



รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ

การเหินย่นำการเกิดควมไม่เสถียรของวงโคจรเชิงรัศมี (ROI) โดย
การกระเพื่อมของความหนาแน่นในระดับมหภาคและจุลภาค

โดย

ถิรวุฒิ วรกิจพูนผล

22 ธันวาคม 2560

สัญญาเลขที่ TGR5880036

รายงานวิจัยฉบับสมบูรณ์

โครงการ

การเหี่ยวนำการเกิดความไม่เสถียรของวงโคจรเชิงรัศมี (ROI) โดย
การกระเพื่อมของความหนาแน่นในระดับมหภาคและจุลภาค

ธีรวุฒิ วรกิจพูนผล

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ

สนับสนุนโดยสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัยและ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ

(ความเห็นในรายงานนี้เป็นของผู้วิจัย
สกว.และต้นสังกัดไม่จำเป็นต้องเห็นด้วยเสมอไป)

Abstract

Project Code : TRG5880036

Project Title : The induction of radial orbit instability (ROI) by macroscopic and microscopic initial density fluctuations

Investigator : Tirawut Worakitpoonpon

Rajamangala University of Technology Suvarnabhumi

E-mail Address : cosmo1key@yahoo.com

Project Period : 2 years

Galaxies exist in various shapes, each of which has been speculated to emerge from different process. While the observation is actually limited to their present kinematics, the numerical simulations allow us to explore wider topics in astrophysics of galaxy formation and evolution. In this study we present the results of numerical N-body simulations addressing to the shape evolution of elliptical and spiral structures, along with the theoretical prediction and explanation. Our results demonstrate that we are able to produce ellipsoidal and spiral structures and are also able to explain them at a certain degree. For ellipsoidal configuration the underlying process is clearly the Radial orbit instability (ROI), which is not only sensitive to the degree of velocity dispersion but also the particle number. About spiral structure we are able to capture the dependence of spiral arms while we vary the physical parameters of initial conditions. Some discussion for further improvements of initial conditions in order to reconcile better with observations are also provided.

Keywords : Galaxy formation; Galaxy evolution; N-body simulations; Gravitation.

บทคัดย่อ

รหัสโครงการ : TRG5880036

ชื่อโครงการ : การเหนี่ยวนำการเกิดความไม่เสถียรของวงโคจรเชิงรัศมี (ROI) โดยการกระเพื่อมของความหนาแน่นในระดับมหภาคและจุลภาค

ชื่อนักวิจัย : ธีรวุฒิ วรกิจพูนผล

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ

E-mail Address : cosmo1key@yahoo.com

ระยะเวลาโครงการ : 2 ปี

ดารารจักรสามารถมีรูปร่างได้หลากหลายโดยในแต่ละรูปร่างเชื่อว่าเกิดจากวิธีที่ต่างกัน ในการสังเกตการณ์ ในทางฟิสิกส์ดาราศาสตร์เราสามารถสังเกตได้แค่พลวัต ณ เวลาที่สังเกต ในทางกลับกันการจำลองปรากฏการณ์ด้วยคอมพิวเตอร์สามารถทำให้เข้าใจวิวัฒนาการได้ตลอดช่วงระยะเวลาที่ต้องการ ในโครงการวิจัยนี้ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิจัยจากการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ของการก่อกำเนิดและวิวัฒนาการของโครงสร้างทรงรีและก้นหอยรวมไปถึงการทำนายและอธิบายผลที่เกิดขึ้นในเชิงทฤษฎี ผลการวิจัยพบว่าจากการจำลองเราสามารถสร้างระบบรูปทรงรีและก้นหอยรวมถึงสามารถอธิบายการเกิดในระดับหนึ่ง สำหรับทรงรีกระบวนการที่เกี่ยวข้องคือความไม่เสถียรของวงโคจรในแนวรัศมี (ROI) จากการศึกษาพบว่าไม่เพียงแต่การกระจายของความเร็วในเงื่อนไขเริ่มต้นที่จะเป็นตัวกำหนดการเกิดความไม่เสถียรเท่านั้น จำนวนอนุภาคในระบบยังเป็นตัวแปรสำคัญในการกำหนดเช่นกัน สำหรับโครงสร้างก้นหอยที่เกิดจากแกนเกลียว การศึกษาพบว่าแกนเกลียวที่เกิดขึ้นยังขึ้นกับตัวแปรทางกายภาพของระบบ นอกจากนี้โครงการวิจัยนี้ยังได้เสนอแนะแนวทางในการปรับเปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มต้นเพื่อให้สอดคล้องกับการสังเกตการณ์มากยิ่งขึ้น

คำหลัก : การก่อกำเนิดดารจักร; วิวัฒนาการดารจักร; การจำลองระบบอนุภาค N ตัว; ความโน้มถ่วง.

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
Abstract	A
บทคัดย่อ	B
สารบัญ	C
สารบัญรูป	D
สารบัญตาราง	F
1. บทนำ	1
2. วัตถุประสงค์	3
3. วิธีศึกษา	3
4. ผลการศึกษา	4
4.1 การก่อกำเนิดรูปร่างทรงรี	4
4.1.1 ที่มาของปัญหา	4
4.1.2 เงื่อนไขเริ่มต้น ตัวแปรการจำลอง และตัวแปรที่ใช้วัด	5
4.1.3 ผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์	10
4.1.4 อภิปรายผล	27
4.2 การก่อกำเนิดเคสเกลียว	28
4.2.1 ที่มาของปัญหา	28
4.2.2 กรอบทฤษฎี	29
4.2.3 การเตรียมระบบ หน่วย และตัวแปร	30
4.2.4 ผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์	32
4.2.5 อภิปรายผลการศึกษา	40
5. สรุปผลการศึกษา	41
6. เอกสารอ้างอิง	42
Output ที่ได้	45
ภาคผนวก	I
เอกสารแนบ 1	II
เอกสารแนบ 2	VIII

สารบัญรูป

	หน้า
รูปที่ 1 : ลำดับของฮับเบิล	1
รูปที่ 2 : เงื่อนไขเริ่มต้นแบบ Poissonian (ซ้าย) และแบบ Lattice (ขวา) สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นที่มีจำนวนอนุภาค 128,000 ตัว และ b_0 มีค่า 0.1	5
รูปที่ 3 : อัตราส่วนพลังงานรวม ณ เวลาใดๆ ต่อพลังงานรวมเริ่มต้นตลอดช่วงวิวัฒนาการของระบบที่มี $b_0=0.025$ และ $N=128,000$ กรณี Poissonian	7
รูปที่ 4 : รูปร่างของระบบบนระนาบใดๆ สำหรับระบบที่มี $b_0=0.0025$ และ $N=128,000$ กรณี Poissonian ลำดับของเวลาไล่จากซ้ายไปขวาและบนลงล่าง	9
รูปที่ 5 : รูปร่างของระบบบนระนาบใดๆ สำหรับระบบที่มี $b_0=0.0025$ และ $N=128,000$ กรณี Lattice ลำดับของเวลาไล่จากซ้ายไปขวาและบนลงล่าง	10
รูปที่ 6 : อัตราส่วนไวเรียลของระบบทั้งหมดและระบบที่ถูกยึดไว้ (ซ้าย) และอัตราส่วนของมวลที่ถูกคายออกมาจากระบบที่เวลาใดๆ (ขวา)	11
รูปที่ 7 : ค่าเฉลี่ยของ l_{80} ที่ b_0 ค่าต่างๆ สำหรับ $N=128,000$ ของเงื่อนไขเริ่มต้นแบบ Poissonian และ Lattice โดยเฉลี่ยจากทั้งหมด 5 ตัวอย่างของแต่ละค่า b_0 ค่าแถบความคลาดเคลื่อนคำนวณจากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ย	13
รูปที่ 8 : ค่า l_{80} ของในแต่ละตัวอย่าง (5 ตัวอย่างต่อ b_0 ในแต่ละกรณี Poissonian และ Lattice) ในช่วงเริ่มต้นของวิวัฒนาการ ตัวอย่างทั้งหมดประกอบด้วย 128,000 อนุภาค	14
รูปที่ 9 : ค่า l_{80} ที่ b_0 และ N ต่างๆ โดยเฉลี่ยจากจำนวนตัวอย่างทั้งหมด 70 40 30 30 6 4 2 และ 1 สำหรับ 1,000 2,000 4,000 8,000 16,000 32,000 64,000 และ 128,000 อนุภาค ตามลำดับ สำหรับกรณี Poissonian ที่เวลาต่างกัน 3 ค่า แถบความคลาดเคลื่อนคือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ย ..	15
รูปที่ 10 : วิวัฒนาการของ l_{80} ที่ b_0 ที่ต่างกัน 3 ค่า สำหรับจำนวนอนุภาคต่างๆ โดยเฉลี่ยด้วยจำนวนตัวอย่างเท่ากับรูปที่ 9	16
รูปที่ 11 : วิวัฒนาการของ l_{80} ในแต่ละตัวอย่างสำหรับ $N=16,000$ และ $b_0=0.1$ ในกรณี Poissonian ทั้งหมด 5 ตัวอย่างที่ต่างกัน	17
รูปที่ 12 : วิวัฒนาการของ l_{80} ในแต่ละตัวอย่างสำหรับ $N=32,000$ และ $b_0=0.1$ ในกรณี Poissonian ทั้งหมด 4 ตัวอย่างที่ต่างกัน	18
รูปที่ 13 : วิวัฒนาการของ l_{80} ในแต่ละตัวอย่างสำหรับ $N=16,000$ และ $b_0=0.025$ ในกรณี Poissonian ทั้งหมด 6 ตัวอย่างที่ต่างกัน	19

สารบัญรูป(ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 14 : วิวัฒนาการของ l_{80} ในแต่ละตัวอย่างสำหรับ $N=16,000$ และ $b_0=0.025$ ในกรณี Lattice ทั้งหมด 10 ตัวอย่างที่ต่างกัน	20
รูปที่ 15 : ค่าเฉลี่ยระหว่างตัวอย่างของ l_{80} สำหรับ N ต่างๆ ในกรณี $b_0=0.125$ และมีการกระจายตัวแบบ Poissonian	21
รูปที่ 16 : ค่าเฉลี่ยระหว่างตัวอย่างของ l_{100} สำหรับ N ต่างๆ ในกรณี $b_0=0.075$ และมีการกระจายตัวแบบ Poissonian สำหรับ วิวัฒนาการตามเวลา (บน) และค่าที่เวลาหลังเข้าสู่สมดุลไวเรียลที่เป็นฟังก์ชันกับ N (ล่าง)	22
รูปที่ 17 : (บน) ค่าเฉลี่ยของวิวัฒนาการตามเวลาของ l_{90} สำหรับ N ต่างๆ (ล่าง) วิวัฒนาการตามเวลาของ l สำหรับมวลที่ถูกยึดเหนี่ยวตั้งแต่ 60 จนถึง 100 เปอร์เซนต์ สำหรับ $N=128,000$ หนึ่งตัวอย่าง โดยทั้ง 2 ภาพเป็นกรณี Poissonian และมี $b_0=0.075$	23
รูปที่ 18 : ค่าเฉลี่ยของ (บน) อัตราส่วนของมวลที่คายออกมา หรือ f_p ของระบบโครงสร้าง Poissonian ที่มี $b_0=0.1$ ในแต่ละจำนวนอนุภาค (ล่าง) วิวัฒนาการของ f_p ที่จำนวนอนุภาคใดๆ	25
รูปที่ 19 : ค่าเฉลี่ยของโมเมนต์เชิงมุมจำเพาะรอบจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาคที่ถูกยึดเหนี่ยวของระบบโครงสร้าง Poissonian ที่มี $b_0=0.1$ ในแต่ละจำนวนอนุภาคที่เวลาต่างๆ พร้อมแถบความคลาดเคลื่อน	26
รูปที่ 20 : แผนภูมิการกระจายของโคไซน์ทิศทางของความเร็วสัมพัทธ์ใน 1 ตัวอย่างของกรณี $b_0=0.05$ และ $N=32,000$	27
รูปที่ 21 : รูปร่างของจานวงกลมที่มี $b_0=0.2$ ที่เวลาต่างๆ วิวัฒนาการไล่จากซ้ายไปขวาและบนลงล่าง หนึ่งหน่วยเวลามีระยะประมาณ 11 ลำดับภาพ	32
รูปที่ 22 : ความหนาแน่นพื้นผิวของโครงสร้างในรูปแบบแผนที่ความร้อนจากจานวงกลมที่มี $b_0=0.2$ ที่เวลาสุดท้าย	34
รูปที่ 23 : รูปร่างของจานวงกลมที่มี $b_0=0.1$ ที่เวลาต่างๆ	35
รูปที่ 24 : รูปร่างของจานวงรีบางที่มี $b_0=0.1$ และ $e_0=0.1$ ที่เวลาต่างๆ	36
รูปที่ 25 : รูปร่างสุดท้ายของแขนเกลียวสำหรับจานวงรีบางที่มี $b_0=0.2$ และ $e_0=0.1$ พร้อมแขนเกลียวที่ได้จากฟังก์ชันลอการิทึมแบบเกลียวและมุมพิทช์ที่ได้	37
รูปที่ 26 : วิวัฒนาการของมุมพิทช์ในกรณีจานบางที่มี $b_0=0.3$ และ $e_0=0.1$ หน่วยเวลาอธิบายในเนื้อหา	38
รูปที่ 27 : รูปร่างสุดท้ายของแขนเกลียวสำหรับจานวงรีหนาที่มี $b_0=0.3$ และ $e_0=0.1$	39
รูปที่ 28 : รูปร่างระหว่างวิวัฒนาการในด้านข้างสำหรับจานวงรีหนาที่มี $b_0=0.3$ และ $e_0=0.1$	39

สารบัญตาราง

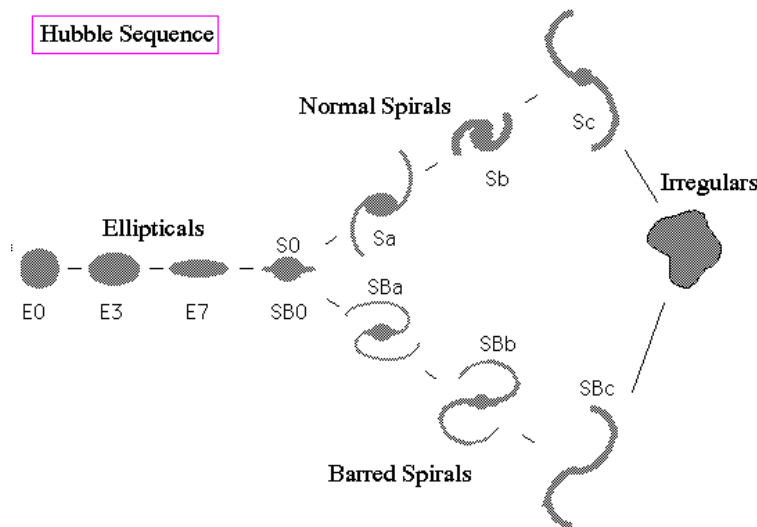
	หน้า
ตารางที่ 1 : รายละเอียดเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบทรงกลมแบบ Poissonian ที่ศึกษา โดยข้อมูลเป็นจำนวนตัวอย่างที่ใช้ในแต่ละคู่ตัวแปร	6
ตารางที่ 2 : รายละเอียดเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบทรงกลมแบบ Lattice ที่ศึกษา โดยข้อมูลเป็นจำนวนตัวอย่างที่ใช้ในแต่ละคู่ตัวแปร	6
ตารางที่ 3 : รายละเอียดเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบจานที่ศึกษาโดยแยกเป็นกลุ่ม	31

1. บทนำ

ในเอกภพประกอบไปด้วยเทหวัตถุหลายประเภท โดยหนึ่งในวัตถุที่นักดาราศาสตร์ได้ทำการศึกษาอย่างกว้างขวาง คือ แกแล็กซี (galaxy) หรือ ดาราจักร โดยจากการแบ่งประเภทโดย เอ็ดวิน ฮับเบิล (Edwin Hubble) เราสามารถจำแนกประเภทของแกแล็กซีได้เป็นดังนี้

1. ดาราจักรรี (Elliptical galaxy)
2. ดาราจักรก้นหอย (Spiral galaxy)
3. ดาราจักรไร้รูปทรง (Irregular galaxy)

ซึ่งการแบ่งนี้เรียกว่า ลำดับของฮับเบิล (Hubble's sequence) [1] ซึ่งรูปร่างที่เป็นแบบมาตรฐานคือ 2 ประเภทแรก และประเภทที่ 3 สามารถมีรูปร่างได้ไม่จำกัด โดยลำดับของฮับเบิลพร้อมกับรูปร่างแบบต่างๆ แสดงในรูปที่ 1



รูปที่ 1 : ลำดับของฮับเบิล (ที่มา <http://abyss.uoregon.edu/~js/ast123/lectures/lec11.html>)

นอกจากรูปร่างที่ต่างกันแล้วยังพบว่าคุณลักษณะทางกายภาพต่างๆ ของดาราจักรแต่ละประเภทยังต่างกันอย่างเห็นได้ชัด โดยดาราจักรรีจะมีฟังก์ชันความสว่างที่เหมือนกันเกือบทุกอันซึ่งเป็นไปตามกฎของ de Vaucouleur [2] ที่มีความสว่างลดลงตามรัศมี โดยดาราจักรรีสามารถมีความมีปรากฏที่สังเกตการณ์ได้ตั้งแต่ 0 จนถึง 0.7 (ซึ่งระบุได้ด้วยสัญลักษณ์ E0 ถึง E7) โดยดาราจักรรีมีแนวโน้มที่จะประกอบไปด้วยดาวที่มีอายุมากซึ่งมีสีไปทางสีส้มหรือแดง และการเคลื่อนที่ของดาวในระบบจะเป็นการเคลื่อนที่แบบสุ่ม

ในการก่อกำเนิดดาราจักรรีเชื่อว่ามีทฤษฎีที่เป็นไปได้อยู่ 2 ทฤษฎี คือ วิวัฒนาการเป็นทรงรีจากระบบที่มีความเร็วอนุภาคเป็นจำนวนมาก โดยสามารถกระทำได้ 2 วิธี ได้แก่ 1. สร้างระบบที่อยู่นอกสมดุลและยุบตัวอย่างรุนแรง ซึ่งการสร้างระบบแบบนี้ ในระหว่างที่มีการยุบตัว ความเร็วในแนวรัศมีจะเพิ่มขึ้น

อย่างมากจากแรงดึงดูดศูนย์กลางทำให้การกระจายของอนุภาคในแต่ละทิศทางไม่สม่ำเสมอจึงเกิดการวิวัฒนาการเข้าสู่สมดุลที่เป็นทรงรีขึ้น ซึ่งได้พิสูจน์โดยการจำลองทางคอมพิวเตอร์ในหลายงานวิจัย [3-8] และ 2. ระบบในสมดุลที่มีเสถียรที่ประกอบด้วยอนุภาคที่มีความเร็วในแนวรัศมีเป็นจำนวนมาก ข้อแตกต่างของเงื่อนไขนี้จากวิธีที่ 1 คือ วิวัฒนาการรูปร่างจะเกิดขึ้นโดยอยู่ในสมดุลตลอดเวลา ความไม่เสถียรนี้เรียกว่า Radial orbit instability หรือ ROI [9] โดยการจำลองทางคอมพิวเตอร์โดยสร้างเงื่อนไขเริ่มต้นให้เป็นระบบที่สมดุลที่มีระดับความไม่ไอโซโทรปิกของความเร็วดังกล่าว ก็ได้พิสูจน์ถึงทฤษฎีนี้เช่นกัน [10-12] ทฤษฎีการก่อกำเนิดของดาราจักรอีกอันหนึ่งคือการชนกันของดาราจักรมากกว่า 2 ซึ่งผลของการชนและหลอมรวมกันของดาราจักรตั้งแต่ 2 อันขึ้นไปอาจทำให้เกิดดาราจักรผลลัพธ์ที่มีความรีได้เช่นกัน [13] นอกจากนี้ การสร้างฟังก์ชันความสว่างจากฟังก์ชันความหนาแน่นเพื่อที่จะให้ผลสอดคล้องกับกฎของ de Vaucouleurs ก็มีรายงานในงานวิจัยในอดีต [14]

สำหรับดาราจักรก้นหอยจะมีความหลากหลายกว่าดาราจักรรีเนื่องจากแขนเกลียวที่เกิดขึ้นสามารถมีได้หลายประเภท โดยในดาราจักรก้นหอยเองก็สามารถแบ่งเป็นประเภทย่อยหลายประเภทได้เช่นกัน ได้แก่ แบบ grand-design ที่มีแขนเกลียวที่เด่นชัด 2 แขน แบบ flocculent ที่ประกอบไปด้วยแขนบางมากกว่า 2 แขน โดยทฤษฎีที่ได้รับการยอมรับในการเกิดแขนเกลียว สามารถแบ่งได้เป็น 2 แบบ คือ การเกิดแขนเกลียวด้วยตัวเอง โดยทฤษฎีที่สำคัญได้แก่ทฤษฎีคลื่นความหนาแน่น (Density wave) [15] ซึ่งมองว่าแขนเกลียวเป็นการรบกวนรูปแบบหนึ่งที่มีรูปร่างเป็นลักษณะดังกล่าว อีกสมมุติฐานหนึ่งคือการม้วนตัวของสิ่งรบกวนที่ก่อตัวขึ้นจากความไม่เสถียรจากการหมุนที่มีความเร็วต่างกันของพื้นหลัง [16-17] โดยได้มีการพิสูจน์ด้วยการจำลองทางคอมพิวเตอร์ของระบบที่มีการเย็นตัวลงทำให้มวลหนาแน่นขึ้นและทำให้สามารถโคจรต่อเนื่องโดยฉากหลังและเกิดเป็นแขนเกลียว [18-20] นอกจากนี้ การเกิดแขนเกลียวยังสามารถเป็นผลจากการโคจรใกล้กันของดาราจักรมากกว่า 2 อัน ซึ่งแรงดึงดูดจะทำให้เกิดกระแสมวลออกจาก 2 ฝ่าย [21] ซึ่งทฤษฎีนี้ทำให้การจำลองทางคอมพิวเตอร์มีความหลากหลายมากขึ้นเนื่องจากสามารถแปรเปลี่ยนตัวแปรวงโคจรได้หลากหลายทำให้ได้ผลลัพธ์เป็นดาราจักรที่มีแขนเกลียวที่หลากหลายหรือแม้กระทั่งดาราจักรไร้รูปร่างต่างๆ ที่มีลักษณะคล้ายกับที่สังเกตได้ [22-25]

ในทางกลศาสตร์สถิติเชื่อว่าดาราจักรที่สังเกตได้อยู่ในสถานะกึ่งสถิตย หรือ Quasi-stationary state ซึ่งเป็นผลจากการเข้าสู่สถานะดังกล่าวจากวิวัฒนาการอย่างรุนแรง หรือ Violent relaxation [26] ที่มีระยะเวลาที่สั้นกว่าอายุของเอกภพมากโดยผ่านเงื่อนไขแบบไม่มีการชน หรือ Collisionless regime [27] นั่นคือ อนุภาคแต่ละตัวอยู่ภายใต้สนามเฉลี่ยของระบบ นอกจากนี้ หากระบบดังกล่าวไม่มีความเสถียรอาจเกิดวิวัฒนาการต่อกลายเป็นรูปร่างต่างๆ เช่น ทรงรีที่มีความรีสูง [9] หรือแขนเกลียว [15-16] ดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น ซึ่งความไม่เสถียรพบว่ามีโอกาสไม่เกิดขึ้นกรณีที่ระบบมีการกระจายความเร็วแบบไอโซโทรปิกและมีฟังก์ชันพลังงานเป็นฟังก์ชันลด [28-29] หากจะพิจารณาในทางกลศาสตร์สถิติเชิงลึก วิวัฒนาการของระบบดาราจักรที่อยู่ภายใต้แรงดึงดูดอยู่ภายใต้สมการจลน์ของอันตรกิริยาระยะไกลที่สามารถพิสูจน์ได้โดยลำดับชั้น BBGKY หรือ BBGKY hierarchy ที่พิสูจน์ได้จากสมการจลน์ที่เริ่มจาก

ฟังก์ชันการกระจายตัวของ Klimontovich ที่ระบุถึงตำแหน่งที่แน่นอนของอนุภาคในการเคลื่อนที่ภายใต้การอนุรักษ์ของอินทิกรัลของการเคลื่อนที่ [30-31] ซึ่งจากสมการจลน์ดังกล่าวสามารถแบ่งวิวัฒนาการออกเป็น 2 ช่วง คือ ช่วงที่ไม่มีการชน หรือ collisionless relaxation ซึ่งเป็นกระบวนการที่คาดว่าดาราจักรลู่เข้าสู่ในช่วงที่ 2 คือช่วงที่มีการชน หรือ collisional relaxation จะใช้เวลานานมากกว่าอายุของเอกภพ อย่างไรก็ตามนักดาราศาสตร์เชื่อว่าระบบที่มีขนาดเล็กและมีความหนาแน่นสูงสามารถเข้าสู่ช่วงที่มีการชนได้ [32]

นอกจากนี้ ในหลายงานวิจัยในอดีต การจำลองทางคอมพิวเตอร์ไม่จำกัดเพียงแต่การศึกษารูปร่างหรือสิ่งที่สังเกตเห็นด้วยตาเท่านั้น ยังรวมไปถึงคุณสมบัติทางฟิสิกส์ที่เกี่ยวข้อง โดยในการจำลองดาราจักรทรงรี คุณสมบัติอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ ผลจากจำนวนอนุภาค [33-35] การกระจายความหนาแน่น [36-37] การหมุน [38] หรือการคายมวล [39] ในส่วนของการจำลองทางคอมพิวเตอร์เพื่อสร้างแขนเกลียว ผลที่ได้รับในหลายๆ การวิจัยที่ได้รายงานไว้คือคานดาราจักร [40-42] หรืออัตราการกำเนิดดาวฤกษ์ [43]

เนื้อหาของรายงานเล่มนี้ประกอบไปด้วยผลการศึกษาการก่อกำเนิดรูปร่างของดาราจักรโดยจะแบ่งเป็น 2 หัวข้อย่อยที่แยกส่วนกัน คือ การก่อกำเนิดรูปร่างทรงรี และการก่อกำเนิดแขนเกลียว โดยแต่ละในหัวข้อย่อยจะเป็นการศึกษาทั้งในเชิงทฤษฎีและการเสนอผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์รวมไปถึงการอภิปรายผลไปด้วยกัน

2. วัตถุประสงค์

- 2.1 เพื่อศึกษากลไกการเกิดรูปร่างทรงรีจากความไม่เสถียรในแบบ ROI
- 2.2 เพื่อศึกษากลไกการสร้างแขนเกลียวของระบบที่มีการหมุน

3. วิธีศึกษา

3.1 การจำลองด้วยคอมพิวเตอร์

ในการจำลองวิวัฒนาการของระบบทั้งหมดจะใช้โปรแกรม GADGET-2 [44-45] ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ไม่เสียค่าใช้จ่าย สำหรับรายละเอียดตัวแปรการจำลอง ความละเอียด ตัวแปรที่ศึกษา และเงื่อนไขเริ่มต้นจะได้ชี้แจงในหัวข้อย่อยในส่วนผลการศึกษา

3.2 กรอบทฤษฎี

ในการศึกษาการก่อกำเนิดและวิวัฒนาการของระบบรูปร่างต่างๆ กรอบทฤษฎีที่ใช้คือกลศาสตร์และกลศาสตร์สถิติของระบบนอกสมดุลของระบบโดดเดี่ยว ซึ่งรายละเอียดจะชี้แจงในแต่ละหัวข้อย่อย

4. ผลการศึกษา

4.1 การก่อกำเนิดรูปร่างทรงรี

4.1.1 ที่มาของปัญหา

ระบบที่มีแรงดึงดูดในตัวเองที่ประกอบไปด้วยอนุภาค N ตัว ได้ถูกใช้เป็นแบบจำลองในการศึกษาวิวัฒนาการของระบบทั้งในฟิสิกส์ดาราศาสตร์และจักรวาลวิทยาโดยเป็นที่ทราบกันว่าระบบดังกล่าวจะเข้าสู่ขอบเขตของ Vlasov เมื่อจำนวนอนุภาคเข้าสู่อนันต์ ผลจากจำนวนอนุภาคนั้นจริง ๆ แล้วแต่ละอนุภาคในการจำลองทางคอมพิวเตอร์ไม่ได้หมายถึงอนุภาคแต่หมายถึงตัวตนมหัพภาคของแรงดึงดูด และผลจากการที่จำนวนอนุภาคจำกัดก็ทำให้เกิดความไม่ต่อเนื่องของระบบเช่นกัน ในการที่จะได้ผลที่ถูกต้องในระบบอนุภาค N ตัว จำเป็นต้องกระจายตัวให้ตรงกับขอบเขตของไหลของระบบ แต่ในความเป็นจริงการกระทำดังกล่าวเป็นการเลียงออกจากขอบเขตของไหลโดยอัตโนมัติ จึงทำให้คุณสมบัติของวิวัฒนาการที่ได้มีความไม่แน่นอนระหว่างระบบของไหลและระบบอนุภาค N ตัว วิธีที่ง่ายที่สุดคือศึกษาระบบอนุภาคที่มีจำนวนอนุภาคที่ใหญ่ที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้และศึกษาว่าระบบดังกล่าวมีการลู่เข้าที่สังเกตเห็นได้หรือไม่ [46-50]

ในกรณีทั่วไปของวิวัฒนาการของระบบที่อยู่ภายใต้อันตรกิริยาระยะไกล จะสามารถแบ่งได้เป็น 2 ระยะ คือ ระยะเวลาพลศาสตร์ ที่มีระยะสั้นมากโดยระบบจะมีวิวัฒนาการอยู่ภายใต้สนามเฉลี่ย ซึ่งเสมือนกับว่าไม่มีการชนเพราะอนุภาคแต่ละตัวจะรับรู้ได้แต่สนามเฉลี่ยของระบบเท่านั้น และระยะที่ 2 คือ ระยะที่มีการชนซึ่งใช้เวลานานกว่ามาก และระยะเวลาในการเข้าสู่ระยะดังกล่าวยังเพิ่มขึ้นตามจำนวนอนุภาคในระบบ ซึ่งในระยะที่ 2 นี้ อนุภาคแต่ละตัวจะรู้ถึงการมีตัวตนของอนุภาคอื่นในระบบ ซึ่งหมายถึงการชนในทางกลศาสตร์สถิตินั่นเอง

ในการศึกษาส่วนนี้จะศึกษาวิวัฒนาการของระบบจากเงื่อนไขเริ่มต้นอย่างง่ายเพื่อที่จะได้เห็นผลจากการกวัดแกว่ง หรือ fluctuation ที่มีต่อวิวัฒนาการแบบไม่เชิงเส้นเมื่อความไม่เสถียรบางอย่างได้ถูกทำให้เกิด โดยเราจำกัดวิวัฒนาการของระบบให้อยู่ในช่วงต้น (หรือช่วงที่ไม่มีการชน) และสามารถระบุชนิดของความไม่เสถียรที่เกิดขึ้นต่อวิวัฒนาการได้รวมถึงการขึ้นกับจำนวนอนุภาคของวิวัฒนาการดังกล่าว เราจะมุ่งเน้นไปที่วิวัฒนาการในช่วงต้น 2 ระยะ ก่อนจะเข้าสู่ระยะที่มีการชน คือ ระยะการผ่อนคลายแบบรุนแรง หรือ Violent relaxation ที่ทำให้ระบบเข้าสู่สมดุลไวเรียล ถัดมาเป็นความไม่เสถียรในสมดุลที่เกิดจากระบบมีความเร็วในแนวรัศมีมากเกินไป หรือ Radial orbit instability (ROI) ที่เข้ามามีบทบาท ซึ่งการที่จะทำให้เกิด ROI เงื่อนไขเริ่มต้นจะต้องเย็นในระดับหนึ่ง เราเลือกที่จะศึกษาความไม่เสถียรภาพชนิดนี้เนื่องจากเราพบว่ากลไกดังกล่าวยังคงขึ้นกับจำนวนอนุภาคอย่างชัดเจน

4.1.2 เงื่อนไขเริ่มต้น ตัวแปรการจำลอง และตัวแปรที่ใช้วัด

ในการศึกษาการก่อกำเนิดรูปร่างทรงรีจะใช้ระบบอนุภาค N ตัวที่มีจำนวนอนุภาคตั้งแต่ 1,000-128,000 ตัว ประกอบเป็นทรงกลม โดยมีความหนาแน่นในแนวรัศมี

$$\rho \sim r^{-1}$$

โดยกำหนดให้จุดศูนย์กลางมวลอยู่ที่จุดกำเนิด ในการกระจายความเร็วจะกระจายความเร็วแบบสุ่มใน 3 มิติ โดยมีแอมพลิจูดของความเร็วในการกระจายถูกควบคุมโดยอัตราส่วนไวเรียล

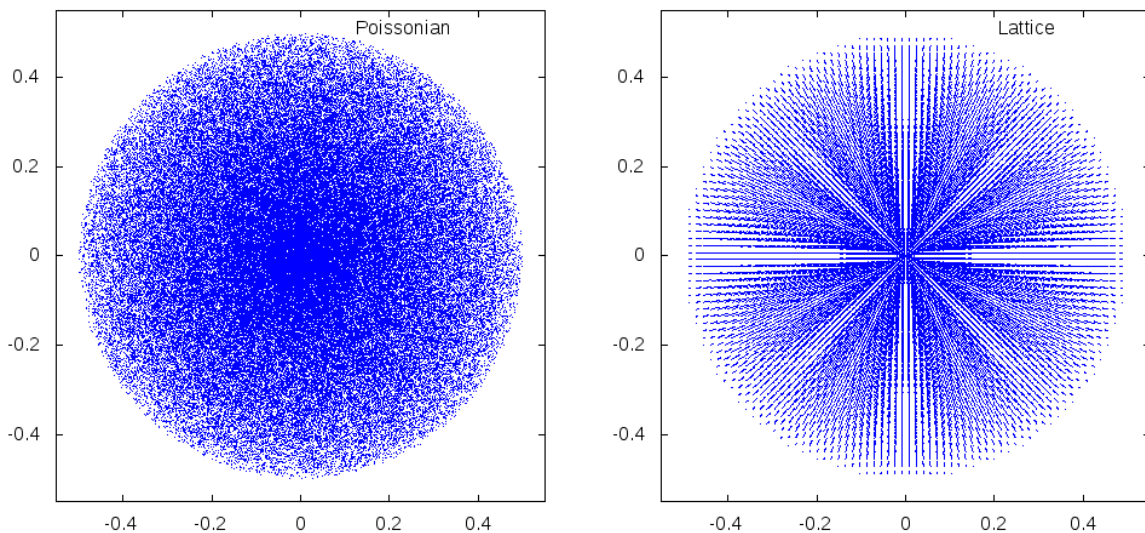
$$b_0 \sim -\frac{2T_0}{W_0}$$

เมื่อ K_0 คือ พลังงานจลน์เริ่มต้นและ W_0 คือพลังงานศักย์เริ่มต้น

ในการกระจายตัวของอนุภาคจะกระจายตัวเป็น 2 แบบ ดังนี้

- แบบสุ่ม หรือแบบ Poissonian แต่การกระจายความเร็วยังคงเป็นแบบสุ่ม นั่นคือ อนุภาคจะถูกโยนแบบสุ่มลงในทรงกลมที่มีรัศมี r_0 และเลื่อนอนุภาคในแต่ละตำแหน่งตามรัศมีทำให้ได้ความหนาแน่นที่มีค่าลดลงตามรัศมีที่กล่าวไว้ข้างต้น ในกรณีนี้ทั้งในมิติของตำแหน่งและความเร็วจะมีการกวัดแกว่งแบบ Poisson ทั้งคู่

- แบบโครงร่าง หรือแบบ Lattice โดยการกระจายความเร็วยังคงเป็นแบบสุ่มอยู่ นั่นคือ โครงร่างของตำแหน่งจะถูกดึงออกจากโครงผลึกแบบลูกเต๋าโดยจุดศูนย์กลางมวลจะอยู่ที่จุดศูนย์กลางของลูกเต๋า และในขั้นถัดไปจะยืดทำให้ความหนาแน่นลดลงตามรัศมีในลักษณะ r^{-1} ในอีกความหมายหนึ่ง จะไม่มีอนุภาคอยู่ตรงจุดศูนย์กลางมวล ในเงื่อนไขเริ่มต้นแบบนี้ การกวัดแกว่งจะถูกจำกัดอยู่แค่ในมิติของความเร็วเท่านั้น



รูปที่ 2 : เงื่อนไขเริ่มต้นแบบ Poissonian (ซ้าย) และแบบ Lattice (ขวา) สำหรับเงื่อนไขเริ่มต้นที่มีจำนวนอนุภาค 128,000 ตัว และ b_0 มีค่า 0.1

การกระจายของอนุภาคใน 2 มิติ ของเงื่อนไขเริ่มต้นทั้ง 2 แบบ แสดงอยู่ในรูปที่ 2 เงื่อนไขแบบ Poissonian ได้ถูกทำการศึกษาในอดีตพบว่าสามารถเปลี่ยนแปลงเป็นรูปร่างที่มีความรีสูงได้ในกรณีที่ b_0 มีค่าต่ำ [3,51-52] จะสังเกตว่าในกรณีที่จำนวนอนุภาค N ลู่เข้าสู่อันันต์ เงื่อนไขเริ่มต้นทั้ง 2 แบบจะลู่เข้าสู่ขีดจำกัดเดียวกันนั่นคือขีดจำกัดของไหล แต่ในกรณีที่ N เป็นจำนวนเต็ม การกวัดแกว่งที่เกิดจากจำนวนอนุภาคจำกัดจะต่างกันทั้ง 2 แบบ โดยรายละเอียดของเงื่อนไขที่ศึกษาทั้งในแบบ Poissonian และ Lattice สำหรับค่าอัตราส่วนไวเรียลและจำนวนอนุภาคที่ใช้ได้ถูกสรุปอยู่ในตารางที่ 1 และ 2 สำหรับแต่ละกรณี โดยในตารางได้บอกถึงจำนวนตัวอย่างที่ได้ทำการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ โดยทั่วไปข้อมูลในแต่ละ b_0 และ N ที่ใช้จะเฉลี่ยระหว่างตัวอย่างด้วยกัน ในทางปฏิบัติการสร้างเงื่อนไขเริ่มต้นจากการสุ่มให้แต่ละตัวอย่างมีความแตกต่างกันในเชิงสถิติแต่มีตัวแปรระดับมหัพภาคเหมือนกันสามารถกระทำได้โดยกำหนด seed number ของการสุ่มในโปรแกรมที่ใช้

ตารางที่ 1 : รายละเอียดเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบทรงกลมแบบ Poissonian ที่ศึกษา โดยข้อมูลเป็นจำนวนตัวอย่างที่ใช้ในแต่ละคู่ตัวแปร

$b_0 \backslash N$	1,000	2,000	4,000	8,000	16,000	32,000	64,000	128,000
0.025	70	40	30	30	6	4	2	5
0.05	70	40	30	30	6	4	2	5
0.075	70	40	30	30	6	4	2	1
0.1	70	40	30	30	10	4	2	5
0.125	70	40	30	30	6	4	2	1

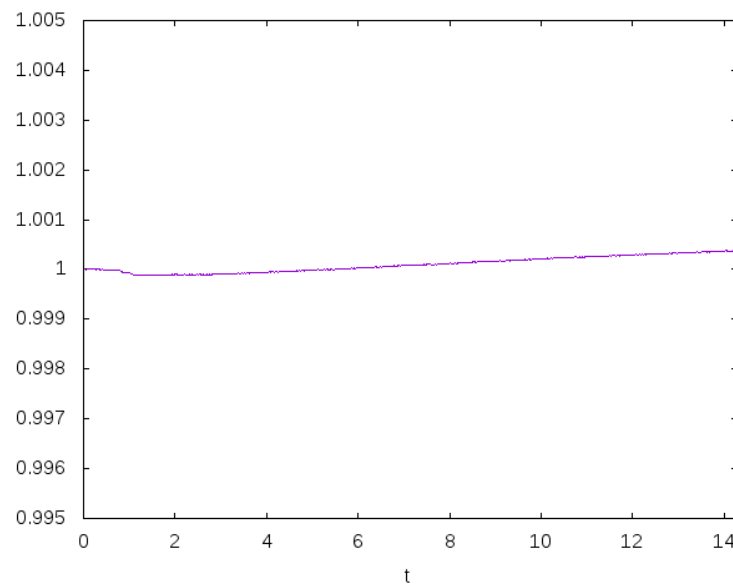
ตารางที่ 2 : รายละเอียดเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบทรงกลมแบบ Lattice ที่ศึกษา โดยข้อมูลเป็นจำนวนตัวอย่างที่ใช้ในแต่ละคู่ตัวแปร

$b_0 \backslash N$	1,000	2,000	4,000	8,000	16,000	32,000	64,000	128,000
0.025	-	-	-	-	-	-	-	5
0.05	-	-	-	-	-	-	-	5
0.075	-	-	-	-	-	-	-	5
0.1	10	10	10	10	10	10	6	5
0.125	-	-	-	-	-	-	-	5

การจำลองวิวัฒนาการจะใช้โปรแกรม GADGET-2 โดยกำหนดให้ค่าระยะตัดแรงดึงดูดให้ลดลงตามจำนวนอนุภาคดังนี้

$$\varepsilon = 0.056RN^{-1/3}$$

การที่กำหนดให้ระยะตัดแรงดึงดูดลดลงตาม N เนื่องจากการยุบตัว ขนาดที่เล็กที่สุดจะลดลงตามจำนวนอนุภาคจึงทำให้อนุภาคอยู่ใกล้กันมากขึ้น ในการคำนวณวิวัฒนาการของระบบ แรงจะถูกคำนวณโดยตรงในแต่ละคู่ นั่นคือจำนวนขั้นที่ใช้สำหรับแต่ละอนุภาค คือ N^2 และจำนวนขั้นทั้งหมดทั้งระบบจะเป็น N^3 ซึ่งสามารถทำได้โดยกำหนดตัวแปร Opening angle ให้เล็กที่สุดเท่าที่ทำได้ คือ 10^{-10} โดยในแต่ละระบบพลังงานรวมของระบบจะอนุรักษ์โดยมีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.1 เปอร์เซ็นต์ตลอดช่วงวิวัฒนาการ ซึ่งสามารถทำได้โดยให้ช่วงเวลาในการวิวัฒนาการมีค่าเล็กมากในช่วงที่ระบบมีการยุบตัว โดยตัวอย่างของอัตราส่วนพลังงานรวมที่เวลาใดๆ ต่อพลังงานรวมเริ่มต้นของระบบที่มีการยุบตัวรุนแรงที่สุดนั้นคือ $b_0=0.025$ และ $N=128,000$ แสดงในรูปที่ 3 ซึ่งจากรูปจะเห็นว่าถึงแม้จะเป็นช่วงเวลาที่มีการยุบตัวสูงสุด คือ $t=1$ ความคลาดเคลื่อนของพลังงานรวมสามารถถูกควบคุมให้ต่ำได้ และพลังงานรวมยังถูกควบคุมให้ต่ำกว่า 0.1 เปอร์เซ็นต์ไปตลอดจนถึงสิ้นสุดวิวัฒนาการ



รูปที่ 3 : อัตราส่วนพลังงานรวม ณ เวลาใดๆ ต่อพลังงานรวมเริ่มต้นตลอดช่วงวิวัฒนาการของระบบที่มี $b_0=0.025$ และ $N=128,000$ กรณี Poissonian

โดยทั่วไป ระบบที่มีผู้เข้าสู่สมดุลโดยการยุบตัวจะมีการคายอนุภาคบางส่วน ทำให้ระบบทั้งหมดไม่มีการหยุดนิ่งเนื่องจากอนุภาคที่คายออกมามีพลังงานจลน์มากกว่าพลังงานศักย์ยึดเหนี่ยว ดังนั้น การศึกษารูปร่างจึงจะพิจารณาเฉพาะอนุภาคที่ถูกยึดเหนี่ยวเป็นโครงสร้างในสมดุลเท่านั้น ปริมาณที่ใช้ศึกษาสำหรับการวัดความรีจากโมเมนต์ความเฉื่อยทั้ง 3 แกนหลักของระบบ สามารถนิยามได้ดังนี้

$$I_X = \frac{\Lambda_1(t)}{\Lambda_3(t)} - 1$$

เมื่อ X คือ สัดส่วนที่เป็นเปอร์เซ็นต์ของอนุภาคที่ถูกยึดเหนี่ยวด้วยพลังงานต่ำที่สุด ตัวอย่างเช่น I_{80} คือ ค่าความรีของโครงสร้างที่ประกอบไปด้วย 80 เปอร์เซ็นต์ของอนุภาคที่มีพลังงานยึดเหนี่ยวมากที่สุด Λ_1 และ Λ_3 คือ โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกนหลักที่มีค่าสูงสุดและต่ำสุด ตามลำดับ นั่นคือ $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3$ ซึ่งสามารถคำนวณได้จากเทนเซอร์ของโมเมนต์ความเฉื่อย

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

ซึ่งค่า Λ_1 Λ_2 และ Λ_3 คือ ค่าไอเกนทั้ง 3 ค่าที่ได้จากเมทริกซ์ จากค่า I_X เราจะได้ว่าถ้าระบบยังมีความรีสูง จะให้ค่าตัวแปรที่สูง สมการการหาค่าไอเกนสามารถเขียนได้ดังนี้

$$A - \Lambda I = 0$$

เมื่อ Λ คือค่าไอเกนที่ต้องการและ A คือเทนเซอร์ของโมเมนต์ความเฉื่อยและ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ใน 3 มิติ ซึ่งสามารถเขียนให้เป็นรูปแบบเมทริกซ์ได้ดังนี้

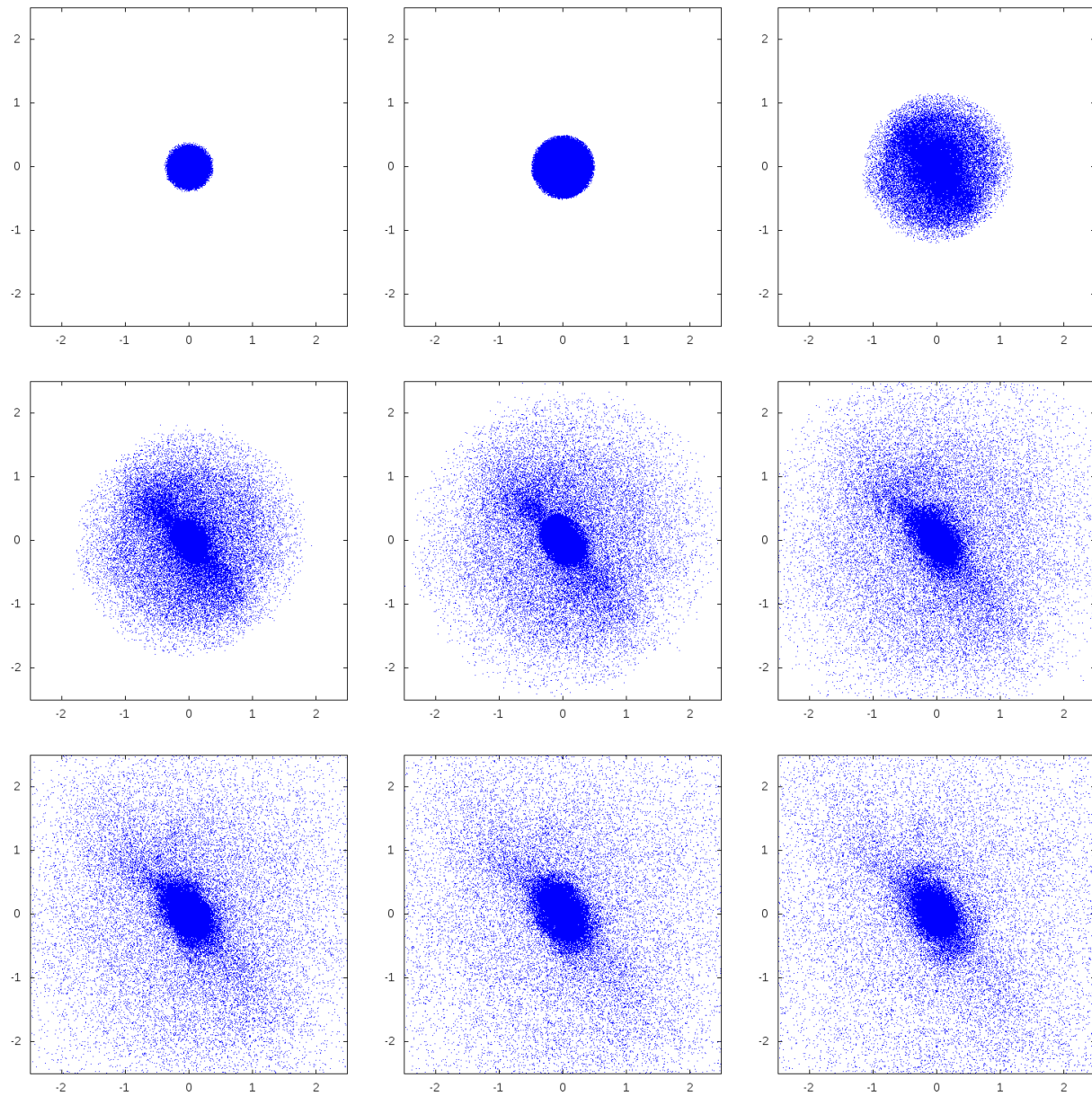
$$\det \begin{bmatrix} I_{xx} - \Lambda & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - \Lambda & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - \Lambda \end{bmatrix} = 0$$

โดยในการแก้จะต้องใช้การหา determinant ซึ่งนำไปสู่การแก้สมการพหุนามกำลัง 3 ในกรณีทั่วไป ค่าไอเกนของโมเมนต์ความเฉื่อยรอบ 3 แกนหลักจะเป็นจำนวนจริงบวก

หน่วยของเวลาของวิวัฒนาการของระบบจะใช้หน่วยที่มีค่าเท่ากับเวลาของการตกอิสระของระบบแรงโน้มถ่วง นั่นคือ

$$t = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}}$$

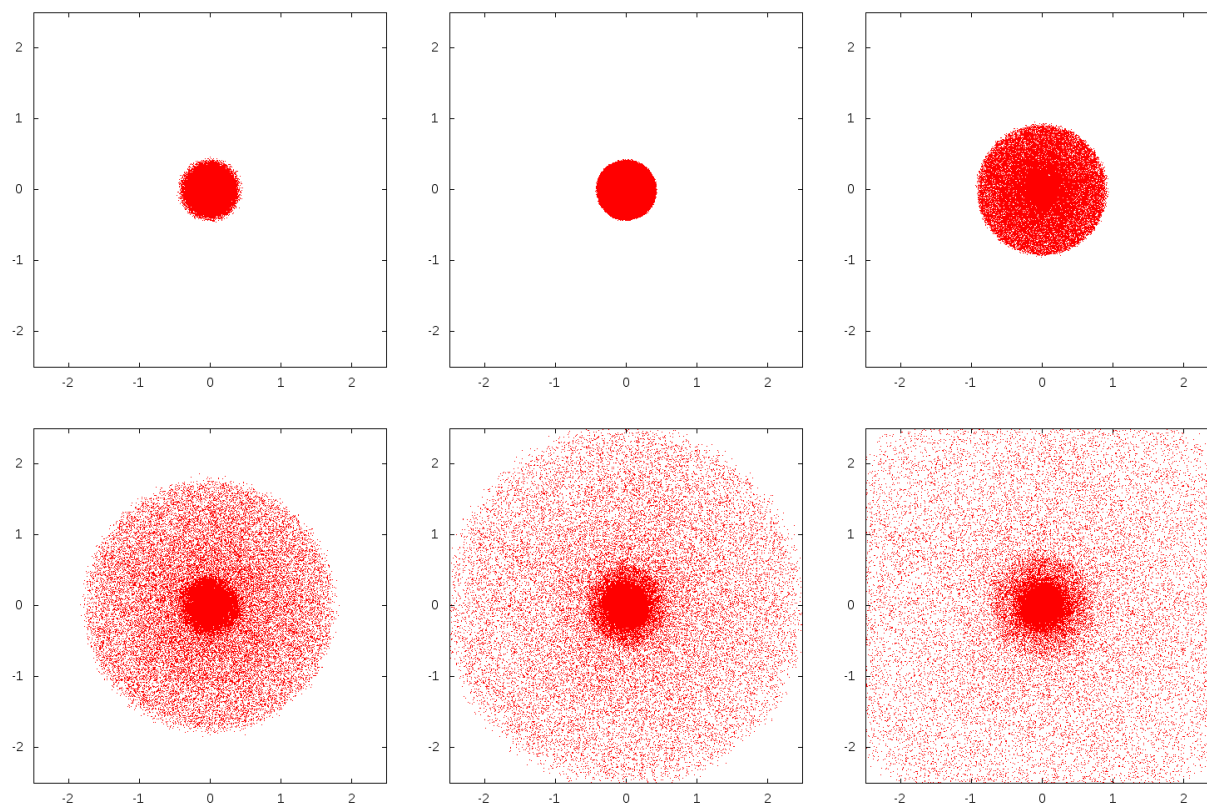
จะเห็นว่าในกรณีที่เป็นทรงกลมที่มีความหนาแน่นคงที่และไม่มีความเร็วเริ่มต้น เวลาดังกล่าวจะเป็นเวลาที่ระบบตกลงสู่จุดศูนย์กลางพร้อมกัน หรือ free-fall time



รูปที่ 4 : รูปร่างของระบบบนระนาบใดๆ สำหรับระบบที่มี $b_0=0.0025$ และ $N=128,000$ กรณี Poissonian
ลำดับของเวลาไล่จากซ้ายไปขวาและบนลงล่าง

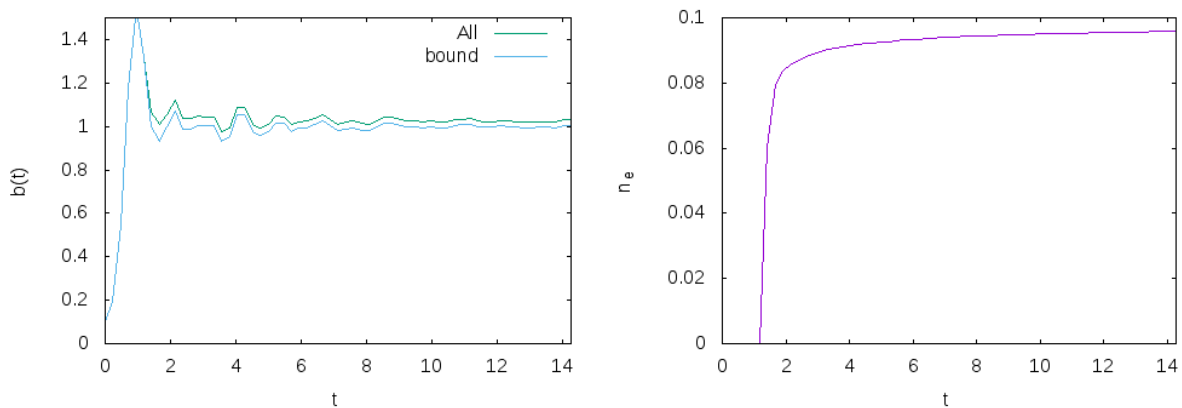
4.1.3 ผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์

จากการศึกษา จะพิจารณาวิวัฒนาการของรูปร่างของระบบในองค์กรรวมเป็นลำดับแรก วิวัฒนาการของระบบบนระนาบใดๆ สำหรับกรณี $b_0=0.025$ และ $N=128,000$ แสดงอยู่ในรูปที่ 3 ซึ่งแสดงระบบตั้งแต่ก่อนยุบตัวจนถึงหลังยุบตัว ในกรณีนี้ b_0 มีค่าต่ำ ดังนั้นระบบจึงมีการยุบตัวอย่างรุนแรง จากรูปจะเห็นว่าก่อนยุบตัวระบบยังไม่วิวัฒนาการสู่ทรงรีจนกระทั่งเริ่มขยายตัวเราจะเห็นอนุภาคที่แผ่ออกที่มีสมมาตรทรงกลมแต่แกนกลางจะมีลักษณะยาวเรียวที่รูปร่างยังคงไม่หยุดวิวัฒนาการ เรายังสังเกตว่าอนุภาคที่ถูกคายออกมีการขยายตัวอย่างต่อเนื่องในขณะที่ของเขตของแกนกลางมีค่าเกือบคงที่และมีการเปลี่ยนแปลงแต่ความถี่ ในช่วงต้นของการขยายตัวเราพบว่าอนุภาคที่ถูกปล่อยออกมา มีการวางตัวอยู่ในแนวหนึ่งอย่างชัดเจน (แนวแท่งมุมจากบนซ้ายไปล่างขวา) ซึ่งแสดงให้เห็นว่าแนวดังกล่าวเป็นแนวแกนหลักของเงื่อนไขเริ่มต้น [53] ซึ่งเราจะเห็นว่าถึงแม้รูปร่างของเงื่อนไขเริ่มต้นจะถูกสร้างจากฟังก์ชันการกระจายตัว แต่จากการกวัดแกว่งจากการกระจายตัวแบบสุ่มทำให้เงื่อนไขเริ่มต้นไม่ได้เป็นทรงกลมโดยสมบูรณ์ แต่จะเป็นทรงรีที่มีความรีขึ้นกับ $N^{-1/2}$ ดังนั้น เพื่อเป็นการพิสูจน์ว่าความถี่ที่เกิดจากการกวัดแกว่งมีผลทำให้เกิดความรีจากการยุบตัว เราจึงพิจารณาวิวัฒนาการของระบบ Lattice ที่มี b_0 และ N เท่ากันซึ่งแสดงอยู่ในรูปที่ 5



รูปที่ 5 : รูปร่างของระบบบนระนาบใดๆ สำหรับระบบที่มี $b_0=0.0025$ และ $N=128,000$ กรณี Lattice ลำดับของเวลาไล่จากซ้ายไปขวาและบนลงล่าง

จากรูปที่ 5 เราจะเห็นว่าความถี่ของแกนกลางถูกบีบลงอย่างเห็นได้ชัดเนื่องจากการกวัดแกว่งของตำแหน่งศูนย์กลางของเหล็ไ้เพียงแต่การกวัดแกว่งในความเร็ว ในลำดับต่อไปเราพิจารณาวิวัฒนาการของอัตราส่วนไวเรียลและอัตราส่วนการคายมวลของระบบในรูปที่ 4 แสดงในรูปที่ 6 โดยสำหรับอัตราส่วนไวเรียล (b) จะแสดงของทั้งระบบทั้งหมดและระบบของอนุภาคที่ถูกยึดเหนี่ยว ในช่วงต้นค่า b จะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วเนื่องจากระบบยุบตัวอย่างรุนแรงจึงทำให้มีความเร็วสูง หลังจากนั้นจึงลดลงมาเนื่องจากระบบขยายตัว จากรูปจะเห็นว่าทั้งระบบที่ประกอบไปด้วยอนุภาคที่ถูกยึดเหนี่ยวและอนุภาคอิสระจะให้ค่าอัตราส่วนไวเรียลสูงกว่า 1 เล็กน้อยซึ่งแสดงถึงพลังงานจลน์ที่เกินจำเป็น แต่พอเราพิจารณาเพียงอนุภาคที่ถูกยึดเหนี่ยวจะเห็นว่าค่าอัตราส่วนไวเรียลจะลู่เข้าสู่ 1 ภายในระยะเวลามากกว่า 1 เล็กน้อย หลังจากนั้นค่าอัตราส่วนไวเรียลยังคงกวัดแกว่งค่าในสมดุลต่ออีกช่วงเวลาหนึ่งซึ่งเกิดจากการกวัดแกว่งทางสถิติ หลังจากนั้นแอมพลิจูดของการกวัดแกว่งจึงลดลง กระบวนการนี้คือการเข้าสู่สมดุลไวเรียล หรือ virialization ซึ่งใช้เวลาไม่นาน และเราจะเห็นว่าระบบยังคงอยู่ในสมดุลไวเรียลตลอดเวลาหลังจากนั้น ในส่วนของอัตราส่วนของมวลที่คาย เราพบว่าระบบมีการคายมวลอย่างรวดเร็วที่เวลาประมาณ $t=1$ ซึ่งสอดคล้องกับค่าอัตราส่วนไวเรียลที่มีการเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วจากการยุบตัว หลังจากนั้นการคายมวลยังคงเกิดขึ้นอย่างช้าๆ จนถึงเวลาประมาณ $t=10$ ระบบจึงคงที่โดยไม่รบกวนสมดุลไวเรียล การคายมวลที่ช้าและต่อเนื่องอาจเป็นสาเหตุของการกวัดแกว่งของค่าอัตราส่วนไวเรียลโดยในช่วงต้นของที่ระบบเข้าสู่สมดุล การคายมวลยังคงต่อเนื่องจึงทำให้อัตราส่วนไวเรียลแกว่งกวัดด้วยแอมพลิจูดสูง หลังจากที่มีการคายมวลช้าลงการแกว่งกวัดจึงลดลงอย่างไรก็ตาม อนุภาคอิสระยังคงเป็นอัตราส่วนน้อย จึงทำให้อัตราส่วนไวเรียลไม่เบี่ยงเบนจาก 1 มาก ดังนั้น หากไม่มีการเปรียบเทียบถึงระบบที่ถูกยึดเหนี่ยวจึงอาจเข้าใจได้ว่าระบบทั้งหมดเข้าสู่สมดุล



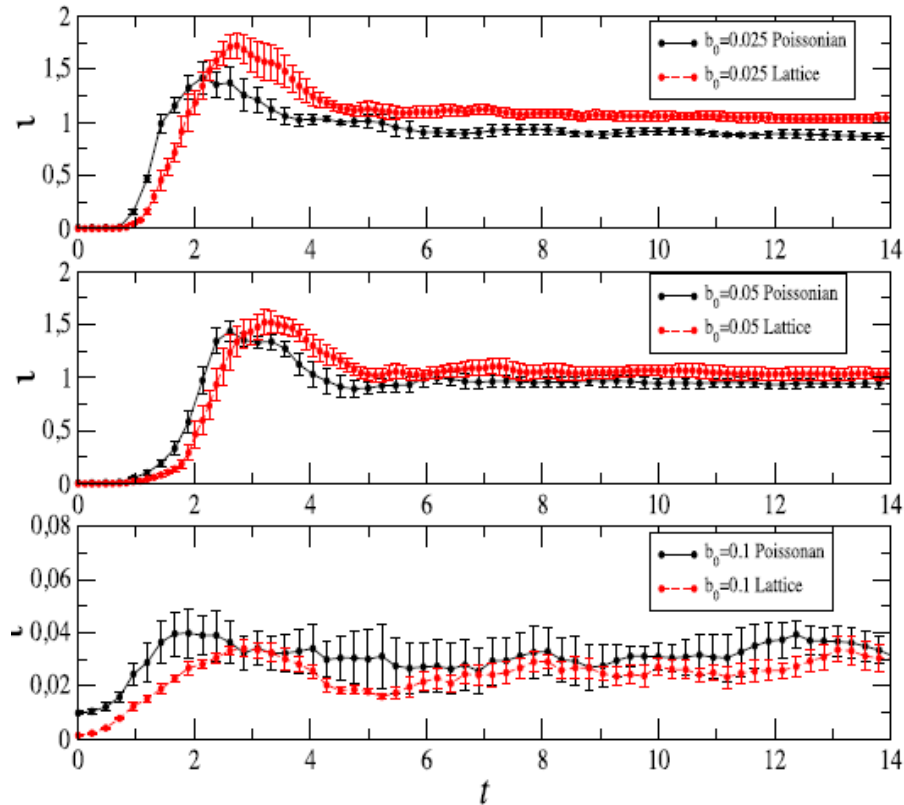
รูปที่ 6 : อัตราส่วนไวเรียลของระบบทั้งหมดและระบบที่ถูกยึดไว้ (ซ้าย) และอัตราส่วนของมวลที่ถูกคายออกมาจากระบบที่เวลาใดๆ (ขวา)

ถึงแม้ว่าจากการสังเกตด้วยตา กรณิ Lattice จะให้แกนกลางที่มีสมมาตรมากกว่ากรณิ Poissonian มาก แต่จากการที่ยังคงมีการกวัดแกว่งในมิติความเร็วทำให้เชื่อว่าค่าความรีของกรณิ Lattice คงยังไม่เป็น 0 ไปทั้งหมด เพื่อที่จะเปรียบเทียบถึงความรีในโครงสร้างทั้ง 2 แบบ ค่า l_{80} จากกรณิ Poissonian และ Lattice ที่เฉลี่ยจาก 5 ตัวอย่างที่ค่า b_0 ต่างๆ และ N มีค่า 128,000 แสดงในรูปที่ 7 โดยเส้นกราฟแต่ละเส้นเฉลี่ยจาก 5 ตัวอย่าง ขนาดของแถบความคลาดเคลื่อนคำนวณจากค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ยระหว่างตัวอย่าง ในทุกกรณิ เราสังเกตเห็น l_{80} เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วจากการยุบตัวและผอนตัวเข้าสู่ค่าสุดท้ายที่มีค่าต่ำกว่าค่าสูงสุดในช่วงต้น จากรูปจะเห็นว่าที่ $b_0=0.025$ โครงสร้างแบบ Lattice มีการวิวัฒนาการของรูปร่างช้ากว่ากรณิ Poissonian อย่างเห็นได้ชัดและกราฟของ Lattice จะขึ้นค่าสูงสุดช้ากว่าแต่สูงกว่ากรณิ Poissonian เล็กน้อย ค่าในสมมูลของ Lattice จะมีค่าสูงกว่าเล็กน้อย เราจะเห็นว่าค่าแถบความคลาดเคลื่อนจะสูงในช่วงเวลา ก่อน $t=4$ หลังจาก l_{80} เข้าสู่สมมูล แถบความคลาดเคลื่อนมีค่าลดลงทั้ง 2 กรณิ ในกรณิ b_0 ค่านี้ เราจะได้ว่าค่าความรีสุดท้ายมีค่ามากกว่า 1 ซึ่งถือว่าเป็นค่าที่มีความรีสูง

ในกรณิ $b_0=0.05$ วิวัฒนาการของ l_{80} โดยทั่วไปจะเหมือนกับกรณิ $b_0=0.025$ นั่นคือเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วจนถึงค่าสูงสุดและผอนเข้าสู่ค่าในสมมูล โดยค่าสูงสุดของกรณิ Lattice จะขึ้นสูงสุดช้ากว่าแต่มีค่าสูงสุดมากกว่ากรณิ Poissonian เราสังเกตว่าทั้งกรณิ Poissonian และ Lattice ค่าจะขึ้นจุดสูงสุดช้ากว่ากรณิ ก่อนหน้านี้ แสดงให้เห็นว่าค่าความเร็วที่เพิ่มเข้าไปในเงื่อนไขเริ่มต้นทำให้การยุบตัวรุนแรงน้อยลง อย่างไรก็ตาม ค่าของความรีที่สมมูลยังคงมีค่าไม่ต่างกับกรณิ ก่อนหน้านี้นัก นั่นคือ มีค่าประมาณ 1 และมีแถบความคลาดเคลื่อนสูงในระหว่างที่ l_{80} เพิ่มขึ้นในช่วงแรก หลังจากนั้นขนาดของแถบมีขนาดลดลงเมื่อระบบอยู่ในสมมูล

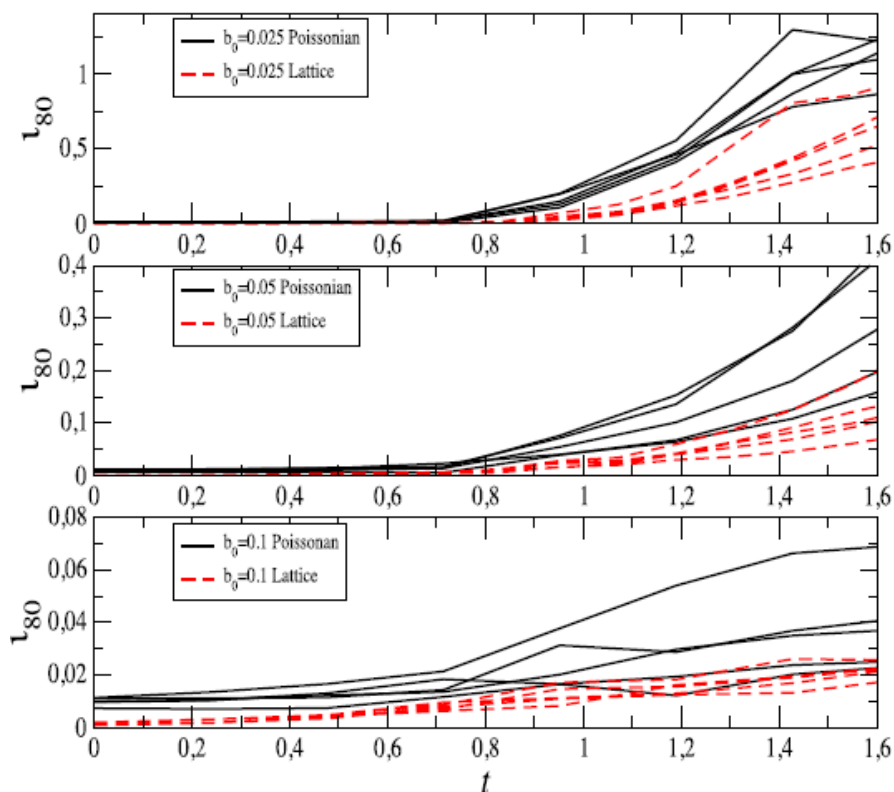
ในกรณิ $b_0=0.1$ ระบบความรีมีวิวัฒนาการเพียงเล็กน้อยเท่านั้นนั่นคือในช่วงแรกจะเพิ่มขึ้นจนถึงค่าประมาณ 0.04 และลดลงเพียงเล็กน้อยจนเข้าสู่สมมูล เราจะเห็นว่าในกรณิ นี้ค่าในสมมูลมีการกวัดแกว่งสูงมากรวมถึงแถบความคลาดเคลื่อนที่กว้างเมื่อเทียบกับค่า l_{80} โดยกรณิ Lattice มีค่าแถบความคลาดเคลื่อนต่ำกว่ากรณิ Poissonian

จากรูปที่ 7 เราสามารถสรุปได้ว่ากลไกที่ทำให้เกิดความรีของกรณิ $b_0=0.025$ และ 0.05 คือ ROI เนื่องจากวิวัฒนาการรูปร่างเกิดในช่วงที่ระบบอยู่ในสมดุลไวเรียลแล้วและในกรณิ ที่เราเพิ่ม b_0 และทำให้สมดุลเกิดซ้ำอาจเกิดจากการที่ความเร็วในแนวรัศมีถูกลดทอนลง นอกจากนี้ การที่ระบบ Lattice เกิดวิวัฒนาการรูปร่างช้ากว่าเนื่องจากการกระเพื่อมของตำแหน่งถูกตัดออกไปทำให้แหล่งที่จะกระตุ้นความไม่เสถียรลดลงไปอีก ในขณะที่กรณิ $b_0=0.1$ ความรีที่เกิดขึ้นไม่ใช่เกิดจาก ROI เนื่องจากความรีสุดท้ายมีค่าต่ำกว่ามากและการเพิ่มขึ้นของความรีสอดคล้องกับอัตราส่วนไวเรียล ดังนั้นจึงอาจเป็นความรีที่เกิดจากการยุบตัวด้วยแรงโน้มถ่วงธรรมดา หรือ LMS instability [54] การที่ ROI ไม่สามารถเกิดได้ในกรณิ นี้ อาจเกิดจากการที่ค่า b_0 มีค่าสูงเกินไปทำให้วงโคจรในแนวรัศมีมีค่าลดลง



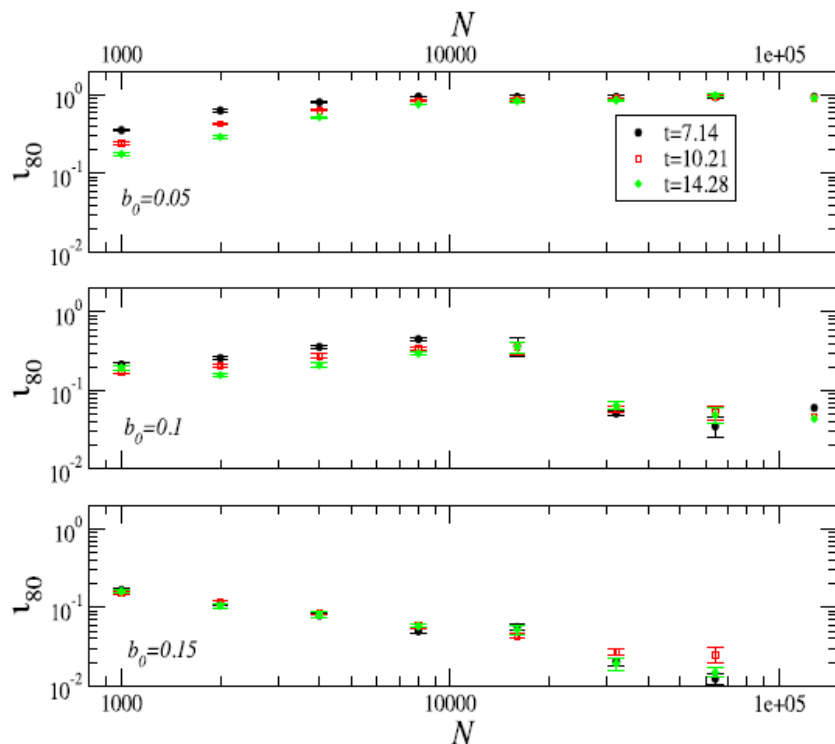
รูปที่ 7 : ค่าเฉลี่ยของ l_{80} ที่ b_0 ค่าต่างๆ สำหรับ $N=128,000$ ของเงื่อนไขเริ่มต้นแบบ Poissonian และ Lattice โดยเฉลี่ยจากทั้งหมด 5 ตัวอย่างของแต่ละค่า b_0 ค่าแถบความคลาดเคลื่อนคำนวณจากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ย

ค่าที่แสดงในรูปที่ 7 เป็นค่าเฉลี่ยของ l_{80} ซึ่งแสดงให้เห็นถึงวิวัฒนาการที่แยกกันของกรณี Lattice และ Poissonian เราจะพิจารณาถึงวิวัฒนาการในช่วงต้นของในแต่ละตัวอย่างของแต่ละกรณีซึ่งแสดงในรูปที่ 8 ซึ่งแสดงถึงวิวัฒนาการในช่วงต้นของ l_{80} ของแต่ละตัวอย่างที่แยกกันในกรณีที่มี b_0 เช่นเดียวกับรูปที่ 7 จากรูปดังกล่าวเราจะเห็นว่ากรณี Poissonian และ Lattice มีวิวัฒนาการช่วงต้นที่ต่างกันชัดเจนและเกาะกลุ่มกันโดยตัวอย่างจาก Poissonian จะเกาะกลุ่มกันเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วกว่ากลุ่ม Lattice ทั้ง 3 กรณี โดยมีอัตราการเพิ่มขึ้นลดลงตาม b_0 ในช่วงนี้คาดว่า ROI ยังไม่เข้ามามีผลต่อวิวัฒนาการรูปร่าง โดยหลังจากนี้ระบบในแต่ละ b_0 ก็จะวิวัฒนาการต่างกันไป



รูปที่ 8 : ค่า l_{80} ของในแต่ละตัวอย่าง (5 ตัวอย่างต่อ b_0 ในแต่ละกรณี Poissonian และ Lattice) ในช่วงเริ่มต้นของวิวัฒนาการ ตัวอย่างทั้งหมดประกอบด้วย 128,000 อนุภาค

จากผลที่ได้กล่าวมาเป็นผลเฉพาะกรณี $N=128,000$ ซึ่งเป็นระบบที่มีขนาดใหญ่ที่สุดเท่านั้น ในลำดับต่อไปจะพิจารณาถึงค่าความริของระบบที่มี N ต่างๆ ของ b_0 ที่แตกต่างกัน 3 ค่า ในกรณีโครงสร้างแบบ Poissonian ซึ่งสรุปอยู่ในรูปที่ 9 โดยเฉลี่ยจากจำนวน 70 40 30 30 6 4 2 และ 1 สำหรับ 1,000 2,000 4,000 8,000 16,000 32,000 64,000 และ 128,000 อนุภาค ตามลำดับ ที่เวลาแตกต่างกัน 3 ค่า แถบความคลาดเคลื่อนคำนวณจากส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ย จากการศึกษาวิวัฒนาการของอัตราส่วนไวเรียล ระบบทุกระบบจะเข้าสู่สมดุลที่เวลาประมาณ $t=2$ เราจะเห็นว่าพฤติกรรมของ l_{80} ที่แต่ละ b_0 แตกต่างกันอย่างสิ้นเชิง ที่ $b_0=0.05$ เราจะเห็นว่ากรณีที่ N เพิ่มขึ้นค่า l_{80} เสมือนจะลู่เข้าสู่ค่าหนึ่งที่ประมาณ 1 เราสังเกตเห็นว่าที่ N ต่ำกว่า 8,000 ความริจะมีค่าลดลงตามเวลาอย่างช้าๆ ดังนั้น ในกรณีนี้จะเห็นได้ว่า ROI เกิดขึ้นในทุก N และ ROI ที่เกิดขึ้นจะลบค่าความริเริ่มต้นซึ่งเห็นได้จากการที่ความริสุดท้ายจะลู่เข้าสู่ค่าประมาณ 1 เมื่อเราเพิ่ม N ไปเรื่อยๆ และไม่ขึ้นกับ N อย่างไรก็ตาม การที่ในกรณี N ต่ำ เราสังเกตเห็นการลดลงของ l_{80} ตามเวลา (หรือระบบมีแนวโน้มที่จะกลับสู่สมมาตรทรงกลม) อาจเป็นวิวัฒนาการแบบมีการชนซึ่งจะเกิดขึ้นเร็วในระบบที่มีจำนวนอนุภาคน้อย [8]

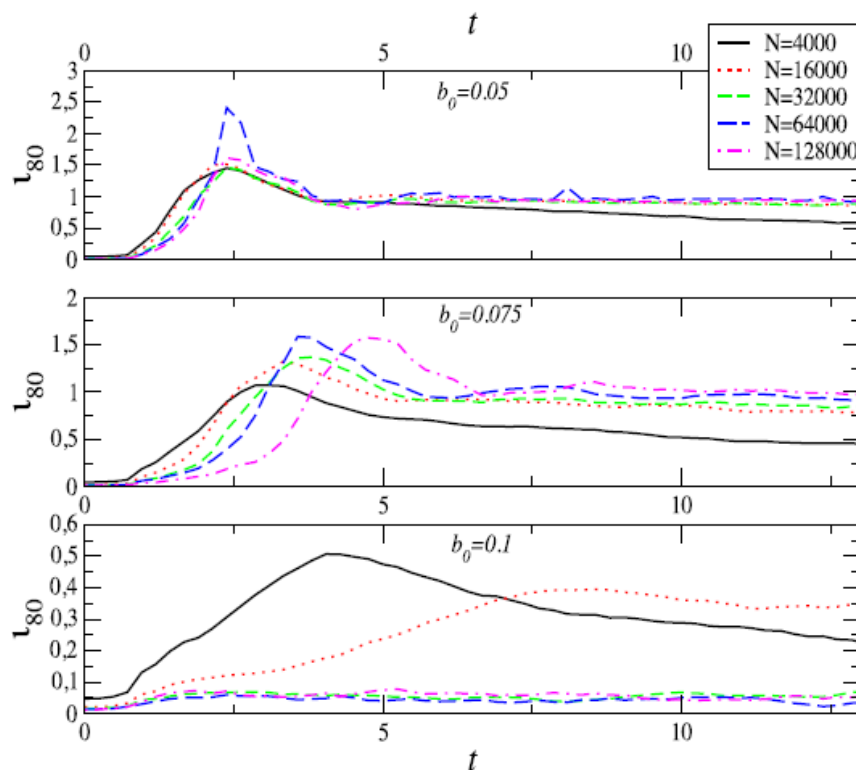


รูปที่ 9 : ค่า l_{80} ที่ b_0 และ N ต่างๆ โดยเฉลี่ยจากจำนวนตัวอย่างทั้งหมด 70 40 30 30 6 4 2 และ 1 สำหรับ 1,000 2,000 4,000 8,000 16,000 32,000 64,000 และ 128,000 อนุภาค ตามลำดับ สำหรับกรณี Poissonian ที่เวลาต่างกัน 3 ค่า แถบความคลาดเคลื่อนคือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ย

ในกรณี $b_0=0.1$ พฤติกรรมของ l_{80} สามารถแบ่งได้เป็น 2 แบบ คือ ที่ N ต่ำ ความริที่เกิดขึ้นจะมาจาก ROI อย่างชัดเจนซึ่งสังเกตได้จากความริที่มีค่ามากจนกระทั่ง N มีค่า 16,000 ความริสามารถขึ้นไปถึงสูงสุดจนถึง 0.4 หลังจากนั้นถ้าเราเพิ่ม N ความริลดลงอย่างเห็นได้ชัด (ประมาณ 5 เท่า) ในกรณีที่ $N=32,000$ และสำหรับระบบที่ N สูงกว่านั้น ความริยังคงต่ำอยู่ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ROI ไม่เกิดขึ้นในกรณีดังกล่าว จากผลการทดลองนี้จะเห็นว่าตัวแปรการทำให้เกิด ROI ไม่เพียงแต่จะถูกกำหนดด้วย b_0 เท่านั้น แต่จำนวนอนุภาคก็เป็นตัวกำหนดเช่นกัน เหตุผลที่จำนวนอนุภาคที่น้อยเกินไปจะเป็นตัวกีดไม่ให้ ROI เกิดขึ้นมาอาจเป็นสาเหตุมาจากแหล่งของความไม่สมมาตร (ซึ่งลดลงตาม N) มีไม่มากพอถึงแม้ b_0 จะเพียงพอที่ทำให้การยุบตัวมีอนุภาคในแนวนั้นมีเป็นจำนวนเพียงพอ

สำหรับกรณี $b_0=0.15$ ค่าความริที่ได้มีค่าต่ำกว่า 2 กรณีข้างต้นมากถึงแม้ว่า N จะน้อยซึ่งแสดงให้เห็นว่า ROI ไม่เกิดขึ้นทุกจำนวนอนุภาค ในกรณีนี้ ROI ถูกกระตุ้นด้วย b_0 อย่างชัดเจนเนื่องจากถึงแม้ N จะต่ำ (หรือแหล่งกำเนิดความริเริ่มต้นสูง) ความริก็ไม่สามารถถูกกระตุ้นด้วย ROI ได้ อย่างไรก็ตามเราสังเกตเห็นว่าความริสุดท้ายค่อนข้างเสถียร (ยกเว้นการกวัดแกว่งรอบสมดุล) และลดลงตามจำนวนอนุภาค ในอีกความหมายหนึ่ง ความริจากการกวัดแกว่งทางสถิติของเงื่อนไขเริ่มต้นยังคงมีผลกับความริสุดท้าย

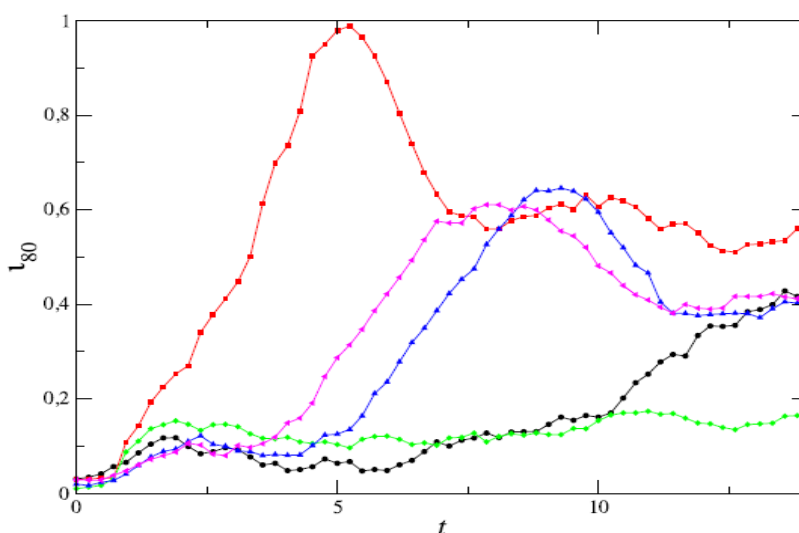
จากรูปดังกล่าวแสดงให้เห็นว่าสำหรับวิวัฒนาการด้วย ROI ระบบดังกล่าว (ทรงกลมที่มีความหนาแน่นลดลงตามรัศมีในลักษณะ r^{-1} และความเร็วแบบไอโซโทรปิกควบคุมด้วยอัตราส่วนไวเรียล) อาจมีค่า b_0 วิฤติที่อาจมากกว่า 0.1 เล็กน้อยโดยถ้า b_0 มีค่ามากกว่าค่าดังกล่าว ROI จะไม่สามารถเกิดขึ้นไม่ว่า N จะมีค่าใดๆ



รูปที่ 10 : วิวัฒนาการของ l_{80} ที่ b_0 ที่ต่างกัน 3 ค่า สำหรับจำนวนอนุภาคต่างๆ โดยเฉลี่ยด้วยจำนวนตัวอย่างเท่ากับรูปที่ 9

ในลำดับถัดไป เราพิจารณาวิวัฒนาการของ l_{80} ซึ่งแสดงในรูปที่ 10 สำหรับค่า b_0 ที่ต่างกัน 3 ค่า ในกราฟแต่ละเส้นจะถูกเฉลี่ยด้วยจำนวนตัวอย่างที่ได้ชี้แจงไว้ข้างต้น ในกรณีที่ $b_0=0.05$ เราจะเห็นว่าความเร็วของระบบจะวิวัฒนาการอย่างรวดเร็วและขึ้นจุดสูงสุดที่ประมาณ $t=2.5$ หลังจากนั้นค่าความเร็วสุดท้ายจะใกล้เคียงกันในแต่ละ N ซึ่งสอดคล้องกับข้อมูลจากรูปที่ 9 ที่แสดงถึงการลู่เข้าของ l_{80} เมื่อเพิ่ม N มากขึ้นและเรายังสังเกตเห็นการลดลงของความเร็วในกรณีที่ $N=4000$ ซึ่งเป็นผลจากผลของการชน กรณี $b_0=0.075$ เราเห็นการเลื่อนของการขึ้นสู่ค่าสูงสุดของ l_{80} อย่างเห็นได้ชัด การเพิ่มจำนวนอนุภาคจาก 4,000 เป็น 128,000 ทำให้วิวัฒนาการของ l_{80} เลื่อนไปประมาณ 2 หน่วยเวลา ซึ่งเปรียบเทียบกับกรณี $b_0=0.05$ ซึ่งเวลาที่ความเร็วถึงค่าสูงสุดในแต่ละ N ต่างกันเล็กน้อย การเลื่อนของวิวัฒนาการในกรณีนี้สามารถอธิบายได้จากการที่แหล่งของความไม่สมมาตรซึ่งลดลงตาม N มีขนาดลดลงทำให้วิวัฒนาการต้องใช้เวลาเพิ่มขึ้นเพื่อที่จะเข้าสู่สถานะ

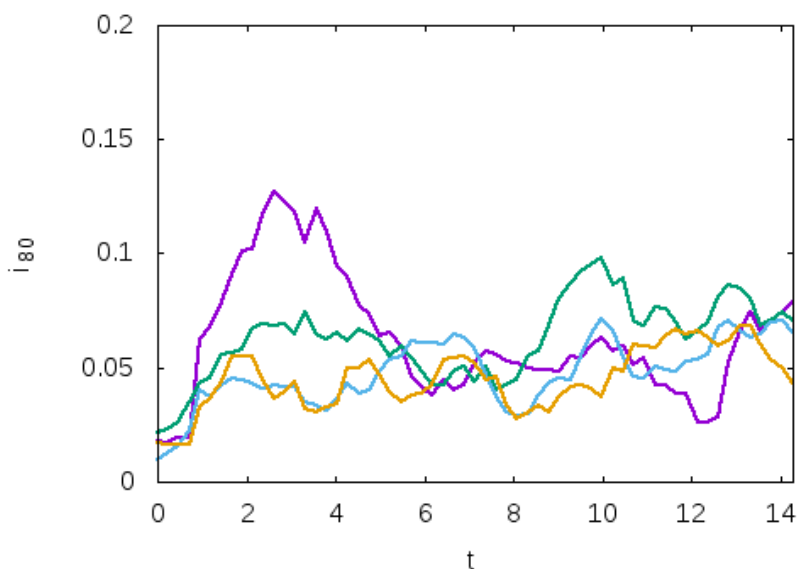
สุดท้าย ซึ่งจะคล้ายๆ กับกรณีที่ทดลองจากโครงสร้าง Lattice ที่ทำให้วิวัฒนาการถูกเลื่อนไปนั่นเอง นอกจากนี้ ในกรณีนี้ การลู่เข้าของ l_{80} เมื่อเพิ่ม N ยังคงสังเกตได้ นั่นคือ เมื่อเราเพิ่ม N ค่าสุดท้ายของ l_{80} จะมีแนวโน้มที่ลู่เข้าสู่ค่าหนึ่ง สำหรับในกรณีที่ $b_0=0.1$ ซึ่งเป็นกรณีที่เราสังเกตการเปลี่ยนเฟสจาก ROI ไปเป็น ไม่มี ROI วิวัฒนาการของ l_{80} เน้นย้ำถึงคุณสมบัตินั้นเมื่อกรณี N น้อยกว่าหรือเท่ากับ 16,000 จะเกิดวิวัฒนาการรูปร่างอย่างรุนแรงจาก ROI และในกรณีที่ N มากกว่านั้น วิวัฒนาการจะสงบนั้นคือมีการเพิ่มขึ้นของ l_{80} จากค่าเริ่มต้นเพียงเล็กน้อยเท่านั้นและไม่มีสัญญาณในการเกิดของ ROI ไปตลอดช่วงของวิวัฒนาการ จากรูปที่ 9 การที่เราพิจารณา l_{80} เฉพาะหลังเวลา $t=7$ และพิจารณาเพียงค่า l_{80} ณ เวลาสุดท้ายเพื่อสรุปผลการลู่เข้าหรือกลไกของวิวัฒนาการอาจทำให้พลาดถึงรายละเอียดวิวัฒนาการในช่วงต้นได้ซึ่งประกอบไปด้วย ROI ที่ทำให้รูปร่างมีความริสสูง



รูปที่ 11 : วิวัฒนาการของ l_{80} ในแต่ละตัวอย่างสำหรับ $N=16,000$ และ $b_0=0.1$ ในกรณี Poissonian ทั้งหมด 5 ตัวอย่างที่ต่างกัน

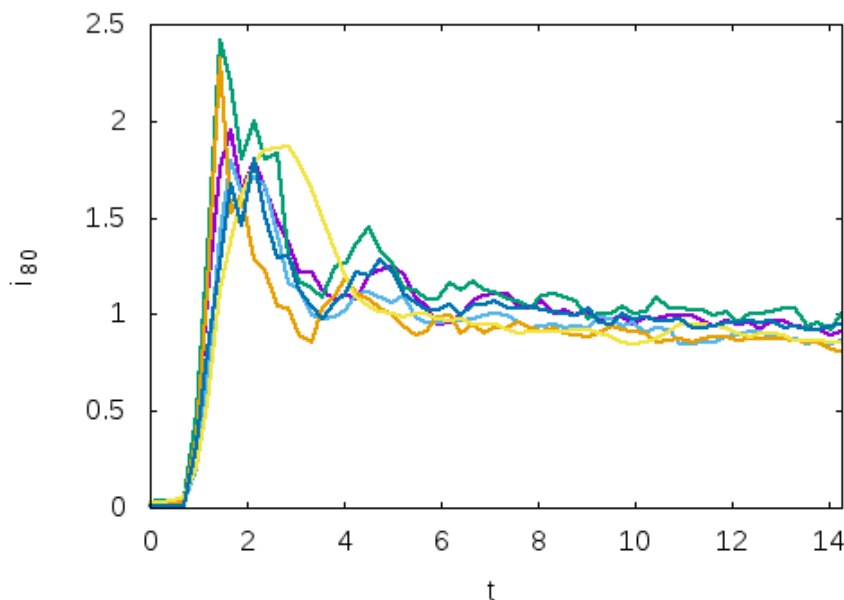
จากผลการทดลองจะเห็นว่าในการเกิด ROI ค่า b_0 วิฤติน่าจะมีค่าใกล้เคียงกับ 0.1 และสำหรับค่า $b_0=0.1$ ซึ่ง ROI อาจเกิดหรือไม่เกิด ทำให้เกิดความคิดว่าอาจจะมีค่า N วิฤติเช่นกันที่มีค่าใกล้เคียง 16,000 ดังนั้น เพื่อที่จะศึกษาพฤติกรรมของ l_{80} ในแต่ละตัวอย่างของระบบที่ใกล้เคียงกับ N วิฤติ วิวัฒนาการของ l_{80} ที่ $N=16,000$ และ $b_0=0.1$ กรณี Poissonian แสดงในรูปที่ 11 จากรูปจะเห็นว่าวิวัฒนาการของ l_{80} สารมรมมีได้หลากหลายตั้งแต่เกิดเป็นรูปทรงที่มีความริสสูงมากด้วย ROI (ตัวอย่างสีแดง) เกิด ROI ช้ากว่าและรุนแรงน้อยกว่า (เส้นสีม่วงและน้ำเงิน) เกิด ROI ช้ามาก (เส้นสีดำ) และไม่เกิด ROI เลย (เส้นสีเขียว) จากรูปดังกล่าวจะเห็นว่าสิ่งที่ต่างกันในแต่ละตัวอย่างเป็นเพียงการกวัดแกว่งในทางสถิติที่ต่างกันเท่านั้น ในเชิงมหภาคตัวอย่างทั้ง 5 มีฟังก์ชันการกระจายตัวเหมือนกันทุกประการ แต่ตัวอย่างทั้ง 5 ต่างกันในเชิง

จุลภาค ดังนั้น สิ่งนี้แสดงให้เห็นว่าความแตกต่างในเชิงจุลภาคสามารถนำไปสู่ความแตกต่างทางมหภาคได้เช่นกันผ่าน ROI โดยเหตุการณ์ลักษณะนี้ก็เคยมีรายงานในงานวิจัยในอดีตเช่นกัน [55] อย่างไรก็ตาม การที่พฤติกรรมของวิวัฒนาการในแต่ละตัวอย่างไม่เหมือนกันไม่ได้หมายความว่าผลที่ได้เป็นสิ่งผิดหรือจะไม่มี การลู่เข้าของพฤติกรรมเนื่องจากในกรณีนี้ผลการทดลองที่ผ่านมาได้ชี้ให้เห็นว่าถ้าเราเพิ่มจำนวนอนุภาคมากขึ้น ระบบจะไม่มีเกิดการเกิด ROI อีกต่อไปซึ่งถือว่าเป็นขอบเขตของไหลของ b_0 ค่านี้ ซึ่งสามารถเห็นได้จากวิวัฒนาการของ l_{80} ในกรณี $N=32,000$ ซึ่งในช่วงจำนวนอนุภาควิกฤติ ที่แสดงอยู่ในรูปที่ 12 จากทั้งหมด 4 ตัวอย่างของกรณี Poissonian จากรูปจะเห็นว่าทุกตัวอย่างมีวิวัฒนาการที่ค่อนข้างสงบ นั่นคือ ไม่มีช่วงไหนที่ l_{80} ขึ้นสูงไปกว่า 0.15 (ซึ่งถ้าเป็น ROI ค่าจะขึ้นเร็วและสูงกว่า 1) และค่าสุดท้ายต่ำกว่า 0.1 ทั้งหมด (ซึ่งถ้าเป็นความรึที่ถูกชี้นำโดย ROI จะมีความรึสุดท้ายประมาณ 1) การเพิ่มขึ้นของตัวอย่างสีม่วงที่มากกว่าตัวอย่างอื่นก็เกิดจากการยุบตัวธรรมดา



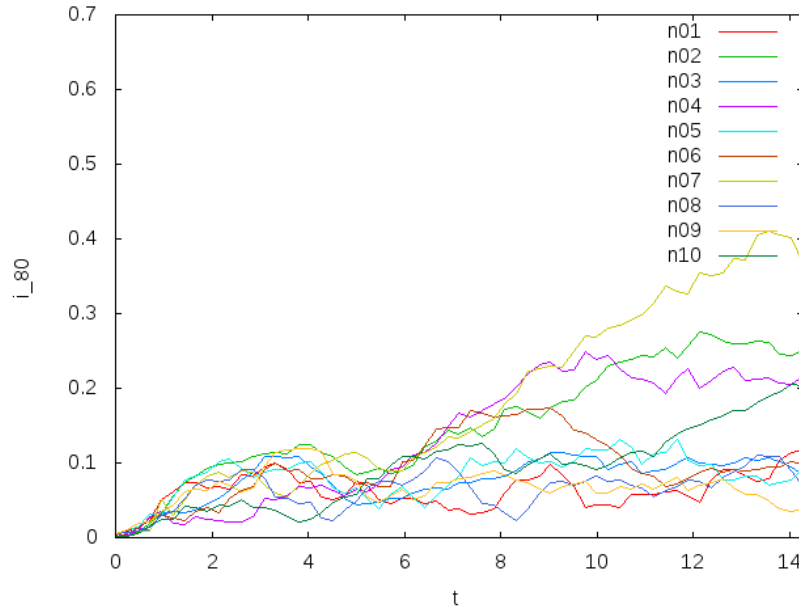
รูปที่ 12 : วิวัฒนาการของ l_{80} ในแต่ละตัวอย่างสำหรับ $N=32,000$ และ $b_0=0.1$ ในกรณี Poissonian ทั้งหมด 4 ตัวอย่างที่ต่างกัน

ในกรณีที่ไกลจากจุดวิกฤติ ความแตกต่างในแต่ละตัวอย่างอาจมีค่าไม่มากเท่ากรณีก่อนหน้านี้ วิวัฒนาการของ ที่ตัวอย่างต่างกัน 6 ตัวอย่างของกรณี $b_0=0.025$ และ $N=16,000$ แบบ Poissonian แสดงอยู่ในรูปที่ 13 ซึ่งจะเห็นว่าวิวัฒนาการของรูปร่างเป็นไปในทางเดียวกันหมดนั่นคือ l_{80} จะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและผ่อนเข้าสู่สมดุล ในกรณีนี้ได้รับการพิสูจน์แล้วว่ากลไกที่พัฒนารูปร่างคือ ROI และค่าความรึสุดท้ายอยู่ในช่วงประมาณ 1 ทั้งหมด



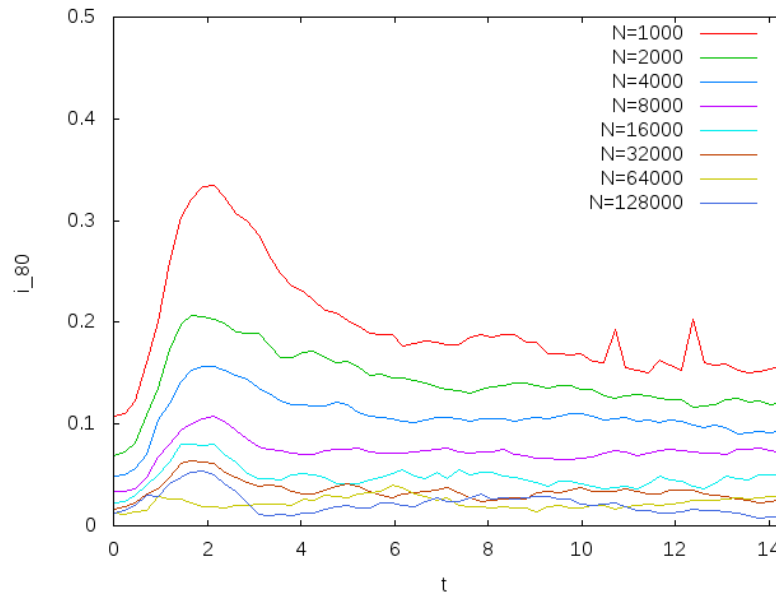
รูปที่ 13 : วิวัฒนาการของ I_{80} ในแต่ละตัวอย่างสำหรับ $N=16,000$ และ $b_0=0.025$ ในกรณี Poissonian ทั้งหมด 6 ตัวอย่างที่ต่างกัน

ในกรณีโครงสร้างแบบ Lattice เราพิจารณาความแตกต่างระหว่างตัวอย่าง วิวัฒนาการของกรณี $b_0=0.1$ $N=16,000$ สำหรับ 10 ตัวอย่างที่ต่างกันแสดงอยู่ในรูปที่ 14 จากรูปจะเห็นว่าประมาณ 6 ตัวอย่างมีวิวัฒนาการที่สงบและไม่มีแนวโน้มว่าจะเกิด ROI ในอีก 4 ตัวอย่างที่เหลือนับว่ามีการเพิ่มขึ้นของ I_{80} แต่ไม่ขึ้นสูงเมื่อเทียบกับกรณี Poissonian (ขึ้นไม่เกิน 0.4 ขณะที่กรณี Poissonian ขึ้นสูงไม่ต่ำกว่า 0.6 ในกรณีของระบบที่วิวัฒนาการเกิดขึ้นเร็ว) จะเห็นว่าการปรับโครงสร้างเป็นแบบ Lattice ทำให้การกระตุ้นให้เกิด ROI ช้าลงอย่างมากโดยไม่มีตัวอย่างใดที่เริ่มวิวัฒนาการความรื้อก่อน $t=6$ (ในขณะที่กรณี Poissonian มีบางตัวอย่างที่เริ่มวิวัฒนาการตั้งแต่ $t=1$ ดังรูปที่ 11) นอกจากนี้การที่ ROI เริ่มเกิดช้าทำให้เกิดความไม่แน่นอนว่าหลังจากเวลาสิ้นสุดของวิวัฒนาการในรูป (ซึ่งมากกว่าระยะเวลาเข้าสู่สมดุลไวเรียลถึง 7 เท่า) อาจเป็นจุดสิ้นสุดที่แท้จริงของวิวัฒนาการรูปร่างหรือไม่ อย่างไรก็ตาม สิ่งที่แตกต่างจากผลของ ROI จากการเปลี่ยนโครงสร้างเป็น Lattice ที่เห็นได้ชัดคือ ROI มีโอกาสเกิดได้น้อยกว่า มีความรุนแรงน้อยกว่า และมีโอกาสเกิดช้ากว่า ซึ่งเป็นสิ่งที่เน้นย้ำให้เห็นว่าการลดการกวัดแกว่งของตำแหน่งในเงื่อนไขเริ่มต้นมีผลกับผลลัพธ์ในเชิงมหัพภาคอย่างเห็นได้ชัด



รูปที่ 14 : วิวัฒนาการของ I_{80} ในแต่ละตัวอย่างสำหรับ $N=16,000$ และ $b_0=0.025$ ในกรณี Lattice ทั้งหมด 10 ตัวอย่างที่ต่างกัน

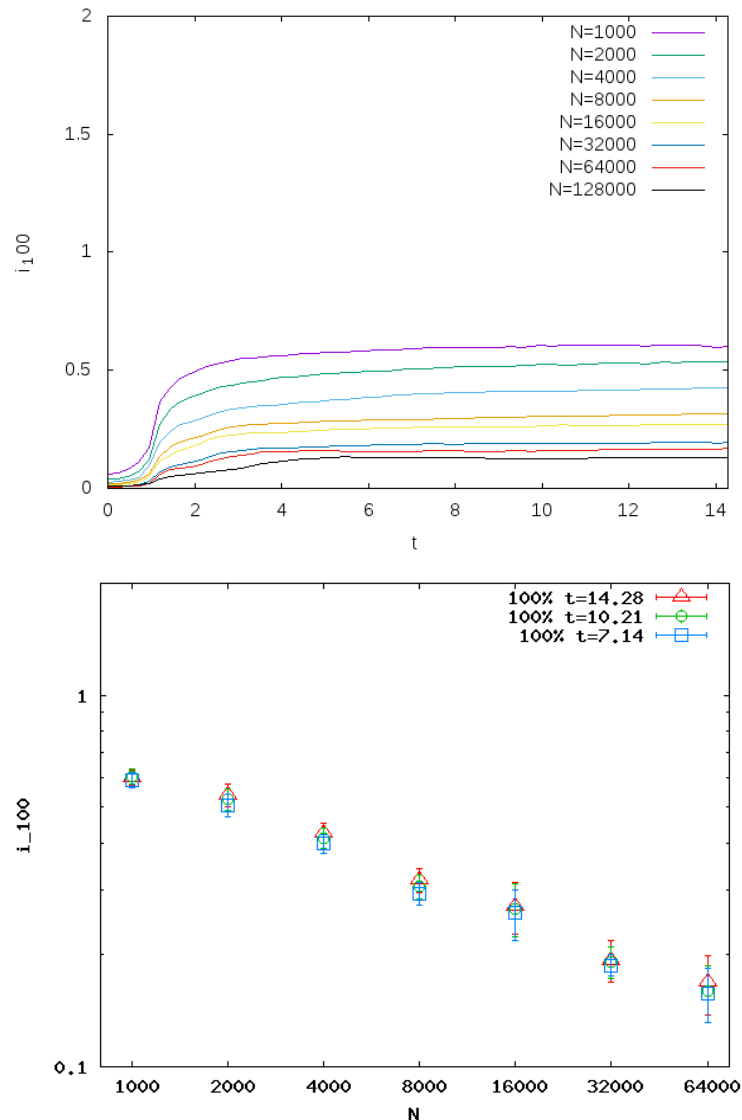
พิจารณาวิวัฒนาการของ I_{80} ในกรณีที่ ROI ถูกคุมไว้อย่างสิ้นเชิง วิวัฒนาการของ I_{80} ในกรณี $b_0=0.125$ ที่ N ในช่วง 1,000-128,000 สำหรับโครงสร้างแบบ (เฉลี่ยระหว่างตัวอย่าง) แสดงในรูปที่ 15 ซึ่งจากรูปจะเห็นว่าไม่ว่ากรณีที่ N ใดๆ วิวัฒนาการของ I_{80} จะสิ้นสุดไม่เกิน $t=4$ (ยกเว้นกรณี $N=1,000$ ที่การผ่านเข้าสู่สมดุลช้าไปเล็กน้อย) โดยในทุกจำนวนอนุภาค I_{80} จะขึ้นถึงค่าสูงสุดพร้อมกันซึ่งสอดคล้องกับการเข้าสู่สมดุลไวเรียลของอัตราส่วนไวเรียล ณ เวลาเริ่มต้นเราจะเห็นว่า I_{80} ลดลงตามจำนวนอนุภาคซึ่งสอดคล้องกับการที่แอมพลิจูดของการกวัดแกว่งทางสถิติมีค่าลดลง โดยจากการศึกษาพบว่าความถี่ของเงื่อนไขเริ่มต้นสามารถประมาณได้ว่าขึ้นกับ N ในลักษณะ $N^{-1/2}$ [52] หลังจากวิวัฒนาการเป็นค่าสุดท้ายก็พบว่าความถี่มีค่าเพิ่มขึ้นถ้าจำนวนอนุภาคลดลง ในกรณีนี้ความถี่สุดท้ายมีค่าไม่สูงมากเมื่อเทียบกับวิวัฒนาการด้วย ROI โดยมีค่าสูงสุดในกรณีที่ N ต่ำสุดอยู่ที่ประมาณ 0.15 นอกจากนี้เรายังสังเกตว่าค่าความถี่สุดท้ายเพิ่มขึ้นจากค่าเริ่มต้นเป็นอัตราส่วนไม่เกิน 1.5 (ในขณะที่ค่าสูงสุดจากการยุบตัวสามารถขึ้นไปได้สูงถึง 3 เท่า จากค่าเริ่มต้น) จะเห็นว่าที่เส้นกราฟของ $N=1,000$ จะมีการกระเพื่อมขึ้นของค่า I_{80} เนื่องจากการคำนวณพลังงานของอนุภาคแต่ละตัวอาจมีอนุภาคที่อยู่ไกลและพลังงานใกล้เคียง 0 จึงทำให้อาจมีการสลับสถานะจากอิสระเป็นถูกยึดเหนี่ยว จึงเป็นผลทำให้ค่าความถี่กระเพื่อมขึ้น



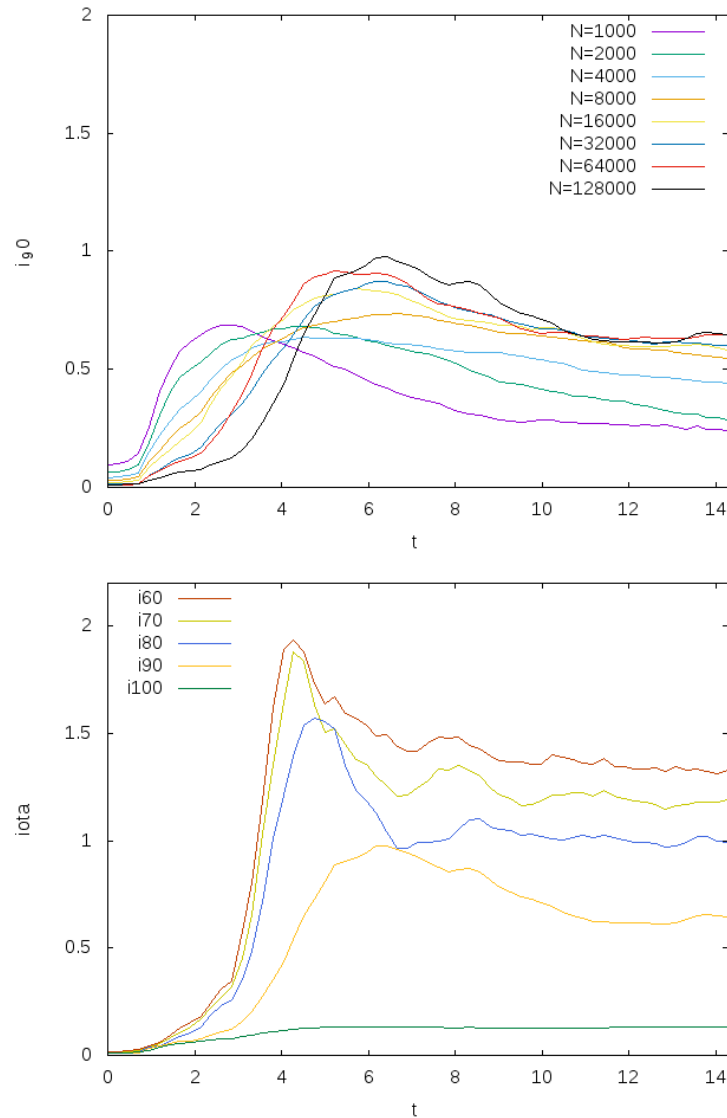
รูปที่ 15 : ค่าเฉลี่ยระหว่างตัวอย่างของ l_{80} สำหรับ N ต่างๆ ในกรณี $b_0=0.125$ และมีการกระจายตัวแบบ Poissonian

พิจารณาวิวัฒนาการของ l_{100} เนื่องจากที่ผ่านมาเราเห็นว่า l_{80} มีความเหมาะสมกว่าในการพิจารณาความรีของระบบเนื่องจากอนุภาคที่ถูกยึดเหนี่ยวบางส่วนวางตัวในแนวการคายมวลและอยู่ไกลทำให้ในการคำนวณโมเมนต์ความเฉื่อยอนุภาคเหล่านี้รับกวนระบบอย่างมาก (เนื่องจากโมเมนต์ความเฉื่อยแปรผันตรงกับระยะทางยกกำลังสอง) [33] วิวัฒนาการของ l_{100} เฉลี่ยระหว่างตัวอย่างที่แต่ละจำนวนอนุภาคสำหรับ $b_0=0.075$ แสดงในรูปที่ 16 ทั้งในแบบวิวัฒนาการตามเวลา และค่าที่เวลาต่างๆ ที่เป็นฟังก์ชันของ N ซึ่งแสดงไว้ที่ 3 เวลาหลังเวลา $t=7$ จนถึงเวลาสุดท้ายของวิวัฒนาการ (พร้อมกับแถบความคลาดเคลื่อนที่เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าเฉลี่ย) จากรูปจะเห็นว่าวิวัฒนาการของ l_{100} มีความราบเรียบ นั่นคือ ค่าจะเพิ่มขึ้นตอนเริ่มต้นและเข้าสู่ค่าที่สมดุลโดยค่าไม่ลดลงจากค่าสูงสุดภายในระยะเวลาเท่าๆ กับการผ่อนคลายอัตราส่วนไวเรียลและมีความเสถียรมากกว่า l_{80} ที่มีการกวัดแกว่งจาก ROI อย่างรุนแรง จากรูปถึงแม้เราจะทราบว่า ROI เกิดขึ้นหลังเข้าสู่สมดุลไวเรียล แต่วิวัฒนาการของ l_{100} ก็ยังคงมีความราบเรียบไม่แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงอย่างรุนแรงของ l_{80} ที่เกิดขึ้นภายใน การที่ l_{100} ไม่ตอบสนองต่อ ROI อาจเป็นเหตุผลมาจากการที่ ROI เป็นการเปลี่ยนแปลงภายในแกนกลางแต่ l_{100} จะถูกควบคุมโดยอนุภาคที่อยู่ภายนอกซึ่งเป็นคนละส่วนกัน อย่างไรก็ตาม ค่า l_{100} ที่สมดุลยังคงไว้ซึ่งความจำจากจำนวนอนุภาคที่เงื่อนไขเริ่มต้น นั่นคือ ค่าจะลดลงเมื่อเราเพิ่มจำนวนอนุภาคในระบบ นอกจากนี้ อัตราส่วนระหว่าง l_{100} สุดท้ายและเริ่มต้นมีค่ามากกว่าอัตราส่วนเดียวกันของ l_{80} ที่มีค่าไม่เกิน 1.5

ต่อไปเราพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง I_{100} หลังเข้าสู่สมดุลไวเรียลและจำนวนอนุภาค จากรูปเราพบว่าที่ N ใดๆ ค่า I_{100} ค่อนข้างมีความเสถียรมากโดยไม่แกว่งไปตามเวลาซึ่งสอดคล้องกับรูปแบบด้วยเหตุผลที่ว่าค่า I_{100} ขึ้นอยู่กับอนุภาคที่ถูกคายออกไปแล้วมากกว่าอนุภาคที่อยู่ภายใน และจากรูปเราจะเห็นการลดลงของ I_{100} กับจำนวนอนุภาคอย่างชัดเจน แถบความคลาดเคลื่อนถือว่ามีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับค่า I_{100} ที่วัดได้



รูปที่ 16 : ค่าเฉลี่ยระหว่างตัวอย่างของ I_{100} สำหรับ N ต่างๆ ในกรณี $b_0=0.075$ และมีการกระจายตัวแบบ Poissonian สำหรับ วิวัฒนาการตามเวลา (บน) และค่าที่เวลาหลังเข้าสู่สมดุลไวเรียลที่เป็นฟังก์ชันกับ N (ล่าง)



รูปที่ 17 : (บน) ค่าเฉลี่ยของวิวัฒนาการตามเวลาของ I_{90} สำหรับ N ต่างๆ (ล่าง) วิวัฒนาการตามเวลาของ I สำหรับมวลที่ถูกยึดเหนี่ยวตั้งแต่ 60 จนถึง 100 เปอร์เซนต์ สำหรับ $N=128,000$ หนึ่งตัวอย่าง โดยทั้ง 2 ภาพ เป็นกรณี Poissonian และมี $b_0=0.075$

ในลำดับถัดไปเราลองพิจารณา I สำหรับอัตราส่วนมวลอื่น โดยวิวัฒนาการตามเวลาของค่า I_{90} สำหรับกรณี $b_0=0.075$ แบบ Poissonian ที่ N ต่างๆ (เฉลี่ยระหว่างกลุ่มตัวอย่าง) แสดงอยู่ในรูปที่ 17 (บน) ซึ่งจะเห็นว่าวิวัฒนาการของ I_{90} จะมีพฤติกรรมใกล้เคียงกับ I_{80} (รูปที่ 10) มากกว่าเนื่องจากเราได้ทำการดึงอนุภาคที่อยู่ไกลออกไปทำให้ความถี่ที่คำนวณได้เป็นความถี่ของระบบจริงๆ แต่เราจะสังเกตเห็นว่าค่าของ I_{90} ในสมมุติที่ได้จะมีค่าประมาณ 0.6 ซึ่งน้อยกว่า I_{80} ที่มีค่าอยู่ประมาณ 1 ซึ่งอาจเป็นเหตุผลจากการที่ I_{90} ได้นำเอาอนุภาคที่ไกลออกไปเข้ามาคิดเพิ่มเติมทำให้ความถี่ลดลง อย่างไรก็ตามงานวิจัยในอดีตพบว่าการ

ใช้ l_{80} และ l_{90} ในการวิเคราะห์ความริของระบบไม่มีความแตกต่างอย่างเห็นในด้านอื่นๆ นอกจากค่าความริที่น้อยลง [33] นอกจากนี้เรายังพิจารณาถึง l อื่นๆ นอกจากที่ได้กล่าวไป โดยค่าของ l สำหรับอัตราส่วนของมวลตั้งแต่ 60 ถึง 100 สำหรับ $b_0=0.075$ และ $N=128,000$ แบบ Poissonian โดยเราเลือกมา 1 ตัวอย่างได้แสดงอยู่ในรูปที่ 17 (ล่าง) เราพบว่าพฤติกรรมของ l ตั้งแต่ 60 จนถึง 90 มีพฤติกรรมคล้ายๆ กันนั่นคือขึ้นสู่ค่าสูงสุด (โดยยิ่งอัตราส่วนมวลสูงจะยิ่งขึ้นช้า) และลดลงสู่ค่าในสมดุล นอกจากนี้เรายังสังเกตว่าค่าในสมดุลจะยิ่งเพิ่มขึ้นหากอัตราส่วนของมวลที่ถูกยึดเหนี่ยวลดลงซึ่งเป็นการเน้นย้ำกว่า ROI เป็นปรากฏการณ์ที่เริ่มจากภายในระบบออกไปสู่ภายนอก อย่างไรก็ตามจะเห็นว่า l_{100} ยังคงไม่มีผลกระทบต่อความไม่เสถียรดังกล่าว

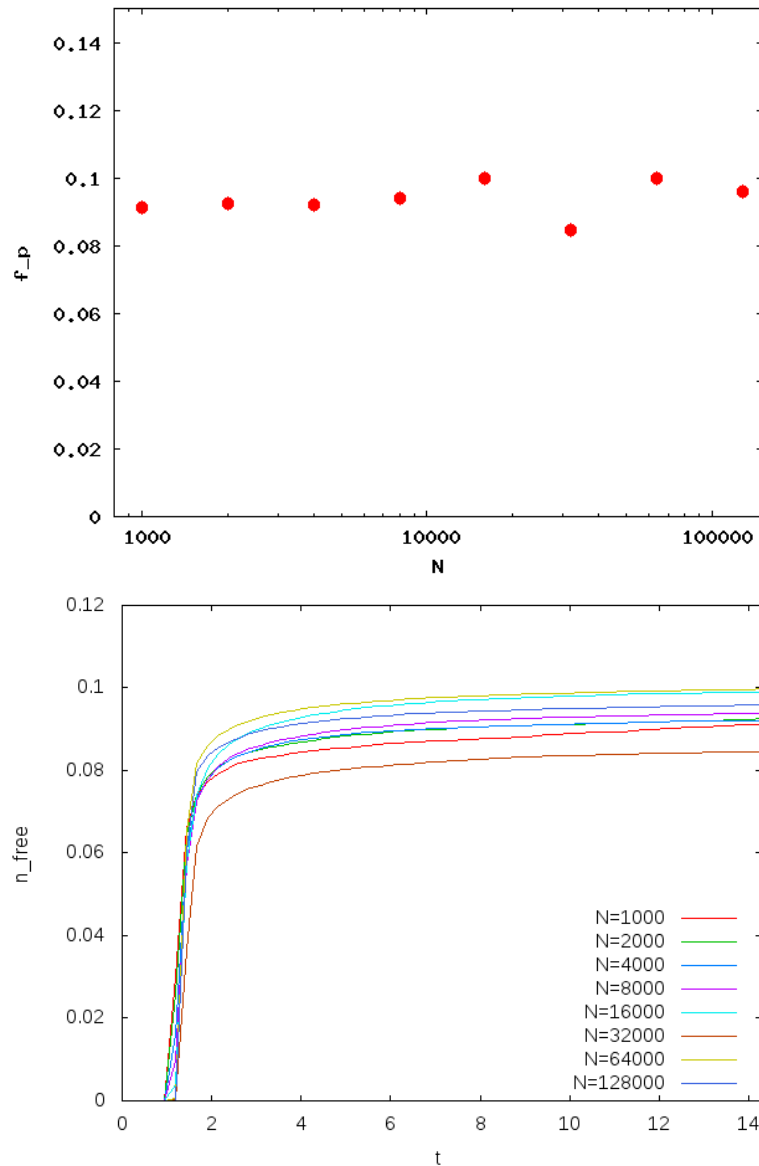
จากที่ได้กล่าวมา กลไกการวิวัฒนาการการสุ่มรูปร่างทรงรีเกิดจากการยุบตัวและขยายตัวจากแรงดึงดูดซึ่งอาจทำให้เกิดการคายมวลบางส่วนจากระบบ ในลำดับถัดไปเราจะพิจารณาว่าอัตราส่วนการคายมวลขึ้นกับจำนวนอนุภาคหรือไม่ รูปที่ 18 เป็นรูปที่แสดงถึงอัตราส่วนการคายมวล (f_p) ที่เวลาสุดท้ายที่จำนวนอนุภาคต่างๆ และวิวัฒนาการของตัวแปรดังกล่าวตลอดช่วงเวลาของระบบสำหรับกรณี $b_0=0.1$ ที่มีโครงสร้างแบบ Poissonian ข้อมูลทั้งหมดถูกเฉลี่ยระหว่างตัวอย่าง อัตราส่วนดังกล่าวคำนวณจากจำนวนอนุภาคที่ถูกคายออกมาทั้งหมดที่มีพลังงานเป็นบวกหารด้วยจำนวนอนุภาคทั้งหมดในแต่ละกรณี จากรูปจะเห็นว่าอัตราส่วนการคายมวลแทบไม่มีการเปลี่ยนแปลงตั้งแต่ระบบที่เล็กที่สุดไปจนถึงระบบที่ใหญ่ที่สุดโดยจะแกว่งอยู่ในช่วง 0.08-0.1 โดยไม่ปรากฏการเพิ่มขึ้นหรือลดลงกับจำนวนอนุภาคต่างๆ ที่กรณี $b_0=0.1$ เป็นกรณีที่ค่อนข้างใกล้จุดวิกฤติที่สุด นั่นคือ พบเห็นการเปลี่ยนเฟสจากไม่เสถียรต่อ ROI เป็นเสถียร

ผลที่ได้นี้แตกต่างจากกรณีการยุบตัวของระบบที่มีความหนาแน่นคงที่และไม่มีความเร็ว [39] โดยในระบบดังกล่าวทรงกลมจะยุบตัวสู่เอกภาวะ (หรือ singularity) ยกเว้นจะเป็นกรณีระบบ N อนุภาค ที่ขนาดของระบบจะถูกหยุดไว้ด้วยการกวัดแกว่งทางสถิติ และในระบบดังกล่าวการคายมวลจะเป็นฟังก์ชันของจำนวนอนุภาคอย่างชัดเจนได้เป็นรูปแบบดังนี้

$$f_p \approx a + b \log N$$

นอกจากจำนวนอนุภาคที่คายออกมาจะขึ้นกับจำนวนอนุภาคแล้ว ปริมาณต่างๆ ได้แก่ พลังงานที่คายออกมา รัศมีต่ำสุด ความลึกของบ่อศักย์ ขนาดของแกนกลางในสมดุล ความหนาแน่นแกนกลาง และปริมาณอื่นๆ

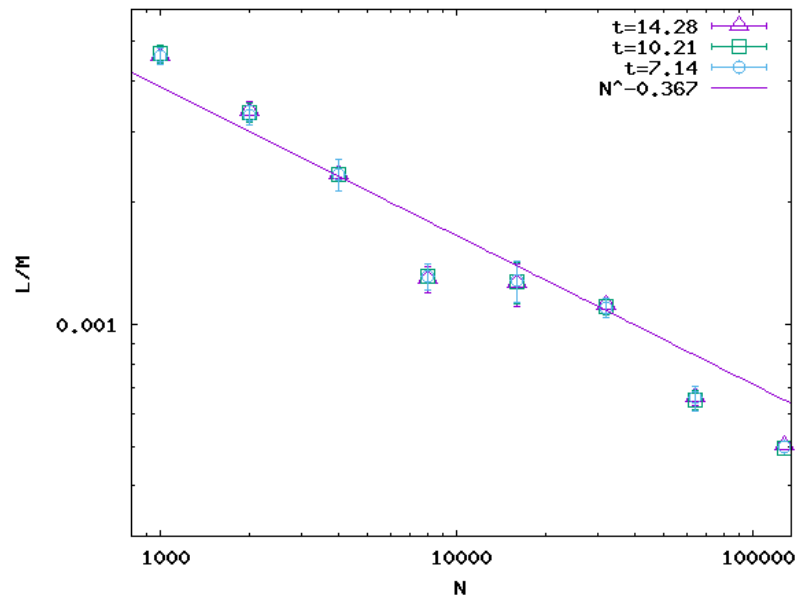
ซึ่งเหตุผลที่อัตราส่วนของมวลที่คายในกรณีที่เราศึกษาไม่แปรเปลี่ยนตาม N อย่างชัดเจนอาจเป็นเหตุผลมาจากการคายมวลในกรณีนี้มีค่าน้อยเนื่องจากระบบมีความดันตอนเริ่มต้นผ่าน b_0 ทำให้การคายมวลถูกจำกัดจากการที่บ่อศักย์ ณ ตอนยุบตัวสูงสุดไม่มีความรุนแรงมากพอและผลจากการกวัดแกว่งเชิงสถิติถูกจำกัดโดย b_0 และการที่ความหนาแน่นเริ่มต้นลดลงตามรัศมียิ่งทำให้การยุบตัวลดความรุนแรงลงไปอีก โดยหากพิจารณา f_p ที่เวลาใดๆ ในรูปด้านล่างจะพบว่าการคายมวลค่อนข้างเกิดเร็วภายใน $t=2$ พร้อมกับการเข้าสู่สมดุลไวเรียล และอัตราส่วนค่อนข้างเสถียร



รูปที่ 18 : ค่าเฉลี่ยของ (บน) อัตราส่วนของมวลที่คายออกมา หรือ f_p ของระบบโครงสร้าง Poissonian ที่มี $b_0=0.1$ ในแต่ละจำนวนอนุภาค (ล่าง) วิวัฒนาการของ f_p ที่จำนวนอนุภาคใดๆ

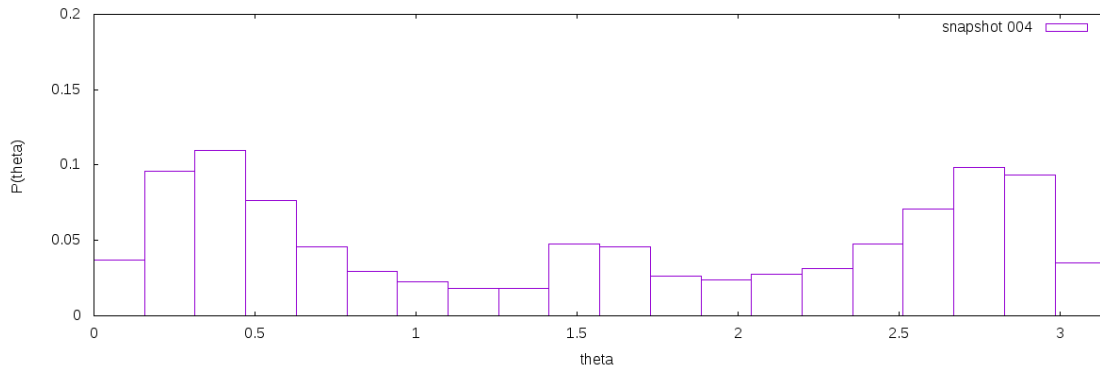
ในขั้นถัดไปจะพิจารณาการหมุนที่เกิดจากการยุบตัวของระบบ โดยโมเมนต์เชิงมุมจำเพาะ (หรือโมเมนต์เชิงมุมต่อมวล) วัตรอบจุดศูนย์กลางมวลของระบบที่ถูกยึดเหนี่ยวที่จำนวนอนุภาคใดๆ ในกรณี $b_0=0.1$ ที่เวลาต่างๆ พร้อมแถบความคลาดเคลื่อนสำหรับโครงสร้าง Poissonian แสดงในรูปที่ 19 จากการศึกษาในอดีตพบว่าระบบที่มีการยุบตัวและเสถียรสามารถสร้างโมเมนต์เชิงมุมในส่วนของอนุภาคที่ถูกยึดเหนี่ยวได้ [38] จากรูปจะเห็นว่าโมเมนต์เชิงมุมค่อนข้างเสถียรและไม่แปรเปลี่ยนเมื่อเวลาผ่านไป และลดลงตามจำนวนอนุภาคซึ่งสอดคล้องกับผลการศึกษาที่ผ่านมา จากการใส่เส้น

ความสัมพันธ์กับผลที่ได้ พบว่าโมเมนต์เชิงมุมจำเพาะลดลงตามแนวโน้ม $N^{-0.367}$ ซึ่งลดลงช้ากว่า $N^{-1/2}$ ที่เป็นการกวัดแกว่งในเชิงสถิติ จากการศึกษาในอดีตพบว่ากลไกการเกิดโมเมนต์เชิงมุมจะขึ้นอยู่กับทิศทางการกระจายมวลเช่นกันเนื่องจากแกนหมุนจำเป็นต้องมีทิศทางที่มวลพุ่งออกด้วยอัตราเร็วที่มากที่สุด



รูปที่ 19 : ค่าเฉลี่ยของโมเมนต์เชิงมุมจำเพาะรอบจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาคที่ถูกยึดเหนี่ยวของระบบโครงสร้าง Poissonian ที่มี $b_0=0.1$ ในแต่ละจำนวนอนุภาคที่เวลาต่างๆ พร้อมแถบความคลาดเคลื่อน

จากการศึกษาพบว่าความเร็วในแนวรัศมีมีความจำเป็นต่อการพัฒนารูปร่างด้วย ROI ในขั้นสุดท้ายของการศึกษาหัวข้อนี้จะพิจารณาการวางตัวของความเร็วในระหว่างที่มีการยุบตัว โดยแผนภูมิการกระจายตัวของโคไซน์ทิศทางของความเร็วสัมพันธ์ในระหว่างที่มีการยุบตัวของกรณี $b_0=0.05$ และ $N=32,000$ สำหรับกรณี Poissonian แสดงอยู่ในรูปที่ 20 โดยนิยามโคไซน์ทิศทางของความเร็วมีค่า 0 เมื่อความเร็วสัมพันธ์อยู่ในแนวตั้งฉากกับรัศมี และมีค่า 0 และ 180 องศา เมื่อความเร็วอยู่ในแนวชี้เข้าและชี้ออกในแนวรัศมี ตามลำดับ โดยในกรณีที่ยกมาเป็นกรณีที่เกิด ROI ที่นำไปสู่รูปร่างที่มีความรีสูง จากแผนภูมิจะเห็นว่าอนุภาคส่วนใหญ่มีความเร็วสัมพันธ์ในแนวรัศมีเป็นจำนวนมากกว่าความเร็วในแนวเส้นรอบวง ซึ่งมีผลทำให้เกิดวิวัฒนาการด้วย ROI ในลำดับต่อมา



รูปที่ 20 : แผนภูมิการกระจายของโคไซน์ทิศทางของความเร็วสัมพัทธ์ใน 1 ตัวอย่างของกรณี $b_0=0.05$ และ $N=32,000$

4.1.4 อภิปรายผล

จุดมุ่งหมายหลักของการศึกษานี้คือเพื่อทดสอบว่าการใช้ระบบอนุภาค N ตัว ที่ถึงแม้จะมีจำนวนอนุภาคสูงจะสามารถเป็นตัวแทนของระบบในขอบเขตของไหลได้หรือไม่ โดยผลที่ได้พบว่าการขึ้นกับ N ของวิวัฒนาการสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 แบบ คือ อย่างแรกในระบบที่มีจำนวนอนุภาคน้อย เราสามารถสังเกตวิวัฒนาการแบบมีการชนได้ซึ่งสังเกตจากการลดลงอย่างช้าๆ ของความรี การขึ้นกับ N อีกประเภทหนึ่งมีความซับซ้อนกว่ามากเนื่องจากเกี่ยวข้องกับ ROI ซึ่งยังคงอยู่ในขอบเขตที่ไม่มีการชน ผลกระทบจาก N ในกรณีนี้ตรวจจักษ์ยากกว่าเนื่องจากเวลาที่ใช้ในการเกิด ROI เปลี่ยนแปลงน้อยมากในบางกรณี (ถึงแม้ในบางกรณีการเลื่อนของการเริ่มต้นของ ROI จะสามารถสังเกตเห็นได้ชัดเจน) และผลกระทบนี้เหมือนจะไม่ได้ถูกสังเกตเห็นในการศึกษาในอดีตยกเว้นงานวิจัยจาก Boily & Athanassoula [34] ซึ่งใช้เงื่อนไขเริ่มต้นที่มีความหนาแน่นคล้ายๆ กัน และได้รายงานการลู่เข้าของตัวแปรรูปร่างเมื่อระบบมีจำนวนอนุภาคตั้งแต่ 10^5 ตัวขึ้นไป อย่างไรก็ตามข้อสรุปดังกล่าวพบว่ายังคงขึ้นกับเงื่อนไขเริ่มต้นเช่นกัน จากการศึกษาที่เราได้พบว่าในบางเงื่อนไขเริ่มต้น (เช่น $b_0=0.05$) ค่าความรีมีแนวโน้มที่จะลู่เข้าสู่ค่าๆ หนึ่ง แต่ในทางกลับกัน บางระบบ (เช่น $b_0=0.075$) วิวัฒนาการของ l_{80} แสดงให้เห็นว่าถึงแม้จะเพิ่มจำนวนอนุภาคเป็น 128,000 ระบบก็ยังคงไม่มีการลู่เข้าสู่ค่าใดๆ

การศึกษานี้เน้นย้ำว่าการที่ระบบที่มีจำนวนอนุภาคน้อยไม่ได้หมายความว่าจะให้ผลที่ผิดกับวิวัฒนาการของขอบเขตที่ไม่มีการชน แต่หมายความว่าวิวัฒนาการของระบบที่มีอนุภาคเป็นจำนวนน้อยจะมีผลของการกวัดแกว่งจากเงื่อนไขเริ่มต้นที่มากที่รวมเข้าไปด้วยในวิวัฒนาการนั่นเอง ซึ่งการกวัดแกว่งดังกล่าวอาจนำไปสู่ความไม่เสถียรต่างๆ เช่น ROI หรือความไม่เสถียรอื่นๆ ได้ วิธีการทดสอบที่เป็นไปได้ อย่างหนึ่งคือเราสามารถเพิ่มจำนวนอนุภาคแต่คงไว้ซึ่งรูปแบบการกระเพื่อมของระบบที่มีจำนวนอนุภาคน้อยและดูผลว่าเปลี่ยนไปหรือไม่ อย่างไรก็ตามในการศึกษานี้มีจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทราบถึงชนิดของความไม่เสถียรที่อาจเกิดขึ้นจึงสามารถควบคุมระบบหรือแปรผลระบบได้อย่างถูกต้อง ในการศึกษากรณีทั่วไปที่เราไม่ทราบถึงชนิดของความไม่เสถียรที่อาจเกิดขึ้นอาจทำให้การศึกษามีความซับซ้อนกว่านี้

4.2 การก่อกำเนิดแขนเกลียว

4.2.1 ที่มาของปัญหา

จากการสังเกตการณ์พบว่าดาราจักรบนท้องฟ้ามากกว่าครึ่งประกอบไปด้วยแขนเกลียว ดังนั้นเราจึงสงสัยว่าอาจมีกลไกทั่วไปในการเกิดแขนเกลียวในหมู่ของดาราจักรจากการที่แขนเกลียวมักจะพบเห็นร่วมกับส่วนประกอบอื่นๆ ของดาราจักร เช่น บัลจ์ หรือจาน ทฤษฎีการเกิดแขนเกลียวได้ถูกเสนอโดย Lin และ Shu ว่าแขนเกลียวเป็นรูปแบบหนึ่งของการรบกวนในลักษณะคลื่นความหนาแน่น หรือ Density wave ที่อยู่ในสถานะกึ่งสถิตย์ที่แผ่ไปทั่วจานของดาราจักรที่อยู่ในสมดุลที่ไม่เสถียร [15] สมมุติฐานนี้ได้นำไปสู่การค้นคว้าต่อยอดในการพัฒนาทฤษฎีคลื่นความหนาแน่นมากมาย [56-57]

หลังจากทฤษฎีคลื่นความถี่ของ Lin และ Shu ได้มีการเสนอทฤษฎีการสร้างแขนเกลียวที่ใกล้เคียงกับการสังเกตการณ์จริงมากยิ่งขึ้น นั่นคือ แขนเกลียวที่มีการหมุนแบบเฉือนเกิดจากการก่อตัวของความหนาแน่นจากความไม่เสถียรต่อการยุบตัวในแนวตั้งและถูกเงื่อนไขโดยการหมุนพื้นหลัง หรือสมมุติฐานของ Goldreich---Lynden-Bell [58-59] ซึ่งการเกิดแขนเกลียวในลักษณะนี้เป็นการล้มล้างการที่แขนเกลียวเป็นคลื่นความหนาแน่นไปโดยปริยายเนื่องจากในกรอบความคิดของคลื่นความหนาแน่นแขนเกลียวจะเป็นคลื่นที่มีรูปร่างคงที่ นอกจากนี้สมมุติฐาน Goldreich---Lynden-Bell ยังได้ถูกพัฒนาในกรอบของการถ่ายเทโมเมนตัมระหว่างแกนกลางกับแขนเกลียวเช่นกัน [60] นอกจากนี้ การกำเนิดแขนเกลียวยังสามารถพิสูจน์ได้ว่าเกิดจากการโคจรเข้าใกล้กันและแรงไทดัลอาจทำให้เกิดสะพานและหาง (bridge and tail) ที่ถูกฉีกขาดจากการหมุนของวัตถุทำให้เกิดเป็นแขนเกลียวในที่สุด [21] ข้อสมมุติฐานนี้มาจากการที่นักดาราศาสตร์พบว่าดาราจักรกันหอยมักมีดาราจักรอื่นอยู่ใกล้เคียง

อย่างไรก็ตามถึงแม้กรอบทฤษฎีในการอธิบายการเกิดแขนเกลียวจะมีความพร้อมเพียงใด การสังเกตการณ์วิวัฒนาการของดาราจักรแทบเป็นไปไม่ได้เนื่องจากระยะเวลาที่ดาราจักรต้องใช้มีเวลานานมาก ดังนั้น การสังเกตการณ์จึงจำกัดแค่พลศาสตร์ ณ เวลาที่สังเกตการณ์เท่านั้น ในการนี้การจำลองทางคอมพิวเตอร์จึงเข้ามามีบทบาทในการศึกษาวิวัฒนาการของดาราจักร สมมุติฐาน Goldreich---Lynden-Bell ได้ถูกทดสอบด้วยระบบที่มีการคายความร้อนในระหว่างวิวัฒนาการเพื่อให้เกิดความไม่เสถียรในการยุบตัวลงบนฉากหลังที่มีการหมุนแบบเฉือนทั้งในระบบจานที่อยู่เดี่ยว [61-62] หรือระบบเชิงประกอบที่ประกอบด้วยจานและแฮโล [63] โดยการศึกษาได้พบการก่อตัวของแขนเกลียวจากกระบวนการดังกล่าว นอกจากนี้ ระบบอื่นๆ ที่แสดงถึงการก่อกำเนิดของแขนเกลียว ได้แก่ ระบบอนุภาคที่มีเพียงแรงดึงดูดเพียงอย่างเดียวที่ฝังตัวอยู่ในศักย์ของแฮโลแบบแข็งก็ถูกศึกษา [64-65] รวมไปถึงจานโดดเดี่ยวที่ถูกรบกวนจากแรงภายนอก [66-67] หรือแม้กระทั่งระบบโดดเดี่ยวที่ไม่เสถียรต่อการยุบตัว [68]

อย่างไรก็ตามถึงแม้การศึกษาการเกิดแขนเกลียวในระบบโดดเดี่ยวจะมีความศึกษาอย่างกว้างขวาง แต่การศึกษาการก่อกำเนิดแขนเกลียวในระบบที่มีการโคจรเข้าใกล้กันทำให้มีตัวแปรในระบบเพิ่มขึ้น ได้แก่ เส้นทางวงโคจร คุณสมบัติวงโคจร หรือแม้กระทั่งชนิดของวัตถุที่เคลื่อนผ่าน ในกรอบทฤษฎีนี้ รูปร่างของแขนเกลียวที่เกิดขึ้นมีความหลากหลายมากกว่าในระบบโดดเดี่ยวมาก [69-71] รวมถึงบางตัวอย่างที่ได้มี

ลักษณะใกล้เคียงกับดาราจักรที่สังเกตการณ์ได้ นอกจากนี้ การศึกษาวิวัฒนาการจากการโคจรเข้าใกล้หรือชนกันของดาราจักรมากกว่า 2 อัน ไม่เพียงแต่สามารถสร้างดาราจักรกันหอยได้เท่านั้น ดาราจักรไร้รูปทรงอื่นๆ บางอันก็สามารถจำลองได้ด้วยระบบดังกล่าว [72]

ในการศึกษานี้จะเน้นไปที่การเกิดแขนเกลียวจากระบบที่มีรูปร่างจานที่มีการยุบตัวในลักษณะที่มีการหมุนร่วมด้วย ขอบเขตของการศึกษาจะอยู่ที่รูปร่างของแขนเกลียวรวมถึงคุณสมบัติที่เกี่ยวข้องกับรูปร่างของเงื่อนไขเริ่มต้น

4.2.2 กรอบทฤษฎี

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของระบบจานแบนใน 2 มิติที่มีอัตราเร็วเชิงมุมคงที่ ω_0 และความหนาแน่นเชิงพื้นผิวคงที่ Σ_0 โดยกรอบการเคลื่อนที่ที่พิจารณาคือกรอบที่หมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุม ω_0 เช่นกัน เราได้สมการการเคลื่อนที่ของอนุภาคทดสอบที่ระยะเริ่มต้น r_0 ในพิกัดเชิงขั้วสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \omega_0^2 r + 2\omega_0 r \frac{d\theta}{dt} - \nabla_r \phi(r)$$

เมื่อพจน์แรกและพจน์ที่สองทางขวามือของสมการคือแรงหนีศูนย์กลางและแรงโคริโอลิส พจน์ที่สามคือแรงโน้มถ่วงจากสนามความโน้มถ่วงของจานแบนที่มีความหนาแน่นคงที่สามารถเขียนได้อยู่ในรูป [73]

$$\phi(r) = \frac{2\phi_0}{\pi} E\left(\frac{r}{r_d}\right)$$

เมื่อ ϕ_0 คือ ศักย์ที่ใจกลางของจาน และ r_d คือ รัศมีของขอบเขตจาน โดย E คือ ฟังก์ชันที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1 - m \sin^2 \theta}$$

สำหรับ m ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 ในขั้นถัดไปเราสามารถแปลงรัศมีในพิกัดเชิงขั้วให้เป็นรัศมีที่ไม่มีหน่วยโดยใช้ตำแหน่งเริ่มต้น นั่นคือ

$$R = \frac{r}{r_0}$$

เราได้สมการการเคลื่อนที่ในแนวรัศมีหลังจากจัดในรูปรัศมีที่ไม่มีหน่วย R ดังนี้

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \omega_0^2 R + 2\omega_0 R \frac{d\theta}{dt} - \nabla_R \phi(R; r_0)$$

เมื่อทั้ง R และ r_0 ถูกยุบรวมเข้าไปในศักย์โน้มถ่วง เช่นเดียวกันสมการการเคลื่อนที่ในแนวเส้นรอบวงเขียนได้เป็น

$$R \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dR}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -2\omega_0 \frac{dR}{dt}$$

เมื่อพจน์ทางขวามือของสมการคือแรงโคริโอลิสในแนวเส้นสัมผัส

จากสมการการเคลื่อนที่จะเห็นว่าการที่มี ω_0 ในสมการการเคลื่อนที่ทำให้วิวัฒนาการของทั้ง R และ θ ไม่เพียงแต่ขึ้นกับเวลาเท่านั้นแต่ยังขึ้นกับตำแหน่งเริ่มต้นของอนุภาค r_0 ด้วย นั่นคือเราอาจแปลความหมายได้ว่าอนุภาคทุกตัวจะมีความทรงจำของตำแหน่งเริ่มต้นซึ่งมีผลต่อรูปแบบวิวัฒนาการนั่นเอง ถึงแม้ว่าจะเป็นกรณี ω_0 จะเท่ากับศูนย์ เรายังได้ว่า R ยังคงขึ้นกับ r_0 เช่นเดิมแต่ในกรณีนี้มุมของอนุภาคแต่ละตัวจะคงที่ กรณีที่วิวัฒนาการของระบบไม่มีความทรงจำของตำแหน่งเริ่มต้นอย่างสิ้นเชิงคือกรณีการยุบตัวของทรงกลมที่มีความหนาแน่นคงที่และไม่มีความเร็วเริ่มต้นอยู่เลย การศึกษาในอดีตพบว่าระบบนี้จะไม่มีการล้าต๋บนั่นจนถึงระดับการกระเพื่อมจากจำนวนอนุภาคที่จำกัด [39]

4.2.3 การเตรียมระบบ หน่วย และตัวแปร

เงื่อนไขเริ่มต้นของระบบจะพิจารณาจากที่หมุนความหนาแน่นเริ่มต้น ρ_0 รูปร่างของระบบจะถูกวัดด้วยความหนา z_0 และความรีของพื้นที่หน้าตัด $e_0 = 1 - R_b/R_a$ เมื่อ R_a และ R_b คือความยาวครึ่งแกนหลักและแกนรองของพื้นที่หน้าตัดตามลำดับ โดยเรากำหนดให้ $R_b = 1$ ในทุกกรณี จำนวนอนุภาคที่ใช้คือ 128,000 โดยเราสร้างระบบอนุภาค N ตัว โดยการโยนอนุภาคแบบสุ่มลงไปปริมาตรจานที่มีขนาดตามที่ต้องการ ความเร็วเริ่มต้นของระบบสำหรับอนุภาคทุกตัวคือหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุมเท่ากันโดยมีค่า ω_0 ซึ่งควบคุมด้วยอัตราส่วนไวเรียล b_0 ทิศทางของการหมุนจะเป็นในลักษณะที่เวกเตอร์ของโมเมนตัมเชิงมุมชี้ไปในทิศ $+z$ เรากำหนดให้อนุภาคไม่มีความเร็วในแนวรัศมีเลยและมีการกระจายความเร็วเป็นศูนย์ (หรือระบบเย็น) เหตุผลที่ไม่ใช้การกระจายความเร็วของอนุภาคคือเพื่อที่จะศึกษาผลของตำแหน่งสำหรับการยุบตัวเท่านั้น เงื่อนไขเริ่มต้นของระบบที่ศึกษาเป็นดังรายละเอียดในตารางที่ 3 ซึ่งสามารถแบ่งออกเป็น 3 กลุ่มย่อย คือ จานวงกลมบาง จานวงรีบาง และจานวงรีหนา

เนื่องจากการศึกษานี้เป็นการศึกษาจากที่ยุบตัวจากแรงโน้มถ่วง หน่วยของเวลาที่ใช้ในการศึกษาหัวข้อนี้ควรเป็นหน่วยเวลาของการยุบตัวซึ่งขึ้นกับความหนาแน่น ดังนี้

$$t_{dyn} = \sqrt{\frac{1}{G\rho_0}}$$

เมื่อ G คือค่าคงที่แรงโน้มถ่วงของนิวตัน

โปรแกรมที่ใช้คำนวณการเคลื่อนที่ของแต่ละอนุภาคคือ GADGET-2 ระยะทอนแรงกำหนดไว้ที่ $r_p/720$ ทุกกรณี แรงของแต่ละอนุภาคคำนวณโดยการรวมโดยตรง โดยความแม่นยำในการแก้สมการการเคลื่อนที่ถูกรักษาโดยพลังงานรวมของระบบที่มีค่าไม่เกิน 1 เปอร์เซ็นต์สำหรับระบบที่วิวัฒนาการเป็นเวลานานที่สุด (โดยทั่วไปในกรณีปกติไม่เกิน 0.5 เปอร์เซ็นต์) และโมเมนตัมเชิงมุมรวมของระบบมีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.1 เปอร์เซ็นต์ในทุกกรณี

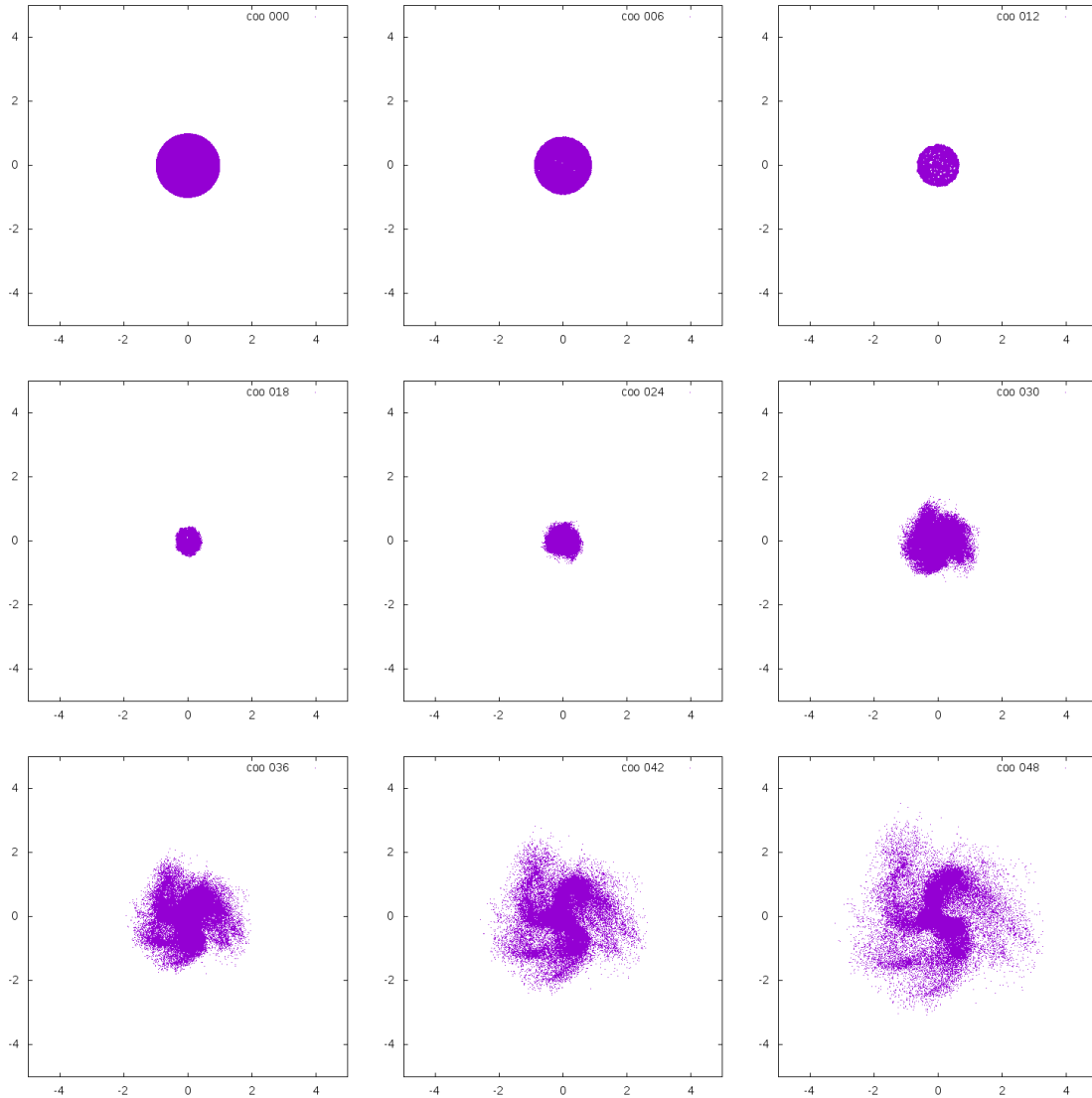
ตารางที่ 3 : รายละเอียดเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบงานที่ศึกษาโดยแยกเป็นกลุ่ม

กลุ่ม	e_0	z_0	b_0
งานวงกลมบาง	0.0	0.1	0.05
	0.0	0.1	0.1
	0.0	0.1	0.2
	0.0	0.1	0.3
งานวงรีบาง	0.1	0.1	0.1
	0.1	0.1	0.2
	0.1	0.1	0.3
	0.1	0.1	0.4
	0.2	0.1	0.1
	0.2	0.1	0.2
	0.2	0.1	0.3
	0.2	0.1	0.4
งานวงรีหนา	0.1	0.4	0.1
	0.1	0.4	0.2
	0.1	0.4	0.3
	0.1	0.4	0.4
	0.2	0.4	0.1
	0.2	0.4	0.2
	0.2	0.4	0.3
	0.2	0.4	0.4

ความแน่นของแขนเกลียววัดได้ด้วยมุมพิทช์ หรือ pitch angle ซึ่งได้จากฟังก์ชันลอการิทึมแบบเกลียวดังนี้

$$r(\varphi) = r_s e^{\varphi \tan \mu}$$

เมื่อ μ คือมุมพิทช์ และ r_s คือค่าคงที่ โดยนิยาม μ มีค่าตั้งแต่ -90 ถึง 90 องศา โดยถ้ามุมมีค่าเข้าใกล้ 0 นั้นคือแขนเกลียวมีการพันอย่างแน่นหนา และถ้ามีค่าเข้าใกล้ -90 หรือ 90 แขนเกลียวจะมีลักษณะเป็นเส้นตรงตามแนวรัศมี และเครื่องหมายของมุมพิทช์สามารถบอกทิศทางการวนรอบของแขนเกลียวได้ โดยถ้ามุมเป็น $+$ จะเป็นแขนเกลียวแบบนำ หรือ leading และถ้าเป็นเครื่องหมาย $-$ จะเป็นแขนเกลียวแบบตาม หรือ trailing



รูปที่ 21 : รูปร่างของจานวงกลมที่มี $b_0=0.2$ ที่เวลาต่างๆ วิวัฒนาการไล่จากซ้ายไปขวาและบนลงล่าง หนึ่งหน่วยเวลามีระยะประมาณ 11 ลำดับภาพ

4.2.4 ผลการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์

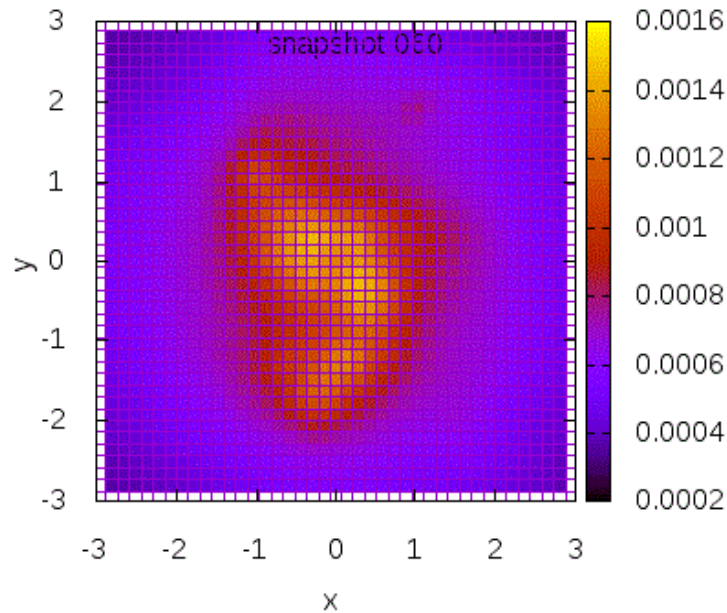
พิจารณาวิวัฒนาการของจานวงกลมเป็นอย่างแรก วิวัฒนาการของรูปร่างบนระนาบ xy (หรือระนาบของจานตั้งแต่เริ่มต้น) ที่เวลาต่างๆ แสดงอยู่ในรูปที่ 21 จากรูปเราจะเห็นว่าระหว่างที่จานมีการยุบตัวในแนวรัศมี แขนเกลียวยังไม่เกิดขึ้นในช่วงดังกล่าวจนกระทั่งระบบยุบตัวสูงสุดที่ลำดับรูปที่ 18 (ใช้เวลาประมาณ 1.7 หน่วยเวลา) นอกจากนี้เราสังเกตเห็นการจับตัวเป็นกลุ่มก้อนภายในจานที่ลำดับภาพที่ 12 ในขณะที่ขอบจานอนุภาคจะกระจุกตัวอย่างแน่นอนและหมุนด้วยอัตราเร็วเชิงมุมที่มากกว่าอนุภาคภายใน หลังจากนั้นที่ระบบมีการขยายตัว ในช่วงแรก (ลำดับที่ 24 และ 30) เริ่มมีการสังเกตเห็นแขนเกลียวที่พุ่งออกมาในบางทิศทาง หลังจากลำดับรูปที่ 30 แขนเกลียวที่ต่อเนื่องที่ยึดกับนิวเคลียสตรงกลางได้ถูกปล่อย

ออกมาอย่างชัดเจนโดยจะขยายตัวออกในแนวรัศมีเรื่อย ๆ ในระหว่างที่แกนเกลียวมีการหมุนเราสังเกตเห็นว่าที่ต้นแกนเกลียวหมุนเร็วกว่าที่ปลายแกนเกลียวซึ่งเป็นไปตามกฎการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุมโดยในระหว่างที่มีการขยายตัว แกนเกลียวจะมีการหมุนที่ช้าลงเรื่อย ๆ โดยที่ปลายแกนเราแทบไม่สามารถสังเกตการหมุน เราจะสังเกตว่าขอบเขตของแกนเกลียวจะมีการขยายตัวในอัตราที่คงที่ (ประมาณ 0.5 หน่วยความยาวต่อ 6 ลำดับภาพ) เราเห็นว่าระบบกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอออกในแนวรัศมีทุกทิศทางแสดงให้เห็นว่าการคายมวลที่สมมาตรถึงแม้ว่าในบางทิศทางที่ตรงกับแกนเกลียวความหนาแน่นจะสูงกว่าทิศทางอื่น ๆ เราเห็นว่าแกนเกลียวที่ได้ในลักษณะนี้เป็นโครงสร้างที่ถาวร นั่นคือ สามารถคงอยู่ได้ถึงแม้เวลาผ่านไปนานกว่า 5 หน่วยเวลาโดยไม่มีสัญญาณว่าแกนเกลียวจะสลายหรือเสียรูปร่าง

จากจนวนกลมดังกล่าวเมื่อใส่การหมุนเข้าไปเราได้ว่าระบบสุดท้ายจะเป็นแกนเกลียวทั้งหมด 3 แกนที่เชื่อมต่อกับจุดกำเนิดที่มีนิวเคลียสขนาดเล็กอยู่โดยแกนทั้งหมดเป็นแบบตาม ความหนาแน่นของแกนเกลียวช่วงต้นจะมีความหนาแน่นมากกว่าแกนเกลียวตอนปลาย แกนมีลักษณะต่อเนื่องไม่มีการขาดตอนตั้งแต่นิวเคลียสไปจนปลายแกน เราเห็นว่าแกนด้านล่างเหมือนจะแยกออกเป็น 2 แกนย่อย และแกนเหล่านี้ฝังตัวอยู่ในฉากหลังที่เบาบาง จากการขยายตัว แกนเกลียวจะมีความหนาแน่นที่เบาบางลงเรื่อย ๆ รวมถึงพื้นหลังที่ขยายตัวออกเช่นกัน จากผลการทดลองนี้จะเห็นว่ากลไกการแตกสมมาตรทรงกลมเป็นแกนเกลียวจะเกิดขึ้นหลังจากที่ระบบมีการยุบตัวสูงสุดซึ่งเป็นเวลาที่วงโคจรของอนุภาคมีความยุ่งเหยิงมากและจัดตัวเป็นแกนเกลียวที่สังเกตเห็น

เนื่องจากเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นจานที่มีสมมาตรทรงกลม เราได้ว่าแกนเกลียวที่เกิดขึ้นในลักษณะนี้เกิดจากการกวัดแกว่งในเชิงสถิติอย่างชัดเจน ดังนั้น ทิศทางแกนเกลียวที่เกิดขึ้นจึงเป็นคล้ายลักษณะแบบสุ่ม นั่นคือ ขึ้นกับว่าตัวอย่างที่ศึกษา มีการกวัดแกว่งในทางใดเป็นพิเศษ หรือในอีกความหมายหนึ่ง ถ้าเราสร้างจนวนกลมในหลายๆ ตัวอย่างโดยสุ่มตำแหน่งอนุภาคไม่เหมือนเดิม เราอาจได้ตำแหน่งของแกนเกลียวที่ไม่เหมือนกันก็ได้ หรือแม้กระทั่งจำนวนของแกนเกลียวในแต่ละตัวอย่างก็อาจมีการเปลี่ยนแปลงได้เช่นกัน

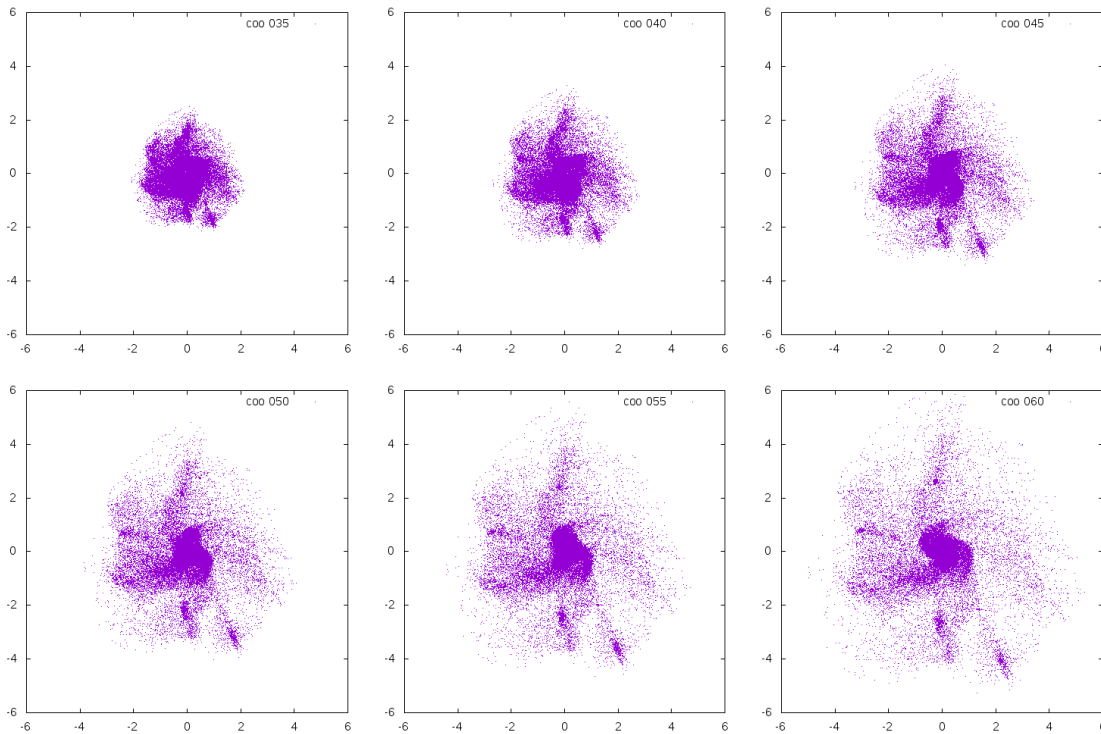
พิจารณาความหนาแน่นของโครงสร้างสุดท้ายของกรณีจนวนกลมที่มี $b_0=0.2$ แผนที่ความหนาแน่นเชิงผิวของโครงสร้างดังกล่าวในลักษณะของแผนภาพความร้อนแสดงอยู่ในรูปที่ 22 โดยใช้สีแสดงถึงระดับความหนาแน่น จากรูปเราสามารถเห็นบริเวณที่ความหนาแน่นสูงที่นิวเคลียสและตามแนวแกนเกลียวด้วยซ้ายบนและซ้ายล่าง โดยแกนด้านขวาบนถึงแม้จะสามารถสังเกตเห็นได้จากรูปร่างของระบบอนุภาค แต่ในแผนภาพความร้อนจะเห็นแกนนั้นสั้นอาจเป็นเพราะความหนาแน่นที่ปลายแกนต่ำ จากแผนภาพความร้อนเราจะเห็นว่าความหนาแน่นบริเวณนิวเคลียสและบริเวณต้นของแกนเกลียวจะสูงที่สุด (สูงกว่าฉากหลังประมาณ 4 เท่า) และความหนาแน่นจะลดลงตามแนวแกนเกลียวทั้งสอง อย่างไรก็ตามบริเวณปลายของแกนเกลียวก็ยังคงมีความหนาแน่นมากกว่าฉากหลังอย่างเห็นได้ชัดประมาณ 2 เท่า นอกจากนี้บริเวณรอบๆ แกนเกลียวยังเป็นบริเวณที่ความหนาแน่นปานกลางซึ่งแสดงถึงอนุภาคพื้นหลังที่กระจายตัวอยู่



รูปที่ 22 : ความหนาแน่นพื้นผิวของโครงสร้างในรูปแบบแผนที่ความร้อนจากจานวงกลมที่มี $b_0=0.2$ ที่เวลาสุดท้าย

ถัดไปเราพิจารณาโครงสร้างของกรณีจานกลมที่มี $b_0=0.1$ ซึ่งโครงสร้างในระหว่างที่มีการวิวัฒนาการรูปร่างแสดงอยู่ในรูปที่ 23 วิวัฒนาการของกรณีในช่วงต้นจะเหมือนกับกรณีที่มี $b_0=0.2$ ทุกประการนั่นคือจานจะยุบตัวและขยายตัวออกและมีในบางทิศทางที่กระแสมวลหนาแน่นกว่าปกติ แต่ในกรณีนี้ กระแสมวลที่พุ่งออกมาไม่สามารถม้วนเป็นแขนเกลียวได้โดยแขนจะมีลักษณะเหยียดตรง และจำนวนแขนที่เราสังเกตเห็นได้จะมีจำนวน 5 แขน (ถึงแม้จะมีแขนที่เหมือนจะเป็นแขนเกลียวด้านขวาอีกแขนหนึ่งแต่ความหนาแน่นก็ต่ำมากจนไม่สามารถสังเกตเห็นเส้นทางของแขน) โดยที่แต่ละแขนจะมีความหนาแน่นต่ำอาจเป็นเพราะจำนวนแขนที่มากขึ้นทำให้จำนวนอนุภาคที่ประกอบเป็นแขนลดลง โดยในกรณีนี้ นิวเคลียสยังคงเห็นได้ชัดแต่นิวเคลียสไม่อยู่ในสมมาตรวงกลมซึ่งอาจเกิดจากการที่นิวเคลียสโดนกระแสมวลดึงจากทุกทิศทางทำให้อาจมีการเสียรูปไปได้

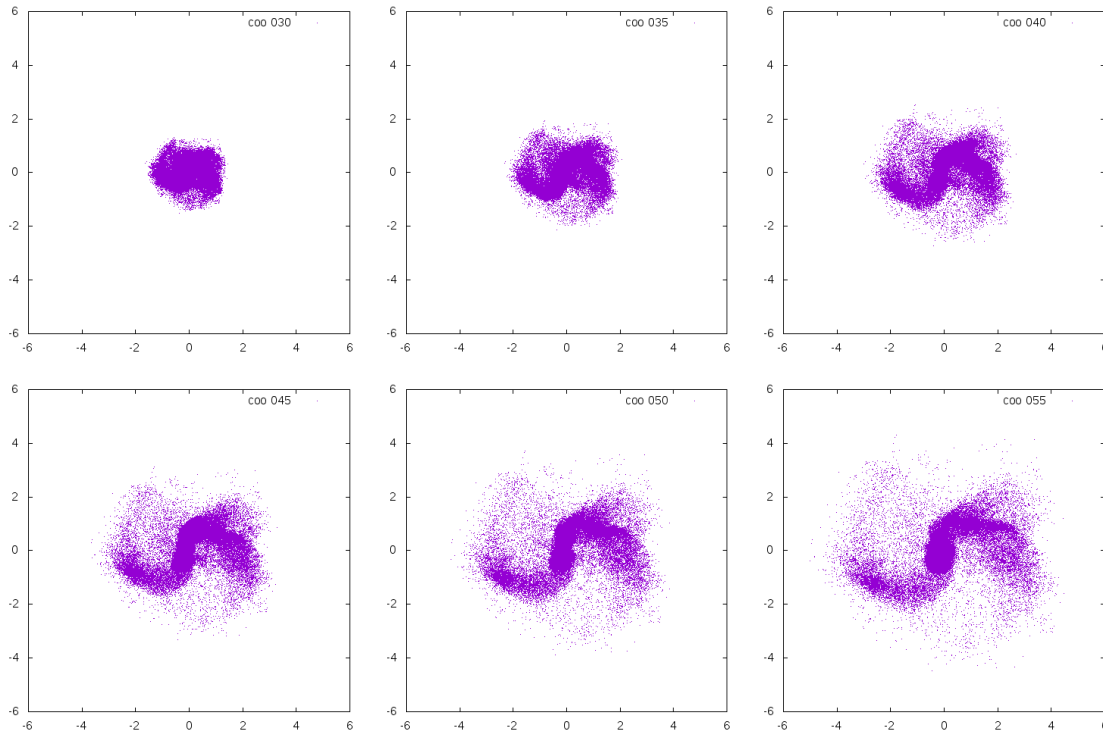
เหตุผลที่การที่ b_0 ต่ำ จะไม่เกิดแขนเกลียวอาจเป็นเพราะความเร็วจากการหมุนไม่มากพอที่จะคงเหลือภายหลังการยุบตัวซึ่งมีแนวโน้มที่จะจัดวงโคจรของอนุภาคใหม่จึงทำให้อนุภาคที่ถูกคายออกมาเหลือแต่ความเร็วในแนวรัศมี โดยในกรณีจานกลมที่มีความหนาแน่นนี้อาจมีค่า b_0 วิกฤตที่เป็นเป็นตัวแบ่งระหว่างการเกิดหรือไม่เกิดแขนเกลียวของระบบดังกล่าว อย่างไรก็ตามคาดว่าหากเราเพิ่ม b_0 มากขึ้นว่า 0.2 แขนเกลียวจะม้วนตัวแน่นขึ้นเนื่องจากการหมุนที่นำไปตอนเริ่มต้นทำให้การเงื่อนไขมีความรุนแรงมากขึ้น



รูปที่ 23 : รูปร่างของจานวงกลมที่มี $b_0=0.1$ ที่เวลาต่างๆ

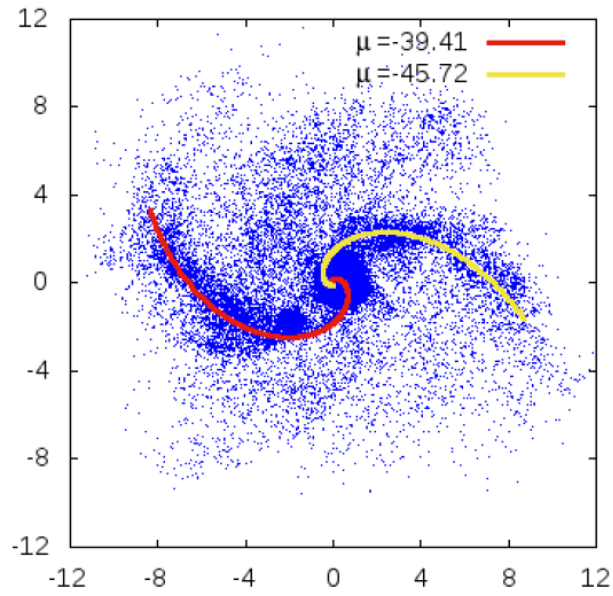
ในลำดับถัดไปเราพิจารณาวิวัฒนาการของจานบางรูปวงรี จากการศึกษานี้พบว่าการยุบตัวของระบบที่ไม่มีแรงหมุนของรูปทรงรีสามารถทำให้การคายมวลถูกจำกัดอยู่ในแนวแกนหลักของเงื่อนไขเริ่มต้นได้ [53] ดังนั้น จากหลักการดังกล่าว เราคาดว่าจะสามารถจำกัดการคายมวลให้อยู่ในแนวแกนหลักของวงรีที่เราศึกษาและทำให้เกิดเป็นรูปร่างที่มีแกนเกลียวหลักเพียง 2 แกนได้ พิจารณารูปร่างในการวิวัฒนาการของจานวงรีบางที่มี $b_0=0.1$ และ $e_0=0.1$ ซึ่งแสดงในรูปที่ 24 ซึ่งเราพิจารณาเฉพาะโครงสร้างหลังจากที่ระบบผ่านการยุบตัวมาแล้วเนื่องจากก่อนการยุบตัวแกนเกลียวยังไม่สามารถสร้างได้ จากรูปเราสามารถสังเกตเห็นแกนเกลียวที่สองฝั่งของนิวเคลียสตั้งแต่เริ่มต้นการขยายตัวซึ่งสอดคล้องกับสมมุติฐานที่ตั้งไว้ในการใช้วงรีเป็นพื้นที่หน้าตัด แกนเกลียวทั้งสองถ้าสังเกตโดยละเอียดจะพบว่าไม่ได้สมมาตรกันโดยสมบูรณ์ แกนทั้งสองมีความหนาแน่นที่ไม่เท่ากันโดยแกนขวาช่วงต้นจะมีความหนาแน่นสูงกว่าแกนด้านซ้าย ที่ปลายแกนด้านขวาก็คล้ายจะบานกว่าฝั่งซ้ายที่แหลมกว่า ในกรณีนี้จะคล้ายกับกรณีจานกลมตรงที่แกนเกลียวที่เกิดขึ้นฝั่งตัวอยู่ในฉากหลังของอนุภาคที่มีความหนาแน่นต่ำกว่า เราสังเกตเห็นนิวเคลียสที่เหมือนจะแยกกันในตอนต้นจากการเฉือนและการคายมวลออกอย่างรุนแรงแต่ในตอนท้ายนิวเคลียสก็หดรตัวกลับมาใกล้เคียงวงกลมมากขึ้น การหมุนของแกนเกลียวก็ยังคงสังเกตได้ในตอนต้นของวิวัฒนาการ ก่อนที่โมเมนตัมเชิงมุมจะลดลงในขณะที่ระบบมีการขยายตัว สำหรับจานวงรีเรายังเห็นการขยายตัวในแนวรัศมีของระบบในอัตราที่คงที่ จากการศึกษาอัตราส่วนไวเรียลและอัตราส่วนของมวลที่คาย พบว่าในกรณีจานหมุนที่ยุบตัว ระบบจะเข้าสู่สมดุลไวเรียลช้ากว่า (ใช้เวลาประมาณ 4 หน่วย ในขณะที่การยุบตัวเกิดขึ้นที่

ประมาณเวลา 1.7 หน่วย) และมวลที่คายแปรผันอยู่ในช่วง 0.08-0.15 สำหรับกรณีจานวงรีบางซึ่งเราคาดว่ามวลที่เป็นอิสระจะเป็นส่วนปลายของแขนเกลียวเนื่องจากขยายตัวด้วยอัตราที่ค่อนข้างคงที่ซึ่งแสดงถึงการที่มวลไม่ได้ถูกยึดเหนี่ยวจากแกนกลาง



รูปที่ 24 : รูปร่างของจานวงรีบางที่มี $b_0=0.1$ และ $e_0=0.1$ ที่เวลาต่างๆ

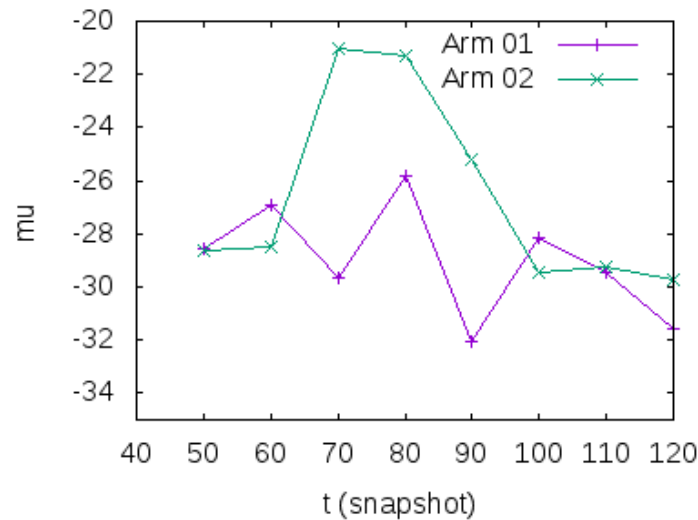
จากการที่เราเลือกที่จะวัดอัตราการม้วนตัวของแขนเกลียวโดยใช้ฟังก์ชันเกลียวแบบลอการิทึม เราจึงจะพิจารณาว่าฟังก์ชันดังกล่าวสามารถใช้วัดแขนเกลียวที่เกิดขึ้นได้หรือไม่ รูปร่างสุดท้ายพร้อมกับการเปรียบเทียบกับฟังก์ชันเกลียวเพื่อหามุมพิทช์แสดงอยู่ในรูปที่ 25 สำหรับกรณี $b_0=0.2$ และ $e_0=0.1$ จากรูปเราจะเห็นว่าฟังก์ชันเกลียวแบบลอการิทึมสามารถใช้วัดระดับการม้วนตัวของแขนเกลียวที่เกิดจากการจำลองทางคอมพิวเตอร์ได้เป็นอย่างดี ฟังก์ชันเกลียวทั้งสองจะมาบรรจบกันที่จุดเริ่มต้นซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางมวลโดยแต่ละแขนให้ค่ามุมพิทช์เท่ากับ -39.41 และ -45.72 สำหรับแขนด้านซ้ายและด้านขวาตามลำดับ จากค่ามุมที่วัดได้ยิ่งเป็นการเน้นย้ำว่าถึงแม้แขนเกลียวทั้งสองจะดูเหมือนสมมาตรรอบนิวเคลียสทั้งสองฝั่งแต่จริงๆ แล้วแขนทั้งสองมีระดับการม้วนตัวต่างกัน ค่ามุมที่ได้เป็น $-$ เนื่องจากแขนเกลียวเป็นแขนแบบตามเมื่อเปรียบเทียบกับค่ามุมพิทช์ที่ได้จากการสังเกตการณ์ ค่ามุมที่ได้จากการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์ถือว่ามีค่าน้อยกว่าดาราจักรที่ได้จากการสังเกตการณ์ที่มีค่าอยู่ประมาณ 5-25 องศา [74-76]



รูปที่ 25 : รูปร่างสุดท้ายของแขนเกลียวสำหรับจานวงรีบางที่มี $b_0=0.2$ และ $e_0=0.1$ พร้อมแขนเกลียวที่ได้จากฟังก์ชันลอการิทึมแบบเกลียวและมุมพิทช์ที่ได้

พิจารณาวิวัฒนาการในเวลาของมุมพิทช์ กราฟของวิวัฒนาการในเวลาของกรณีจานบางที่มี $b_0=0.3$ และ $e_0=0.1$ (แต่ละเส้นสำหรับแต่ละแขนด้านซ้ายและขวาเป็นแขนที่ 1 และ 2 ตามลำดับ) แสดงอยู่ในรูปที่ 26 โดยหน่วยเวลาในกราฟเทียบกับหน่วยเวลาที่นิยามไว้คือประมาณ 11 ช่วงเวลาในกราฟจะเท่ากับ 1 หน่วยเวลาพลศาสตร์ จากรูปเราสังเกตเห็นว่ามุมพิทช์มีการเปลี่ยนแปลงตลอดเลยโดยอาจเป็นการเพิ่มขึ้นหรือลดลงโดยแขนที่ 1 การกวัดแกว่งจะไม่รุนแรง (อยู่ในช่วงประมาณ 6 องศาและมีค่าเฉลี่ยประมาณ -29 องศา) โดยมีแนวโน้มเฉลี่ยลดลง อัตราการลดที่ประมาณได้จากเวลาเริ่มต้นและสุดท้ายคือ 4 องศาต่อ 6 หน่วยเวลา และในแขนที่ 2 จะกวัดแกว่งรุนแรงกว่ามากโดยค่ามุมที่ได้แปรผันอยู่ระหว่างประมาณ -21 จนถึง -30 องศา โดยเริ่มแรกจะอยู่ที่ประมาณ -29 องศา หลังจากนั้นจะเพิ่มขึ้นอย่างรุนแรงไปจนถึง -21 องศาหลังจากนั้นก็ลดลงมาอยู่ที่ประมาณ -30 องศาและอยู่ที่ค่านั้นไปจนจบ อย่างไรก็ตามถึงแม้แขนนี้จะมีการกวัดแกว่งอย่างรุนแรง อัตราการลดโดยเฉลี่ยก็ยังไว้ได้ที่ประมาณ 1 องศาต่อ 6 หน่วยเวลาซึ่งลดลงช้ากว่าแขนที่ 1

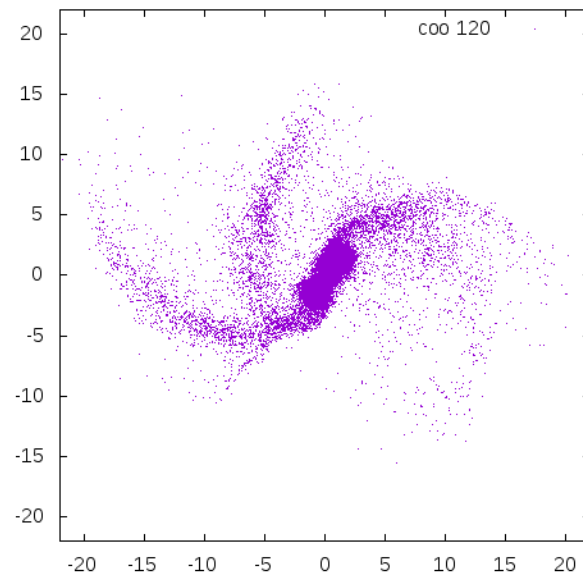
การกวัดแกว่งอย่างรุนแรงของมุมพิทช์คาดว่าเกิดจากการที่วิวัฒนาการของแขนเกลียวมีทั้งความเร็วในแนวรัศมีและความเร็วในแนวเส้นสัมผัสทำให้เกิดการเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างรุนแรง (หรืออาจจะเพิ่มขึ้นสลับลดลง) พลศาสตร์ของดาราจักรที่ได้จากการสังเกตการณ์หรือจากการจำลองด้วยคอมพิวเตอร์โดยการศึกษาอื่นจะมีการอภิปรายเพิ่มเติมในหัวข้อ 4.2.5



รูปที่ 26 : วิวัฒนาการของมวลพิตซ์ในกรณีงานบางที่มี $b_0=0.3$ และ $e_0=0.1$ หน่วยเวลาอธิบายในเนื้อหา

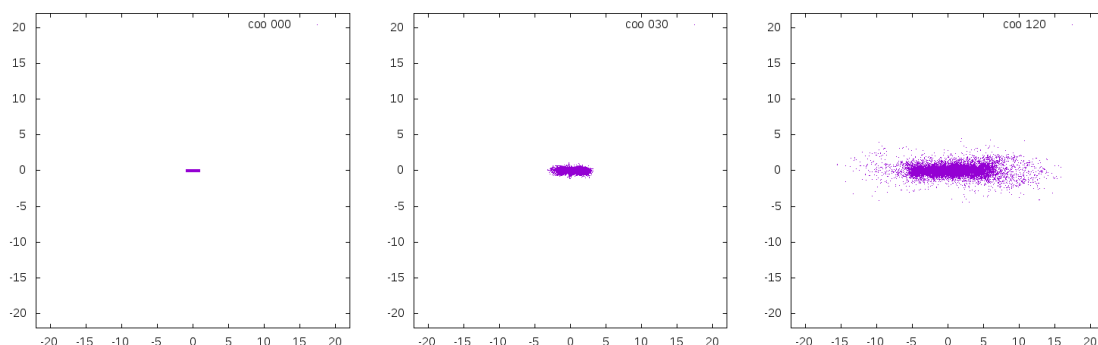
ในลำดับสุดท้ายเราพิจารณารูปร่างของโครงสร้างกันหอยของจานวงรีหนา รูปของโครงสร้างสุดท้ายของกรณีจานวงรีหนาที่ถูกเลือกที่มี $b_0=0.3$ และ $e_0=0.1$ แสดงอยู่ในรูปที่ 27 จากรูปเราจะเห็นได้ว่าถึงแม้เราจะพยายามทำให้พื้นที่หน้าตัดเป็นวงรีเพื่อจำกัดการคายมวลให้อยู่ในแค่ 2 ทิศทางตามแนวแกนโมเมนต์ความเฉื่อยหลัก ในกรณีงานหนาที่เราเลือกมาแสดงให้เห็นว่าการคายมวลอาจมีมากกว่า 2 ทิศทางดังจะเห็นได้จากการเพิ่มขึ้นมาของแขนที่ 3 ซึ่งชี้ไปทางด้านบนของรูป โดยแขนนี้ไม่ได้เป็นแขนที่เล็กกว่าหรือเบาบางกว่าแขนอื่นแต่อย่างใดและแขนทั้งหมดเป็นแขนแบบตาม แต่เป็นแขนที่มีความยาวและความหนาแน่นเปรียบเทียบได้กับแขนทางด้านซ้าย โดยแขนด้านบนยังมีการม้วนตัวที่มากกว่าแขนด้านซ้ายอย่างชัดเจน เรายังสังเกตว่านิวเคลียสในกรณีนี้มีลักษณะเรียวยาวที่เชื่อมต่อกับแขนเกลียวในแต่ละฝั่ง และอนุภาคที่กระจายตัวรอบๆ แขนก็มีไม่มากเท่ากับกรณีจานวงกลม และความหนาแน่นของแขนก็ไม่มากเมื่อเทียบกับกรณีงานบางซึ่งอาจเป็นเพราะอนุภาคส่วนใหญ่จะจุกตัวอยู่ในนิวเคลียส

นอกจากนี้เรายังสังเกตว่าของเขตของโครงสร้างยังใหญ่กว่าโครงสร้างที่เกิดจากจานวงรีบางอย่างเห็นได้ชัด (มีขนาดในแนวนอนมีใหญ่กว่าประมาณ 2 เท่า) ซึ่งอาจเกิดจากการที่ระหว่างการยุบตัวจานวงรีหนามีมวลมากกว่าและยุบตัวลงเป็นซากที่ความหนาแน่นมากกว่าทำให้ปฏิกิริยาที่ดึงดูดอนุภาคออกมีแรงดึงดูดมากขึ้น เหตุการณ์การสร้างแขนเกลียวใจกลางจานวงรีหนาเชื่อว่าเกี่ยวข้องกับเสถียรภาพของระบบอนุภาคในคานซึ่งมีความยุ่งเหยิง [77] ซึ่งเรียกว่าความไม่เสถียรของคานที่มีแนวโน้มที่จะสร้างคานดาราจักรซึ่งดาราจักรกันหอยแบบมีคานนั้นเป็นตระกูลย่อยของดาราจักรกันหอยที่ประกอบไปด้วยคานที่มีลักษณะเป็นแท่งตรงอยู่ภายใน



รูปที่ 27 : รูปร่างสุดท้ายของแขนเกลียวสำหรับจานวงรีที่มี $b_0=0.3$ และ $e_0=0.1$

จากการที่เราเลือกที่จะศึกษาจานวงรีที่มีอัตราส่วนความหนาต่อความกว้างประมาณ 1:5 เราจึงตรวจสอบว่าในระหว่างที่ระบบมีวิวัฒนาการ ความหนาของระบบเมื่อเทียบกับขนาดของระบบมีการเปลี่ยนแปลงหรือไม่ เพื่อที่จะตรวจสอบข้อสงสัยดังกล่าว รูปร่างของระบบในด้านข้าง (หรือในแนว yz) ที่เวลาต่างๆ แสดงอยู่ในรูปที่ 28 โดยที่เราทราบว่าอัตราส่วนตั้งต้นของความหนาต่อความกว้างอยู่ที่ 1:5 จากรูปเราจะเห็นว่าระบบมีการกระจายมวลในแนว z (หรือแนวตั้ง) เช่นกันแต่อย่างไรก็ตามการกระจายมวลในแนวราบมีอัตราเร็วกว่ามากดังจะเห็นได้จากอัตราส่วนของจานที่เวลาสุดท้าย (รูปขาวสุด) เราได้อัตราส่วนความหนาต่อความกว้างยังคงไม่เกิน 1:5 ซึ่งยังถือว่าจานไม่ได้กลายเป็นโครงสร้างที่หนาเกินไป



รูปที่ 28 : รูปร่างระหว่างวิวัฒนาการในด้านข้างสำหรับจานวงรีที่มี $b_0=0.3$ และ $e_0=0.1$

4.2.5 อภิปรายผลการศึกษา

การวิจัยนี้ได้แสดงให้เห็นถึงการสร้างแขนเกลียวจากการยุบตัวของจานในลักษณะต่างๆ ซึ่งเราแบ่งเป็น 3 กลุ่ม คือ จานกลมบาง จานรีบาง และจานรีหนา จากระบบดังกล่าวเราพบว่าการยุบตัวและการคายมวลออกทำให้กระแสมวลที่ถูกทำให้หนาแน่นขึ้นถูกเงื่อนไขและกลายเป็นแขนเกลียวในที่สุด ซึ่งแขนเกลียวประกอบด้วยอนุภาคอิสระที่ไม่ถูกยึดเหนี่ยวกับระบบส่วนกลาง จากการสร้างแขนเกลียวในลักษณะนี้ แขนเกลียวจะเป็นแบบตามในทุกกรณี (ถ้ามีการเกิด)

แขนเกลียวในแต่ละกลุ่มของเงื่อนไขเริ่มต้น ได้แก่ จานกลมบาง จานรีบาง และจานรีหนา มีลักษณะที่แตกต่างกัน นั่นคือ จานกลมบางอาจให้แขนเกลียวที่มากกว่า 2 แขนเนื่องจากการกวัดแกว่งในเชิงสถิติ อาจเกิดได้มากกว่า 2 ทิศทาง ในขณะที่เดียวกันหากเราเปลี่ยนพื้นที่หน้าตัดให้กลายเป็นวงรีโดยที่ยังมีความหนาเท่าเดิม เราพบที่สามารถสร้างโครงสร้างที่ประกอบไปด้วยแขนเกลียวที่ตรงข้ามกันได้เนื่องจากการคายของอนุภาคถูกจำกัดให้อยู่ในแนวแกนหลักของจาน แขนคู่ที่ได้จะไม่สมมาตรกันสมบูรณ์เนื่องจากผลของการกวัดแกว่งทางสถิติของจานเริ่มต้น ในลำดับถัดมาถ้าเราเพิ่มความหนาของจานโดยมีพื้นที่หน้าตัดเป็นวงรีอยู่เราได้ว่ารูปร่างของแขนเกลียวที่ได้มีความยุ่งเหยิงมากกว่ากรณีจานแบนเนื่องจากถึงแม้ว่าเราจะเหนี่ยวนำให้การคายมวลออกมาได้แค่ 2 ทิศทางตามแกนหลักวงรี แขนเกลียวสุดท้ายที่ได้อาจมีมากกว่า 2 แขนได้ โดยสาเหตุของความยุ่งเหยิงในระบบจานหนาอาจเกิดจากความไม่เสถียรของการเกิดคานในมิติที่ 3 (หรือแนวตั้ง) ที่ทำให้วงโคจรสามารถมีได้หลายหลายกว่ากรณีจานแบน

ดาราจักรในทางสังเกตการณ์จริงพบว่าจะมีการเคลื่อนที่ในแนววงสัมผัสเป็นส่วนใหญ่ซึ่งจากการศึกษาของเราได้โครงสร้างที่มีความเร็วในแนวรัศมีเป็นหลัก ซึ่งเราอาจปรับปรุงแขนเกลียวให้สอดคล้องกับที่สังเกตการณ์ได้ด้วยการเพิ่มการกระจายความเร็วแบบสุ่มซึ่งเปรียบเสมือนเป็นความดันที่ทำให้การยุบตัวมีความรุนแรงน้อยลง การจำลองทางคอมพิวเตอร์ที่ได้จากการศึกษาในอดีตก็พบว่าวิวัฒนาการของแขนเกลียวจะถูกควบคุมโดยความเร็วในแนวเส้นสัมผัสวงเช่นกันและอายุของแขนเกลียวนั้นไม่นานมากโดยอาจสลายภายในการหมุนไม่กี่รอบ [64,78-79]

ถึงแม้ระบบแรงดึงดูดที่มีการหมุนจะใช้เป็นหัวข้อในการศึกษาในทางฟิสิกส์ดาราศาสตร์อยู่บ้างในอดีต แต่ระบบดังกล่าวสำหรับการศึกษาแขนเกลียวแทบไม่มีการรายงาน กรอบทฤษฎีที่เราสนใจและใกล้เคียงกับหัวข้อการศึกษานี้มี 2 กรอบ โดยกรอบแรกคือการยุบตัวของทรงกลมที่มีการหมุนที่มีระดับการหมุนและความดันค่าต่างๆ [79-80] จากการศึกษาดังกล่าวพบว่าผู้วิจัยจะมุ่งเน้นไปที่การกำเนิดคานมากกว่า ถึงแม้ว่าแขนเกลียวจะปรากฏให้เห็นเช่นกันโดยแขนเกลียวดังกล่าวก็เป็นแขนเกลียวที่มีอายุสั้นซึ่งอาจเป็นผลจากความดันที่ใส่เข้าไปในเงื่อนไขเริ่มต้น อย่างไรก็ตามการใส่ความดันที่มากไปอาจทำให้การสร้างแขนเกลียวไม่เกิดขึ้นเนื่องจากความดันจะหยุดการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีของอนุภาค อีกกรอบทฤษฎีหนึ่งคือจานแบนใน 2 มิติที่อยู่ในสมดุลการหมุน [81] การศึกษาในกรอบดังกล่าวก็มุ่งเน้นไปที่การก่อกำเนิดคานเช่นกัน โดยได้แขนเกลียวเป็นผลข้างเคียง เช่นเดียวกับกรอบทฤษฎีแรก แขนเกลียวในระบบนี้ก็ไม่ได้ได้รับความสนใจเท่าที่ควร

5. สรุปผลการศึกษา

ในการศึกษานี้สามารถแบ่งหัวข้อออกเป็น 2 หัวข้อย่อย ได้แก่ การศึกษาการเกิดรูปร่างรี และ การศึกษาการเกิดรูปร่างแบนเกลียว ซึ่งเป็นรูปร่างหลักของดาราจักรในลำดับของฮับเบิล โดยการศึกษาจะเป็นเชิงทฤษฎีและใช้การจำลองทางคอมพิวเตอร์เพื่อตรวจสอบวิวัฒนาการว่าเป็นไปตามทฤษฎีหรือไม่ ประเด็นสำคัญที่การศึกษานี้ได้ค้นพบสามารถแยกย่อยเป็นประเด็นในแต่ละหัวข้อย่อยดังนี้

- การเกิดรูปร่างทรงรีโดยกลไก ROI ไม่เพียงแต่ขึ้นกับตัวแปรในระดับมหัพภาคคืออัตราส่วนไริเรียลเท่านั้น แต่ยังขึ้นกับตัวแปรระดับมหัพภาคคือจำนวนอนุภาคที่นำไปสู่ความแตกต่างทางจุลภาคระหว่างตัวอย่าง โดยผลของจำนวนอนุภาคทำให้เกิดความไม่เสถียรที่เปลี่ยนไป เช่น เวลาที่เกิด การลู่เข้า (ซึ่งอาจจะลู่เข้าหรือไม่ก็ได้)

- การเกิดแบนเกลียวสามารถกระทำได้โดยเริ่มจากเงื่อนไขเริ่มต้นที่เป็นแผ่นจานหมุนที่มีการยุบตัว และแบนเกลียวที่ได้มีคุณลักษณะที่ต่างกันในแต่ละประเภทของจาน

ทั้งนี้ ผลสรุปโดยละเอียดพร้อมการอภิปรายได้เขียนไว้ในบทที่ 4 ณ ส่วนท้ายของแต่ละหัวข้อย่อย (ในหัวข้อ 4.1.4 และ 4.2.5)

ในการพัฒนาต่อยอดงานวิจัยนี้สามารถกระทำได้หลายทาง ซึ่งสามารถสรุปได้เป็นประเด็นย่อยที่แยกกัน ดังนี้

- การก่อกำเนิดรูปร่างทรงรี สามารถศึกษาวิวัฒนาการของรูปร่างในกรอบทฤษฎีอื่น เช่น กรอบของ Lin-Mestel-Shu [54] ซึ่งอธิบายถึงการเกิดรูปร่างทรงรีในอีกแบบหนึ่งที่ต่างจาก ROI ทั้งในเชิงการอยู่ในสมดุล หรือระยะเวลาที่ใช้ในการสร้างรูปร่าง

- ศึกษาการเกิดรูปร่างทรงรีโดยเงื่อนไขเริ่มต้นที่มีการเพิ่มความเร็ตั้งแต่แรก [53] นั่นคือเป็นการศึกษาการหักล้างหรือเสริมระหว่าง การเปลี่ยนรูปร่างของเงื่อนไขเริ่มต้นระหว่างความเร็วในระดับมหัพภาค และจุลภาค

- การพัฒนาต่อยอดการวิจัยในหัวข้อแบนเกลียว สิ่งนี้อาจพัฒนาได้อย่างชัดเจนคือการทำใหการยุบตัวมีความรุนแรงน้อยลงจากการใส่ความดันในตอนเริ่มต้นเข้าไป [68] รวมไปถึงการศึกษาการเกิดแบนเกลียวจากรูปร่างของเงื่อนไขเริ่มต้นแบบอื่นๆ ก็เป็นไปได้เช่นกัน

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากทุนส่งเสริมนักวิจัยรุ่นใหม่ ปี 2558 ภายใต้รหัสโครงการ TRG5880036 ซึ่งเป็นการสนับสนุนร่วมระหว่างสำนักงานกองทุนสนับสนุนงานวิจัย (สกว.) และมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ (มทรส.) โดยมีที่ปรึกษาโครงการ คือ รศ.ดร.คัมภีร์ คำแหวน มหาวิทยาลัยนเรศวร

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Hubble, E. P., 1926, ApJ, 64, 321
- [2] de Vaucouleurs, G, 1948, AnAp, 11, 247
- [3] Aguilar L. A., Merritt D., 1990, ApJ, 354, 33
- [4] Palmer P. L., Palaloizou J., 1987, MNRAS, 224, 1043
- [5] Barnes J., Goodman J., Hut P., 1986, ApJ, 300, 112
- [6] Min K. W., Choi C. S., 1989, MNRAS, 238, 253
- [7] Cannizzo J. K., Hollister T. C., 1992, ApJ, 400, 58
- [8] Theis C., Spurzem R., 1999, A&A, 341, 361
- [9] Antonov V., 1973, in Omarov G., ed., The Dynamics of Galaxies and Star Clusters. Nauka, Alma Ata, p. 139
- [10] Henon, M., 1973, Astron. Astrophys., 24, 229.
- [11] Polyachenko V. L., 1981, Sov. Astron. Lett., 7, 142
- [12] Merritt D., Aguilar L. A., 1985, MNRAS, 217, 787
- [13] White, S. D. M. 1978, MNRAS, 184, 185
- [14] van Albada T. S., 1982, MNRAS, 201, 939
- [15] Lin C. C., Shu F. H., 1964, ApJ, 140, 646
- [16] Goldreich P., Lynden-Bell D., 1965, MNRAS, 130, 125
- [17] Julian W. H., Toomre A., 1966, ApJ, 146, 810
- [18] Miller R. H., Prendergast K. H., Quirk W. J., 1970, ApJ, 161, 903
- [19] Carlberg R. G., Freedman W. L., 1985, ApJ, 298, 486
- [20] Bottema R., 2003, MNRAS, 344, 358
- [21] Toomre A., Toomre J., 1972, ApJ, 178, 623
- [22] Elmegreen D. M., Sundin M., Sundelius B., Elmegreen B., 1991, A&A, 244, 52
- [23] Dobbs C. L., Theis C., Pringle J. E., Bate M. R., 2010, MNRAS, 403, 625
- [24] Semczuk M., Lokas E. L., del Pino A., 2017, ApJ, 834, 7
- [25] Barnes J. E., Hernquist L., 1992, ARA&A, 30, 705
- [26] Lynden-Bell D., 1967, MNRAS, 136, 101
- [27] S. Chandrasekhar. Rev. Mod. Phys., 1:1, 1943
- [28] Antonov V. A., 1961, SvA, 4, 859
- [29] Doremus J. P., Feix M. R., Baumann G., 1971, PRL, 26, 725

- [30] R. Balescu. Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics. New York: Wiley, 1975
- [31] A. Campa, T. Dauxois, and S. Ruffo. *Phys. Rep.*, 480:57, 2009
- [32] S.S. Larsen, J.P. Brodie, B.G. Elmegreen, Y.N. Efremov, P.W. Hodge, and T. Richtler. , *ApJ*, 556:801, 2002
- [33] Worrakitpoonpon T., 2015, *MNRAS*, 446, 1335
- [34] Boily C. M., Athanassoula E., 2006, *MNRAS*, 369, 608
- [35] Boily C. M., Athanassoula E., Kroupa P., 2002, *MNRAS*, 332, 971
- [36] Sylos Labini F., 2012, *MNRAS*, 423, 1610
- [37] Sylos Labini F., 2013, *MNRAS*, 429, 679
- [38] Benhaïem D., Joyce M., Sylos Labini F., Worrakitpoonpon T., 2016, *A&A*, 585, A139
- [39] Joyce M., Marcos B., Sylos Labini F., 2009, *MNRAS*, 397, 775
- [40] Miller R. H., Smith B. F., 1979, *ApJ*, 227, 407
- [41] Hohl F., 1971, *ApJ*, 168, 343
- [42] Hohl F., Zang T. A., 1979, *Astron. J.*, 84, 585
- [43] Kennicutt, R. C., Jr. 1989, *ApJ*, 344, 685
- [44] Springel V., 2005, *MNRAS*, 364, 1105
- [45] Springel V., Yoshida N., White S. D. M., 2001, *New Astron.*, 6, 79
- [46] Diemand J., Moore B., Stadel J., Kazantzidis S., 2004, *MNRAS*, 348, 977
- [47] Roy F., Perez J., 2004, *MNRAS*, 348, 62
- [48] El-Zant A. A., 2006, *MNRAS*, 370, 1247
- [49] Joyce M., Marcos B., 2007, *Phys. Rev. D*, 76, 103505
- [50] Sellwood J. A., 2015, *MNRAS*, 453, 2919
- [51] Barnes E. I., Lanzel P. A., Williams L. L. R., 2009, *ApJ*, 704, 372
- [52] Sylos Labini F., Benhaïem D., Joyce M., 2015, *MNRAS*, 449, 4458
- [53] Benhaïem D., Sylos Labini F., 2015, *MNRAS*, 448, 2634
- [54] Lin C. C., Mestel L., Shu F. H., 1965, *ApJ*, 142, 1431
- [55] Sellwood J. A., Debattista V. P., 2009, *MNRAS*, 398, 1279
- [56] Vandervoort P. O., 1970, *Astrophys. J.*, 161, 87
- [57] Mark J. W.-K., 1974, *Astrophys. J.*, 193, 539
- [58] Goldreich P., Lynden-Bell D., 1965, *MNRAS*, 130, 125
- [59] Julian W. H., Toomre A., 1966, *ApJ*, 146, 810

- [60] Lynden-Bell D., Kalnajs A. J., 1972, MNRAS, 157, 1
- [61] Miller R. H., Prendergast K. H., Quirk W. J., 1970, ApJ, 161, 903
- [62] Carlberg R. G., Freedman W. L., 1985, ApJ, 298, 486
- [63] Bottema R., 2003, MNRAS, 344, 358
- [64] Fujii M. S., Baba J., Saitoh T. R., Makino J., Kokubo E., Wada K., 2011, ApJ, 730, 109
- [65] Baba J., Saitoh T. R., Wada K., 2013, ApJ, 763, 46
- [66] Sellwood J. A., Kahn F. D., 1991, MNRAS, 250, 278
- [67] Sellwood J. A., 2012, ApJ, 751, 44
- [68] Benhaïem D., Joyce M., Sylos Labini F., 2017, ApJ, 851, 19
- [69] Elmegreen D. M., Sundin M., Sundelius B., Elmegreen B., 1991, A&A, 244, 52
- [70] Dobbs C. L., Theis C., Pringle J. E., Bate M. R., 2010, MNRAS, 403, 625
- [71] Semczuk M., Lokas E. L., del Pino A., 2017, ApJ, 834, 7
- [72] Barnes J. E., Hernquist L., 1992, ARA&A, 30, 705
- [73] Ciftja O., Hysi I., 2011, Appl. Math. Lett., 24, 1919
- [74] Seigar M. S., James P. A., 1998, MNRAS, 299, 685
- [75] Ma J., 2002, A&A, 388, 389
- [76] Savchenko S. S., Reshetnikov V. P., 2013, MNRAS, 436, 1074
- [77] Martinet L., Udry S., 1990, A&A, 235, 69
- [78] Donner K. J., Thomasson M., 1994, A&A, 290, 785
- [79] Miller R. H., Smith B. F., 1979, ApJ, 227, 407
- [80] Hohl F., Zang T. A., 1979, AJ, 84, 585
- [81] Hohl F., 1971, ApJ, 168, 343

Output จากโครงการวิจัยที่ได้รับทุนจาก สกว.

1. ผลงานตีพิมพ์ในวารสารวิชาการนานาชาติ
 - Benhaïem D., Joyce M., Sylos Labini F., and **Worrakitpoonpon T.**, Particle number dependence in the non-linear evolution of N-body self-gravitating systems, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 473, 2348, 2018. (เอกสารแนบ 1)
 - **Worrakitpoonpon T.**, On the formation of spiral structure from collapse of rotating disks, *Submitted to Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2017. (เอกสารแนบ 2)
2. การนำผลงานวิจัยไปใช้ประโยชน์
 - ด้านวิชาการ: ได้บทความ 2 เรื่อง ในแต่ละหัวข้อที่ศึกษา โดย 1 เรื่องได้ตีพิมพ์ในฐานะผู้แต่งร่วม (co-author) ในวารสาร *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* (เอกสารแนบ 1) และบทความอีก 1 เรื่องในฐานะผู้แต่งหลัก (corresponding author) ซึ่งกำลังถูกพิจารณาอยู่ที่วารสารเดียวกัน (ส่วนหน้าของบทความเป็นดังเอกสารแนบ 2) โดยหัวข้อวิจัยดังกล่าวอาจนำไปต่อยอดเพื่อเป็นหัวข้อวิจัยสำหรับนักศึกษาในระดับบัณฑิตศึกษาที่สนใจหัวข้อนี้

ภาคผนวก



Particle number dependence in the non-linear evolution of N -body self-gravitating systems

D. Benhaiem,^{1,2} M. Joyce,^{2*} F. Sylos Labini^{1,3,4} and T. Worrakitpoonpon⁵

¹*Istituto dei Sistemi Complessi Consiglio Nazionale delle Ricerche, Via dei Taurini 19, I-00185 Rome, Italy*

²*Laboratoire de Physique Nucléaire et de Hautes Énergies, UPMC IN2P3 CNRS UMR 7585, Sorbonne Universités, 4, place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France*

³*Centro Fermi – Museo Storico della Fisica e Centro Studi e Ricerche ‘Enrico Fermi, I-00186 Rome, Italy*

⁴*INFN Unit Rome 1, Dipartimento di Fisica, Università di Roma Sapienza, Piazzale Aldo Moro 2, I-00185 Roma, Italy*

⁵*Faculty of Science and Technology, Rajamangala University of Technology Suvarnabhumi, Nonthaburi Campus, Nonthaburi 11000, Thailand*

Accepted 2017 September 18. Received 2017 September 18; in original form 2016 June 22

ABSTRACT

Simulations of purely self-gravitating N -body systems are often used in astrophysics and cosmology to study the collisionless limit of such systems. Their results for macroscopic quantities should then converge well for sufficiently large N . Using a study of the evolution from a simple space of spherical initial conditions – including a region characterized by so-called ‘radial orbit instability’ – we illustrate that the values of N at which such convergence is obtained can vary enormously. In the family of initial conditions we study, good convergence can be obtained up to a few dynamical times with $N \sim 10^3$ – just large enough to suppress two body relaxation – for certain initial conditions, while in other cases such convergence is not attained at this time even in our largest simulations with $N \sim 10^5$. The qualitative difference is due to the stability properties of fluctuations introduced by the N -body discretisation, of which the initial amplitude depends on N . We discuss briefly why the crucial role which such fluctuations can potentially play in the evolution of the N body system could, in particular, constitute a serious problem in cosmological simulations of dark matter.

Key words: methods: numerical – galaxies: elliptical and lenticular, cD – galaxies: formation.

1 INTRODUCTION

A purely Newtonian self-gravitating system of a large (but finite) number N of identical particles is a fundamental idealized model in astrophysics and cosmology. Usually the aim of numerical simulations of such systems is to reproduce the collisionless limit. In this limit the system’s evolution is described by the collisionless Boltzmann equation for the smooth phase space density. The latter corresponds to taking $N \rightarrow \infty$ at fixed time with the phase space mass density converging to a continuous function. The N bodies of the simulation are then not physical entities (e.g. dark matter particles or stars) but numerical ‘macro-particles’. Any dependence on their number (or other properties) is an artefact of the use of the N body method employed, or a ‘discreteness effect’.¹

To obtain a precise result for the collisionless limit, the particle configuration must sample faithfully the continuum phase space density. By construction this condition is respected at the initial time, up to quantifiable finite N sampling fluctuations. It is difficult, however, to determine a priori how well it is respected during the system’s evolution: given the highly complex non-linear dynamics; differences between the evolution of the finite N sampling; and that of the continuum limit may be very non-trivial. In practice this issue is addressed by studying, numerically, the dependence of results on N , to establish as far as possible whether the relevant results do indeed converge to N independent values. The question of *how many particles are in practice needed to simulate accurately the collisionless limit (up to some specified time)* can only be answered in the context of a given problem and indeed different estimates can be found in the literature in different contexts (e.g. Diemand et al. 2004; Roy & Perez 2004; El-Zant 2006; Joyce & Marcos 2007; Sellwood 2015). For example if finite N effects are dominated by two body collisions, such effects are negligible provided one limits the evolution to a time-scale short compared to the characteristic time for such effects, of order $\sim (N/\log N) \tau_{\text{dyn}}$, where τ_{dyn} is a characteristic time of the collisionless (mean field) dynamics (see e.g. Binney & Tremaine 1994).

* E-mail: joyce@lpnhe.in2p3.fr

¹ We note, however, that there have recently been studies of the direct solution of the collisions Boltzmann equation starting from cosmological type initial conditions (Yoshikawa, Yoshida & Umemura 2013) and also certain spherically symmetric initial conditions (Colombi et al. 2015; Sousbie & Colombi 2016).

Particle number dependence in N-body systems 2349

In this paper we address this issue through the study of the evolution of a simple class of initial conditions – initially spherical density profiles – using N body simulations. The study of this specific case allows us to illustrate clearly how fluctuations introduced by the finite N discretisation intrinsic to N body simulations may, in the presence of instabilities in its non-linear evolution, play a crucial role in the macroscopic dynamics of the system on time-scales which are very much shorter than those typical of collisional effects. Furthermore the N dependence of physical quantities can be extremely weak and difficult to detect in a numerical convergence study unless one knows precisely where to look for them as we do in our simple chosen system.

It is perhaps useful for the reader that we recall the generic phases of the evolution of isolated systems of a large number N of self-gravitating particles, and place our study in this broader context. The evolution of such a system is believed to be characterized by two distinct time-scales: the *dynamical time* τ_{dyn} , which characterizes the mean-field or collisionless dynamics described by the collisionless Boltzmann (or Vlasov–Poisson) equation, and a much longer *collisional* time-scale characterizing the dynamics beyond this mean-field limit. The ratio of the latter to the former time-scale diverges with N , and in the case that the collisional dynamics is dominated by two body collisions the relative scaling is predicted to be given, as mentioned above, by the ratio $N/\log N$ (for an unsmoothed gravitational potential). Thus, starting from a generic initial condition, such a system undergoes an evolution in (at least) two distinct phases: (1) collisionless evolution which is observed to lead it on time-scales of order τ_{dyn} to a virial equilibrium which is a stationary state of the collisionless Boltzmann equation. This is the process of ‘collisionless’ (or ‘mean-field’) relaxation, involving in general phase mixing and so-called ‘violent’ relaxation; (2) on much longer time-scales, of order $N\tau_{\text{dyn}}$, such a state evolves continuously while remaining at virial equilibrium, in principle towards states of ever increasing entropy. This second phase of ‘collisional relaxation’ is more challenging to study numerically (because of the need to simulate accurately the collisional processes), and is the subject of many studies (see e.g. Theis & Spurzem 1999; Gabrielli, Joyce & Marcos 2010; Sellwood 2015 and references therein).

In this work we aim to study only the first phase, of collisionless evolution. In our numerical simulations this corresponds to using a sufficiently large number of particles N so that the time-scale of collisional relaxation is very long compared to those we consider. *The dependence on N of the evolution we discuss has therefore nothing to do with collisional effects, but arises from the dependence of the collisionless evolution on the particle number N arising from how the initial conditions are sampled.* We focus on the case that the collisionless relaxation may itself occur in two distinct phases: initial relaxation to a virial equilibrium which is a stationary, but unstable, state of the collisionless Boltzmann equation; and a second phase in which the system relaxes to a stable stationary state. Such two stage dynamics can occur in particular in the case of so-called ‘radial orbit instability’, an instability of stationary states of the collisional Boltzmann equation with spherical symmetry and purely radial orbits originally discussed by Antonov (1973); Henon (1973) (for a review and a more complete set of references see e.g. Maréchal & Perez 2011). As shown first numerically in Merritt & Aguilar (1985), and subsequently by many other studies, such an evolution occurs when the N -body system starts from certain initial conditions which are cold (i.e. are strongly sub-virial) and very close to spherical symmetry. We choose to study this particular kind of case here because it turns out that the presence of the

instability in the dynamics is associated with a subtle N -dependence of the evolution.

The paper is organized as follows. We first present the details of the numerical simulations and initial conditions in Section 2. In the following section we present the essential results of our convergence study. We conclude with a discussion of these results, which we also compare with some previous ones in the literature, in particular with the study of Boily & Athanassoula (2006), which has drawn attention previously to the non-trivial evolution with particle number in numerical experiments similar to the ones we consider. In our conclusions we discuss in particular the possible implications of our results for the non-linear regime of cosmological N -body simulations of structure formation in the universe.

2 NUMERICAL SIMULATIONS

2.1 Initial conditions

The initial conditions of which we study the evolution are N particle configurations with (i) positions sampled randomly, in two different ways detailed below, to follow an average radial density decay $\rho(r) \propto r^{-1}$ away from a centre (where r is the radial distance from the latter), and (ii) velocities sampled randomly (and independently for each particle) from a distribution which is uniform and non-zero inside a sphere in velocity space (and thus isotropic). The radius of this sphere can be characterized conveniently by the initial virial ratio, which we define as $b_0 = -2K_0/W_0$, where K_0 is the initial kinetic energy and W_0 the initial potential energy of the configuration.

We choose this particular spatial profile as it is a simple one which is known to give rise to qualitative evolution which depends strongly on b_0 . More specifically it is known to manifest strong breaking of spherical symmetry for sufficiently low initial virial ratios (see e.g. Merritt & Aguilar 1985; Aguilar & Merritt 1990; Barnes, Lanzel & Williams 2009; Sylos Labini, Benhaïem & Joyce 2015).

Because it is the dependence on N of results we focus on in this paper, and in particular how such a dependence can arise via the finite N fluctuations to the average space and velocity distributions, it is of potential importance to know how precisely the finite N configurations are generated. We have considered the following ways of generating the particle realisations:

(i) N particles are distributed randomly with uniform density inside a sphere, and the radii of the particles are then rescaled to give the desired radial density decay. The fluctuations in any volume are thus Poissonian in their dependence on the particle number.

(ii) A sphere containing N particles is extracted from a distribution of particles initially located on a regular (simple cubic) lattice, the sphere being centred on the centre of a lattice cell. The radial positions of the particles are then ‘stretched’ to give the desired radial density decay. In this case both the radial and angular fluctuations are very suppressed compared to those of the configurations obtained by the first method.

As a consequence of the different spatial sampling, the velocity fluctuations are also slightly different in the two cases.

In all cases the limit $N \rightarrow \infty$ of the algorithm converges to the continuum phase space density, and the amplitude of the fluctuations around this density is a monotonically decreasing function of N . As we will discuss in our conclusions, an extrapolation $N \rightarrow \infty$ of these initial conditions obtained as some finite N could be performed in different manners leading, in certain cases, to different results.

2350 *D. Benhaïem et al.*

2.2 Quantities studied

In our complete study we have monitored the evolution, starting from many realisations of the above class of initial conditions, of numerous macroscopic quantities: kinetic and potential energy, bound mass, angular momentum of bound and ejected mass, parameters characterizing the shape of the structure, density profiles in spherical shells, velocity distributions etc. We report here results for only one chosen macroscopic parameter. The study of this parameter suffices to explain our central finding about the dependence on N of the evolution of macroscopic quantities. This quantity is the shape parameter characterizing the deformation from sphericity of the structure, and defined as

$$t_X(t) = \frac{\Lambda_1(t)}{\Lambda_3(t)} - 1, \quad (1)$$

where $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \Lambda_3$ are the eigenvalues of the inertia tensor of the X percent most bound particles (i.e. of the first X percent of the bound particles when they are ranked by increasing energy). We will consider $X = 80$, which typically characterizes well the final global shape of most of the mass.

2.3 Numerical simulations

We have used the N -body code `GADGET2` (Springel 2005). All results presented here are for simulations in which energy is conserved to within *one tenth of a percent* up to the longest times evolved to. In order to achieve such precision, even for the very violent collapses which result from the colder initial conditions, we have employed an accuracy of time integration significantly greater than that typically used for this code in simulations of this kind.² Further the parameters controlling the accuracy of the force calculation have been set so that the force is in practice calculated by direct N^2 summation. For the simulations reported here, the force softening parameter has been taken to be $\epsilon = (0.056)RN^{-1/3}$, where R is the initial radius of the sphere, i.e. we use a softening which is fixed in proportion to the mean interparticle separation. We have performed extensive tests (see also Benhaïem & Sylos Labini 2015; Sylos Labini et al. 2015 for more details) of the effect of varying the force smoothing parameter in a wide range. In particular we have verified for several cases that we obtain fully consistent results taking $\epsilon/R = 10^{-3}$. In general we obtain very stable results provided that it is significantly smaller than the minimal size reached by the whole structure during collapse. We note that the smoothing given above is also consistent with a value always below the maximal one recommended by Boily & Athanassoula (2006) in their study of the convergence of simulations of this kind.

3 RESULTS

As unit of time we take the characteristic time for the mean-field (collisionless) evolution,

$$\tau_{\text{dyn}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32 G \rho_0}}, \quad (2)$$

² The time-stepping parameter η has been set to $\eta = 0.005$, compared to $\eta = 0.025$ as typically used.

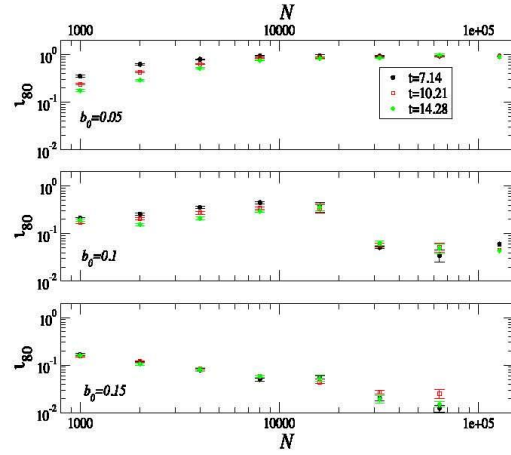


Figure 1. Each panel shows t_{80} for a given b_0 as a function of N . In each case its value, averaged over an ensemble of realisations of Poissonian initial conditions (see footnote in text for details of number of realisations), is plotted at three different times, well after the virialization of the system (at $t \approx 2$).

where ρ_0 is the initial mean mass density of the sphere (and G the Newton's constant). The systems we consider starting from the above classes of initial conditions are in all cases well virialized (i.e. with only very small fluctuations of the virial ratio) by $t \approx 2$, and we run them typically up to a time roughly an order of magnitude longer.

Results for evolution from these initial conditions for various b_0 and N have been reported in various previous studies (e.g. Merritt & Aguilar 1985; Aguilar & Merritt 1990; Barnes et al. 2009). We have checked that our results, when comparable, appear to be very consistent, quantitatively and qualitatively, with previously published ones. In particular, as we will see below, we observe, for $b_0 \lesssim 0.1$ a virialized state which strongly breaks spherical symmetry.³

3.1 N dependence of ‘final’ quantities

We have studied the evolution for many values of b_0 in the range between 0 and 0.3. Shown in Fig. 1 are results for the measured t_{80} at three times as a function of N three chosen values of the initial virial ratio b_0 ($b_0 = 0.05$, $b_0 = 0.1$ and $b_0 = 0.15$) and for Poissonian initial conditions. Each point is the average value calculated over M of realisations of the given initial condition.⁴ The error bars indicate the estimated error on the mean.

As noted the system contracts to its minimal size at $t \approx 1$ and then re-expands and is already well virialized by $t \approx 2$. The results for the different times indicated (starting from $t \approx 7$) and

³ One minor difference is that most authors have employed a Gaussian distribution for the initial velocities, rather the uniform one we use. This is not expected to, and indeed does not appear to, make any significant difference in the context of this study.

⁴ The number M of realisations are as follows: $M = 70$ for $N = 10^3$, $M = 40$ for $N = 2 \times 10^3$, $M = 30$ for $N = 4 \times 10^3$ and $N = 8 \times 10^3$, $M = 6$ for $N = 1.6 \times 10^4$, $M = 4$ for $N = 3.2 \times 10^4$, $M = 2$ for $N = 6.4 \times 10^4$ and $M = 1$ for $N = 1.28 \times 10^5$.

plotted in Fig. 1 thus monitor the stability of the measured shape parameter ι_{80} at ‘long times’. A very strong stability of the result is in fact observed in all but the simulations at the lowest N – with up to a couple of thousand particles – in the case $b_0 = 0.05$. Such an evolution at lower particle number – towards a more spherically symmetric structure – is, as has been studied in detail by Theis & Spurzem (1999) for similar initial conditions – due to two body collisionality. Beyond $N = 4000$ such effects do not appear to play any role in the evolution on the time-scales we simulate and the values of ι_{80} obtained at a given N are very stable in time.

Let us consider now the dependence on N of these ‘final’ ι_{80} . Depending on the value of b_0 , the plots show very different qualitative behaviours: for $b_0 = 0.05$ (upper panel) an apparently asymptotic value of $\iota_{80} \approx 1$ is reached at $N \approx 10^4$; for $b_0 = 0.15$ (lower panel) ι_{80} is always much smaller and appears to decrease monotonically to zero as N increases to its largest value. We will see below that the value of ι_{80} , even in the cases where it is very small, is always measurably larger than the initial value of ι_{80} , i.e. the measured asymmetry, albeit small, is above the level of the intrinsic noise introduced by sampling the density field with a finite N . For the intermediate case, $b_0 = 0.1$ (middle panel), we see a very different behaviour, which is, very roughly, an interpolation, in a narrow range of N just above $N = 10^4$, between the other two cases: up to $N = 16000$ the final ι_{80} grows up to an average value of $\iota_{80} \approx 0.4$, while at $N = 32000$ it is about an order of magnitude smaller. In summary, in the first and last case the behaviours as a function of N are apparently a simple monotonic convergence towards an asymptotic value which is already very well approximated for a few thousand particles. In the intermediate case such a convergence towards the asymptotic value is observed only when there is roughly an order of magnitude more particles.

What lies behind these very different behaviours, both quantitative and qualitative, are the physical differences between the non-linear dynamics in the different cases: for $b_0 = 0.05$ the system strongly breaks spherical symmetry, while at $b_0 = 0.15$ this is not the case. As discussed in the literature (see references above), this symmetry breaking is in principle due to so-called ‘radial orbit instability’: stationary spherically symmetric solutions of the collisionless Boltzmann equation are unstable when the velocity dispersion is purely, or strongly, radial as originally shown by Polyachenko (1981). Such an instability exists for some range of the parameter (or parameters) characterizing the anisotropy of the velocity distribution, and is expected to correspond to an existence of the instability starting out of equilibrium at values of b_0 up to some critical value. The simplest interpretation of the behaviour in the case $b_0 = 0.1$ is then that this value is just above the critical value, but sufficiently close to it that the larger intrinsic fluctuations about spherical symmetry present at smaller N can allow the system to access the instability. This behaviour can be considered to be an example of the sensitivity to finite size effects characteristic of critical phenomena.

The naive interpretation of these results is thus the following. Convergence (to within some chosen precision) to the continuum result is obtained in all cases with a sufficiently large N . This number may, however, be very significantly larger if the initial condition is close to a ‘critical’ point where the final state obtained changes qualitatively. Unless one is very close to such a point, on the other hand, it appears that the only finite N effect in a simulation one needs to worry about in this system is two body collisionality. We will see now that these conclusions are not valid when we study the temporal evolution carefully.

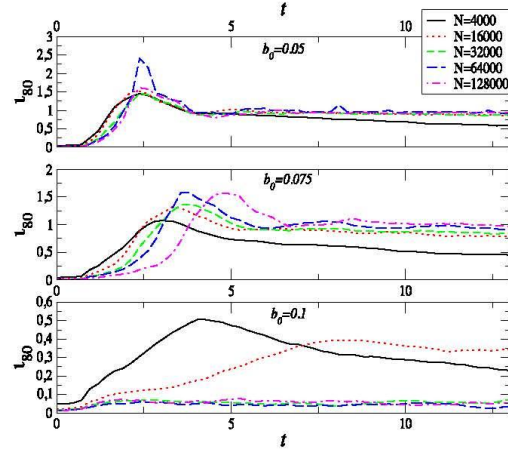


Figure 2. Each panel shows, for a given fixed value of b_0 , the temporal evolution of ι_{80} as a function of time averaged over an ensemble of realisations with the indicated values of N . (The number of realisations in each case is the same as in the previous figure).

3.2 N dependence of temporal evolution

The above analysis relies on the study of the convergence of the macroscopic properties at relatively long times, well after the system has ‘settled down’ to virial equilibrium. If we are only interested in the state of the system at asymptotically long times this is sufficient. However if, as for example in the context of cosmological simulations, the temporal evolution of macroscopic quantities needs to be resolved, convergence tests must be applied to these. Shown in Fig. 2 is the evolution of ι_{80} as a function of time, starting from realisations of our Poissonian initial conditions with the indicated values of b_0 , for a range of different values of N . If we limit ourselves to examining the curves for $t > 7$, our conclusions about convergence are those obtained above from Fig. 1: for a sufficiently large N there appears to be clear convergence of the curves. However, considering now also times $t < 7$ for the cases $b_0 = 0.05$ and $b_0 = 0.075$ (i.e. in which the final state breaks radial symmetry), the convergence is much poorer or even apparently not attained at all: in particular the time at which the instability in ι_{80} develops in the case $b_0 = 0.075$ visibly depends on the number of particles, with the time at which ι_{80} attains its maximum shifted by almost two dynamical times between the largest two simulations. In the case $b_0 = 0.05$ the difference in this time is much smaller, but the details of the evolution around the maximum appears to be quite different. In either case it is clear that even at $N = 128000$ one cannot conclude that the temporal macroscopic evolution has converged.

The shift of the time at which the instability in ι_{80} develops is explained simply making the hypothesis that the effective seeds for its development are the finite N fluctuations in the initial conditions which break the spherical symmetry: as N increases their amplitude is decreased, and thus their development retarded. This can be further tested by comparing evolution at given N from our two different sets of initial conditions, Poissonian and lattice-like. Given that, at fixed N , the amplitude of the density fluctuations around perfect spherical symmetry are suppressed in the lattice initial conditions compared to those in the Poissonian initial conditions, the seeds for

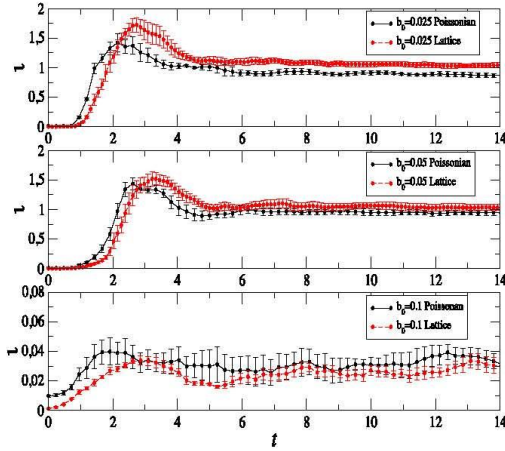


Figure 3. Each panel shows, for a given value of b_0 , the mean temporal evolution of t_{80} , and its estimated error, in five realisations with $N = 10^5$ particles of Poissonian (filled lines) and lattice (dashed line) initial conditions.

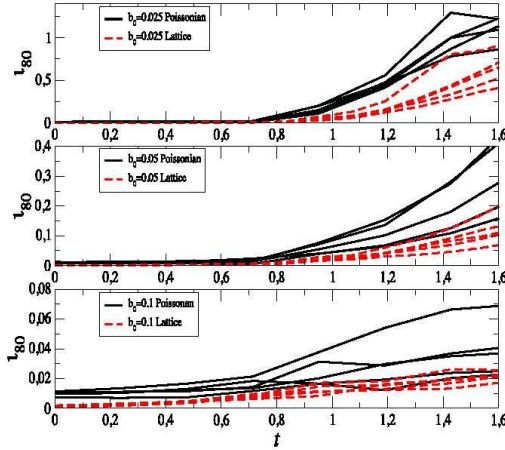


Figure 4. Evolution at early times ($0.5 < t < 1.5$) of t_{80} in the five realisations of Poissonian (filled lines) and lattice (dashed line) initial conditions from which the averages in the previous figure are calculated.

the instability are smaller. Thus, if our interpretation of the previous results is correct, we would anticipate that there should be a delay in the development of the instability at a given level. Shown in Fig. 3 are plots of the evolution of t_{80} averaged over five realisations of the two cases, for two values of b_0 in the range where there is symmetry breaking, and also for the case $b_0 = 0.1$. In the first two cases, including the one corresponding to the upper panel in Fig. 2 in which the N dependence of the temporal evolution was not so evident in this figure, we indeed see a clear delay in the onset of the instability for the lattice initial conditions. This is confirmed by Fig. 4 which shows the evolution at early times, in the time window $[0.5, 1.5]$, for the individual realisations in each case. The lower panel in both figures show that, for the case $b_0 = 0.1$ where the

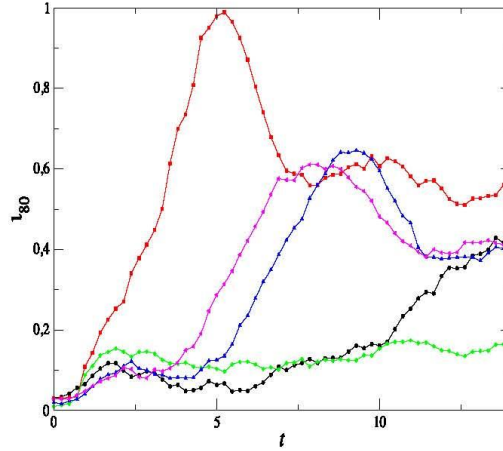


Figure 5. Temporal evolution of t_{80} in different realisations with $N = 16\,000$ of initial conditions with $b_0 = 0.1$.

final symmetry is very small, there is also a measurable relative delay of the development of the asymmetry which depends on the initial amplitude. As the evolution continues (see Fig. 3), however, the difference between the realisations appears to be more or less wiped out, in contrast, in particular to the case $b_0 = 0.025$, in which the memory of the very subtle difference in the initial conditions appears clearly to persist up to the longest time simulated.

The data we have shown up to now is averaged over a number of realisations of each initial condition. For most cases the dispersion between the single realisations is small once N is greater than a few thousand. We have observed, however, that this is not always true: in cases where the evolution is very sensitive to the value of N , e.g. for $b_0 = 0.1$ around the transition observed between $N = 10^4$ and $N = 10^5$, there is also a very large dispersion between the different realisations. This is illustrated in Fig. 5 which shows the evolution in different realisations of the $b_0 = 0.1$ Poissonian initial condition with $N = 16\,000$ particles. Remarkably we find that the macroscopic evolution can be completely different from realization to realization, i.e. the system manifests an apparent chaoticity of its *macroscopic* behaviour. We note that behaviour of this kind ('macroscopic stochasticity') has been observed previously in N -body systems modelling galaxies by Sellwood & Debatista (2009). This kind of behaviour is incompatible with any even approximate convergence at this value of N , but it does not exclude convergence at significantly larger values of N . Indeed the apparent convergence at larger N for this initial b_0 observed in Fig. 1 is associated with a very small dispersion in the results from realization to realization at larger N . As we have discussed in our case this highly fluctuating behaviour occurs in the region which appears to be stable for spherically symmetric equilibria, but very close to the unstable region. It is however also possible that it could be a marginally unstable region, for which a recent analysis of a long-range toy model (Barré, Métivier & Yamaguchi 2016) has shown that there can be a strong sensitivity of the evolution, and the final state, to the initial conditions (Barré et al. 2016). In either case what we observe is presumably the result of the competition between two different modes of instability around stationary solutions which are so close to one another that their finite N samplings at the given N

Particle number dependence in N -body systems 2353

can overlap, while at larger N this will not be the case and a single mode of instability will dominate.

4 DISCUSSION AND CONCLUSIONS

The main motivation for this study is to understand better whether the results obtained with large N -body simulations of self-gravitating systems represent faithfully the evolution, up to some time, of a given collisionless system. Let us consider now carefully what our study allows us to conclude in this respect.

In a suite of N -body simulations at different N of a simple class of initial conditions we have shown that the macroscopic evolution manifests two very different N dependences. On the one hand, in our simulations at smaller N we have been able to observe that there is an N dependence coming from two-body collisional effects. This is quite straightforward to identify in a numerical study as a clearly N dependent drift of appropriately chosen macroscopic quantities, as observed previously in similar systems (e.g. Theis & Spurzem 1999). On the other hand there is a distinct N dependence associated with the presence of instabilities in the collisionless dynamics. This arises because the initial seeds for the instability themselves depend on N . This dependence on N is in practice much more difficult to find, as it manifests itself only in a very weak dependence of the time of triggering of the instability, and *not*, at sufficiently large N , in the properties of the state to which the instability drives the system. Indeed despite the fact that these initial conditions have been studied fairly extensively in the literature, and that it might seem evident to expect that there may be such a dependence on N , this subtle dependence of the evolution on N has apparently gone unnoticed, other than in a study by Boily & Athanassoula (2006). These authors remarked, for cold initial conditions characterized by a power-law profile of density $\rho(r) \propto r^{-3/2}$, a very slow convergence with N of parameters characterizing the shape of the final triaxial system obtained (similar to our t_{80}). Specifically they concluded from a detailed study analogous to ours in Section 3.1, that ‘ $N = 10^5$ or larger is required for convergence of axial aspect ratios’ in numerical experiments of this type. In light of our analysis it is clear that this conclusion can be expected to depend strongly on the initial condition. Further it does not apply to the temporal evolution of the system. Indeed the latter should in fact be expected not to converge at all as N is extrapolated, and indeed it is not evident even that final axis ratios should be expected to converge unless the instability leading to breaking of symmetry occurs well after virialization. In the case analysed by Boily & Athanassoula (2006) this appears not to be the case, and in general for very cold initial conditions to reach such an asymptotic regime in a numerical study would appear to be a considerable challenge.

We emphasize again that the first type of N dependence is indicative of collisional effects, and therefore of effects which are absent in the collisionless limit which it is the goal to simulate. The second type of N dependence, on the other hand, is due to an instability which exists in the collisionless limit. Thus the N dependence observed in the convergence study we have performed does not mean that the N -body system does not approximate well the behaviour of a collisionless self-gravitating system. It just means that it does not follow the collisionless evolution of the exactly spherically symmetric initial condition to which the $N \rightarrow \infty$ limit considered converges. Instead when the instability develops, the N -body system is following evolution from an initial condition with a finite perturbation away from the exact spherical symmetry of the model initial condition. To test numerically whether this evolution is indeed collisionless one would need to perform a different large N

extrapolation of an N -body initial condition at some given $N = N_0$, in which N is varied keeping the fluctuations away from spherical symmetry at N_0 fixed, i.e. one would need to resample at larger and larger N the density field of the $N = N_0$ simulation. The suite of N -body simulations should then converge well at any finite time. The difficulty with such a convergence study is that such a resampling always introduces new fluctuations at smaller scales. One does not know a priori whether these fluctuations may play some significant role in the dynamics. We plan to study this issue further in future work.

Our study thus illustrates that, in performing a convergence study of an N -body self-gravitating system to test whether it can be considered to represent that of a collisionless system, there may be N dependences which may be very much slower than those of two-body effects in particular, and consequently much more difficult to identify in a numerical study. Indeed a generic instability sourced by fluctuations, with amplitude of order $\frac{1}{\sqrt{N}}$ if sampling is Poissonian, will lead to a dependence of the time it develops at, which will grow in proportion to $\log N$ for an exponential instability (assuming that numerical integration is sufficiently accurate that numerical errors do not seed the instability). In the simple case we have chosen to study we have been able to find such an N dependence because it is associated with a known instability, the role of which is easy to detect as it leads to a change in the symmetry of the structure. In the generic case where one does not know a priori that there are instabilities – and does not have evident tools for recognizing that they may be present and playing a central role in the dynamics – one could thus easily miss completely in a numerical convergence study that the results are in fact N dependent.

Although we have not analysed the specific case of cosmological simulations, we believe our results are very relevant to them. In this respect the important point to note is that initial fluctuations of cosmological simulations, although known theoretically at all scales, are necessarily sampled in N -body simulations only at scales above the initial grid spacing (see e.g. Bertschinger 1998). When an initially overdense region undergoes non-linear evolution the collapsing region is qualitatively similar to that of the finite system we have studied. The resulting collapsing structures typically contain a very modest number of particles. Indeed for typical cold dark matter initial conditions, such structure formation is hierarchical, proceeding through the collapse of successively larger structures starting from ones containing only a handful of particles. The fluctuations associated with the finite number of particles sampling any structure, which have no direct relation to those of the continuum model’s initial conditions, can then potentially play a crucial part in the non-linear evolution of the structure. Indeed, in respect of the particular example we have studied, we note that several works in the literature (Huss, Jain & Steinmetz 1999; MacMillan, Widrow & Henriksen 2006) find that the radial orbit instability apparently plays a crucial role in the evolution of cosmological haloes, and even claim that it is this instability which explains the apparent ‘universality’ of the profiles of cosmological haloes. While existing convergence studies (see e.g. Power et al. 2003) of such collapses appear to show that these profiles are in fact N independent, we note that they involve the comparison of the ‘final’ state of the haloes rather than the detailed comparison of their temporal evolution. As we have seen here it is the latter which shows up the subtle N dependences which would otherwise have escaped us. If radial orbit instability indeed plays a central role in the evolution of simulated cosmological haloes, it is important to verify that the amplitude of the fluctuations driving the instability are not determined by the finite number of particles used to sample the initial

2354 *D. Benhaïem et al.*

conditions. More generally, in the strongly non-linear regime we should be very cautious in concluding that results truly represent the relevant continuum limit on the basis of convergence studies covering a very modest range of particle number. These issues could be addressed further in a controlled manner by using initial conditions more closely representative of those of collapsing regions in N -body cosmological simulations, and, for example, by studying the effect of additional external forces mimicking the tidal forces inevitably present in such a setting. Finally we note that our results provide also a strong motivation for the use of different methods to study collisionless systems, and in particular direct integration of the collisionless Boltzmann equation as attempted by some recent studies (Yoshikawa et al. 2013; Colombi et al. 2015; Sousbie & Colombi 2016).

ACKNOWLEDGEMENTS

Numerical simulations have been run on the Cineca Fermi cluster (project VR-EXP HP10C4S98J), and on the HPC resources of The Institute for Scientific Computing and Simulation financed by Region Ile de France and the project Equip@Meso (reference ANR-10-EQPX-29-01) overseen by the French National Research Agency (ANR) as part of the Investissements d'Avenir program. TW is supported by The Thailand Research Fund (TRF) under contract number TRG5880036.

REFERENCES

- Aguilar L., Merritt D., 1990, *ApJ*, 354, 73
 Antonov V. A., 1973, in Omarov T. B., ed., *Dynamics of Galaxies and Star Clusters*. Nauka, Alma-Ata, USSR, p. 139
 Barnes E. I., Lanzel P. A., Williams L. L. R., 2009, *ApJ*, 704, 372
 Barré J., Métivier D., Yamaguchi Y. Y., 2016, *Phys. Rev. E*, 93, 042207
 Benhaïem D., Sylos Labini F., 2015, *MNRAS*, 448, 2634
 Bertschinger E., 1998, *ARA&A*, 36, 599
 Binney J., Tremaine S., 1994, *Galactic Dynamics*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ
 Boily C. M., Athanassoula E., 2006, *MNRAS*, 369, 608
 Colombi S., Sousbie T., Peirani S., Plum G., Suto Y., 2015, *MNRAS*, 450, 3724
 Diemand J., Moore B., Stadel J., Kazantzidis S., 2004, *MNRAS*, 348, 977
 El-Zant A. A., 2006, *MNRAS*, 370, 1247
 Gabrielli A., Joyce M., Marcos B., 2010, *Phys. Rev. Lett.*, 105, 210602
 Henon M., 1973, *A&A*, 24, 229
 Huss A., Jain B., Steinmetz M., 1999, *ApJ*, 517, 64
 Joyce M., Marcos B., 2007, *Phys. Rev. D*, 76, 103505
 MacMillan J. D., Widrow L. M., Henriksen R. N., 2006, *ApJ*, 653, 43
 Maréchal L., Perez J., 2011, *Transp. Theory Stat. Phys.*, 40, 425
 Merritt D., Aguilar L. A., 1985, *MNRAS*, 217, 787
 Polyachenko V. L., 1981, *Sov. Ast. Lett.*, 7, 79
 Power C., Navarro J. F., Jenkins A., Frenk C. S., White S. D. M., Springel V., Stadel J., Quinn T., 2003, *MNRAS*, 338, 14
 Roy F., Perez J., 2004, *MNRAS*, 348, 62
 Sellwood J. A., 2015, *MNRAS*, 453, 2919
 Sellwood J. A., Debattista V. P., 2009, *MNRAS*, 398, 1279
 Sousbie T., Colombi S., 2016, *J. Comput. Phys.*, 321, 644
 Springel V., 2005, *MNRAS*, 364, 1105
 Sylos Labini F., Benhaïem D., Joyce M., 2015, *MNRAS*, 449, 4458
 Theis C., Spurzem R., 1999, *A&A*, 341, 361
 Yoshikawa K., Yoshida N., Umemura M., 2013, *ApJ*, 762, 116

This paper has been typeset from a $\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.

On the formation of spiral structure from collapse of rotating disks

Tirawut Worrakitpoonpon^{1*}

¹*Faculty of Science and Technology, Rajamangala University of Technology Suvarnabhumi, Nonthaburi Campus, Nonthaburi 11000, Thailand*

17 December 2017

ABSTRACT

We present a systematic study of spiral structure formation resulting from gravitational collapse of N -body systems with rigid rotation without velocity dispersion. Initial configurations comprise of disks of various surface ellipticity and thickness, which could be classified into three different families: thin-circular, thin-elliptical and thick-elliptical disks. The rotational velocity is also varied in each of disk family. Our main scopes include the kinematics during the formation and evolution stages as well as the physical properties of the emerging spiral arms in different families. In this study the pitch angle deduced from logarithmic spiral function is employed as principal tool to evaluate the winding degree of simulated structures. We find that while the spiral structures could be produced commonly for all classes of disks, careful inspection of pitch angle variation along with visual appearance reveal that the arms in each family are indeed different and of dynamically distinguishable origins. We speculate that the cause of that diversity is strongly associated with the arrangement of initial configurations.

Key words: gravitation; galaxies: formation; galaxies: spiral; method: numerical.

1 INTRODUCTION

Recent surveys of galaxies revealed that more than half of them possessed spiral arms. Thus one may speculate that there might exist some common mechanisms that generate those fascinating structures. The fact that they co-exist with elliptical or disk component in some, but not all, galaxies may give rise to an assumption that they could be some form of unstable disturbance. In attempt to understand their origin, many theoretical milestones have been established in past decades. Early work by Lin & Shu (1964) proposed that the spiral structure was the result from quasi-static spiral wave that propagated throughout the disk, i.e. the density wave theory. This hypothesis has attracted much of attentions and it was implemented in many subsequent studies in various aspects such as Vandervoort (1970) or Mark (1974) and his papers in the serie.

Shortly after the Lin-Shu theory, the stability analysis of differentially rotational equilibria by Goldreich & Lynden-Bell (1965); Julian & Toomre (1966) suggested that the spiral appearance was indeed the outcome of the shearing of density perturbation, and also underlined the necessity of differential rotation to generate the spiral structure. Thus the latter scenario consequently ruled out the possibility for

spiral arm to be static wave, which suited better with observation. Lateron a refined work for spiral arms being a propagation of wave carrying the angular momentum in process through the shearing background has been proposed by Lynden-Bell & Kalnajs (1972). An alternate paradigm has conjectured that the spiral structure could emerge from close fly-by of two spinning galaxies by mean of gravitational tidal pulling (Toomre & Toomre 1972).

Despite the fruitful theoretical works, the observation of real galaxy evolution is quite limited because of their incredibly long time scale. Therefore the study of their evolution relies heavily on numerical simulations. The Goldreich—Lynden-Bell hypothesis has been examined by Miller et al. (1970) and Carlberg & Freedman (1985) using isolated disks composed of dissipative gas and star particles. The results revealed the spiral arms from accumulation of cold gas particles under disk gravity. More realistic like composite disk-halo system for testing that hypothesis has been also reported by Bottema (2003). Purely self-gravitating systems of stars were also chosen to study the formation of spiral arms and various initial systems were constructed. For examples, disks embedded in halo potential were employed and investigated by some researches (Fujii et al. 2011; Baba et al. 2013) as well as the isolated disks with or without initial non-axisymmetric perturbation (Sellwood & Kahn 1991; Sellwood 2012). Recently, the study led by Benhaïem et al.

* E-mail: worraki@gmail.com

หมายเหตุ: บทความอยู่ในระหว่างการพิจารณาจากวารสารซึ่งอาจมีการแก้ไขอีกจึงแสดงให้เห็นเพียงบางส่วน

2 Tirawut Worrakitpoonpon

(2017) demonstrated that spiral structures could be produced by simple systems like the rotating sphere in collapse.

Unlike isolated systems, the study of encountering objects following the tidal hypothesis allows us to explore wider adjustable parameter space, in addition from individual intrinsic properties of each object, such as orbit parameters or even the object type. This leads to more accessible shapes of spiral structures as reported in past literatures (using various simulation method), e.g. Elmegreen et al. (1991); Dobbs et al. (2010); Semczuk et al. (2017), where some of which were visually comparable to real galaxies. Not only the formation of spiral arms, the collision of galaxies have also been employed to resolve the origin of various irregular shapes. Informative summary on simulation results is given by Barnes & Hernquist (1992).

In this work we study the formation of spiral pattern from collapse of out-of-equilibrium disk initially in rigid rotation. Principal questions are addressed on the kinematics that generates the spiral patterns and how their forms depend on initial parameters. The article is organized as follow. First in section 2 we discuss on the equation of motion of system considered. Then in section 3 we introduce the classes of initial condition, simulation parameters and controls, as well as the necessary physical parameter of spiral arm. In the following section we present numerical results and some remarks on them. Finally in section 5 we provide the conclusion and discussion.

2 EQUATIONS OF MOTION FOR COLLAPSING DISK IN ROTATION

Consider a collapsing disk in rotation with constant initial collective angular velocity ω_0 and surface density Σ_0 ; we place ourself in rotating frame in coherence with ω_0 . Then the equation of motion for a test particle starting at radius r_0 in rotating polar coordinate reads

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \omega_0^2 r + 2\omega_0 r \frac{d\theta}{dt} - \nabla_r \phi(r). \quad (1)$$

where the first and second terms on the right-hand side stand for the fictive centifugal and radial Coriolis forces, respectively. The third term involves gravitational potential of uniform disk where semi-analytic expression has been analyzed by Ciftja & Hysi (2011) which could be written as

$$\phi(r) = \frac{2\phi_0}{\pi} E\left(\frac{r}{r_d}\right) \quad (2)$$

where ϕ_0 is the potential at center and r_d is the disk radial size. The mathematical form of $E(m)$ is given by

$$E(m) = \int_0^{\pi/2} d\theta \sqrt{1 - m \sin^2 \theta} \quad (3)$$

for $m \leq 1$. We could conveniently re-scale the radius in (1) with dimensionless one $R \equiv r/r_0$ as

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - R \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \omega_0^2 R + 2\omega_0 R \frac{d\theta}{dt} - \nabla_R \phi(R; r_0) \quad (4)$$

where the factor with r_0 is merged into ϕ . Similarly the tangential equation of motion in term of R reads

$$R \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dR}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -2\omega_0 \frac{dR}{dt} \quad (5)$$

where the right-hand side corresponds to the tangential Coriolis force.

With ω_0 introduced to the system the evolutions of R and θ do not depend only on time t but r_0 is also involved in determining the evolutionary track of each particle. In other words, the memory of initial radial position for each particle is retained along the dynamics. These are the key features that we capture and will inspect how necessary they could be to produce the spiral structure in N -body simulations. Note that this fact is also partly true even when $\omega_0 = 0$ for R to depend on both t and r_0 but for this case θ does not vary from the initial value. The fully scale-free collapse could be acquired from cold sphere of uniform density of which the relevant N -body simulations have been analyzed by Joyce et al. (2009). Those results suggested that the scale-free behavior is retained upto the finite- N fluctuation.

3 PREPARATIONS OF SIMULATIONS AND PARAMETERS

3.1 Initial condition and choice of unit

The initial condition is the disk of finite thickness z_0 and constant density ρ_0 . The surface of disk is characterized by the ellipticity $e_0 = 1 - \frac{R_b}{R_a}$ where R_a and R_b are the semi-major and -minor axis lengths, respectively. The physical scale is chosen so that R_b is fixed to 1. All simulations are with $N = 128,000$ and particles are thrown randomly in a confining shape at a given dimension. The initial motion of particles is that they are purely rotational with constant angular speed ω_0 , regardless of position, so that it satisfies any given virial ratio b_0 . The rotational direction is such that its angular momentum vector is aligned positively in z -direction. Although the equations of motions analyzed in Sec. 2 are also applicable provided that the velocity dispersion is non-vanishing, we may avoid the complication that may arise from velocity sampling in granular configuration by putting both radial and velocity dispersions to zero, focussing only on the role of initial position. Thus the initial condition may be regarded as the rigidly rotating disk with constant density. The cases we have simulated are summarized in Tab. 1 with their corresponding code names, which could roughly divided into three sub-groups: CR=Circular, TN=Thin and TK=Thick. Some segment of codename, e.g. TN, E01 or B03, may be employed to represent sub-groups of those initial conditions that we will address to.

As our disk dynamics relies on the gravitational collapse, the time scale representing the temporal evolution could be appropriately chosen to be

$$t_{dyn} = \sqrt{\frac{1}{G\rho_0}} \quad (6)$$

where G is the Newton's gravitational constant.

3.2 Simulation setup and control

The dynamics of particles is integrated using GADGET-2 (Springel 2005). The softening length for the code is fixed

หมายเหตุ: บทความอยู่ในระหว่างการพิจารณาจากวารสารซึ่งอาจมีการแก้ไขอีกจึงแสดงให้เห็นเพียงบางส่วน