ระยะทาง (s) m
 3. เวลา (t) s 4. ความเร่ง (g) m/s²

Sol. จากสูตร $v = \frac{ds}{dt}$
 $v = \frac{d(32t^2)}{dt}$
 $v = 64t \text{ m/s}$

$v = \frac{ds}{dt} = gt^2 = 32t^2$ 1. ความเร็ว (v) m/s
 2. ระยะทาง (s) m
 3. เวลา (t) s
 4. ความเร่ง (g) m/s²

การวิเคราะห์ผล

หลักฐาน	การวิเคราะห์	การตีความ
	1. นักศึกษาแทนค่าสมการ $s = 16(2)^2 = 64$ วินาที	- นักศึกษาใช้วิธีการเดียวในการแก้ปัญหา - นักศึกษาพยายามค้นหาขั้นตอนในการแก้ปัญหาโดยใช้สิ่งที่ได้เรียนรู้มาก่อนหน้านี้
	2. นักศึกษาใช้วิธีการที่หลากหลายในการคำนวณจากการแทนสมการ $v = \frac{s}{t}$ เมื่อ $v = u + gt$, $s = \left(\frac{v+u}{2}\right)t = \left(ut + \frac{1}{2}gt^2\right)$ และ $v^2 = u^2 + 2gs$	- นักศึกษาใช้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา - นักศึกษาค้นหาวิธีการในการหาคำตอบเพื่อสร้างแนวคิด
	3. นักศึกษาพิจารณาถึงวิธีการในการหาคำตอบ และพิจารณาถึง แก้ปัญหาจากแนวคิดเรื่อง การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (จากวิธีคิด $v = \frac{ds}{dt}$)	- นักศึกษาตระหนักถึงวิธีการที่หลากหลายช่วยให้เกิดวิธีการและคำตอบของการคำนวณที่แม่นยำ - นักศึกษาได้แนวคิดในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
	4. นักศึกษาตระหนักถึงแนวคิดที่เกิดขึ้นเพื่อให้ได้คำตอบของการหาระยะทางโดยใช้การหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา	- นักศึกษาตระหนักถึงแนวคิดที่เกิดขึ้น - นักศึกษาเกิดการเรียนรู้จากวิธีการในการแก้ปัญหาไปสู่แนวคิดทางคณิตศาสตร์
	5. นักศึกษาพัฒนาวิธีการแก้ปัญหาค้นหาความเร็วหาได้จากอนุพันธ์โดยนำระยะทาง (s) มาหาอนุพันธ์ (s') จะได้ความเร็ว (v) และขยายแนวคิดไปสู่เรื่องความเร่งของการเคลื่อนที่ ปริมาณเวกเตอร์ กราฟความเร็วกับเวลา	- นักศึกษานำแนวคิดที่เกิดขึ้นไปใช้หรือการขยายแนวคิด - นักศึกษาใช้การขยายแนวคิดเชื่อมโยงจากวิธีการแก้ปัญหาไปสู่แนวคิด

นักศึกษาสามารถเห็นความสัมพันธ์ระหว่าง ความเร็ว กับความเร่ง จากการเริ่มต้นหาความเร็วจากความสัมพันธ์ของระยะทางกับเวลาและพัฒนาต่อยอดไปสู่การหาความเร่งได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลา ซึ่งเป็นผลมาจากการสร้างสถานการณ์ปัญหาให้นักศึกษาได้ลงมือปฏิบัติจริง โดยนักศึกษาใช้การพัฒนาวิธีการคิดจากวิธีการแก้ปัญหที่ได้ลงมือปฏิบัติไปสู่วิธีการคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความสลับซับซ้อน และเชื่อมโยงวิธีการคิดต่างๆ จากวิธีการคิดหาค่าความเร็วเพื่อสร้างวิธีการคิดที่การหาความเร่ง และสร้างแนวคิดในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ อาศัยวิธีการแก้ปัญหาวิธีการเดียวไปสู่วิธีการที่หลากหลาย ทำให้นักศึกษาขยายแนวคิดจากแนวคิดพื้นฐานไปสู่แนวคิดที่แนวคิดที่มีความสลับซับซ้อนขึ้น โดยการต่อยอดจากแนวคิดหรือวิธีการคิดที่มีมาก่อนหน้านี้นี้ในการอธิบายหรือลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตร เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

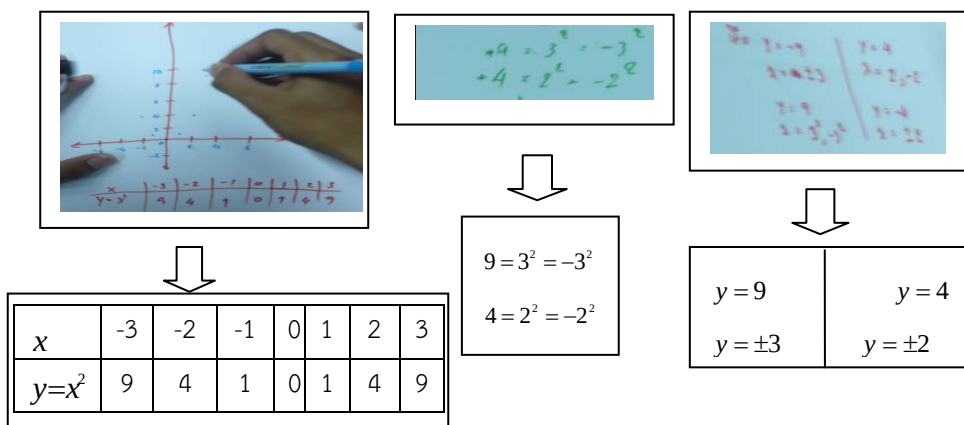
สถานการณ์ปัญหาที่ 3 ฉันทคือใคร

คำชี้แจง

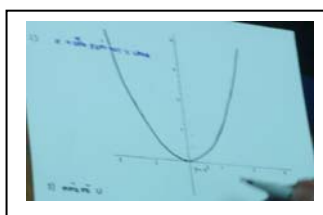
1. ให้นักศึกษาช่วยกันเขียนกราฟ $y = x^2$ พร้อมทั้งอภิปรายรายละเอียดของกราฟ
2. จากกราฟในข้อที่ 1 ให้นักศึกษาทำมือตามกราฟที่นักศึกษาวาดแล้วร่วมกันอภิปรายลักษณะและการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้น
3. ให้นักศึกษานำเสนอหน้าชั้นเรียน

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา เป็นขั้นของการเรียนรู้ด้วยตนเอง

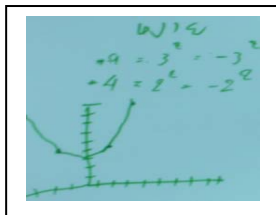
1. นักศึกษาเริ่มต้นการแก้ปัญหาจากสมการ $y = x^2$ โดยอาศัยการแทนค่า x แล้วจะได้ค่า y



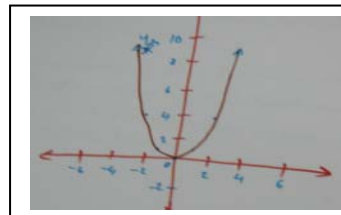
2. นักศึกษาเขียนกราฟ $y = x^2$ และอภิปรายลักษณะของกราฟ



ลักษณะกราฟเหมือนตัว U

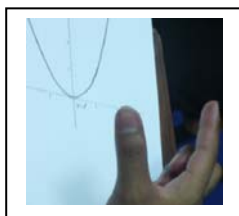


เป็นลักษณะกราฟหงาย

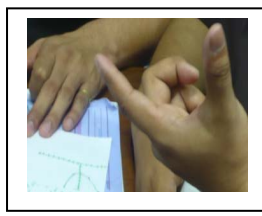


ลักษณะเป็นพาราโบลา

3. จากลักษณะของกราฟนักศึกษาทำมือตามกราฟที่วาดแล้วอภิปรายลักษณะและการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้น



จุด (0,0) เป็นจุดต่ำสุดของกราฟ

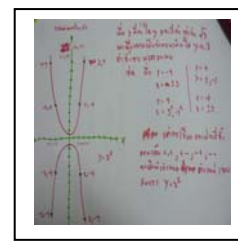
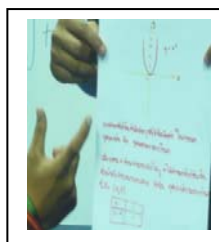
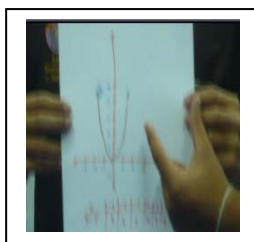
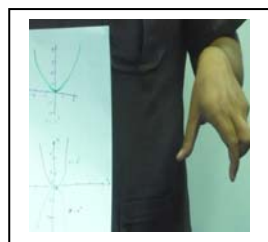


ค่าสูงสุดของ y ไม่มี เพราะค่า y เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด

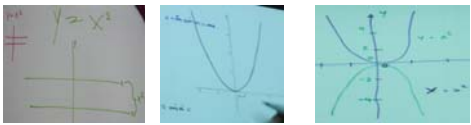
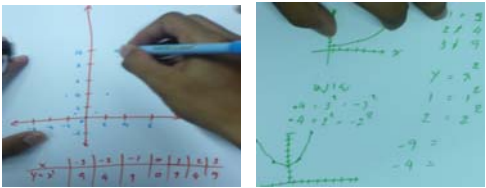
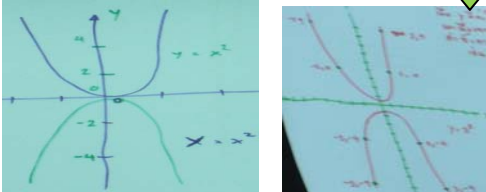
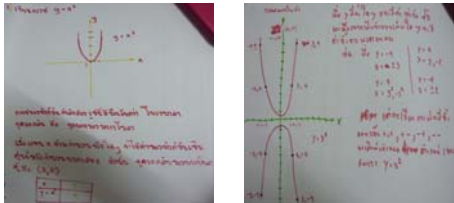
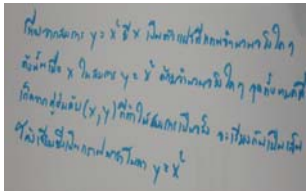


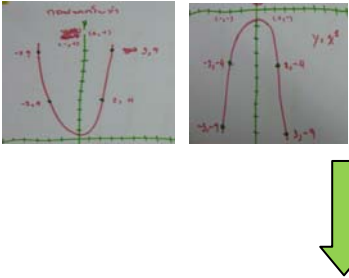
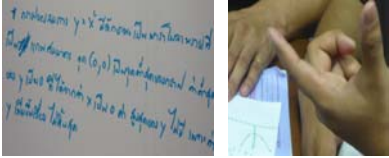
ลักษณะเป็นเส้นโค้งเรียบที่ต่อเนื่อง

4. การเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นจากลักษณะของกราฟ



การวิเคราะห์ผล

หลักฐาน	การวิเคราะห์	การตีความ
	1. นักศึกษาใช้วิธีการที่หลากหลายในการคำนวณเขียนกราฟ $y = x^2$ และอธิบายลักษณะของกราฟ	- นักศึกษาใช้วิธีการเดียวในการแก้ปัญหา - นักศึกษาพยายามค้นหาขั้นตอนในการแก้ปัญหาโดยใช้สิ่งที่ได้เรียนรู้มาก่อนหน้านี้ในเรื่องการเขียนกราฟ
	2. นักศึกษาค้นหาขั้นตอนในการแก้ปัญหาจากสมการ $y = x^2$	- นักศึกษาใช้วิธีการที่เป็นขั้นตอนมาใช้ในการแก้ปัญหา - นักศึกษาค้นหาวิธีการในการหาคำตอบเพื่อสร้างแนวคิด
	3. นักศึกษาอธิบายค่าของ y มีค่าใด ๆ x จะมีค่าทั้งบวกและลบซึ่งการเขียนกราฟจะมีทั้งจุดภาคที่เป็น $(+,+)$, $(+,-)$, $(-,+)$, $(-,-)$ จะเป็นตัวกำหนดของสมการ	- นักศึกษาตระหนักถึงวิธีการที่หลากหลายช่วยให้เกิดวิธีการและคำตอบของการคำนวณที่แม่นยำ - นักศึกษาได้แนวคิดในการสมมาตร
	4. นักศึกษาใช้แนวคิดเรื่องการเขียนกราฟโดยอาศัยการแทนค่า x แล้วจะได้ค่า y และลักษณะของกราฟ	- นักศึกษาตระหนักถึงแนวคิดที่เกิดขึ้น - นักศึกษาเกิดการเรียนรู้จากวิธีการในการแก้ปัญหาไปสู่แนวคิดทางคณิตศาสตร์
	5. สมการ $y = x^2$ มี x เป็นตัวแปรที่แทนจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้น จุดทั้งหมดที่เกิดจากคู่อันดับ (x, y) ที่ทำให้สมการเป็นจริง จะเรียงเป็นเส้นโค้งเรียบซึ่งเป็นกราฟพาราโบลา $y = x^2$	- นักศึกษาตระหนักถึงแนวคิดที่เกิดขึ้นในเรื่องฟังก์ชันที่ราบเรียบ

หลักฐาน	การวิเคราะห์	การตีความ
	5. บริเวณที่อยู่ต่ำกว่าบริเวณอื่น ๆ ที่อยู่ใกล้เคียงเมื่อเปรียบเทียบกับกันเราจะเรียกว่า บริเวณต่ำสุดสัมพัทธ์ (Relative Minima) บริเวณที่อยู่สูงกว่าบริเวณใกล้เคียงเมื่อเปรียบเทียบกับกันเราจะเรียกว่า บริเวณสูงสุดสัมพัทธ์ (Relative Maxima)	- นักศึกษานำแนวคิดที่เกิดขึ้นไปใช้หรือการขยายแนวคิด - นักศึกษาใช้การขยายแนวคิดเชื่อมโยงจากวิธีการแก้ปัญหาไปสู่แนวคิดค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
	6. นักศึกษาต่อยอดแนวคิดที่มีมาก่อนไปสู่อัตราการเปลี่ยนแปลง ความชันของเส้นโค้ง และนิยามของอนุพันธ์ - นักศึกษานำความรู้เรื่องพาราโบลาต่อยอดเรื่องอัตราการเปลี่ยนแปลง ความชันของเส้นโค้ง และนิยามของอนุพันธ์	- นักศึกษาต่อยอดแนวคิดให้มีความสลับซับซ้อนมากขึ้น - นักศึกษาใช้ความรู้ที่มีมาก่อนมาต่อยอดความรู้ - นักศึกษาได้มาซึ่งหลักการ สูตร การรับรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาต้องอาศัยการสะสมความรู้ที่ได้เรียนมาก่อนหน้านี้ในเรื่อง ฟังก์ชัน ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน พาราโบลา เพื่อนำมาสร้างความรู้ใหม่และขยายแนวคิดที่มีอยู่เดิมในเรื่องความหมายของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจากกระบวนการแก้ปัญหาด้วยตนเองเป็นตำแหน่งการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในกระบวนการแก้ปัญหา การอธิบายวิธีแก้ปัญหาพร้อมกันโดยมีประเด็นการอธิบาย ดังนี้ เป้าหมายของบทเรียนสรุปวิธีการคิดในการแก้ปัญหานักศึกษาที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนและเปรียบเทียบวิธีการคิด ดังนี้ เขียนกราฟจากสมการ $y = x^2$ ลักษณะของกราฟการเปลี่ยนแปลงของกราฟที่เกิดขึ้นการสรุปเพื่อเชื่อมโยงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ ดังนี้ กราฟฟังก์ชันกำลังสองรูปนี้เรียกว่า พาราโบลา จุดวกกลับ คือ จุดยอดของพาราโบลา x จะเป็น 2 เท่าของ y เสมอเนื่องจากสมการ $y = x^2$ มี x เป็นตัวแปรที่แทนจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้น จุดทั้งหมดที่เกิดจากคู่อันดับ (x, y) ที่ทำให้สมการเป็นจริงจะเรียงเป็นเส้นโค้งเรียบซึ่งเป็นกราฟพาราโบลา $y = x^2$ กราฟของสมการ $y = x^2$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาหงายที่เป็นแกนสมมาตร จุด $(0,0)$ เป็นจุดต่ำสุดของกราฟ ค่าต่ำสุดของ y เป็น 0 ที่ได้จากค่า x เป็น 0 ค่าสูงสุดของ y ไม่มี เพราะค่า y เพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุดและอาศัยวิธีการคิดของ

นักศึกษาในการสรุปเป้าหมายของบทเรียน อัตราการเปลี่ยนแปลง ความชันของเส้นโค้ง และ นิยามของอนุพันธ์ บริเวณที่อยู่ต่ำกว่าบริเวณอื่น ๆ ที่อยู่ใกล้เคียงเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minima) บริเวณที่อยู่สูงกว่าบริเวณใกล้เคียงเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maxima)

สถานการณ์ปัญหาที่ 4 “ใครเร็วกว่ากัน”

คำชี้แจง 1. ให้นักศึกษาแต่ละคนจินตนาการ “ถ้าปล่อยลูกแก้วในรางทั้ง 4 พร้อมกัน ลูกแก้วในรางใด จะถึงเส้นชัยก่อน”
 2. ให้นักศึกษาอภิปรายร่วมกันในกลุ่ม
 3. ให้นักศึกษาในแต่ละกลุ่มปล่อยลูกเหล็กทั้ง 4 รางพร้อมกัน และให้สังเกตว่าลูกแก้วรางใด จะถึงเร็วที่สุด พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ

หมายเหตุ: ครูคอยกระตุ้นให้นักศึกษาคิดและใช้หลักการทางคณิตศาสตร์

อุปกรณ์ ลูกแก้วและรางลูกแก้ว 4 ราง



จากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้นักศึกษาได้ดำเนินการการใช้แนวคิด ดังต่อไปนี้

1. นักศึกษาในแต่ละกลุ่มจินตนาการและพูดคุยกันว่าลูกแก้วในรางใดจะถึงพื้นเร็วที่สุด



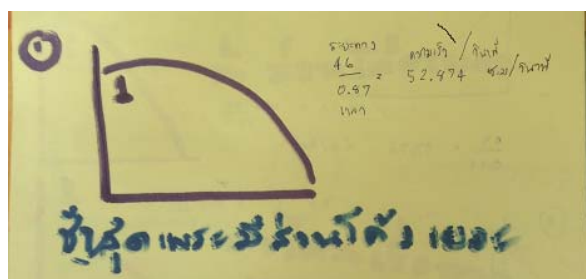
2. เมื่อนักศึกษาในแต่ละกลุ่มปล่อยลูกเหล็กทั้ง 4 รางพร้อมกัน

2.1 นักศึกษาสังเกตลูกแก้วในรางใดถึงเร็วที่สุด



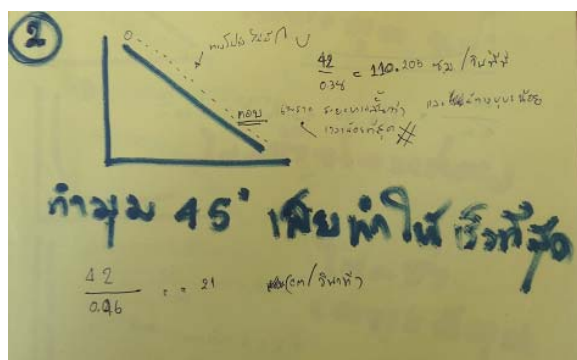
2.2 นักศึกษาหาวิธีการคิดเพื่อหาวิธีการคำนวณ ดังต่อไปนี้

วิธีที่ 1 พิจารณาสวนโค้ง



ส่วนโค้งมากทำให้ลูกแก้วถึงช้าที่สุด

วิธีที่ 2 พิจารณามุม

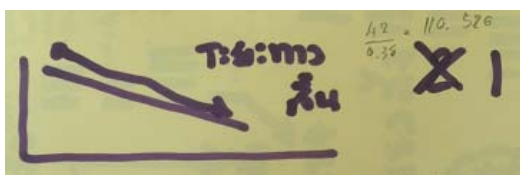


มุม 45° ทำให้ลูกแก้วถึงเร็วที่สุด

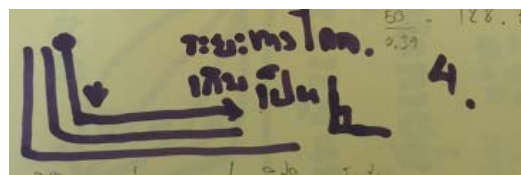
วิธีที่ 3 ใช้เชือกมาวัดระยะทาง



หาระยะทางว่า ระยะทาง
โดยยาว ซึ่งส่งผลให้ลูกแก้ว
ถึงช้าที่สุด



ระยะทางสั้นทำให้ลูกแก้วถึงเร็วที่สุด

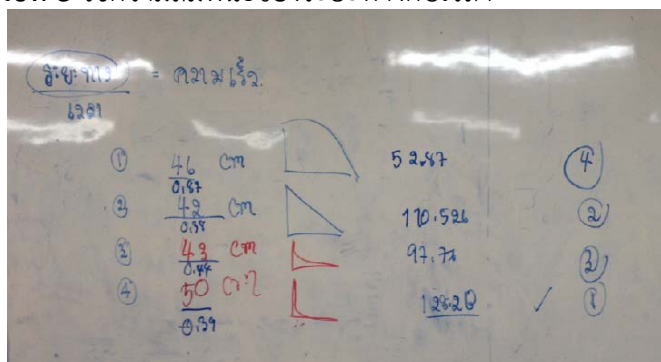


ระยะทางยาวทำให้ลูกแก้วถึงช้าที่สุด

วิธีที่ 4 ใช้นาฬิกาจับเวลา

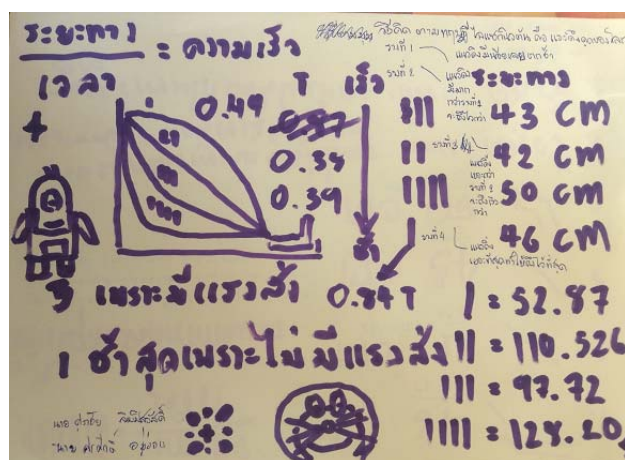


วิธีที่ 5 ใช้ความสัมพันธ์ของระยะทางกับเวลา



ระยะทาง ÷ เวลา = ความเร็ว

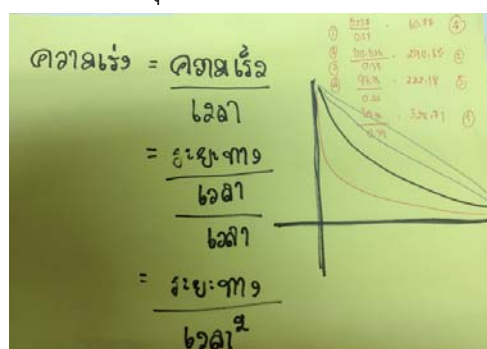
1. $\frac{46}{0.87} = 52.87$
2. $\frac{42}{0.38} = 110.52$
3. $\frac{43}{0.44} = 97.72$
4. $\frac{50}{0.39} = 128.20$



นักศึกษาค้นพบว่า เมื่อนำความยาวของรางลูกแก้วมาหารเวลาจะได้ความเร็วของลูกแก้วที่ถึงเส้นชัย (ความเร็ว = ระยะทาง ÷ เวลา)

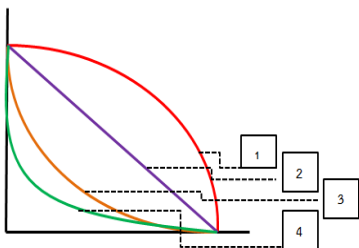
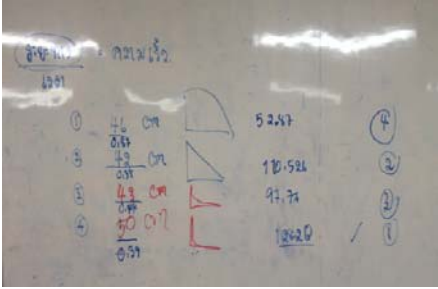
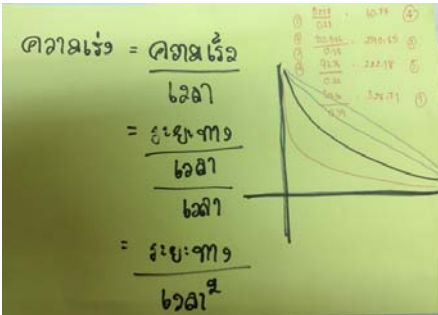
วิธีที่ 6 ใช้ความสัมพันธ์ของระยะทางกับเวลา

พัฒนาวิธีการหาความเร็วมาต่อยอดการหาความเร่ง นักศึกษาค้นพบว่า ลูกแก้วที่ถึงเส้นชัยก่อนมีความเร่งมากที่สุด (ความเร่ง = ความเร็ว ÷ เวลา = ระยะทาง ÷ เวลา²)



1. $\frac{52.87}{0.87} = 60.77$
2. $\frac{110.53}{0.38} = 290.85$
3. $\frac{97.76}{0.44} = 222.18$
4. $\frac{128.30}{0.39} = 328.71$

วิธีการคิดของนักศึกษาแต่ละวิธีตรวจสอบจากการปล่อยลูกแก้วเพื่อหาความเร็วในการถึงเส้นชัย

หลักฐาน	การวิเคราะห์	การตีความ
 	1. นักศึกษาวัดความยาวของราง	- นักศึกษาใช้วิธีการเดียวในการแก้ปัญหา - นักศึกษาพยายามค้นหาขั้นตอนในการแก้ปัญหาโดยใช้สิ่งที่ได้เรียนรู้มาก่อนหน้านี้
 	2. นักศึกษาใช้วิธีการที่หลากหลายในการคำนวณ ทั้งวัดความยาว จับเวลา	- นักศึกษาใช้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา - นักศึกษาค้นหาวิธีการในการหาคำตอบเพื่อสร้างแนวคิด
	3. นักศึกษาพิจารณาถึงวิธีการในการหาคำตอบ และพิจารณาถึงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางและเวลา (ความเร็ว = ระยะทาง ÷ เวลา)	- นักศึกษาตระหนักถึงวิธีการที่หลากหลายช่วยให้เกิดวิธีการและคำตอบของการคำนวณที่แม่นยำ - นักศึกษาได้แนวคิดในการหาความเร็ว
	4. นักศึกษาตระหนักถึงแนวคิดที่เกิดขึ้นเพื่อให้ได้คำตอบของการหาความเร็ว โดยใช้วิธีการคำนวณความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางและเวลาและการเขียนเป็นสมการเพื่อหาคำตอบ	- นักศึกษาตระหนักถึงแนวคิดที่เกิดขึ้น - นักศึกษาเกิดการเรียนรู้จากวิธีการในการแก้ปัญหาไปสู่แนวคิด
	5. นักศึกษาพัฒนาวิธีการแก้ปัญหาการคำนวณความเร็วจากการวัดระยะทางและการจับเวลา ความเร็วเป็นการเปลี่ยนแปลงของระยะทางในช่วงเวลาหนึ่ง	- นักศึกษานำแนวคิดที่เกิดขึ้นไปใช้หรือการขยายแนวคิด - นักศึกษาใช้การขยายแนวคิดเชื่อมโยงจากวิธีการแก้ปัญหาไปสู่แนวคิด

หลักฐาน	การวิเคราะห์	การตีความ
$\frac{52.87}{0.87} = 60.77$ $\frac{110.53}{0.38} = 290.85$ $\frac{97.76}{0.44} = 222.18$ $\frac{128.30}{0.39} = 328.71$	6. นักศึกษาต่อยอดแนวคิดที่มีมาก่อนไปสู่การหาความเร่ง - นักศึกษานำความรู้เรื่องการหาความเร็วมาต่อยอดการหาความเร่งและเห็นถึงความสัมพันธ์ของความเร็วและความเร่ง ลูกแก้วที่ถึงเส้นชัยก่อนย่อมมีความเร็วมากที่สุด ความเร่งเป็นการเปลี่ยนแปลงของความเร็วในช่วงเวลาหนึ่ง $\text{ความเร่ง} = \text{ความเร็ว} \div \text{เวลา}$ $= \text{ระยะทาง} \div \text{เวลา}^2$	- นักศึกษาต่อยอดแนวคิดให้มีความสลับซับซ้อนมากขึ้น - นักศึกษาใช้ความรู้ที่มีมาก่อนมาต่อยอดความรู้ - นักศึกษาได้มาซึ่งหลักการ สูตร การรับรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

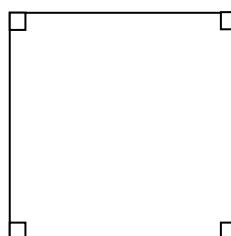
นักศึกษาสามารถเห็นความสัมพันธ์ระหว่าง ความเร็ว กับความเร่งจากการเริ่มต้นหาความเร็วจากความสัมพันธ์ของระยะทางกับเวลาและพัฒนาต่อยอดไปสู่การหาความเร่งได้ ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลาซึ่งเป็นผลมาจากการสร้างสถานการณ์ปัญหาให้นักศึกษาได้ลงมือปฏิบัติจริงโดยนักศึกษานำความรู้จากการพัฒนาวิธีการคิดจากวิธีการแก้ปัญหาที่ได้ลงมือปฏิบัติไปสู่วิธีการคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความสลับซับซ้อน และเชื่อมโยงวิธีการคิดต่างๆ จากวิธีการคิดหาความเร็วเพื่อสร้างวิธีการคิดที่การหาความเร่งและสร้างแนวคิดในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ อาศัยวิธีการแก้ปัญหาวิธีการเดียวไปสู่วิธีการที่หลากหลาย ทำให้นักศึกษาขยายแนวคิดจากแนวคิดพื้นฐานไปสู่แนวคิดที่แนวคิดที่มีความสลับซับซ้อนขึ้น โดยการต่อยอดจากแนวคิดหรือวิธีการคิดที่มีมาก่อนหน้านั้นในการอธิบายหรือลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตร เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

สถานการณ์ปัญหาที่ 5 การสร้างกล่องจากตาราง

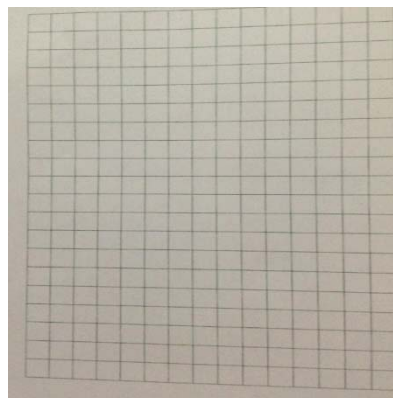
คำชี้แจงที่ 1

- ให้นักศึกษาสร้างกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่มีฝาปิดจากกระดาษที่กำหนดให้ ให้ได้หลากหลายขนาดมากที่สุด
- จากข้อ 1. ให้นักศึกษาเลือกกล่องที่มีปริมาตรมากที่สุด พร้อมทั้งให้เหตุผลว่าทำไมกล่องที่ถูกเลือกมานี้จึงมีปริมาตรมากที่สุด
- ให้นักศึกษานำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียน

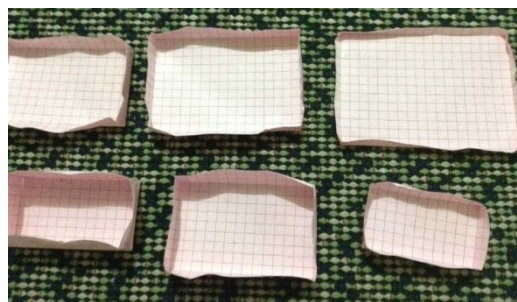
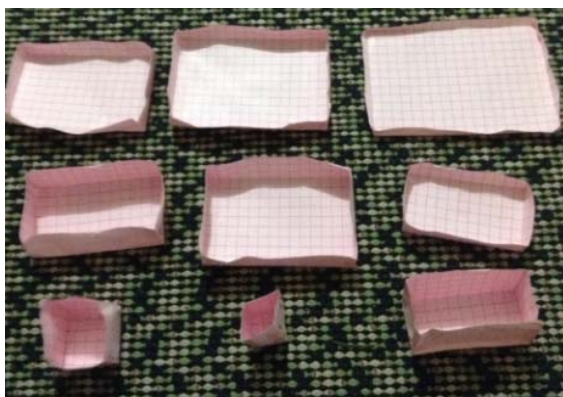
ตัวอย่างการตัดตารางกระดาษ



อุปกรณ์ กระดาษตารางขนาด 15×20 ตร.ซม. เทปใส กรรไกร



นักศึกษาในแต่ละกลุ่มตัดตารางกระดาษในขนาดต่างๆ ดังนี้



จากโจทย์ที่กำหนดให้นักศึกษาได้ดำเนินการสร้างกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่มีฝาปิดให้ได้หลายขนาดมากที่สุด หลังจากนั้นจึงมาคำนวณหาปริมาตรของกล่อง ดังต่อไปนี้
แนวคิดที่ 1 ใช้สูตรในการคำนวณหาปริมาตร

กล่องกระดาษที่ 16	ขนาดกว้าง 5	ยาว 5	สูง 4
กล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่มีฝาปิด	ความยาว	ความกว้าง	ความสูง
	$= 5 \times 5 \times 4$		
	$= 100$		
กล่องกระดาษที่ 17	ขนาดกว้าง 9	ยาว 12	สูง 3
กล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่มีฝาปิด	ความยาว	ความกว้าง	ความสูง
	$= 9 \times 12 \times 3$		
	$= 324$		
กล่องกระดาษที่ 18	ขนาดกว้าง 4	ยาว 5	สูง 3
กล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่มีฝาปิด	ความยาว	ความกว้าง	ความสูง
	$= 4 \times 5 \times 3$		
	$= 60$		
กล่องกระดาษที่ 19	ขนาดกว้าง 6	ยาว 6	สูง 4
กล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่มีฝาปิด	ความยาว	ความกว้าง	ความสูง
	$= 6 \times 6 \times 4$		
	$= 144$		
กล่องกระดาษที่ 20	ขนาดกว้าง 3	ยาว 3	สูง 5
กล่องสี่เหลี่ยมมุมฉากไม่มีฝาปิด	ความยาว	ความกว้าง	ความสูง
	$= 3 \times 3 \times 5$		
	$= 45$		

No. 16

$$W \times L \times H = 5 \times 5 \times 4$$

$$= 100$$

No.17

$$W \times L \times H = 9 \times 12 \times 3$$

$$= 324$$

No.18

$$W \times L \times H = 4 \times 5 \times 3$$

$$= 60$$

No.19

$$W \times L \times H = 6 \times 6 \times 4$$

$$= 144$$

No.20

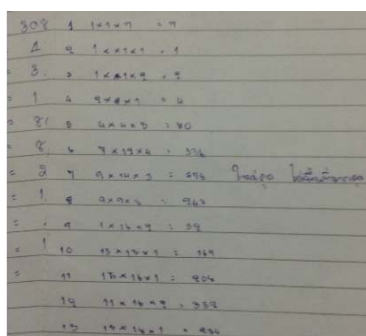
$$W \times L \times H = 3 \times 3 \times 5$$

$$= 45$$

แนวคิดที่ 2 คำนวณโดยไม่แสดงวิธีทำ

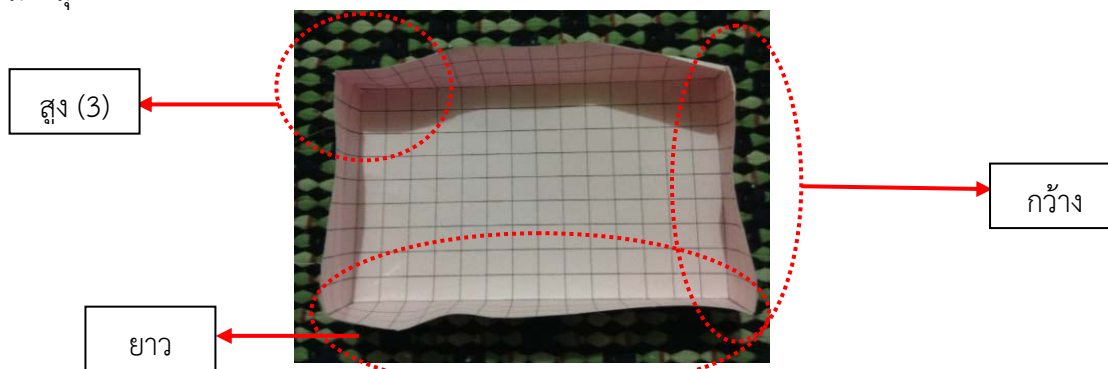
กล่องที่ 1 กว้าง 7 ยาว 12 สูง 4 ตอบ 336 คม. ซม.	Box 2. Wight 7 length 12 high 4 Ans. 336
กล่องที่ 3 กว้าง 9 ยาว 14 สูง 3 ตอบ 378 คม. ซม.	Box 3. Wight 9 length 14 high 3 Ans. 378
กล่องที่ 4 กว้าง 5 ยาว 10 สูง 5 ตอบ 250 คม. ซม.	Box 4. Wight 5 length 10 high 5 Ans. 250
กล่องที่ 5 กว้าง 3 ยาว 8 สูง 6 ตอบ 144 คม. ซม.	Box 5. Wight 3 length 8 high 6 Ans. 144
กล่องที่ 6 กว้าง 2 ยาว 7 สูง 4 ตอบ 56 คม. ซม.	Box 6. Wight 2 length 7 high 4 Ans. 56
กล่องที่ 7 กว้าง 4 ยาว 4 สูง 1 ตอบ 16 คม. ซม.	Box 7. Wight 4 length 4 high 1 Ans. 16

แนวคิดที่ 3 คำนวณโดยค่อย ๆ เพิ่มขนาดของการตัด



1. $1 \times 1 \times 7 = 7$
2. $1 \times 1 \times 1 = 1$
3. $1 \times 1 \times 2 = 2$
4. $2 \times 2 \times 1 = 4$
5. $4 \times 4 \times 5 = 80$
6. $7 \times 12 \times 4 = 336$
7. $9 \times 14 \times 3 = 378$
8. $9 \times 9 \times 3 = 243$
9. $1 \times 16 \times 2 = 32$
10. $13 \times 13 \times 1 = 169$
11. $13 \times 16 \times 1 = 208$
12. $11 \times 16 \times 2 = 352$
13. $13 \times 18 \times 1 = 234$

นักศึกษาค้นพบว่า ขนาดของกล่องที่มีปริมาตร (กว้าง×ยาว×สูง) $9 \times 14 \times 3 = 378$ ลูกบาศก์เซนติเมตรคือปริมาตรของกล่องที่มีปริมาตรมากที่สุด โดยเขียนว่า “ใหญ่สุด มีพื้นที่มากที่สุด”



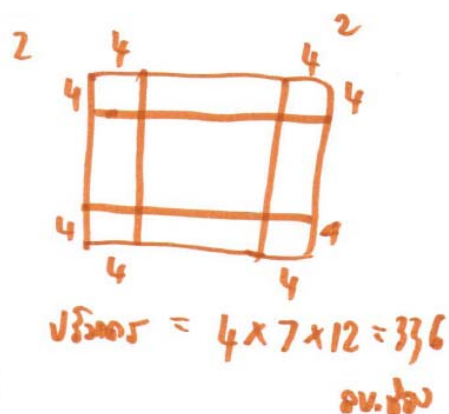
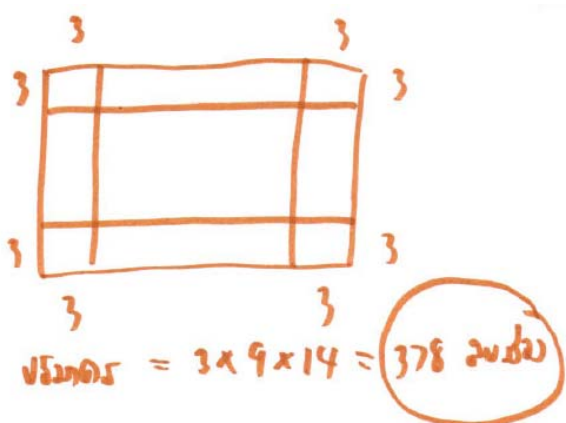
คำชี้แจงที่ 2

1. จากสถานการณ์ปัญหาที่ 1 ให้นักศึกษาหาวิธีการคิด/คำนวณปริมาตรของกล่องที่แตกต่างจากวิธีการคิดที่ใช้ในสถานการณ์ปัญหาที่ 1 ให้ได้หลากหลายวิธีมากที่สุด
2. ให้นักศึกษานำเสนอผลงานหน้าชั้นเรียน

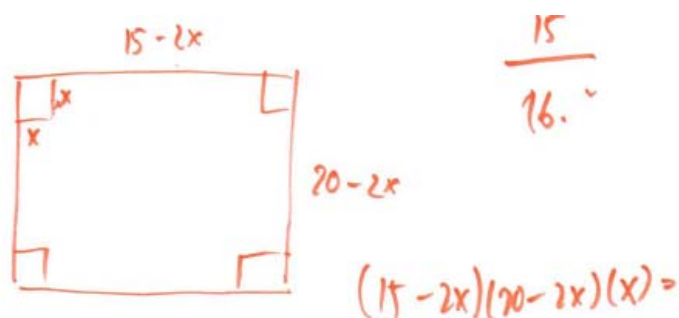
แนวคิดที่ 1 การสร้างตาราง

ก	ข	ล	ปริมาตร
13	18	1	234
11	16	2	352
9	14	3	378
7	12	4	336
5	10	5	250
3	8	6	144
1	6	7	42
10	15	2.5	375
8	13	3.5	364
9.5	14.5	2.75	378.8125
9.4	14.4	2.8	379.008
9.2	14.2	2.9	378.856
9.3	14.3	2.85	379.0215
* 9.3426	* 14.3426	* 2.8287	379.0378

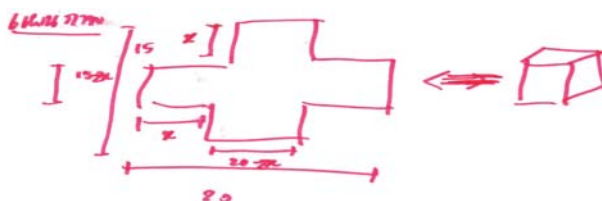
แนวคิดที่ 2 การวาดรูปและคำนวณหาปริมาตร



แนวคิดที่ 3 การคำนวณโดยการกำหนดค่าตัวแปร



แนวคิดที่ 4 การคำนวณโดยใช้การหาอนุพันธ์



$$\therefore \text{Volume} = x(15-2x)(20-2x)$$

$$= 4x^3 - 70x^2 + 300x$$

$$\text{Let } f(x) = 4x^3 - 70x^2 + 300x$$

$$f'(x) = 12x^2 - 140x + 300$$

$$= 4(3x^2 - 35x + 75) = 0$$

$$\text{Hence } x = \frac{35 \pm 5\sqrt{13}}{6}, f'(x) = 24x - 140$$

$$\text{Substitute } f'\left(\frac{35+5\sqrt{13}}{6}\right) > 0$$

$$\text{function } f'\left(\frac{35-5\sqrt{13}}{6}\right) < 0$$

$$\therefore \text{The relative maximum occurs when } x = \frac{35-5\sqrt{13}}{6}$$

$$\sqrt{13} \approx 3.605551275061702$$

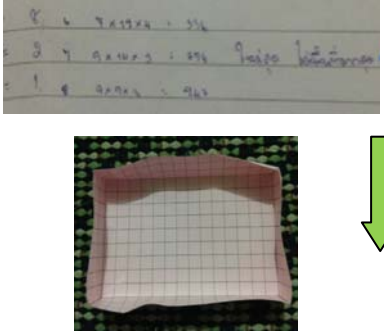
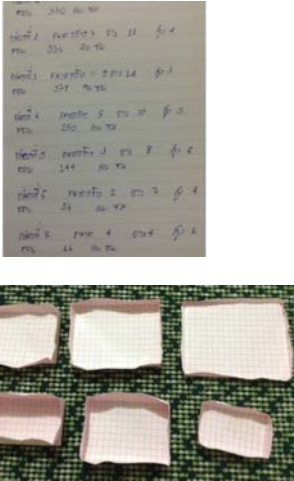
$$\text{Thus } x = \frac{35 - (5\sqrt{13})}{6} \approx \frac{35 - 18.02775637530851}{6} \approx 2.8257$$

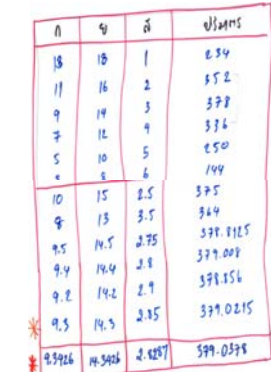
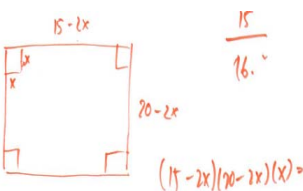
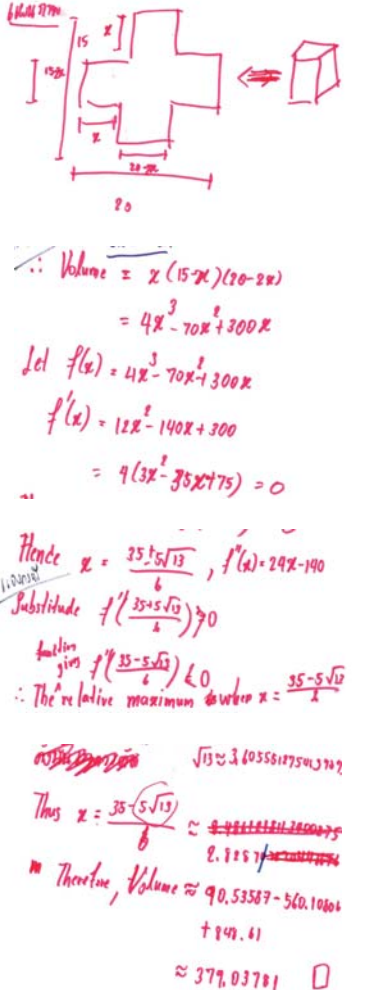
$$\therefore \text{Therefore, Volume} \approx 90.53587 - 560.10806 + 848.61$$

$$\approx 379.03781 \quad \square$$

วิธีการคิดของนักศึกษาแต่ละวิธีตรวจสอบจากการพับกล่องกระดาษเพื่อหาปริมาตรมากที่สุดและคำตอบจากการพับกล่องกระดาษทำให้นักศึกษามั่นใจกับวิธีการคิดวิธีการอื่นที่แตกต่างจากการพับกล่องกระดาษ

การวิเคราะห์ผล

หลักฐาน	การวิเคราะห์	การตีความ
	1. นักศึกษาใช้วิธีการพับกระดาษและเขียนแสดงวิธีการคำนวณ	- นักศึกษาใช้วิธีการเดียวในการแก้ปัญหา - นักศึกษาพยายามค้นหาขั้นตอนในการแก้ปัญหาโดยใช้สิ่งที่ได้เรียนรู้มาก่อนหน้านี้
	2. นักศึกษาใช้วิธีการที่หลากหลายในการคำนวณ ทั้งการพับกระดาษ การเขียนวิธีการคำนวณ การคำนวณ	- นักศึกษาใช้วิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา - นักศึกษาค้นหาขั้นตอนเพื่อสร้าง concept
	3. นักศึกษาพิจารณาถึงวิธีการพับกระดาษที่ให้ปริมาตรของกล่องมากที่สุด และการคำนวณที่สอดคล้องกับการหาปริมาตรของกล่องมากที่สุด นั่นคือ $9 \times 14 \times 3 = 378$	- นักศึกษาตระหนักถึงวิธีการที่หลากหลายช่วยให้เกิดวิธีการและคำตอบของการคำนวณที่แม่นยำ - นักศึกษาได้ concept ในเรื่องปริมาตรของกล่อง

หลักฐาน	การวิเคราะห์	การตีความ
	4. นักศึกษาตระหนักถึงแนวคิดที่เกิดขึ้นเพื่อให้ได้คำตอบของการหาค่าปริมาตรมากที่สุดของกล่อง โดยการใช้วิธีการคำนวณจากตารางและการเขียนเป็นสมการเพื่อหาคำตอบ	- นักศึกษาตระหนักถึงแนวคิดที่เกิดขึ้น - นักศึกษาเกิดการเรียนรู้จากขั้นตอนไปสู่ concept
	5. นักศึกษาพัฒนาวิธีการแก้ปัญหาจากการคำนวณจากการพับกระดาษ การวาดตารางไปสู่วิธีการคิดในการสร้างสมการ	- นักศึกษานำแนวคิดที่เกิดขึ้นไปใช้หรือการขยายแนวคิด - นักศึกษาใช้การขยายแนวคิดเชื่อมโยงจากขั้นตอนไปสู่ concept
	6. นักศึกษาต่อยอดแนวคิดที่มีมาก่อนไปสู่การหาอนุพันธ์ - นักศึกษานำความรู้เรื่องค่าสูงสุดและต่ำสุดซึ่งได้เรียนมาก่อนหน้านี้เพื่อหาปริมาตรของกล่องที่สุดโดยการใช้อนุพันธ์	- นักศึกษาต่อยอดแนวคิดให้มีความสลับซับซ้อนมากขึ้น - นักศึกษาใช้ความรู้ที่มีมาก่อนมาต่อยอดความรู้ - นักศึกษาได้มาซึ่งหลักการ สูตร การรับรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

นักศึกษาสามารถแก้ปัญหาโจทย์แคลคูลัสที่ลงมือปฏิบัติได้จริงและมีลักษณะเป็น
 ปัญหาปลายเปิด โดยใช้การพัฒนาวิธีการคิดจากวิธีการแก้ปัญหาที่ง่ายไปสู่วิธีการที่มีความ
 ซับซ้อน และเชื่อมโยงวิธีการคิดต่างๆ จากวิธีการคิดพื้นฐานเพื่อสร้างวิธีการคิดที่สูงขึ้น
 และสร้างแนวคิดในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ อาศัยวิธีการแก้ปัญหาวិธีการเดียวไปสู่
 วิธีการที่หลากหลาย ทำให้นักศึกษาขยายแนวคิดจากแนวคิดพื้นฐานไปสู่แนวคิดที่มีความ
 ซับซ้อนขึ้น โดยการต่อยอดจากแนวคิดหรือวิธีการคิดที่มีมาก่อนหน้านี้นในการอธิบายหรือ
 ลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตร เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์
 ของนักศึกษาเกิดขึ้นจากการเรียนรู้การแก้โจทย์ปัญหาที่พัฒนาจากวิธีการแก้ปัญหาไปสู่การ
 สร้างความคิดรวบยอด

บทที่ 5

สรุปผล อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่องการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูง
คณะผู้วิจัยกำหนดจุดมุ่งหมาย ดังนี้

1. เพื่อสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหาโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์
2. เพื่อศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีในการแก้ปัญหาโดยใช้การคิดขั้นสูง

วิธีดำเนินการวิจัย

1. การกำหนดขอบเขต

- 1.1 ด้านเนื้อหาในรายวิชาแคลคูลัส 1 ระดับปริญญาตรี
- 1.2 กลุ่มเป้าหมายเป็น นักศึกษาระดับปริญญาตรีใน 3 มหาวิทยาลัย คือ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ ศูนย์สุพรรณบุรี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร และมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร
- 1.3 กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีในการวิเคราะห์การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์และการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พัฒนาจากกรอบการคิดขั้นสูงของ Tall, 1991

2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

- 2.1 แบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ที่คณะผู้วิจัยสร้างขึ้น จำนวน 16 ข้อ
- 2.2 แบบสัมภาษณ์เพื่อศึกษาการคิดขั้นสูง
- 2.3 แบบสังเกตเพื่อศึกษาการคิดขั้นสูง
- 2.4 เครื่องบันทึกการสอนในชั้นเรียนทั้งภาพนิ่งและภาพเคลื่อนไหว เครื่องบันทึกเสียง
- 2.5 สถานการณ์ปัญหาปลายเปิดจำนวน 5 สถานการณ์ ดังนี้
สถานการณ์ปัญหาที่ 1 ฉันเปลี่ยนแปลงอย่างไร
สถานการณ์ปัญหาที่ 2 ช่วยฉันด้วย
สถานการณ์ปัญหาที่ 3 ฉันคือใคร
สถานการณ์ปัญหาที่ 4 ใครเร็วกว่ากัน
สถานการณ์ปัญหาที่ 5 การสร้างกล่องจากตาราง

3. ขั้นตอนการสร้างแบบสอบถามที่เกี่ยวข้องกับความคิดขั้นสูง

คณะผู้วิจัยดำเนินการสร้างแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้างแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี
โดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์

ขั้นที่ 2 นำแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดย
ใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ไปให้ผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบและปรับปรุงตามให้ผู้เชี่ยวชาญให้
ข้อเสนอแนะ

ขั้นที่ 3 นำแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดย
ใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่างที่ไม่ใช่กลุ่มเป้าหมาย

ขั้นที่ 4 นำแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดย
ใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ไปทดลองใช้กับกลุ่มตัวอย่างที่ไม่ใช่กลุ่มเป้าหมายมาพิจารณาปรับแก้
ข้อความเพื่อนำไปใช้กับกลุ่มเป้าหมาย

4. การดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล

คณะผู้วิจัยดำเนินการวิจัยโดยใช้วิธีการวิจัยแบบผสมผสานระหว่างการวิจัยเชิงปริมาณและการ
วิจัยเชิงคุณภาพ ดังนี้

ระยะที่ 1 สร้างแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การ
เชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์เป็นแบบสำรวจที่คณะผู้วิจัยได้สร้างขึ้นเอง ใช้การวิจัยเชิงปริมาณ

ระยะที่ 2 ศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูง
ใช้การวิจัยเชิงคุณภาพ ดำเนินการดังนี้

ขั้นที่ 1 ออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญา
ตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงเพื่อหาแนวทางในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี
โดยใช้การคิดขั้นสูงจำนวน 5 สถานการณ์ปัญหา

ขั้นที่ 2 ศึกษาการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดย
ใช้การคิดขั้นสูงโดยใช้การสังเกตแบบมีส่วนร่วมเพื่อศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษา

ขั้นที่ 3 วิเคราะห์การคิดขั้นสูงจากการสัมภาษณ์ บันทึกสนทนา และผลงานของ
นักศึกษา โดยอาศัยกรอบการวิเคราะห์การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์และการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์
ของนักศึกษาในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พัฒนาจากกรอบการคิดขั้นสูงของ Tall, 1991

5. การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้

คณะผู้วิจัยดำเนินการวิเคราะห์การวิจัยแบบผสมผสานระหว่างการวิจัยเชิงปริมาณและการวิจัยเชิง
คุณภาพ เป็น 2 ระยะ ดังนี้

ระยะที่ 1 สร้างแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยง
ทางคณิตศาสตร์เป็นแบบสำรวจที่คณะผู้วิจัยได้สร้างขึ้นเอง ใช้การวิจัยเชิงปริมาณ

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. นำคะแนนจากแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การ
เชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์มาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s.d) และร้อยละ

2. นำคะแนนจากแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การ
เชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์มาให้ค่าประเมินและให้ค่าระดับ

ระยะที่ 2 ศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูง ใช้การวิจัยเชิงปริมาณและการวิจัยเชิงคุณภาพ ดำเนินการดังนี้

การดำเนินการวิจัยเชิงปริมาณ โดยสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

1. นำคะแนนจากแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงมาหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s.d) และร้อยละ

2. นำคะแนนจากแบบสำรวจการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงมาหาค่าประเมินและให้ค่าระดับ

การวิจัยเชิงคุณภาพ ดำเนินการตามขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงเพื่อหาแนวทางในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงจำนวน 5 สถานการณ์ปัญหา

ขั้นที่ 2 ศึกษาการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงโดยใช้การสังเกตแบบมีส่วนร่วมเพื่อศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษา

ขั้นที่ 3 วิเคราะห์การคิดขั้นสูงจากการสัมภาษณ์ บันทึกสนทนา และผลงานของนักศึกษา โดยอาศัยกรอบการวิเคราะห์การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์และการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ พัฒนาจากกรอบการคิดขั้นสูงของ Tall, 1991

สรุปผลการวิจัย

ระยะที่ 1 การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ พบว่า เป็นเพศชาย จำนวน 183 คน คิดเป็นร้อยละ 83.2 เป็นเพศหญิง จำนวน 37 คน คิดเป็นร้อยละ 16.8 มีอายุ 17-19 ปี จำนวน 187 คน คิดเป็นร้อยละ 85.0 รองลงมาอายุ 20-22 ปี จำนวน 30 คน คิดเป็นร้อยละ 13.6 และอายุ 23 ปี ขึ้นไป จำนวน 3 คน คิดเป็นร้อยละ 1.4 ศึกษาอยู่ที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร จำนวน 91 คน คิดเป็นร้อยละ 41.4 รองลงมาอยู่ที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ จำนวน 63 คน คิดเป็นร้อยละ 28.6 และศึกษาอยู่ที่มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ จำนวน 66 คน คิดเป็นร้อยละ 30.0 ระดับประเมินค่าเฉลี่ยของผู้ตอบแบบสอบถาม มีค่าเฉลี่ยรวม 4.22 คิดเป็นร้อยละ 84.40 อยู่ในเกณฑ์มากหากแยกเป็นรายข้อ พบว่าระดับค่าประเมินเรียงตามค่าเฉลี่ย ดังนี้ คือ อยู่ในเกณฑ์มาก ได้แก่ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักศึกษาต้องมีความรู้พื้นฐาน นักศึกษาเริ่มต้นจากการใช้วิธีการเดียวในการแก้ปัญหา การเชื่อมโยงเชิงวิธีการที่นักศึกษาแก้ปัญหาตามขั้นตอนทำให้เกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ การแสดงถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่างๆ เช่น กราฟ จำนวน สมการสัญลักษณ์ รูปภาพ และภาษาพูดที่ทำให้เกิดความหมายของแต่ละคนในการเกิดการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ ชั้นเรียนที่พยายามขยายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาทำให้นักศึกษาเกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ วิธีการเรียนรู้ที่นักศึกษานิยามตามวิธีการคิดของตนเอง นักศึกษาได้นำความรู้ที่มีมาก่อนหน้านี้มาแก้โจทย์ปัญหาใหม่ นักศึกษารู้สึกภูมิใจที่คิดสิ่งแปลกใหม่และภูมิใจที่แก้โจทย์ปัญหาได้ด้วยตนเอง การอธิบายและใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์เป็นการค้นหาคำตอบประกอบทางคณิตศาสตร์ นักศึกษาตระหนักถึงวิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหาซึ่งให้ผลลัพธ์เดียวกันส่งผลให้เกิดแนวคิดที่ใช้แก้ปัญหาร่วมกัน และนำแนวคิดที่ใช้ร่วมกันไปหาผลลัพธ์ในการแก้ปัญหาใหม่หรือ

นำไปใช้เพื่อสร้างความรู้ใหม่ นักศึกษารู้สึกภูมิใจที่คิดสิ่งแปลกใหม่และภูมิใจที่แก้โจทย์ปัญหาได้ด้วยตนเองมีนักศึกษาพิจารณาถึงวิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหาให้ผลลัพธ์เดียวกัน นักศึกษาแสดงผลลัพธ์เดียวกันที่เกิดขึ้นนี้จากวิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหาวิธีการเรียนรู้ที่นักศึกษาลงมือแก้ปัญหาเป็นขั้นตอนทำให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตรทางคณิตศาสตร์และการพยายามระลึกถึงขั้นตอนการแก้ปัญหาทำให้ผู้แก้ปัญหาตระหนักถึงความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ และนักศึกษาก็ใช้วิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันอย่างหลากหลายในการแก้ปัญหา

ระยะที่ 2 ศึกษาการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยใช้การคิดขั้นสูงพบว่า ผู้ตอบแบบสอบถามเป็นเพศชาย จำนวน 185 คน คิดเป็นร้อยละ 83.3 เป็นเพศหญิง จำนวน 37 คน คิดเป็นร้อยละ 16.7 มีอายุ 17-19 ปี จำนวน 189 คน คิดเป็นร้อยละ 85.1 รองลงมามีอายุ 20-22 ปี จำนวน 30 คน คิดเป็นร้อยละ 13.5 และอายุ 23 ปี ขึ้นไป จำนวน 3 คน คิดเป็นร้อยละ 1.4 ศึกษาอยู่ที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร จำนวน 92 คน คิดเป็นร้อยละ 41.4 มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ จำนวน 63 คน คิดเป็นร้อยละ 28.4 และมหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ จำนวน 67 คน คิดเป็นร้อยละ 30.2 ระดับประเมินค่าเฉลี่ยของผู้ตอบแบบสอบถามมีค่าเฉลี่ยรวม 4.70 คิดเป็นร้อยละ 94.00 อยู่ในเกณฑ์มากที่สุด ดังนี้ การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นักศึกษาต้องมีความรู้พื้นฐาน นักศึกษาได้ทบทวนความคิดของตนเอง นักศึกษาพิจารณาถึงวิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหาให้ผลลัพธ์เดียวกัน และนักศึกษานำความรู้ที่มีมาก่อนหน้านี้มาแก้โจทย์ปัญหาใหม่ นักศึกษาใช้วิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันอย่างหลากหลายในการแก้ปัญหา นักศึกษารู้สึกภูมิใจที่คิดสิ่งแปลกใหม่และภูมิใจที่แก้โจทย์ปัญหาได้ด้วยตนเอง การแสดงถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบต่างๆ เช่น กราฟ จำนวน สมการสัญลักษณ์ รูปภาพ และภาษาพูดที่ทำให้เกิดความหมายของแต่ละคนในการเกิดการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์และนักศึกษาเริ่มต้นจากการใช้วิธีการเดียวในการแก้ปัญหา ขั้นเรียนที่พยายามขยายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาทำให้นักศึกษาเกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์และนักศึกษาระหนักถึงวิธีการต่างๆ ที่แตกต่างกันในการแก้ปัญหาซึ่งให้ ผลลัพธ์เดียวกันส่งผลให้เกิดแนวคิดที่ใช้แก้ปัญหาร่วมกัน และนำแนวคิดที่ใช้ร่วมกันนี้ไปหาผลลัพธ์ในการแก้ปัญหาใหม่หรือนำไปใช้เพื่อสร้างความรู้ใหม่ การเชื่อมโยงเชิงวิธีการที่นักศึกษากแก้ปัญหาตามขั้นตอนทำให้เกิดความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ การอภิปรายและใช้แนวคิดทางคณิตศาสตร์เป็นการค้นหาคำตอบทางคณิตศาสตร์ และการพยายามระลึกถึงขั้นตอนการแก้ปัญหาทำให้ผู้แก้ปัญหาตระหนักถึงความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ นักศึกษาแสดงผลลัพธ์เดียวกันที่เกิดขึ้นนี้จากวิธีการที่หลากหลายในการแก้ปัญหา วิธีการเรียนรู้ที่นักศึกษาลงมือแก้ปัญหาเป็นขั้นตอนทำให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตรทางคณิตศาสตร์ วิธีการเรียนรู้ที่นักศึกษานิยามตามวิธีการคิดของตนเองในการแก้ปัญหาได้มาซึ่งหลักการ สูตรทางคณิตศาสตร์

กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์การคิดขั้นสูงของ Tall (1991) ผลการวิจัยพบว่าการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาเกิดขึ้นจากการกระตุ้นการสอนของครูโดยใช้สถานการณ์ปัญหาปลายเปิด จำนวน 5 สถานการณ์โดยใช้การคิดขั้นสูงจากวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหาเพื่อสร้างแนวคิดที่สำคัญจากการแก้ปัญหา ดังนี้ 1) ขั้นการใช้วิธีการเดียว 2) ขั้นการใช้วิธีการที่หลากหลาย 3) ขั้นกระบวนการ 4) ขั้นการเกิดแนวคิด 5) ขั้นการนำแนวคิดที่ได้ไปใช้ต่อ และขั้นสุดท้ายคือ 6) ขั้นการขยายแนวคิด ซึ่งเป็นข้อค้นพบที่เกิดขึ้นจากการวิจัยครั้งนี้

การอภิปรายผลการวิจัย

นักศึกษาพัฒนาวิธีการคิดจากการคิดพื้นฐานไปสู่วิธีการคิดที่มีความสลับซับซ้อนมากขึ้น โดยเริ่มต้นจากวิธีการเดียวที่ใช้ในการแก้ปัญหาไปสู่วิธีการที่หลากหลาย เกิดแนวคิดใหม่ที่ได้จากการแก้ปัญหาและนักศึกษาสามารถขยายแนวคิด โดยการต่อยอดจากแนวคิดหรือวิธีการคิดที่มีมาก่อนหน้านี้ในการอธิบายหรือลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการ กฎ สูตร คณิตศาสตร์ สอดคล้องกับกรอบแนวคิดของ Tall (1991) ที่เสนอแนะว่าการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์จำเป็นต้องอาศัยพื้นฐาน การพัฒนาการคิดพื้นฐานไปสู่การสร้างองค์ความรู้ (process procedure, compression, precept) และแนวคิดของ Evitts (2004) ในกระบวนการเชื่อมโยงระหว่างขั้นตอนกระบวนการไปสู่ความคิดรวบยอด นักศึกษาไม่คุ้นเคยกับการทำโจทย์ที่มีลักษณะเป็นปัญหาปลายเปิด แต่เมื่อครูกระตุ้นทำให้นักศึกษาได้ช่วยกันระดมความคิดเพื่อหาวิธีการอื่น แสดงวิธีคิด คิดในใจ คิดอย่างเป็นระบบ ทำในรูปแบบตาราง วาดภาพ จนกระทั่งกำหนดตัวแปร แสดงว่านักศึกษาได้ดำเนินการกลั่นแนวคิดไปสู่ความคิดรวบยอดจากนั้นครูกระตุ้นให้นักศึกษาได้นำข้อมูลมาสร้างเนื้อหาใหม่

การวางแผนการแก้ปัญหานักศึกษาต้องพิจารณาว่าเคยพบปัญหานั้นมาก่อนหรือไม่ หรือเคยเห็นปัญหาที่เหมือน ๆ กันหรือคล้ายคลึงกันหรือไม่ รู้ทฤษฎีอะไรที่จะนำมาช่วยในการแก้ปัญหาหรือไม่ พิจารณาสถานที่โจทย์ถาม เปรียบเทียบกับปัญหาที่คุ้นเคยเหมือนกันหรือคล้ายคลึงกัน พิจารณาปัญหาที่คุ้นเคยนั้นมาช่วยในการแก้ปัญหาใหม่ได้หรือไม่ นำผลที่ได้จากปัญหาก่อน ๆ มาแก้ปัญหาใหม่ได้หรือไม่เป็นการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา สอดคล้องกับแนวคิดของ Polya (1973) กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่มีเนื้อหาสาระการหาคำตอบจะต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์ ความสามารถด้านการวิเคราะห์ การสังเคราะห์ และการตัดสินใจ การเรียนและการสอนเกี่ยวกับการแก้ปัญหาเป็นการฝึกให้นักศึกษา มีวิธีการที่ดีในการแก้ปัญหามากกว่าที่จะสอนให้นักศึกษารู้คำตอบของปัญหาโดยพยายามส่งเสริมให้นักศึกษาค้นพบรูปแบบหรือวิธีการแก้ปัญหาด้วยตนเอง การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในกระบวนการแก้ปัญหาที่ให้นักศึกษาเผชิญกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ พยายามเข้าสู่ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง ใช้สิ่งที่เรียนรู้มาก่อนหน้านี้เป็นการเรียนรู้ตามศักยภาพที่แท้จริงของนักศึกษา สอดคล้องกับแนวคิดของ Schoenfeld (1989) ที่กล่าวว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ช่วยให้นักศึกษายอมรับความท้าทายปัญหาจนกว่าจะต้องการแก้ปัญหาด้วยตัวเอง สร้างบรรยากาศที่สนับสนุนการแก้ปัญหาของนักศึกษาที่มีความพร้อมในการแก้ปัญหาที่ไม่คุ้นเคยไม่กลัวเมื่อติดขัดขณะแก้ปัญหามีโอกาสแก้ปัญหาในแนวทางของตนเองนอกจากนี้ผู้สอนต้องสอนวิธีการทำงาน นั่นคือ ให้นักศึกษาคิดกับสิ่งที่ทำการอภิปรายร่วมกับนักศึกษาเกี่ยวกับกระบวนการที่เกี่ยวข้องในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เพื่อให้นักศึกษาได้สะสมสิ่งที่ต้องใช้ในการแก้ปัญหาซึ่งนักศึกษาจะเรียนรู้ได้มากขึ้นทางด้านการเชื่อมต่อระหว่างเนื้อหาทางคณิตศาสตร์การขยับจากเนื้อหาหนึ่งไปอีกเนื้อหาหนึ่งเป็นการเปลี่ยนแปลงที่ยิ่งใหญ่อย่างมากสำหรับนักศึกษาตำแหน่งที่ทำให้นักศึกษาเกิดความยุ่งยากคือรอยต่อของแต่ละเนื้อหาเนื่องจากเป็นสิ่งที่มีความสลับซับซ้อนกับผู้เรียน (Tall, 2007) ภาพสะท้อนการวิจัยนี้มองว่าไม่ว่าจะเป็นการศึกษาในระดับพื้นฐานหรือระดับอุดมศึกษาการเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาทางคณิตศาสตร์จากเนื้อหาหนึ่งไปอีกเนื้อหาหนึ่งเป็นสิ่งที่ยุ่งยากอย่างมากของนักศึกษา

ข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้ มีข้อเสนอแนะ ดังต่อไปนี้

1. ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยครั้งต่อไป

1.1 ควรศึกษาเกี่ยวกับการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ในฐานะที่เป็นหน่วยการเรียนรู้ที่ผูกติดกับหลักสูตรซึ่งหลักสูตรมีอยู่ 3 ระดับ คือ หลักสูตรที่คาดหวัง (Plan Curriculum) หลักสูตรที่นำไปใช้ (Implemented Curriculum) และหลักสูตรที่นักเรียนได้เรียนรู้จริงๆ (Achievement Curriculum หรือ Taught Curriculum)

1.2 ควรศึกษาเกี่ยวกับการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์จากเอกสารประกอบการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์ว่าถ้าต้องการให้เป็นอย่างไร มีองค์ประกอบอะไรบ้าง

1.3 ควรศึกษาเกี่ยวกับการคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์โดยอาศัยจุดยืนทางด้านทฤษฎีอื่นมาเป็นกรอบแนวคิด ได้แก่ ทฤษฎีทางด้านสังคมวิทยา ทฤษฎีทางด้านวัฒนธรรม

2. ข้อเสนอแนะสำหรับนักวิจัย

2.1 นักวิจัยที่ทำการศึกษายภายใต้บริบทที่ใช้ชั้นเรียนที่เน้นการแก้ปัญหาต้องตระหนักถึงการทำงานอย่างต่อเนื่องในการวางแผนการจัดการเรียนรู้ การสังเกตชั้นเรียน และการสะท้อนผลบทเรียน

2.2 นักวิจัยที่ทำการศึกษายภายใต้บริบทที่ใช้ชั้นเรียนที่เน้นการแก้ปัญหาต้องเข้าไปอยู่ในพื้นที่การทำวิจัยและอธิบายปรากฏการณ์แบบคนใน

2.3 นักวิจัยที่ทำการศึกษายภายใต้บริบทที่ใช้ชั้นเรียนที่เน้นการแก้ปัญหาในการสังเกตวิธีการคิดของผู้เรียน ผู้สังเกตต้องไม่เข้าไปชี้แนะ อธิบาย และรบกวนวิธีการคิดของผู้เรียนในขณะที่ผู้เรียนกำลังคิดแก้ปัญหาหรือเผชิญกับความยุ่งยากในการแก้ปัญหา

3. ข้อเสนอแนะสำหรับการนำผลการวิจัยไปใช้

3.1 การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาภายใต้บริบทที่ใช้ชั้นเรียนที่เน้นการแก้ปัญหาต้องเตรียมความพร้อมเกี่ยวกับวิธีการเรียนรู้ของผู้เรียน คือ ผู้สอนต้องรู้ว่าชั้นเรียนหรือคาบเรียนก่อนหน้านี้ผู้เรียนมีเครื่องมือคือวิธีการคิดของผู้เรียนที่ได้มามีอะไรบ้าง

3.2 การคิดขั้นสูงทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาภายใต้บริบทของที่ใช้ชั้นเรียนที่เน้นการแก้ปัญหามีการวางแผนการจัดการเรียนรู้ การสังเกตชั้นเรียน การสะท้อนผลบทเรียนร่วมกันที่ต้องปฏิบัติอย่างเคร่งครัด

บรรณานุกรม

- กระทรวงศึกษาธิการ. (2542). **โครงการการศึกษาศักยภาพของเด็กไทยการสังเคราะห์รูปแบบการพัฒนาศักยภาพของเด็กไทยด้านทักษะการคิด**. กรุงเทพฯ: กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2551). **หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- กระทรวงศึกษาธิการ. (2553). **มาตรฐานการอุดมศึกษาและเกณฑ์มาตรฐานที่เกี่ยวข้อง**. พิมพ์ครั้งที่ 6. กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัด ภาพพิมพ์.
- เกรียงศักดิ์ เจริญวงศ์ศักดิ์. (2546). **การคิดเชิงวิเคราะห์** (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: ชัคเชสมิเดีย.
- กษมา วรวรรณ ณ อยุธยา. (2552). **Curriculum Issues 2009**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- คณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ. (2543). **ก้าวสู่สหัสวรรษใหม่ เด็กไทยเรียนรู้อย่างมีความสุข**. กรุงเทพฯ: วีทีซีคอมมิวนิเคชั่น.
- ชนาธิป พรกุล. (2543). **CAFS: A student-Centered Instructional Model**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ทิตนา แคมมณี. (2551). **ศาสตร์การสอน: องค์ความรู้เพื่อการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ**. พิมพ์ครั้งที่ 8. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- ทิตนา แคมมณีและคณะ. (2549). **การนำเสนอรูปแบบเสริมสร้างทักษะการคิดขั้นสูง ของนิสิตนักศึกษาครูระดับปริญญาตรีสำหรับหลักสูตรครุศึกษา**. กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (อัดสำเนา).
- บงกชรัตน์ สมานสินธุ์. (2551). **ผลการจัดการเรียนการสอนแบบอริยสัจ 4 ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและทักษะการเชื่อมโยงทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**. วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- เบญจมาศ เกตุแก้ว. (2548). **การพัฒนาทักษะการคิดขั้นสูงและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาฟิสิกส์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โดยใช้กระบวนการเรียนรู้แบบสืบเสาะหาความรู้**. วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น.
- ประเวศ วะสี. (2543). **ปฏิรูปการเรียนรู้ ผู้เรียนสำคัญที่สุด**. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: พิมพ์ดี.
- ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์. (2552). **เอกสารประกอบการบรรยาย เรื่อง Education and problem in Primary and Lower Secondary School in Thailand**. ขอนแก่น: สถาบันพัฒนาทรัพยากรมนุษย์มหาวิทยาลัยขอนแก่น. (ไม่ได้ตีพิมพ์).
- _____. (2550). **การเตรียมบริบทสำหรับการนำการพัฒนาวิชาชีพครูแบบญี่ปุ่นที่ “การศึกษาชั้นเรียน” (Lesson Study) มาใช้ในประเทศไทย**. เอกสารหลังการประชุมวิชาการระดับชาติเครือข่าย

- ญี่ปุ่นศึกษา** ครั้งที่ 1 เล่มที่ 1. กรุงเทพฯ : โครงการเครือข่ายญี่ปุ่นศึกษาในประเทศไทย คณะรัฐศาสตร์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์. 152-163.
- วินัย รอดจ่าย. (2552). *Curriculum Issues 2009*. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย.
- วัฒนาพร ระงับทุกข์. (2542). *แผนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง*. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ: แอล.ที.เพรส.
- ศรินธร วิหะสิรินันท์. (2544). *วิทยาการด้านการคิด*. กรุงเทพฯ: บริษัท เดอะมาสเตอร์กรุ๊ป แมเนจเม้นท์ จำกัด.
- สิริพร ทิพย์คง. (2545). *หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: บริษัทพัฒนาคุณภาพวิชาการ จำกัด.
- สุมาลี ชัยเจริญ. (2547). *เอกสารประกอบการเทคโนโลยีการศึกษาและการพัฒนาระบบการสอน*. ขอนแก่น: ภาควิชาเทคโนโลยีการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- สุวิทย์ มูลคำ. (2543). *Child center: Storyline method: การบูรณาการหลักสูตรและการเรียนการสอนโดยเน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง*. กรุงเทพฯ: ที.พี.พริน.
- สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา. (2550). *ยุทธศาสตร์การพัฒนาศักยภาพการศึกษาของกระทรวงศึกษาธิการ*. กรุงเทพฯ : สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา.
- อัมพร ม้าคนอง. (2547). *การพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์*. ใน พร้อมพรรณ อุดมสิน และ อัมพร ม้าคนอง (บรรณาธิการ). *ประมวลบทความหลักการและแนวทางการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์*. กรุงเทพฯ: บพิธการพิมพ์.
- สุวิทย์ มูลคำ. (2547). *ครบเครื่องเรื่องการคิด* (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัดภาพพิมพ์.
- อุษณีย์ โพธิ์สุขและคณะ. (2547). *สร้างสรรค์นักคิด: คู่มือการจัดการศึกษาสำหรับผู้ที่มีความสามารถพิเศษด้านทักษะการคิดระดับสูง*. กรุงเทพฯ: รัตนพรชัย.
- Anderson, L. W. and Krathwohl, D. R., et al. (2001) *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. Allyn & Bacon. Boston, MA (Pearson Education Group).
- Atherton, J.S. (2011). Learning and Teaching; Constructivism in learning. Retrieved August 16, 2011, from <http://www.learningandteaching.info/learning/constructivism.htm>
- Ausubel, D.P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View*. New York: Holt Rinehart and Winston.
- Baruque, L. B. & Melo, R. N. (2004). Learning theory and instructional design using learning objects. *Journal of Educational Multimedia and Hypermedia*, 13(4), 343-370.
- Becker, J.P. & Shimada, S. (1997). *The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Bigge, M.L. (1964). **Learning theories for teachers**. New York: Harper & Row.
- Boaler, J. (1997). **Experiencing school mathematics: Teaching styles, sex, and setting**. Philadelphia: Open University Press.
- Bruner, J. (1966). **Studies in cognitive growth: A collaboration at the center for Cognitive Studies**. New York: Willey & Sons.
- _____. (1974). **Toward a theory of instruction**. New York: Cambridge: Harvard University Press.
- Byrnes, J. P. (2001). **Minds, brains, and learning: Understanding the psychological and educational relevance of neuroscientific research**. The Guilford Press, New York.
- Coxford, F.A. (1995). **The Case for Connections**. In P.A. House (Ed.). *Connecting mathematics across the curriculum*, 1995 Yearbook. (pp.3-21). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- De Lange, J. (1996). Using and applying mathematics in education. In: A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde, (Eds.). **International handbook of mathematics education**. (pp.49-97). Boston: Kluwer Academic Publishers.
- Drexel, R.E. (1997). *Connecting common and Decimal Fraction Concepts: A Common Fraction Perspective*. Dissertation Abstracts International. 58(6): 2119-A.
- Eric, K.J. (2000). *Understanding Connections between Equations and Graphs*. **The Mathematics teacher**, 93(1), 48-53.
- Evitts, T. (2004). **Investigating the mathematics connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula**. Ph.D. Dissertation, Curriculum and Instruction, The Pennsylvania State University, U.S.A.
- Drexel, R.E. (1997). *Connecting common and Decimal Fraction Concepts: A Common Fraction Perspective*. Dissertation Abstracts International. 58(6): 2119-A.
- Eric, K.J. (2000). *Understanding Connections between Equations and Graphs*. **The Mathematics teacher**, 93(1), 48-53.
- Evitts, T. (2004). **Investigating the mathematics connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula**. Ph.D. Dissertation, Curriculum and Instruction, The Pennsylvania State University, U.S.A.
- Drexel, R.E. (1997). **Connecting common and Decimal Fraction Concepts: A Common Fraction Perspective**. Dissertation Abstracts International. 58(6): 2119-A.

- Drexel, R.E. (1997). Connecting common and Decimal Fraction Concepts: A Common Fraction Perspective. *Dissertation Abstracts International*. 58(6): 2119-A.
- Eric, K.J. (2000). Understanding Connections between Equations and Graphs. **The Mathematics teacher**, 93(1), 48-53.
- Evitts, T. (2004). **Investigating the mathematics connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula**. Ph.D. Dissertation, Curriculum and Instruction, The Pennsylvania State University, U.S.A.
- Fennema, E., & Romberg, T.A. (1999). **Classrooms that promote mathematical understanding**. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Fosnot, C.T. (1996). **Constructivism: Theory, perspectives, and practice**. New York: Teacher College, Columbia University.
- Gadanidis, G. (1994). Deconstructing Constructivism Mathematics Teacher. 87(2), 91-96.
- Gagne, R., Briggs, L. & Wager, W. (1992). *Principles of Instructional Design*. 4th Ed. FortWorth, TX: HBJ College Publishers.
- Ginsburg, J. (2008). Real-world connections in secondary mathematics teaching. **JOURNAL OF MATHEMATICS TEACHER EDUCATION**, 11,199-219.
- Gardner, H. (1999a). *Intelligence reframed: Multiple intelligences for the 21st century*. New York: Basic Books. Retrieved February 16, 2008, from <http://www.indiana.edu/intell/mitheory.shtml>
- Gredler, M.E., (1997). **Learning and instruction: Theory into practice**. Upper Saddle River: Prentice-Hall.
- Hergenhahn, B.R. and Olson, M.H. (1993). **An Introduction to theories of learning**. New Jersey: Prentice-Hall.
- Hodgson, T.R. (1995). Connections as problem-solving tool. In P.A. House (Ed.). **Connecting mathematics across the curriculum, 1995 Yearbook**. (pp. 13-21). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Huitt, W. (2001). Humanism and open education. **Educational Psychology Interactive**. Valdosta, GA: Valdosta State University. Retrieved September 11, 2007, from <http://chiron.valdosta.edu/whuitt/col/affsys/humed.html>
- _____ & Hummel, J. (2003). Piaget's theory of cognitive development. **Educational Psychology Interactive**. Valdosta, GA: Valdosta State University. Retrieved January 11, 2006, from <http://chiron.valdosta.edu/whuitt/col/cogsys/piaget.html>

- Inprasitha, M. (1997). Problem Solving: A basis to reform mathematics instruction, Reprinted from the Journal of the National Research Council of Thailand Vol.29 No.2, July-December 1997, Khon Kaen. **Khon Kaen University**.
- _____. (2010). One Feature of adaptive lesson study in Thailand: Designing Learning Unit. In A. Kuroda et al. (Eds.). **Proceeding of the 45th Korean National Meeting of Mathematics Education Dongkook University, Gyeongju, Korea.** (pp. 193-206).
- Isoda, M., (1996). **Problem-Solving Approach with Diverse Ideas and Dialectic Discussions: Conflict and appreciation based on the conceptual and procedural knowledge.** [n.p.]: CRICED and University of Tsukuba.
- _____. (2010). Japanese Theories for Lesson Study in Mathematics Education: A case of problem solving approach. In S. Yoshinori & S. Yasuhiro & H. Keiko (Eds.), **Proceedings the 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education. Group for the ICMI-EARCOME 5 (Vol. 1, pp. 176-190).** Tokyo, Japan.
- _____. (2007). Where did Lesson Study Begin, and How Far Has It Come? In M. Isoda, M. Stephen, Y. Ohara, & T. Miyakawa (Eds.). **Japanese Lesson Study in Mathematics: Its impact, diversity and potential for educational improvement.**(pp.5-11). Singapore: World Scientific Publishing.
- _____, Nobuchi, M. & Morita, M. (2009). **Design Problem Solving Class with basic Standrands given by check sheets,** Japan: Meijitosyo-publisher.
- Ito-Hino, K. (1995). Students' reasoning and mathematical Connections in the Japanese Classroom. In P.A. House (Ed.), **Connecting mathematics across the curriculum, 1995 Yearbook** (pp.233-245). Reston, VA: NCTM.
- Kennedy, L.M.,& Tipps, S. (1994). **Guiding Children's Learning of Mathematics.** 7th ed. Belmont, California: Wadsworth.
- Klausmeier, H.J., (1985). **Educational psychology.** New York: Harper & Row.
- Lawson, Michael J. & Chinnappan, Mohan. (2000, January). Knowledge Connectedness in Geometry Problem Solving, **Journal for Research in Mathematics Education.**
- Leikin, R., & Levav- Waynberg, A., (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. **Educational Studies in Mathematics,** 66, 349-371.

- Lynch, D., (2010). Application of online discussion and cooperative learning strategies to online and blended college courses. *Collegn Student Journal*, 44(3), 777-784. Retrieved July 1, 2009, from http://en.wikipedia.org/wiki/Cooperative_learning
- Mayer, R.E. (1996). *Designing Instruction for Constructivist Learning. Instructional Design Theories and Models: A New Paradigm of Instructional Theory Volume II*. Newjersy: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mousley, J., (2004). An aspect of mathematics with understanding: the notion of connected know. *Proceeding of the 28th Conference of the International Vol. 3* (pp. 377-384).
- Nance, R.D. (1970). G. Stanley Hall and John B. Watson as child psychologists. ***Journal of the Behavioral Science***. 6(4), 303-316.
- National Council of Teachers of Mathematics.(1980). **An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics for the 1980s**. Reston, VA: NCTM.
- _____. (1989). **Curriculum and evaluation Standards for School Mathematics**. Reston, VA: NCTM.
- _____. (1991). **Professional Standards for Teaching Mathematics**. Reston, VA: NCTM.
- _____. (2000). **Principles and Standards for school Mathematics**. Reston, VA: NCTM.
- National Research Council .(1990). **Reshaping school mathematics: A philosophy and framework for curriculum**. Washington: NRC.
- Noddings, N., (1990). Constructivism in Mathematics Education. In R.B. Davis, C.A. Maher, and N. Noddings (Eds.). *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education Monograph Series, No. 4*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Nohda, N., (1983). **A Study of “Open-Approach” method in school mathematics teaching focusing on mathematical problem solving activity**. Tokyo: Touyoukan.
- Noss, R., Healy, L. and Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. **Educational Studies in Mathematics**, 33, 203-233.
- Okubo, K. (2007). Mathematical Thinking and the Acquisition of Fundamentals and Basics. In Progress report of the APEC-project: Collaborative studies on innovations for teaching and teaching mathematics in different cultures (II)- Lesson study focusing on mathematical thinking. [n.p.]: **CRME Khon Kaen University, CRICED and University of Tsukuba**. (pp. 129-140).

- Perkins, D. N., Tishman, S., & Goodrich, H. (1994). **Key to Thinking**. Johannesburg, South Africa: UPTTRAIL Trust.
- Polya, G. (1973). **How to solve it. A new aspect of mathematical method**. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Sawada, T. (1997). Developing lesson plans. In J. P. Becker & S. Shimada (Eds.), **The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics** (pp.1-9). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Schoenfeld, A.H. (1985). **Mathematical problem solving**. Orlando, FL: Academic Press.
- _____. (1989). **Teaching Mathematics in Elementary School**. New York: Ronald Press.
- Silver, E. A., Ghouseini, H., Gosen, D., Charalambous, C., & Font Strawhun, B.T., (2005). Moving from rhetoric to praxis: Issues faced by teachers in having students consider multiple solutions for problems in the mathematics classroom. **Journal of mathematical Behavior**, 24, 287-301.
- Shimizu, S. (November, 2010). Mathematical Activity, Placement Mathematical Activity to the textbooks. In APEC-Chiang Mai International Conference IV: Innovation of mathematics Teaching and Learning through Lesson study – Connection between Assessment and subject, CRME Khon Kaen University, Teikyo University.
- Steen, L,. (1997). Preface: The new literacy. In L. Steen (Ed.). **Why numbers count: Quantitative literacy for tomorrow's America** (pp.xv-xxviii). New York: College Entrance Examination Board.
- _____. & Forman, S,. (1995). Mathematics for work and life. In Carl, M. (Ed.), **Prospectus for school mathematics**.(pp.219-241). Reston, VA: NCTM.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). **The Teaching Gap: Best Ideas from the world's Teachers for Improving Education in the Classroom**. New York: The Free Press.
- Takahashi, A., (2006). Characteristics of Japanese Mathematics Lessons. Retrieved October 4, 2010, from http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/sympo_2006/takahashi.pdf
- _____. (2007). Planning a lesson for students to develop mathematical thinking through problem solving. In Progress report of the APEC-project: Collaborative studies on Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson study – Lesson Study focusing on mathematical thinking, CRME Khon Kaen University, CRICED and University of Tsukuba. (pp. 55-65).
- Tall, D. O. (1991). **Advanced Mathematical Thinking**. Kluwer Academic Publishers.

- _____. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In L. Meira & D. Carraher, (Eds.), **Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education** (pp. 61-75). Recife, Brazil.
- Tall, D. (August, 2007). Setting Lesson Study in a long term framework for learning. In Progress report of the APEC-project: Collaborative studies on Innovation of Classroom Teaching and Learning through Lesson study – Lesson Study focusing on mathematical thinking, CRME Khon Kaen University, CRICED and University of Tsukuba. (pp. 68-92).
- Thornton, C.A. and Wilson, S.J., (1993). Classroom Organization and Models of Instruction. In R. J. Jensen (Ed.). **Research Idea for the Classroom: Early Childhood Mathematics**. (pp.269-293). New York: Macmillan.
- Tolman, E.C., (1992). A new formula for behaviorism. *Psychological Review*, 29, 44-53. Retrieved October 1, 2010, from <http://psychclassics.yorku.ca/Tolman/formular.html>
- von Glasersfeld, E. (1991). **Constructivism in education**. New York: Pergamon Press.
- _____. (1996). Aspects of Radical Constructivism and Its Educational Recommendations. In L.P. Steffe (Ed.), *Theories of Mathematical Learning* (pp. 307-314). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Wertheimer, M.(1993). A source book of Gestalt psychology (pp.71-88). London: Routledge & Kegan Paul. Retrieved June 15, 2009, from <http://psy.ed.asu.edu/classics/Wertheimer/Forms/forms.html>
- Wood, E.F. (1993). Making the connections: The mathematical understandings of prospective secondary mathematics teachers [Abstract]. Doctoral Dissertation, Michigan State University. In **Dissertation Abstracts International**. p.307A.

ประวัติผู้เขียน (ผู้ร่วมวิจัยคนที่ 2)

ชื่อ ชื่อสกุล นางสาวณานิน กองทิพย์
ที่อยู่ 71/45 ซอยลาดพร้าว 31 ถนนลาดพร้าว แขวงจันทระเกษม เขตจตุจักร
กรุงเทพมหานคร

ประวัติการศึกษา

- 2536 ครุศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์-วัดผล) วิทยาลัยครูพระนครศรีอยุธยา
- 2544 ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
- 2555 ปรัชญาดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

ประวัติการทำงาน

2539 – ปัจจุบัน อาจารย์คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ประวัติการรับทุนการศึกษา/ทุนอื่น ๆ

1. โครงการทุนเครือข่ายเชิงกลยุทธ์เพื่อการผลิตและพัฒนาอาจารย์ในสถาบันอุดมศึกษา สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา
2. ทุนอุดหนุนและส่งเสริมการทำวิทยานิพนธ์ จากบัณฑิต วิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น
3. ทุนเผยแพร่ผลงานทางวิชาการ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น
4. ทุนสนับสนุนค่าธรรมเนียมการศึกษา จากศูนย์วิจัยคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

ประวัติการเข้าร่วมและนำเสนอผลงานวิจัยในการประชุมทางวิชาการระดับชาติและนานาชาติ

1. เข้าร่วมนำเสนอผลงานทางวิชาการแบบบรรยายในการประชุม PME 33 ประเทศกรีซ วันที่ 19 – 24 กรกฎาคม 2552 และการประชุม PME 35 ประเทศตุรกี วันที่ 10 – 15 กรกฎาคม 2554
2. เข้าร่วมนำเสนอผลงานทางวิชาการแบบบรรยายในการประชุม EARCOME 5 ประเทศญี่ปุ่น วันที่ 18 – 22 สิงหาคม 2553
3. เข้าร่วมประชุมทางวิชาการ ICER 2008 วันที่ 11 – 12 กันยายน 2552 ICER 2010 วันที่ 10 – 11 กันยายน 2553 และเข้าร่วมนำเสนอผลงานแบบบรรยาย ICER 2011 วันที่ 9-10 กันยายน 2554
4. เข้าร่วมนำเสนอผลงานทางวิชาการแบบบรรยายในการประชุม ICMU-MA 2011 ประเทศไทย วันที่ 17 – 19 ธันวาคม 2554

ประวัตินักวิจัยที่ปรึกษา

ชื่อ ชื่อสกุล	นายไมตรี อินทร์ประสิทธิ์
สถานที่ทำงาน	คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น จังหวัด ขอนแก่น 40002
ประวัติการศึกษา	กศ.บ. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร พ.ศ.2525 น.บ. (นิติศาสตร์) มหาวิทยาลัยรามคำแหง พ.ศ.2529 ค.ม. (การศึกษาคณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย พ.ศ. 2530 Dip in Mathematics Education Aichi University of Education, Japan พ.ศ. 2533 M.Ed. (Mathematics Education) University of Tsukuba, Japan พ.ศ.2539 Ph.D. (Mathematics Education) University of Tsukuba, Japan พ.ศ.2544
ประสบการณ์ที่เกี่ยวข้องกับการบริหารงานวิจัยทั้งภายในและภายนอกประเทศ	
หัวหน้าโครงการวิจัย :	
1) โครงการยกระดับคุณภาพชั้นเรียนคณิตศาสตร์โดยใช้นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) และวิธีการแบบเปิด (Open Approach) 2) โครงการวิจัยและพัฒนาเพื่อการจัดตั้งคลัสเตอร์ในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ 3) โครงการวิจัยรูปแบบการพัฒนาครูคณิตศาสตร์พันธุ์ใหม่ (หลักสูตร 5 ปี) 4) การพัฒนาวิชาชีพครูคณิตศาสตร์โดยใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด 5) โครงการพัฒนารูปแบบการบริหารงานวิชาการในสถานศึกษาที่ใช้นวัตกรรมการศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) และวิธีการแบบเปิด (Open Approach)	